

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять і самостійної роботи
з дисципліни
“МОДЕЛЮВАННЯ В ЕЛЕКТРОНІЦІ”
для студентів спеціальності 6.050801
“Мікро- та наноелектроніка”
денної і заочної форм навчання

2014

Методичні вказівки до практичних занять і самостійної роботи з дисципліни “Моделювання в електроніці” для студентів спеціальності 6.050801 “Мікро- та наноелектроніка” денної і заочної форм навчання /Укл.: О.В.Василенко, А.В.Коротун. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2014. – 66 с.

Укладачі: О.В.Василенко, канд. техн. наук
А.В.Коротун, канд. фіз.-мат. наук

Відповідальний за випуск: Г.В.Сніжной, канд. фіз.-мат. наук

Затверджено
на засіданні кафедри
“Мікро- та наноелектроніка”
Протокол №3
від 19 лютого 2014 р.

ЗМІСТ

Вступ.....	5
1 Практичне заняття № 1 Основні закони та класифікація кіл.....	6
1.1 Класифікація та основні рівняння.....	6
1.2 Контрольні запитання.....	11
1.3 Індивідуальні завдання.....	11
2 Практичне заняття № 2 Графічні методи аналізу.....	12
2.1 Графічні види аналізу на постійному струмі.....	12
2.1.1 Апроксимація нелінійних характеристик.....	14
2.1.2 Отримання еквівалентної ВАХ.....	15
2.2 Графоаналітичні методи аналізу на змінному струмі.....	16
2.3 Лінеаризація кіл.....	17
2.4 Контрольні запитання.....	18
2.5 Індивідуальні завдання.....	18
3 Практичне заняття № 3 Аналітичні методи аналізу.....	19
3.1 Перетворення функцій часу для аналізу схем.....	19
3.2 Методи аналізу перехідних процесів.....	20
3.2.1 Класичний метод аналізу перехідних процесів.....	21
3.2.2 Операторний метод.....	24
3.3 Числові методи аналізу перехідних процесів.....	26
3.4 Контрольні запитання.....	26
3.5 Індивідуальні завдання.....	26
4 Практичне заняття № 4 Топологічні елементи та матриці.....	27
4.1 Топологічні елементи.....	27
4.2 Матрично-векторні параметри схеми.....	28
4.3 Топологічні матриці для аналізу електронних кіл.....	28
4.4 Принцип дуальності.....	31
4.5 Контрольні запитання.....	32
4.6 Індивідуальні завдання.....	32
5 Практичне заняття №5 Методи формування математичної моделі схеми.....	33
5.1 Методи однорідного координатного базису.....	33
5.1.1 Метод вузлових потенціалів.....	33

5.1.2 Метод контурних струмів	34
5.2 Методи неоднорідного координатного базису	35
5.2.1 Метод змінних стану	35
5.2.2 МВП з розширеним координатним базисом	40
5.3 Контрольні запитання	40
5.4 Індивідуальні завдання	40
6 Практичне заняття № 6 Аналіз функцій схем	41
6.1 Матрично–векторні параметри схеми	41
6.2 Функції схеми та способи їхнього подання	42
6.2.1 Дослідження функцій схем у частотному діапазоні	43
6.2.2 Дослідження функцій схеми у часовій області	46
6.2.3 Зв'язок між частотними та часовими характеристиками	46
6.3 Стійкість схем	47
6.4 Дослідження функцій схем у програмах аналізу	48
6.5 Контрольні запитання	49
6.6 Індивідуальні завдання	49
7 Практичне заняття № 7 Числові методи для аналізу процесів в електронних схемах	50
7.1 Дискретні моделі	50
7.2 Розрахунок статичного режиму ключа методом Ньютона	52
7.3 Розрахунок перехідного процесу в ключі методом Ейлера	55
7.4 Алгоритм симуляції в EСAD	56
7.5 Контрольні запитання	58
7.6 Індивідуальні завдання	58
8 Практичне заняття № 8 Синтез та параметрична оптимізація	59
8.1 Показники якості електронних систем	59
8.2 Параметрична оптимізація в Micro–Cap	60
8.3 Синтез аналогових фільтрів	62
8.4 Контрольні запитання	63
8.5 Індивідуальні завдання	63
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	64
Додаток А – Варіанти до індивідуального домашнього завдання	65

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Моделювання в електроніці» продовжує фахову підготовку студента і базується на знаннях, отриманих при вивченні дисциплін «Твердотільна електроніка», «Теорія електронних кіл» тощо. Основна мета дисципліни – опанування студентом основними принципами моделювання приладів та пристроїв електроніки на різних рівнях абстракції. Основними завданнями дисципліни є опанування студентом основних методів, алгоритмів та засобів для ефективного математичного моделювання електронних схем.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати:

- структуру, програмне та математичне забезпечення систем ECAD;
- основні моделі та макромоделі приладів і пристроїв;
- способи отримання математичних моделей схем;
- розв'язання рівнянь математичних моделей схем;
- види і методи аналізу електронних схем;
- основні поняття та принципи складання нових моделей.

вміти:

- використовувати програмне забезпечення для моделювання;
- розраховувати параметри моделей електроніки;
- розраховувати та аналізувати характеристики пристроїв;
- визначати напрямки та здійснювати параметричну оптимізацію.

Дані методичні вказівки призначені для практичних занять, в ході яких необхідно освоїти підходи у неавтоматизованому та напівавтоматизованому аналізі електронних кіл (наприклад, матричними методами). Методом аналізу при аналітичному підході традиційно називають етап побудови математичної моделі. У вказівках надані основні алгоритми та формули методів аналізу, визначена область їх застосовності, недоліки та переваги. Окремо розглянуто математичне забезпечення симуляції в програмах автоматизованого моделювання, зокрема, етап оптимізації схем.

Наприкінці матеріалу по кожному практичному заняттю надано контрольні питання та завдання для самостійної роботи. МВ містить також завдання для ІДЗ (індивідуальних домашніх завдань).

1 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1

«ОСНОВНІ ЗАКОНИ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ КІЛ»

1.1 Класифікація та основні рівняння

Аналіз електронних схем (ЕС) моделюванням є ключовою проблемою в ЕСAD. Витоки автоматизованих методів аналізу – в класичній теорії кіл, [1] це компонентні та топологічні закони (Ома, Кірхгофа), теореми комутації для завдання початкових умов та принцип вибору незалежних змінних для мінімізації математичної моделі схеми (ММС), однак, в ЕСAD більш широкий клас незалежних змінних: наприклад, напруги перетинів, змінні стану.

Спочатку методи аналізу призначалися для ручного розрахунку схем невеликої розмірності. Розвивалися прямі методи: графоаналітичні, розрахунок параметрів схем за статичними та динамічними характеристиками схем, за емпіричними формулами, або за методом керованого заряду. Із розвитком матричних та матрично-топологічних методів набули поширення лінійні методи аналізу: орієнтованих графів, чотириполюсника, еквівалентних схем, метод вузлових потенціалів, контурних струмів, змінних стану. При переході до поняття багатополюсника, методи аналізу стали узагальненими.

ЕС складаються з пасивних та активних елементів, інтегральних мікросхем. У відповідності до основного методу теорії кіл, реальні елементи представляються зосередженими моделями, які складаються з наступних ідеальних двополюсників: опорів, ємностей, індуктивностей, джерел напруги та струму.

Ідеалізовані двополюсники відбивають тільки одну суттєву особливість електромагнітних процесів в елементі-прототипі. Однак, в кожному реальному елементі мають місце паразитні процеси, внаслідок чого їхні схеми заміщення ускладнюються. Чим вище вимагається точність розрахунку, тим більшу кількість факторів необхідно врахувати, тим вища розмірність моделі, однак це ускладнює розрахунок (симуляцію).

Із точки зору теорії кіл задача аналізу зводиться до приведення співвідношень, що описують електромагнітні процеси в

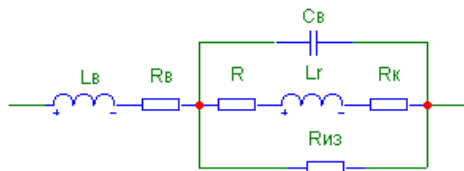


Рисунок 1.1 – Схема заміщення резистора

елементах в залежності між напругою та струмом на їх полюсах. Якщо струми та напруги на полюсах елемента пов'язані лінійними рівняннями, то коефіцієнти цих рівнянь повністю характеризують поведінку елементів і називаються їхніми параметрами.

Параметри можуть бути постійними величинами або функціями часу. В першому випадку – моделі схеми описуються лінійними диференціальними рівняннями (ЛДР) з постійними коефіцієнтами; в другому випадку – ЛДР із змінними коефіцієнтами. Якщо залежності між струмом і напругою нелінійні (схема нелінійна) та описується нелінійними диференціальними рівняннями (НДР), а параметри елементів є функціями напруги і струму. Коефіцієнти можуть бути також функціями часу [2].

Наступні три диференціальні рівняння (системи рівнянь) описують три типи схем:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{d y}{dt} + a_0 y = f(t), \quad (1.1)$$

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{d y}{dt} + a_0 y = f(t), \quad (1.2)$$

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(y) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{d y}{dt} + a_0 y = f(t). \quad (1.3)$$

Рівняння (1.1) – лінійне, із постійними коефіцієнтами $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – характеризує лінійне коло із постійними параметрами.

Рівняння (1.2) – лінійне, в якому хоча б один з коефіцієнтів ($a_{n-1}(t)$) є функцією часу (але не залежить від y), являє собою лінійне рівняння із змінними коефіцієнтами і описує лінійну систему із змінними параметрами (параметричну систему).

