

УДК 378.091.33 – 027.22:53

Соколов Є.П.¹, Лозовенко О.А.²

¹канд. ф.-м. наук., доц. ЗНТУ

²канд. пед. наук., доц. ЗНТУ

КОЛИ СТУДЕНТИ НЕ ТАК ВЖЕ І НЕПРАВИ: ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ З АПРІОРНИМ НУЛЕМ

Серед лабораторних робіт фізичного практикуму помітну групу складають роботи, що присвячені дослідженню лінійних залежностей з апіорним нулем. Прикладом може бути лабораторна робота про дослідження залежності механічної напруги від відносного видовження [2]. У загальному випадку лінійними залежностями з апіорним нулем ми будемо називати такі залежності, про які ще до проведення вимірювань *a priori* зрозуміло, що експериментальна пряма повинна проходити через нуль.

Результатом виконання лабораторної роботи завжди є довірчий інтервал. Зокрема, для лінійної залежності з апіорним нулем студенти мають побудувати довірчий інтервал для кутового коефіцієнта. А для цього вони повинні обчислити серединне значення кутового коефіцієнта $\bar{k}$ та величину його абсолютної похибки Δk .

Бувають випадки, коли студенти самі пропонують формули для проведення таких розрахунків:

$$\bar{k} = \frac{1}{n} \sum k_i \text{ та } \Delta k = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum (k_i - \bar{k})^2}, \text{ де } k_i = y_i / x_i.$$

Ми завжди раді таким пропозиціям — вони означають, що студенти змогли самостійно перенести правила, що відомі їм для випадку вимірювання *фізичної величини*, на принципово новий випадок — на випадок вимірювання параметрів *лінійної залежності*.

Однак є одне «але» — більшість авторитетних посібників з фізичного практикуму ігнорують ці «наївні» формули і пропонують замість них «наукові»:

$$\bar{k} = \sum x_i y_i / \sum x_i^2 \text{ та } \Delta k = \sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{\sum (y_i - \bar{k} x_i)^2}{\sum x_i^2}}.$$

Неспеціалісту абсолютно неможливо зрозуміти, чим «наукові» формули краще «наївних». Важко знайти аргументи *pro et contra* і в науковій

літературі. У вітчизняних посібниках, присвячених проведенню лабораторних робіт з фізики ані ті, ані інші формули зазвичай не наводяться (за рідкісним винятком [1]). Замість розрахунку пропонується визначати параметри довірчого інтервалу геометричним методом. І навіть далеко не кожен підручник з математичної статистики містить параграф, що присвячений цьому питанню.

Цікаво, що в англomовній навчальній літературі ситуація принципово інша. Тут, по-перше, існують широко відомі і призначені для студентів-першокурсників посібники з аналізу похибок у фізичних експериментах (див. [5]). По-друге, є кілька підручників з теорії ймовірностей і математичної статистики, які спеціально написані для інженерів (див. [3-4]). В них детально та з прикладами розглядаються питання знаходження довірчого інтервалу для кутового коефіцієнта експериментальної прямої.

У даній роботі проводиться порівняльний аналіз «наївної» та «наукової» формул. Аналіз ґрунтується на загальних принципах теорії обробки результатів вимірювань, які можуть бути сформульовані так: 1) математичне сподівання випадкової величини, що відповідає оцінці серединного значення, повинне дорівнювати істинному значенню вимірюваної величини; 2) її дисперсія має бути мінімальною.

Розгляд проводиться у межах традиційної ймовірнісної моделі процесу вимірювання, коли вважається, що результат вимірювання є сумою двох доданків – детермінованої величини та випадкової добавки з нульовим середнім значенням: $Y_i = kx_i + Z_i$. Новим у нашому дослідженні є те, що ми проведемо розгляд для двох ймовірнісних моделей. У першому випадку («*модель А*») передбачається, що величина дисперсії випадкової добавки не змінюється ($D_A = \sigma_0^2$). У другому випадку («*модель В*») передбачається, що постійною залишається відносна похибка вимірювання ($D_B = \varepsilon_0^2 x_i^2$).

Зазначимо, що в традиційній математичній статистиці завжди розглядається модель А (ця традиція бере початок від Гаусса). Однак у тому випадку, коли вимірювання проводяться в дуже широкому діапазоні (вимірювання Е. Габблом швидкості «розбігання» галактик), на наш погляд, кращою є модель В.

В таблиці 1 наводяться результати обчислення дисперсії для «наївної» і «наукової» формул для моделі А та моделі В.

Використовуючи нерівність Коші – Буняковського легко показати, що «наївна» формула дає кращу оцінку серединного значення у випадку моделі В (для рівномірного розподілу та великої кількості точок — приблизно в два рази). У випадку моделі А кращу оцінку дає «наукова» формула.

Отримані результати дозволяють також пояснити «нелюбов» експериментаторів до «наївної» формули. Уся справа в «нестійкості» цієї

формули: якщо для моделі В вона дає трохи кращий результат, ніж «наукова», то для моделі А вона зазнає цілковите фіаско. Її дисперсія не просто більша за дисперсію «наукової» оцінки, але й взагалі втрачає властивість зменшуватися зі збільшенням числа вимірювань, що є необхідним для будь-якої ефективної оцінки серединного значення. Тому експериментатори мають рацію — застосовувати «наївну» формулу можна лише тоді, коли ви повністю впевнені в тому, що в експерименті реалізується саме модель В.

Таблиця 1

оцінка	модель А	модель В
$\bar{k} = \frac{1}{n} \sum \frac{y_i}{x_i}$	$D_{nA} = \left(\frac{1}{n^2} \sum \frac{1}{x_i^2} \right) \sigma_0^2$	$D_{nB} = \frac{1}{n} \varepsilon_0^2$
$\bar{k} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$	$D_{sA} = \frac{1}{\sum x_i^2} \sigma_0^2$	$D_{sB} = \frac{\sum x_i^4}{(\sum x_i^2)^2} \varepsilon_0^2$

Підсумки: а) обидві формули для розрахунку кутового коефіцієнта експериментальної прямої мають право на існування; б) кожна формула має бути доповнена відповідною формулою для розрахунку похибки; в) у ситуації, коли ми не впевнені в тому, яка саме модель випадкових похибок реалізується в експерименті, розумніше вибирати для обробки результатів стандартну («наукову»), а не «наївну» формулу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Єщенко О.А., Прокопєць В.М., Слободянюк О.В., Кондратенко С.В., Кудря В.Ю., Башмаков Н.В., Яблочкова К.С. Механіка. Лабораторний практикум: Навчальний посібник для студентів природничих спеціальностей університетів / За ред. О.А. Єщенка, О.В. Слободянюка. – К.: Четверта хвиля, 2015. – 268 с.
2. Методичні вказівки до лабораторних робіт з фізики. Механіка. Молекулярна фізика. Частина 1. Для студентів інженерно-технічних спеціальностей денної форми навчання / Укладачі: Лоскутов С.В., Єршов А.В., Серпецький Б.О., Правда М.І., Манько В.К., Лушчін С.П., Курбацький В.П., Работкіна О.В., Денисова О.І. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2009. – 90 с.
3. Probability and Statistics for Engineers and Scientists / R.E. Walpole, R.H. Myers, Sh.L. Myers (6th Edition). – Prentice Hall, 1998. – 739 pp.
4. Soong T.T. Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers. – John Wiley and Sons, 2004. – 391 pp.

5. Taylor J. R. An Introduction to Error Analysis (Second Edition). – Sausalito, California: University Science Books, 1997. – 327 pp.