Рівняння (1.3), один або кілька коефіцієнтів якого, в даному випадку $a_{n-1}(y)$, є функціями y , – є нелінійним диференціальним рівнянням та характеризує нелінійне коло.

Важливою властивістю лінійних систем, що впливає з лінійності диференціального рівняння (1.1), яке описує поведінку (струм, напругу) системи, є справедливості принципу незалежності або накладення (**суперпозиції**) [2]. Суть цього принципу може бути сформульована так: *при впливі на лінійну систему декількох зовнішніх сил поведінку системи можна визначати шляхом накладення (суперпозиції)*

розв'язків, знайдених для кожної з сил окремо. Або: в лінійній системі сума ефектів від різних впливів співпадає з ефектом від їхньої суми. При цьому припускається, що система вільна від початкових запасів енергії. Принцип накладення лежить в основі спектрального і операторного методів аналізу перехідних процесів в лінійних колах, а також методу інтегралу суперпозиції (інтегралу Дюамеля [2]). На підставі принципу суперпозиції, будь-які складні сигнали можна при передачі їх через лінійні системи розкласти на прості, більш зручні для аналізу сигнали, наприклад синусоїдальні (так званий гармонійний аналіз, що є розділом вищої математики, застосовується він в спектральному аналізі електронних кіл).

Теорія диференційних рівнянь із змінними коефіцієнтами (рівняння 1.2) складніша, ніж рівнянь з постійними коефіцієнтами. Навіть при гармонійній правій частині рішення рівнянь порядку вище першого може бути знайдено лише в деяких приватних випадках.

Для нелінійних елементів й кіл (рівняння 1.3) принцип суперпозиції не можна застосовувати. Ця властивість нелінійних систем пов'язана з нелінійністю статичних характеристик (вольт-амперних, вебер-амперних та вольт-фарадних) нелінійних елементів. Опір й провідність нелінійного активного опору, як індуктивність нелінійної індуктивності та ємність нелінійної ємності, є нелінійними функціями миттєвого значення струму (напруги) на цих елементах. Отже, при аналізі впливу на нелінійне коло складного сигналу його не можна розкладати на прості складові, необхідно шукати відклик системи на результуючу величину сигналу.

Реальні схеми є нелінійними системами із змінними коефіцієнтами, але для спрощення аналізу приймаються різні припущення, які дозволяють умовно виділити три види схем:

- лінійні схеми з постійними коефіцієнтами (рівняння 1.1);
- параметричні схеми, що описуються ЛДР з змінними коефіцієнтами (рівняння 1.2);
- нелінійні схеми (рівняння 1.3).

ММС складаються на основі компонентних рівнянь, які пов'язуються в систему рівняннями топологічними. Теореми комутації дозволяють визначити початкові умови для розрахунку перехідних процесів.

Компонентні рівняння для реактивних компонентів (в формі для миттєвих значень та в операторній формі):

$$\begin{aligned}
 i_C &= C \frac{du_C}{dt} \longrightarrow \mathcal{I}_C = pC\mathcal{U}_C; \\
 u_C &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt \longrightarrow \mathcal{U}_C = \frac{\mathcal{I}_C}{pC}; \\
 u_L &= L \frac{di_L}{dt} \longrightarrow \mathcal{U}_L = pL\mathcal{I}_L; \\
 i_L &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t) dt \longrightarrow \mathcal{I}_L = \frac{\mathcal{U}_L}{pL}.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Для активного опора компонентне рівняння – це закон Ома:

$$i = \frac{1}{R} u \longrightarrow \mathcal{I}_R = \frac{1}{R} \mathcal{U}_R,$$

$$\text{де } p \leftrightarrow \frac{d}{dt}, \quad \frac{1}{p} \leftrightarrow \int.$$

Закони Кірхгофа (топологічні):

I Алгебраїчна сума струмів у вузлі (перетині) дорівнює нулю в будь-який момент часу (закон безперервності потоку).

II Алгебраїчна сума напруг в контурі дорівнює сумі е.р.с, діючих в контурі в будь-який момент часу (закон збереження енергії).

Закони (теореми) комутації:

$$\text{I } i_L(0_-) = i_L(0_+)$$

$$\text{II } u_C(0_-) = u_C(0_+)$$

Тобто, не можуть змінитися миттєво струм через індуктивність та напруга на ємності. Це пов'язано із інерційністю електромагнітних процесів в індуктивності та поляризації діелектрика в конденсаторі.

Приклад: Розглянемо етапи створення моделі в пасивному лінійному колі, що працює на змінному струмі, що задає вхідний генератор V1 (рисунок 1.2, а). Математична модель схеми, отримана за 2 законом Кірхгофа, показана нижче в послідовності дій по приведенню її до диференційного рівняння другого порядку:

$$u_C + u_L + u_R = e(t);$$

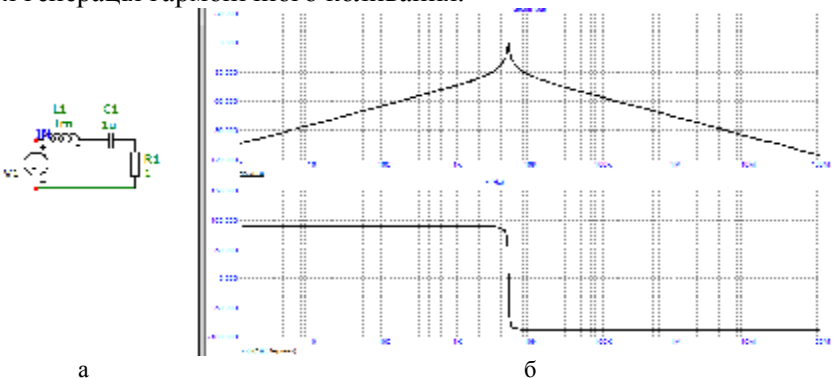
$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt + L \frac{di_L}{dt} + R \cdot i(t) = e(t);$$

$$L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + R \frac{di_R}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i(t) = f(t),$$

де $f(t)$ – перша похідна за часом функції вхідного генератора.

Це рівняння математичної моделі схеми (ММС) є неоднорідним, отже рішення його можна знайти лише при гармонійній правій частині та визначених початкових умовах. Якщо параметри цієї схеми не постійні (якщо ємність конденсатора, опір резистора, або індуктивність котушки є функціями часу, або фазових змінних), тобто, якщо ММС параметрична, або нелінійна, розв'язок не може бути знайдений аналітично (у вигляді формули). Частіше за все такі ММС аналізуються в програмах класу EСAD, де рівняння розв'язуються в симуляторах числовими методами інтегрування.

Моделювання частотних перехідних характеристик в EСAD – програмі МС9 наведено відповідно на рисунках 1.2, б і 1.3. При умові завдання частоти сигналу вхідного генератора відповідно до резонансної частоти контуру (у даному прикладі – 5 кГц), на виході починається генерація гармонічного коливання.



а – схема; б – частотні характеристики
Рисунок 1.2 – Дослідження пасивного кола в МС9

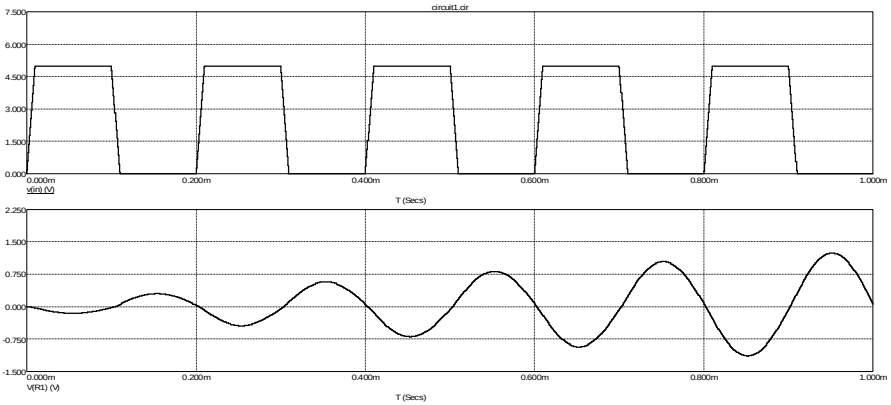


Рисунок 1.3 – Дослідження перехідних процесів пасивного кола в МС9

1.2 Контрольні запитання

- 1 На основі яких елементів формуються схеми заміщення електронних схем?
- 2 Поняття зосереджених моделей.
- 3 Основні рівняння в ММС електронних схем.
- 4 Поняття лінійності систем.
- 5 Види статичних характеристик.
- 6 Закони компонентні, топологічні (Кірхгофа), комутації.
- 7 Моделі пасивних кіл на постійному струмі.
- 8 Приклад складання моделі пасивного кола на змінному струмі.

1.3 Індивідуальні завдання

- 1 Пояснити 1 закон комутації.
- 2 Пояснити 2 закон комутації.
- 3 Приклади параметричних систем.
- 4 Умови використання принципу суперпозиції.
- 5 Умови переходу до комплексної форми компонентних рівнянь.

2 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2

«ГРАФІЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ»

2.1 Графічні види аналізу на постійному струмі

Розрахунок нелінійних ланцюгів постійного струму можна виконати графічно або аналітично. З аналітичних методів розрахунку лінійних схем, що використовуються для аналізу, до нелінійних ланцюгів застосовані наступні: метод двох вузлів; заміна декількох паралельно включених гілок однієї еквівалентною, метод еквівалентного генератора [2].

Хоча до нелінійних електричних й магнітних ланцюгів і можна застосовувати закони Кірхгофа, але такі методи розрахунку, як методи вузлових потенціалів і контурних струмів, а в загальнішому сенсі – методи, засновані на принципі суперпозиції і на постійності параметрів елементів ланцюгів, до нелінійних ланцюгів непридатні.

Опір і провідність нелінійного активного опору, як і індуктивність нелінійної індуктивності і ємність нелінійної ємності є нелінійними функціями миттєвого значення струму (напруги) на цих елементах, тобто є змінними величинами, а тому для розрахунку малоприматні. Замість них використовують вольт-амперні характеристики нелінійних активних опорів, вебер-амперні характеристики нелінійних індуктивностей і кулон-вольтні (вольт-фарадні) характеристики нелінійних ємностей.

Крім того, при аналізі дії на нелінійний ланцюг складного сигналу, його не можна розкласти на простіші сигнали; необхідно шукати відгук системи на результуючу величину вхідного сигналу. Непридатність до нелінійних систем принципу накладення (суперпозиції) робить непридатними спектральний та інші методи аналізу, засновані на розкладанні складного сигналу на складові, наприклад на гармонічні функції (перетворення Фур'є).

З лінійною частиною будь-якого складного розгалуженого ланцюга, доцільно здійснювати будь-які топологічні перетворення, якщо вони полегшують розрахунок усієї складної схеми, наприклад, замінювати паралельне з'єднання гілок із нелінійними елементами однією, що містить нелінійний еквівалентний елемент та джерело напруги, використовувати метод еквівалентного генератора.

Приклад: Визначити струм в гілці ab схеми рис. 2.2 по методу еквівалентного генератора при $R_1=R_0=27\ \Omega$; $R_2=108\ \Omega$; $R_3=81\ \Omega$; $R_4=54\ \Omega$; $E=70\ \text{В}$. ВАХ НО зображена на рис. 2.1.

Рішення. Розмикаємо гілку ab і визначаємо напругу холостого ходу, використовуючи другий закон Кірхгофа: $U_{abXX} = \phi_a - \phi_b = 20\ \text{В}$.

Для розрахунку вхідного опору $R_{вх}$ лінійної частини схеми відносно затисків ab необхідно перетворити трикутник опорів R_1, R_2, R_0 (рис. 2.2, б) в еквівалентну зірку (рис. 2.2, в) за формулами:

$$R_5 = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 18\ \Omega;$$

$$R_6 = 4,45\ \Omega; \quad R_7 = 18\ \Omega;$$

$$R_{вх} = R_5 + \frac{(R_6 + R_3)(R_7 + R_4)}{R_3 + R_4 + R_6 + R_7} = 57\ \Omega.$$

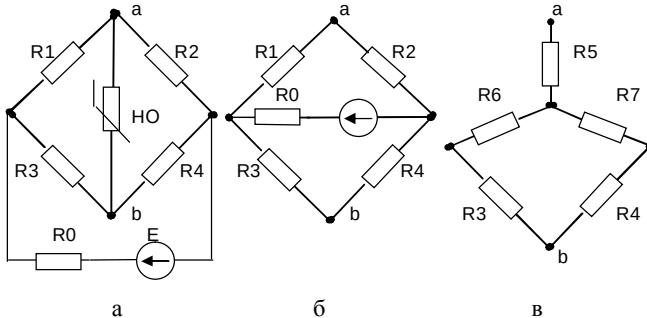


Рисунок 2.2 – Топологічні перетворення кола

Для визначення струму в гілці ab проводимо пряму, що проходить через точки $U=20\ \text{В}$, $I=0$ та $U=0$, $I = U_{abXX}/R_{вх} = 0,351\ \text{А}$ (кут γ нахилу цієї прямої до вертикалі з урахуванням масштабів по осях рівний $R_{вх}$). Точка перетину цієї прямої з ВАХ НО (точка n) визначає робочий режим схеми. Відповідь: струм $I=0,22\ \text{А}$.

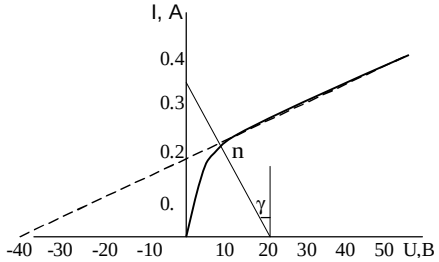


Рисунок 2.1 – Визначення робочої точки

2.1.1 Апроксимація нелінійних характеристик

Для аналізу і розрахунку нелінійних ланцюгів потрібно завдання вольт-амперних або інших статичних характеристик нелінійних елементів в аналітичній формі, але реальні характеристики зазвичай мають складний вигляд. Заміна характеристики функцією, що приблизно представляє її, називається **апроксимацією** характеристики. Вибір оптимальної апроксимації залежить від виду нелінійної характеристики, а також від режиму роботи нелінійного елемента.

При великих амплітудах сигналу часто виявляється зручним замінювати реальну характеристику ламаною, таке представлення називається кусково-лінійною апроксимацією. Слід особливо підкреслити, що заміна реальної нелінійної характеристики лінійними відрізками не означає глобальної лінеаризації ланцюга. Іноді для апроксимації застосовуються різні трансцендентні функції, наприклад гіперболічний тангенс, експоненціальні функції і деякі інші.

Приклад: Апроксимація ВАХ діода. Напівпровідникові діоди використовують як в дискретній, так і в інтегральній схемотехніці. В інтегральних схемах функції діодів зазвичай виконують транзистори в діодному включенні. Застосування дискретних діодів характеризується широким діапазоном перетворюваних сигналів як по потужності, так і по швидкодії, втрати потужності та інерційність сучасних діодів сумісні з аналогічними параметрами керованих приладів – транзисторів, тиристорів [3].

Для побудови статичної моделі діода, повну ВАХ діода представляють відрізками прямих так, щоб вони якнайкраще (з найбільшою точністю) апроксимували реальну характеристику в заданому режимі експлуатації (у робочому діапазоні струмів і напруги) [3]. Апроксимуючі відрізки прямих можна провести дотичними до реальної характеристики або січними; точність апроксимації вище при введенні січних прямих (рисунок 2.3).

Розділимо реальну ВАХ діода за допомогою прямих на області:

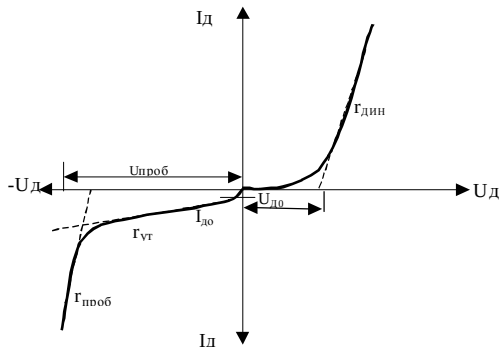


Рисунок 2.3 – Апроксимація ВАХ діоду

область провідності $U_d = U_{d0} + I_d r_{дин}$;

область відсічення $U_d = I_{д гут} r_{ут} + I_{д0 гут}$;

область пробою $U_d = U_{проб} - I_{д проб}$.

Кожний з виділених областей ВАХ можна поставити у відповідність статичні моделі діодів (рис. 2.4). Найбільша погрішність моделей доводиться на області стикування

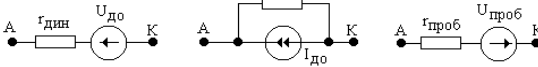


Рисунок 2.4 – Приватні статичні моделі діоду

прямих.

2.1.2 Отримання еквівалентної ВАХ

Послідовне з'єднання нелінійних опорів (НО). На рис.2.5,а зображена схема послідовного з'єднання НО із заданою ВАХ лінійного опору R і джерела е.р.с. E . Необхідно знайти струм в ланцюзі. ВАХ НО позначена на рис.2.5,б як $I=f(U_{nc})$, ВАХ лінійного опору - пряма лінія. ВАХ усього ланцюга, тобто залежність струму в ланцюзі від суми падінь напруги на НО і R , позначена через $i=f(U_{nc}+U_R)$. Розрахунок ґрунтується на законах Кірхгофа. Є два способи розрахунку [2]. Перший спосіб ілюструє рис.2.5,б, другий - рис.2.5,в.

При розрахунку ланцюга за першим способом будуємо результуючу ВАХ усієї пасивної частини схеми, виходячи з того, що при послідовному з'єднанні через НО і R проходить однаковий струм, тобто при одному значенні функції (струму), додаються аргументи (напруги), тобто відрізок mp додається до відрізка mq , сума – відрізок mq . Точка q належить результуючій ВАХ усієї схеми. Аналогічно будують й інші точки результуючої ВАХ. Визначення струму в ланцюзі при заданій е.р.с. E виконують графічно за результуючою ВАХ. З цією метою слід задану величину е.р.с. E відкласти по осі абсцис і через

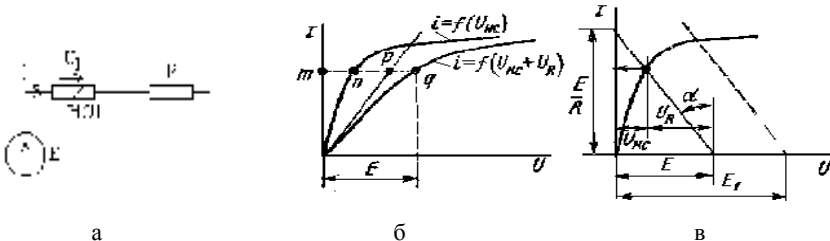


Рисунок 2.5 – Графічний розрахунок послідовному з'єднанні нелінійних елементів

отриману точку провести вертикаль до перетину із результуючою ВАХ в точці q . Ордината точки q дорівнює шуканому струму.

При розрахунку ланцюга за другим способом немає необхідності будувати результуючу ВАХ усієї пасивної частини схеми. Рівняння $I_R + U_{нс} = E$ є рівнянням прямої навантаження, що проходить через точки ($I = E/R$, $U = U_{нс} = 0$); ($I = 0$, $U = U_{нс} = E$). Тангенс кута її нахилу чисельно рівний R . Точка перетину прямої з ВАХ НО визначає режим роботи ланцюга. При зміні е.р.с. від E до E_1 , пряму $I = f(U_R)$ слід перемістити паралельно.

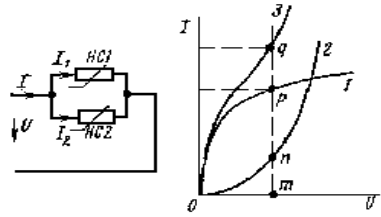


Рисунок 2.6 - Еквівалентна ВАХ

Схема паралельного з'єднання двох НО зображена на рисунку 2.6, а; її ВАХ – на рисунку 2.6, б. При побудові результуючої ВАХ виходять з того, що напруги на НО1 і НО2 рівні через їх паралельне з'єднання, а струм в нерозгалуженій частині схеми $I_1 + I_2 = I$. Крива 3 рисунку 2.6, б є ВАХ паралельного з'єднання. Відрізок mq дорівнює струму в нерозгалуженій частині ланцюга при напрузі Um . Аналогічно визначають інші точки результуючої ВАХ паралельного з'єднання.

2.2 Графоаналітичні методи аналізу на змінному струмі

Якщо нелінійний опір приєднати до генератора синусоїдальної напруги, то струм, що проходить через опір, матиме несинусоїдальну форму, отже нелінійний опір можна вважати генератором вищих гармонік струму. Для того, щоб переконатися в цьому, розглянемо рис.2.7. На ньому крива 1 – це ВАХ опору, крива 2 – синусоїдальна напруга на ньому, крива 3 – струм через опір.

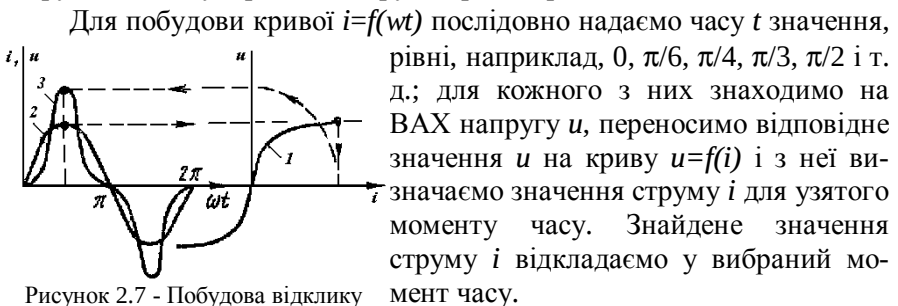


Рисунок 2.7 - Побудова відклику

Для побудови кривої $i = f(ωt)$ послідовно надаємо часу t значення, рівні, наприклад, $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ і т. д.; для кожного з них знаходимо на ВАХ напругу u , переносимо відповідне значення u на криву $u = f(i)$ і з неї визначаємо значення струму i для узятого моменту часу. Знайдене значення струму i відкладаємо у вибраний момент часу.

Ці операції показані на рис. 2.7 стрілками. Так по точках будують криву 3. Вона має пікоподібну форму і може бути розкладена на гармоніки.

Аналогічно, якщо через нелінійний опір пропустити синусоїдальний струм, то напруга на ньому матиме несинусоїдальну форму. Відповідні побудови наведені на рис. 2.8. Отже, нелінійний опір є генератором вищих гармонік напруги. Амплітуди першої і вищих гармонік струму залежать від амплітуд першої і вищих гармонік напруги на нелінійних опорах.

Якщо нелінійний опір входить в ланцюг, що містить також реактивні елементи (індуктивність або ємність), то визначення струму при напрузі, що змінюється в часі, є значно складнішим завданням. Ускладнення викликається тим, що струм і напруга в реактивному елементі (індуктивності або ємності) пов'язані між собою диференціальними співвідношеннями, тобто модель схеми буде представляти нелінійне диференціальне рівняння. Інтегрування цього рівняння може бути виконана графічно за допомогою методу ізоклін. Ізокліна є геометричним місцем точок фазової площини, в яких фазові траєкторії мають дотичні з цим (фіксованим) кутовим коефіцієнтом [2].

Гармонійному руху системи відповідає замкнута фазова траєкторія на фазовій площині (еліпс). У загальнішому випадку складного періодичного руху (не обов'язково гармонійного) фазова траєкторія може мати складну форму, але вона обов'язково є замкнутою. У разі автоколивальної системи, що має стійкий стаціонарний стан, на фазовій площині є замкнута крива, до якої із зростанням часу наближаються сусідні фазові траєкторії.

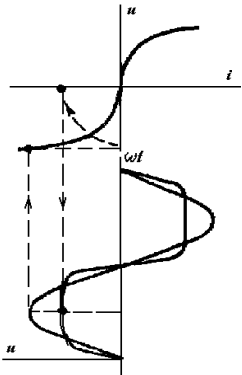


Рисунок 2.8 – Побудова відклику

2.3 Лінеаризація кіл

Головною особливістю нелінійного підсилення є залежність основних його параметрів від амплітуди коливання. Проте, при фіксованому значенні амплітуди синусоїдального сигналу схему можна умовно трактувати як лінійну, оскільки амплітуди струмів і напруги в цій схемі пов'язані між собою звичайними лінійними співвідношеннями. Можна, зокрема, скористатися методом комплексних амплітуд

[2]. Такий підхід до аналізу нелінійних систем має назву квазілінійного методу, і застосовний в тих випадках, коли незважаючи на нелінійність ланцюга, забезпечується синусоїдальна форма вихідних коливань, причому система розглядається в стаціонарному режимі. Нелінійність системи проявляється в тому, що при зміні амплітуди коливань змінюються і «середні» параметри, всередині одного періоду коливань вони зберігають постійні значення (квазілінійний метод).

Лінійні ланцюги, як правило, працюють у поєднанні з активними елементами: електронними лампами, напівпровідниковими приладами. Характеристики активних елементів в загальному випадку є нелінійними функціями напруги або струму. Тому і системи з активними елементами, є нелінійними системами. Проте при використанні відносно малої ділянки вольт-амперної характеристики активного елементу (при роботі в режимі «малого сигналу», тобто, в режимі підсилення), останній умовно можна розглядати як лінійний елемент.

Приведення схеми лінійного електронного підсилювача до еквівалентних лінійних схем дозволяє застосовувати до них усі положення теорії лінійних пасивних ланцюгів. У ланцюгах з активними елементами принцип взаємності (зміна напрямку проходження сигналу не змінює функцію схеми) не виконується, що пояснюється вентильними властивостями таких елементів, завдяки яким збудження підсилювача з боку виходу майже не робить впливу на вхід.

2.4 Контрольні питання

- 1 Методика графічних методів аналізу кіл на змінному струмі.
- 2 Апроксимація ВАХ діода.
- 3 Еквівалентні перетворення кіл при аналізі.
- 4 Методика отримання еквівалентної ВАХ.
- 5 Графічні види аналізу на постійному струмі.
- 6 Графічний аналіз на змінному струмі.
- 7 Лінеаризація на малому сигналі.

2.5 Індивідуальні завдання

- 1 Задача – метод двох вузлів.
- 2 Задача – метод еквівалентного генератора.
- 3 Задача – послідовне з'єднання нелінійних елементів.
- 4 Задача – паралельне з'єднання нелінійних елементів.
- 5 Задача – знаходження реакції на змінному струмі за ВАХ.

3 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3 «АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ»

3.1 Перетворення функцій часу для аналізу схем

Особливо важливе значення **перетворення функцій часу** полягає в тому, що математичні моделі схем можна отримати в формі алгебраїчних рівнянь (із комплексними коефіцієнтами), оскільки при нульових початкових умовах операції диференціювання **оригіналу** відповідає множення його **зображення** на p , а операції інтегрування – поділ зображення на p . Змінна p може розглядатися як деякий оператор, що має розмірність сек^{-1} і трактується як комплексна частота, тоді іммітанси двополюсника приймають загальний вид, незалежно від характеру перетворення. Вони приведені в таблиці 3.1.

Якщо в рівняннях пасивного двополюсника під величинами U і I розуміти зображення $U(p)$ і струму $I(p)$, то одержимо рівняння в операторній формі

$$U(p) = Z(p) * I(p); \quad I(p) = Y(p) * U(p).$$

Тут $Z(p)$ і $Y(p)$ – деякі функції оператора p , називані відповідно операторними опором і провідністю.

Ідеальні реактивні елементи можна представити еквівалентними операторними схемами. Початкові умови можна врахувати безпосередньо в операторній схемі, вводячи в неї відповідні джерела напруги і струму, що емулюють початкові умови за теоремами комутації. Пасивний двополюсник описується лінійним алгебраїчним рівнянням, що встановлює залежність між струмом і напругою в зазначеному вище змісті за допомогою операторного іммітанса. Це дозволяє виходити з єдиного рівняння, незалежно від характеру двохполюсного елемента і функцій часу, який описує струми і напруги [4]:

$$U = ZI, \quad I = YU,$$

або в загальному виді

$$Q = WX,$$

де Q і X – грають відповідно роль напруг і струмів; W – визначає характер величин Q і X (іммітанс).

Таблиця 3.1 – Параметри і рівняння пасивних двополюсників

Двополюсник	Параметри	Z	Y	Рівняння	
				для напруг	для струму
Опір	$R = \frac{1}{G}$	R	G	$U_R = RI_R$	$I_R = GU_R$
Ємність	$C = \frac{1}{S}$	$\frac{1}{pC}$	pC	$U_C = \frac{1}{pC} I_C$	$I_C = pCU_C$
Індуктивність	$L = \frac{1}{\Gamma}$	pL	$\frac{1}{pL}$	$U_L = pLI_L$	$I_L = \frac{U_L}{pL}$

Замість розкладання складного сигналу на гармонійні складові (спектральний метод, перетворення Фур'є) можна скористатися розбивкою сигналу на досить короткі імпульси, або вейвлети [5].

3.2 Методи аналізу перехідних процесів

Методи аналізу і розрахунку перехідних процесів в нелінійних ланцюгах можуть бути класифіковані:

а) по виду основних операцій, які необхідно виконувати для інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь, на графічні (графоаналітичні), аналітичні і числові;

б) за характером величини, для якої робиться розрахунок (розрахунок по миттєвих значеннях струмів і напруги, розрахунок по миттєвих значеннях огибаючих струмів і напруги).

Під графічними (графо-аналітичними) розуміють такі методи, в яких основними операціями при визначенні залежності від часу шуканих струмів і напруги являються графічні побудови, що нерідко супроводжуються і деякими допоміжними числовими підрахунками.

Графічні методи аналізу:

- метод, заснований на графічному підрахунку певного інтеграла;
- метод, заснований на заміні визначеного інтеграла наближеною сумою.

Графічні методи мають наступні переваги перед аналітичними:

а) нема необхідності виражати характеристики нелінійних елементів аналітично, що дозволяє позбавитися від погрешностей, пов'язаних з аналітичним представленням характеристик;

б) простота урахування гістерезису й інших складних нелінійних залежностей.

У свою чергу аналітичні методи також мають перед графічними переваги. З них основним є те, що вони дають можливість отримати рішення в загальному вигляді, а не для якогось одного конкретного поєднання параметрів, що дозволяє з'ясувати особливості процесу при зміні усіх параметрів.

Аналітичними називають такі методи, в яких основною операцією при визначенні залежностей шуканих струмів і напруги від часу є точне (наближене) аналітичне інтегрування диференціальних рівнянь ланцюга шляхом використання аналітичних виразів характеристик нелінійних опорів. Аналітичні методи застосовуються для аналізу працездатності проектованої схеми вручну. Числові методи використовуються для автоматизованого аналізу, зокрема, в ECAD [5-7].

Аналітичні методи:

- метод кусково-лінійної апроксимації;
- метод інтегрованої нелінійної апроксимації;
- класичний метод аналізу;
- операторний метод;
- інтеграла Дюамеля;
- метод амплітуд, які повільно міняються (Ван-дер-Поля).

3.2.1 Класичний метод аналізу перехідних процесів

Розглянемо на прикладі підключення джерела постійної напруги в послідовне RL-коло [2]. Схему показано на рисунку 3.1 при $u_0(t)=U_0$. В момент часу $t=0$ ключ замикається. До комутації струми і напруги у RL-колі дорівнювали нулю, тобто коло знаходилося у стані спокою. Тому початкові умови: $i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$. Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для кола після комутації (при $t > 0$):

$$u_0(t) = u_R(t) + u_L(t),$$

де $u_R(t)$, $u_L(t)$ – напруги на резисторі та котушці індуктивності.

Виразимо ці напруги через струм $i_L(t)$ в контурі:

$$u_R(t) = R i_L(t) \text{ та } U_L = L \frac{di(t)}{dt}.$$

Тоді отримаємо наступне рівняння:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + R i_L(t) = u_0(t) = U_0$$

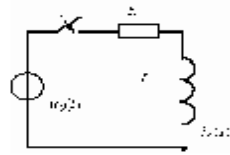


Рисунок 3.1 - Схема

Отримане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку, що відповідає колу з одним реактивним елементом. Диференціальне рівняння має постійні коефіцієнти і є неоднорідним (права частина відрізняється від нуля). Розв'язок диференціального рівняння будемо знаходити у вигляді суми

$$i_L(t) = i_{L\phi}(t) + i_{L\text{всм}}(t),$$

де $i_{L\phi}(t)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння з правою частиною, рівною нулю;

$i_{L\text{всм}}(t) = i_{\text{лчм}}(t)$ – розв'язок, який визначається як значення шуканої змінної, що встановилось після комутації.

а) Для визначення вільної складової $i_{L\phi}(t)$ запишемо характеристичне рівняння, яке відповідає отриманому диференціальному. Воно матиме вигляд: $pL + R = 0$, а його корінь

$$p_1 = -R/L.$$

Відповідно до цього вільна складова

$$i_{L\phi}(t) = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-R/L t} = A_1 e^{-t/\tau},$$

де A_1 – постійна інтегрування;

$\tau = L/R$ – має розмірність часу і називається постійною часу RL -кола. Постійні A_1 і τ будуть залежати від структури кола та його параметрів.

На рис. 3.2 наведено приблизний графік власної складової. Власна складова існує під час перехідного процесу і визначає його. Тому за допомогою постійної часу можна оцінити тривалість перехідного процесу. Вважають, що перехідний процес практично закінчується через від-

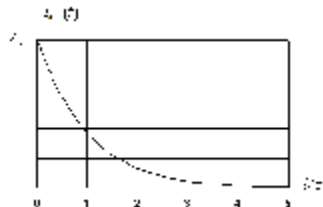


Рисунок 3.2 - Графік власної складової

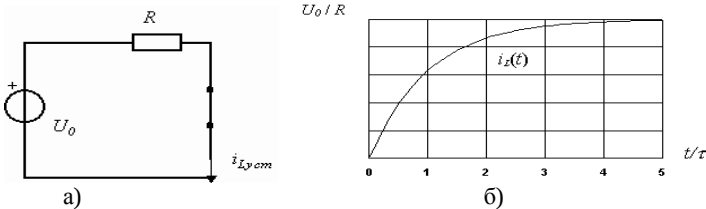
різок часу, що дорівнює $(4-5)\tau$ (вільна складова за цей час зменшується до 0,02 від свого початкового значення згідно рис. 3.2). Теоретично перехідний процес відбувається безкінечно довго, оскільки вільна складова асимптотично наближається до нуля.

б) Вимушену складову $i_{L\text{вм}}(t)$ будемо визначати як усталене значення струму у колі. У сталому режимі в колі встановиться режим постійного струму, при якому напруга на котушці індуктивності тотожна, тобто для будь-якого моменту часу та дорівнює нулю (відповідно до співвідношення

$$U_L = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad \text{при} \quad i_L(t) = \text{const.}$$

Тому у сталому режимі постійного струму котушку можна представити коротким замиканням, а всю схему у вигляді рис. 3.3, а.

З представлені схеми визначаємо $i_{L\text{вм}}(t) = i_{L\text{вм}}(t) = U_0 / R$.



а – модель схеми для сталого режиму; б – перехідний процес
Рисунок 3.3 – Моделювання перехідного процесу

Повний перехідний струм дорівнює

$$i_L(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0}{R}, \quad (3.1)$$

в) Постійну складову інтегрування A_1 визначаємо з початкових умов $i_L(0_+) = 0$.

Після комутації струм у колі описується виразом (3.1). Приймаючи в ньому $t = 0$ і прирівнюючи отриманий вираз відомому початковому значенню, отримаємо

$$i_L(0_+) = A_1 + U_0 / R = 0, \text{ звідси } A_1 = -U_0 / R.$$

Остаточний розв'язок приймає вигляд:

$$i_L(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-\frac{tR}{L}} = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (3.2)$$

Графік залежності струму від напруги представлено на рис. 3.3, б. До комутації струм у котушці рівний нулю і з цього ж значення починає змінюватись після комутації. При $t = \tau$ ток наростає до 0.63 від сталого значення U_0 / R , а при $t = 4\tau$ – до $0.98U_0 / R$. По збігу часу $t = (4-5)\tau$ перехідний процес практично завершується і у колі встановлюється постійний струм $i_{L_{\text{вст}}}(t) = U_0 / R$.

Напруги на резисторі та котушці індуктивності можна визначити за знайденим струмом $i_L(t)$ із використанням відомих співвідношень:

$$u_R(t) = i_L(t) \cdot R = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Графіки цих функцій наведено на рис. 3.4.

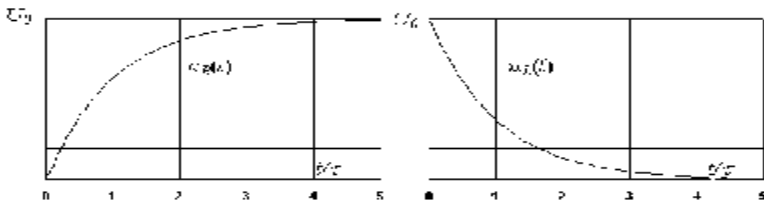


Рисунок 3.4 – Графіки функцій

Напруга на резисторі $u_R(t)$ повторює форму струму, а напруга на індуктивності $u_L(t)$ пропорційна похідній від струму в перший момент після комутації, напруга на котушці рівна U_0 , тобто змінюється стрибком, оскільки до комутації вона дорівнювала нулю. Це не суперечить законам комутації, які виконуються тільки для струмів на індуктивностях і напруг на ємностях.

3.2.2 Операторний метод

При переході від гармонійних струмів і напруги (функцій часу) до комплексних амплітуд їх символічних зображень, інтегродиференційні рівняння перетворюються на алгебраїчні з комплексними коефіцієнтами [2, 4].

Приклад. У схемі на рисунку 3.4

$u(t) = 100e^{-at}$ В, де $a = 0,5 \text{ с}^{-1}$; $R = 2 \text{ Ом}$; $L = 4 \text{ Гн}$.

Знайти $i = f(t)$ та $U_L = f(t)$, а також значення i та U_L при $t = 1 \text{ с}$.

Відповідно співвідношенню $\frac{1}{p-a} \equiv e^{at}$,

функції e^{-at} відповідає зображення $\frac{1}{p+a}$.

Отже, $\mathcal{U}(p) = \frac{100}{p+a}$; $Z(p) = R + pL$;

$$\mathcal{I}(p) = \frac{\mathcal{U}(p)}{Z(p)} = \frac{100}{(p+a)(pL+R)} = \frac{100}{L} \cdot \frac{1}{(p+a)(p+b)}$$

$$\frac{100}{L} = 25 \left[\frac{\text{А}}{\text{с}} \right]; \quad b = \frac{R}{L} = 0.5 = a, \quad \mathcal{I}(p) = \frac{100}{L} \cdot \frac{1}{(p+a)^2}.$$

За операторним співвідношенням $\frac{1}{(p+a)^2} \equiv te^{-at}$

тому $i(t) = 25 te^{-at}$.

Напруга на індуктивності

$$U_L = L \frac{di}{dt} = 100 e^{-0.5t} (1 - 0.5t).$$

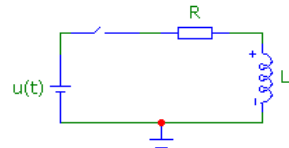


Рисунок 3.5 – Модель схеми

Відповідь: при $t = 1 \text{ с}$ $i(t) = 25 \cdot 1 \cdot e^{-0.5} = 15.15 [\text{А}]$,

$$U_L = 100 e^{-0.5} (1 - 0.5) = 30.3 [\text{В}].$$

3.3 Числові методи аналізу перехідних процесів

Числові методи базуються на числових методах розв'язання ДР та систем ДР на етапі симуляції в системах автоматизованого проектування, зокрема явним методом Ейлера першого порядку, якщо буде розглянутий нижче в п.7.3 На етапі моделінгу модель системи (схеми), може бути отримана, наприклад, методом дискретних моделей, вузлових потенціалів, змінних стану і т.п.

Числові методи отримують розв'язок у вигляді таблиць, тобто значень функції в конкретні моменти часу, а не формул – загального розв'язку, як аналітичні методи. Використання для ручного розрахунку методів інтегрування першого порядку збільшує загальну похибку моделювання, оскільки в методах першого порядку найбільша локальна методична похибка, яка, до того ж, залежить від розміру кроку та має здатність накопичуватися від кроку до кроку.

Числові методи розглянуті більш детально в матеріалі заняття №7 та в [6–9].

3.4 Контрольні запитання

1. Класифікація методів аналізу.
2. Поняття іммітансу.
3. Умови використання перетворень функцій часу.
4. Методика класичного методу аналізу.
5. Інтеграл Дюамеля.
6. Перетворення функцій часу.
7. Операторний метод.
8. Класичний метод аналізу перехідних процесів в нелінійних колах.

3.5 Індивідуальні завдання

1. Задача – операторний метод.
2. Задача – спектральний метод.
3. Задача – класичний метод аналізу перехідних процесів в нелінійних колах.
4. Задача – графічний підрахунок визначеного інтеграла.
5. Методика графоаналітичних методів.

4 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4

«ТОПОЛОГІЧНІ ЕЛЕМЕНТИ ТА МАТРИЦІ»

4.1 Топологічні елементи

Електрична схема – умовне графічне зображення (УГЗ) електричного ланцюга. Розрізняють декілька типів електричних схем: структурні, функціональні, принципів, заміщення і т. д. При моделюванні будуємо еквівалентну схему електричного ланцюга. Математичний опис процесів в електричних колах базуються на рівняннях трьох типів: компонентних (складених подібно до закону Ома), топологічних (складених на основі законів Кірхгофа) та законах комутації.

Для топологічного опису схеми використовують поняття направленого **графа** [4], що будується за наступними правилами: будь-який двополюсник заміщується на лінійний сегмент, що називається **гілкою**, та має стрілку в тому напрямку, в якому приймається позитивний напрямок струму через цю гілку. Характер сполучення між елементами визначає топологічні (структурні) властивості схеми, для опису яких використовують поняття гілки, вузла й контуру. На відміну від електричних елементів, гілки, вузли та контури називаються **топологічними елементами**.

Сукупність гілок, пов'язаних з вузлом, яка не утворює контурів, називається **деревом** графа. Гілки, що не ввійшли в дерево графа, називають головними гілками або **хордами**. Сукупність хорд може утворити контур, але не можна вказати жоден вузол, до якого підходять тільки хорди. **Контур** – це замкнений шлях для протікання струму. Для систем незалежних контурів або вузлів можна скласти системи лінійно незалежних рівнянь по законах Кірхгофа. **Перетин** – це замкнуті лінії, проведені так, щоб будь-яка з них перетинала тільки одну з гілок дерева, а інші гілки, що перетинаються відносилися до хорд. Алгебраїчна сума усіх струмів через перетин дорівнює нулю (I закон Кірхгофа). Перетину надається орієнтація.

Кількість незалежних напруг схеми дорівнює кількості гілок дерева, так як будуть відсутні замкнуті контури. Кількість незалежних струмів схеми дорівнює кількості хорд. Струми всіх гілок дерева можна визначити через струми в хордах. Кількість незалежних рівнянь за I законом Кірхгофа дорівнює кількості хорд, а за II законом – гілок дерева. Визначення числа незалежних вузлів й контурів, та визначення незалежної системи, є основними задачами аналізу топології кіл.

4.2 Матрично-векторні параметри схеми

Будь-яка гілка схеми може бути представлена як композиція пасивного двополюсника із ідеальним джерелом напруги чи струму. Система з p рівнянь (p – кількість гілок) для будь-якої схеми:

$$U_{\varepsilon 1} = z_{\varepsilon 1} J_{\varepsilon 1} + E_{\varepsilon 1}$$

$$U_{\varepsilon 2} = z_{\varepsilon 2} J_{\varepsilon 2} + E_{\varepsilon 2}$$

.....

$$U_{\varepsilon p} = z_{\varepsilon p} J_{\varepsilon p} + E_{\varepsilon p}$$

Запишемо їх в матричному вигляді, називаючи вектори й матрицю у відповідності із конкретним змістом:

$$\begin{bmatrix} U_{\varepsilon 1} \\ U_{\varepsilon 2} \\ \mathbb{M} \\ U_{\varepsilon p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{\varepsilon 1} & & 0 \\ & z_{\varepsilon 2} & \\ & & \mathbb{M} \\ 0 & & z_{\varepsilon p} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_{\varepsilon 1} \\ J_{\varepsilon 2} \\ \mathbb{M} \\ J_{\varepsilon p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{\varepsilon 1} \\ E_{\varepsilon 2} \\ \mathbb{M} \\ E_{\varepsilon p} \end{bmatrix},$$

де $[U_{\varepsilon}]$ – вектор напруг гілок;

$[J_{\varepsilon}]$ – вектор струмів гілок;

$[E_{\varepsilon}]$ – вектор е.р.с. гілок.

$[Z_{\varepsilon}]$ – матриця опорів гілок (квадратна матриця p -го порядку, де p – кількість гілок).

Запишемо узагальнені рівняння джерел струму й напруг:

Для поняття «гілка напруг»:

$$[U_{\varepsilon}] = [Z_{\varepsilon}] [J_{\varepsilon}] + [E_{\varepsilon}].$$

Для поняття «струмова гілка»:

$$[I_{\varepsilon}] = [Y_{\varepsilon}] [U_{\varepsilon}] + [J_{\varepsilon}].$$

4.3 Топологічні матриці для аналізу електронних кіл

Для отримання рівнянь в аналізованій схемі, напівпровідникові прилади замінюються їхніми еквівалентними схемами, що містять пасивні двополюсники та залежні/незалежні джерела струму/напруги.

Вузли, для яких записується рівняння по другому закону Кірхгофа можуть бути записані як $p-q+1$ (q – вузол, p – гілка) незалежних рівнянь, тому вони називаються незалежними.

При автоматизованому аналізі схему зручно уявити у вигляді матриці інцидентій A_a розміром $q \times p$, отриманій по наведеному графу, згідно правила: в чарунку вноситься ± 1 , якщо гілка належить вузлу та 0, якщо гілка не належить вузлу.

I закон Кірхгофа може бути записаний компактно у вигляді:

$$[A_a][J_b]=0.$$

Матриця перетинів позначається $[П_a]$ та формується аналогічно до матриці $[A]$: якщо гілка j належить перетину i та направлена відповідно, записується одиниця, якщо направлена зустрічно: -1 , якщо гілка не належить перетину записується 0.

Матриця головних перетинів для схеми (рисунок 4.1):

$$[П]=\left[\begin{array}{c|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline & f & b & d & a & c & e \end{array}\right], \quad (4.1)$$

де гілки f, b, d – утворюють одиничну матрицю,

гілки a, c, e – утворюють підматрицю хорд.

Тобто можна переписати 4.1 у вигляді:

$$[П]=[1 \quad M \quad П_L].$$

Будь-який рядок матриці $[П]$ вказує на сукупність гілок, що перетинаються даним перетином. Будь-який стовпчик матриці $[П]$ вказує на сукупність перетинів, що належать до даної гілки. Перемноживши елементи цього рядка на відповідні елементи вектору струмів та склавши добутки, отримаємо алгебраїчну суму струмів в гілках перетину, що, згідно з I законом Кірхгофа, дорівнює нулю (в матричній формі: $[П] \times [I_b]=0$).

Напруги гілок дерева складають

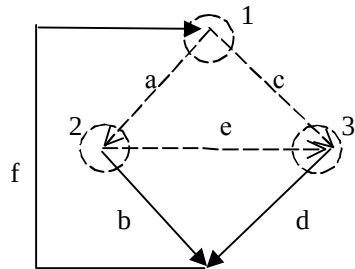


Рисунок 4.1 – Гілки графу і дерево

сукупність незалежних вузлових напруг схеми, які є **координатним базисом** в методі **вузлових потенціалів** (МВП). Щоб визначити напруги гілок через вузлові напруги, необхідно заздалегідь транспонувати матрицю:

$$[U_e] = [U]_T [U].$$

Це матричне рівняння відповідає p скалярним рівнянням для напруг гілок.

Для того, щоб компактно записати математичну модель схеми у вигляді єдиного матричного рівняння в методі контурних струмів, вводиться матриця контурів $[G]$, відповідна наведеному графу, для чого будь-якому контуру надається одна з двох можливих орієнтацій (орієнтовані контури). Матриці контурів формується аналогічно до інших топологічних матриць:

- 1, якщо гілка j входить до контуру i та співнаправлена;
- 1, якщо гілка входить до контуру i та протилежно направлена;
- 0, якщо гілка не входить до контуру.

ІІ закон Кірхгофа встановлює, що алгебраїчна сума напруг в будь-якому контурі схеми дорівнює нулю:

$$[G][U_e] = 0.$$

У скалярному вигляді це рівняння дасть набір з p рівнянь.

Будь-яка хорда, приєднана до дерева утворить головний контур для цієї хорди. На рисунку 4.2 три орієнтованих головних контури, по них складемо матрицю $[G]$, яка має вигляд:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & a & c & e & b & d & f \end{bmatrix}.$$

Будь-який стовпчик матриці вказує на сукупність контурів схеми, що проходять через дану гілку. Тому можна порівнювати струми в хордах з незалежними струмами схеми.

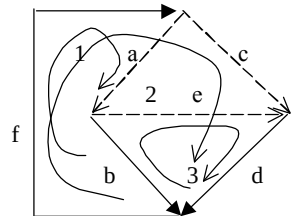


Рисунок 4.2 – Орієнтовані головні контури

Якщо перемножити будь-який стовпчик матриці $[Г]$ на вектор струмів, отримаємо алгебраїчну суму контурних струмів, що протікають через відповідну цьому стовпчику гілку, тобто значення струмів даної гілки. Цей вектор є **координатним базисом** для методу **контурних струмів** (МКС). Таким чином, можна визначити струми гілок через контурні струми (використовується в МКС):

$$[I_c] = [Г]_T [I].$$

4.4 Принцип дуальності

Узагальнене рівняння топологічних методів формування математичної моделі схеми:

$$[W][X] = [Q],$$

де $[W]$ – матриця іммітанса (наприклад, в МВП це матриця адмітансу $[Y]$, в МКС це матриця імпедансу $[Z]$);

$[X]$ – вектор невідомих (в МВП це напруги вузлів, в МКС – контурні струми);

$[J]$ – вектор джерел, що задають вплив (в МВП це джерела струму, в МКС – джерела напруги).

Можна помітити, що взаємна заміна термінів в МВП та МКС призводить співвідношення та правила одного методу в співвідношення та правила для іншого методу. В цьому проявляється принцип дуальності. Дуальними величинами та термінами є наступні пари:

Перетин/ Вузол	– Контур;
Гілка графа	– Хорда;
Дерево графа	– Доповнення до дерева;
Паралельне сполучення	– Послідовне сполучення;
у–гілка (струмова гілка)	– z–гілка (гілка напруг);
Замикання	– Розмикання;
Матриця перетинів	– Матриця контурів;
Провідність	– Опір;
Ємність	– Індуктивність;
Струм	– Напруга;
Вектор незалежних струмів	– Вектор незалежних напруг;
Вузлова напруга	– Контурний струм;
Матриця провідності перетинів	– Матриця опору контурів.

Дуальними співвідношеннями є:

Рівняння для гілок:

$$I_e = Y_e U_e + J_e, \quad U_e = Z_e I_e + E_e.$$

Закони Кірхгофа в матричній формі:

$$[G] \cdot [U_e] = 0, \text{ де } [G] - \text{матриця контурів};$$

$$[L] \cdot [I_e] = 0, \text{ де } [L] - \text{матриця перетинів}.$$

Важливе практичне значення принципу дуальності полягає в тому, що заміна в будь-якій залежності величин і термінів відповідними дуальними величинами та термінами призводить до нової залежності, яка зберігає фізичний сенс [4].

4.5 Контрольні питання

- 1 Матрично-векторні параметри схеми.
- 2 Поняття топологічних елементів.
- 3 Поняття струмової гілки та гілки напруги.
- 4 Закони Кірхгофа в матричній формі.
- 5 Принцип дуальності.

4.6 Індивідуальні завдання

- 1 Задача – скласти матрицю $[A]$.
- 2 Задача – скласти матрицю $[G]$.
- 3 Задача – скласти матрицю $[L]$.
- 4 Задача – скласти матрицю $[U]$.
- 5 Методика отримання графа схеми.

5 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №5

«МЕТОДИ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СХЕМИ»

5.1 Методи однорідного координатного базису

Як показано раніше, координатний базис – це незалежні фазові змінні, через які можна визначити всі інші. Назва координатного базису співпадає із назвою метода. Якщо до координатного базису входять змінні одного типу (наприклад, напруги вузлів), такий метод відноситься до методів однорідного координатного базису – це метод вузлових потенціалів та контурних струмів. Такі методи використовуються для аналізу частотних характеристик, тобто отримують ММС в формі систем алгебраїчних рівнянь із комплексними коефіцієнтами.

5.1.1 Метод вузлових потенціалів

Напруга будь-якої гілки схеми дорівнює різниці потенціалів виводів даної гілки. Перемноження цієї напруги на комплексну провідність даної гілки дорівнює струму гілки. Отже, знаючи вузлові потенціали, можна знайти струми. У загальному випадку, якщо електрична схема містить q вузлів, на підставі першого закону Кірхгофа можна записати систему з $q-1$ рівнянь для «струмових гілок»:

$$\begin{aligned} J_1 &= Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 + L + Y_{1,q-1} \cdot U_{q-1} \\ J_2 &= Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 + L + Y_{2,q-1} \cdot U_{q-1} \\ &\dots \\ J_{q-1} &= Y_{q-1,1}U_1 + Y_{q-1,2}U_2 + L + Y_{q-1,q-1} \cdot U_{q-1}, \end{aligned}$$

де в канонічних системах:

Y_{ii} – власні провідності гілок, які збігаються в вузлі i (знак “+”);

Y_{ik} – загальні (взаємні) провідності між вузлами i, k (знак “–”).

У згорнутому вигляді формула МВП:

$$[Y][U]=[J],$$

де $[Y]$ – матриця вузлових провідностей;

$[U]$ – невідомі вузлові потенціали;

$[J]$ – матриця струмів (незалежних).

Рівняння записані в припущенні, що джерела електричної енергії представлені джерелами струму (струм джерела струму, що приходить до вузла приймають негативним, а що відходить – позитивним). Якщо в схемі є гілки, що містять тільки джерела ЕРС, або індуктивності, інакше кажучи, «незручні» елементи, рівняння яких в формі $i=f(u)$ не є диференційними, вони повинні бути перетвореними до форми «струмова гілка», інакше ММС неможливо отримати як систему алгебро-диференційних рівнянь. Частіше за все, методи однорідного координатного базису використовуються для АС-аналізу, при якому наявність індуктивностей в схемі не створює проблеми: всі компонентні рівняння є алгебраїчними, оскільки попередньо виконане перетворення функції часу (див. формули 1.4).

5.1.2 Метод контурних струмів

Суть методу полягає в тому, що струми в гілках (представлених як «гілки напруги» визначаються через контурні струми. Задача зводиться до розв'язання $p-q+1$ рівнянь. Напрямок обходу будь-якого контуру приймається звичайно співпадаючим з вибраним напрямком хорди, при складанні рівняння по другому закону Кірхгофа, падіння напруги від даного контурного струму в своєму контурі береться зі знаком "+". Падіння напруги від струмів суміжного контуру в загальному опорі береться зі знаком "-", якщо контурні струми в даному опорі направлені зустрічно.

У схемі, що містить n незалежних контурів на підставі другого закону Кірхгофа можуть бути записані системи n рівнянь:

$$\mathcal{E}_1 = z_{11}j_1 + z_{12}j_2 + \mathbf{K} + z_{1n}j_n$$

$$\mathcal{E}_2 = z_{21}j_1 + z_{22}j_2 + \mathbf{K} + z_{2n}j_n$$

$$\dots$$

$$\mathcal{E}_n = z_{n1}j_1 + z_{n2}j_2 + \mathbf{K} + z_{nn}j_n,$$

де $\mathcal{E}_i$ – контурні ЕРС (ЕРС, що співпадають з напрямком обходу беруться зі знаком "+", протилежно направлені – зі знаком "-");

z_{ii} – власні опори контуру i ;

z_{ik} – загальний (сумісний) опір контурів i та k .

Формула МКС:

$$[Z][I]=[E],$$

де $[Z]$ – матриця контурних імпедансів;
 $[I]$ – невідомі контурні струми;
 $[E]$ – матриця е.р.с. (незалежних).

Рівняння, що висловлюють другий закон Кірхгофа, записані в припущенні, що джерелами електричної енергії служать джерела напруги (U). МКС може отримати ММС в більш мінімальній формі, ніж МВП, але вузлові напруги частіше використовують для пошуку вторинних параметрів схем (наприклад, коефіцієнта підсилення), крім того, якщо схема аналогова моделюється сумісно із цифровою частиною, зручно інформацію (сигнали) між цими підсистемами передавати у вигляді напруги (потенційне управління).

Для метода контурних струмів (МКС) рівняння залежного джерела, що описує транзистор, має вигляд джерела напруги, що керується струмом (ДНКС), керуючий параметр якого має розмірність опора α^*g_e , β^*g_b , для МВП – керуючий параметр транзистора (для джерела струму, що керується напругою – ДСКН) в схемі загальний емітер (ЗЕ) керуючий параметр – β/g_b , в схемі загальна база (ЗБ) – α/g_e та має розмірність провідності.

5.2 Методи неоднорідного координатного базису

5.2.1 Метод змінних стану

Метод змінних стану (МЗС) дозволяє отримати компактну ММС у вигляді диференціальних рівнянь (ДР) в явній формі. Змінними величинами стану схеми є заряд ємності та потокозчеплення котушки індуктивності (визначаються по теоремам комутації). Рівняння ММС, що містять динамічні елементи, складені за законами Кірхгофа та компонентними рівняннями, є інтегро-диференціальними, не є компактними та алгоритми розв'язання таких систем досить складні.

При постійних значеннях C та L , змінними стану є u_C та i_L . При довільному розподілі гілок схеми на y та z – гілки, компонентна матриця $[Y]$ містить: pC , $\frac{1}{R}$ та $\frac{1}{pL}$. Матриця $[Z]$ містить: pL , R та $\frac{1}{pC}$.

Для отримання ММС у вигляді ОДР, необхідно віднести усі ємнісні гілки до y – гілок, а індуктивні – до z гілок.

Отже, уся безліч гілок розбивається на:

а) ємнісні: $\frac{d}{dt}[C][U] = -[G] \cdot [U] + [I];$

б) безреактивні: $[I] = -[G] \cdot [U];$

в) індуктивні: $\frac{d}{dt}[L][I] = -[R] \cdot [I] + [E].$

Гілки можна об'єднати в одне компонентне рівняння вигляду:

$$Wx' = x + Q,$$

$$\text{де } x = \begin{bmatrix} I_e \\ U_e \end{bmatrix}; \quad x' = \begin{bmatrix} U_e \\ I_e \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} I_e \\ E_e \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} y_e & a \\ \vartheta & z_e \end{bmatrix},$$

a, ϑ – числові коефіцієнти;

y_e, z_e – квадратні матриці.

Рівняння МЗС в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} U_L \\ I_C \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L & a \\ \vartheta & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_L \\ U_C \end{bmatrix}$$

Якщо не можна вибрати **власне** дерево, що містить тільки джерела ЕРС, ємнісні і резистивні елементи, вибирається **нормальне** дерево, що містить усі джерела ЕРС, максимальну кількість C , мінімальну кількість L . Отже, пріоритет при обиранні нормального дерева: UCRLJ.

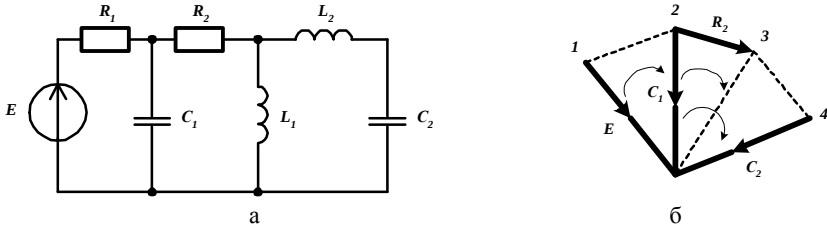
За нормальним деревом формується матриця $[F]$, рядки якої відповідають хордам графа, а стовпчики – гілкам дерева графа. Формування $[F]$: послідовно до власного (нормального) дерева підключається хорди. Кожний рядок $[F]$ описує контур, знаки проставляються ідентично усім топологічним матрицям, причому знак обходу контуру співпадає зі знаком орієнтації хорди. Кількість рядків $[F]$ рівно числу хорд графа, кількість стовпчиків дорівнює числу гілок дерева.

Струми та напруги запишуться через фазові змінні гілок дерева:

$$[I_e] = \begin{bmatrix} I_x \\ I_d \end{bmatrix}; \quad [U_e] = \begin{bmatrix} U_x \\ U_d \end{bmatrix}; \quad [U_x] = -[F] \cdot [U_d]; \quad [I_d] = [F]_T \cdot [I_x],$$

де індекс x – хорда, d – дерево.

Розглянемо **приклад** (рис.5.1).



а – схема для аналізу; б – граф і дерево для МЗС
Рисунок 5.1 – Приклад

$$[F] = \begin{matrix} \begin{matrix} E_1 & C_1 & C_2 & R_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} R_1 \\ L_1 \\ L_2 \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{гілки} \\ \text{хорди} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{3 хорди, 4 гілки.} \end{matrix}$$

Запишемо струми гілок дерева $[I_D] = [F]^T [I_X]$:

$$\begin{bmatrix} I_{E_1} \\ I_{C_1} \\ I_{C_2} \\ I_{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{R_1} \\ I_{L_1} \\ I_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{R_1} & 0 & 0 \\ I_{R_1} & -I_{L_1} & -I_{L_2} \\ 0 & -I_{L_2} & 0 \\ I_{L_1} & I_{L_2} & 0 \end{bmatrix}$$

Запишемо напруги хорд $[U_X] = -[F] \cdot [U_D]$:

$$\begin{bmatrix} U_{R_1} \\ U_{L_1} \\ U_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ U_{C_1} \\ U_{C_2} \\ U_{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & -U_{C_1} \\ U_{C_1} & -U_{R_2} \\ U_{C_1} & -U_{C_2} & -U_{R_2} \end{bmatrix}$$

Враховуючи, що

$$\frac{du_{C_1}}{dt} = \frac{1}{C_1} i_{C_1}; \quad \frac{du_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_{C_2};$$

$$\frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{1}{L_1} u_{L_1}; \quad \frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{1}{L_2} u_{L_2},$$

запишемо систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{C_1} = \underline{i_{R_1}} - \underline{i_{L_1}} - \underline{i_{L_2}} = C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} \\ i_{C_2} = \underline{i_{L_2}} = C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} \\ u_{L_1} = u_{C_1} - \underline{u_{R_2}} = L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} \\ u_{L_2} = u_{C_1} - u_{C_2} - \underline{u_{R_2}} = L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} \end{array} \right.$$

Напруги та струм для безреактивних елементів виключимо:

$$i_{R_1} = \frac{u_{R_1}}{R_1} = \frac{1}{R_1} (E_1 - u_{C_1});$$

$$u_{R_2} = i_{R_2} \cdot R_2 = R_2 (i_{L_1} + i_{L_2}).$$

Враховуючи викладене вище, ММС отримується у явному виді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_{C_1}}{dt} = \frac{1}{C_1} \left[\frac{1}{R_1} (E_1 - u_{C_1}) - i_{L_1} - i_{L_2} \right] \\ \frac{du_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_{L_2} \\ \frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{1}{L_1} [u_{C_1} - R_2 (i_{L_1} + i_{L_2})] \\ \frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{1}{L_2} [u_{C_1} - u_{C_2} - R_2 (i_{L_1} + i_{L_2})] \end{array} \right.$$

У загальному випадку, ММС подає сукупність трьох підсистем алгебраїчних рівнянь та форму **явного** інтегрування ДР. Перша підсистема формується з лінеаризованих компонентних рівнянь і топологічних рівнянь, що характеризують резистивні контури та перетини, друга підсистема складається для ємнісних, а третя – для індуктивних контурів і перетинів.

При додаванні початкових умов (за теоремами комутації) ММС наводиться до форми задачі Коші, що розв'язується явними методами інтегрування ($u_{k-1} = f(u_k)$, наприклад, Ейлера [1]) за алгоритмом:

а) за відомим від попереднього кроку (початкових умов) вираховуються праві частини та коефіцієнти лінеаризованих компонентних рівнянь;

б) розраховуються вектори i_R та u_R для безреактивних компонентів схеми з першої підсистеми компонентних рівнянь;

в) розраховуються вектори u_c та i_L шляхом рішення другої та третьої підсистеми;

г) застосовується одна з формул інтегрування, що дозволить обчислити значення u_c та i_L для нового кроку інтегрування.

МЗС орієнтований на отримання ММС у формі задачі Коші, для застосування явних методів числового інтегрування, є алгоритмом зі змішаним координатним базисом, мінімізованим за рахунок вибору з усіх струмів та напруг гілок змінних станів: напруги на ємності та струму через індуктивність. (у стані комутації ці величини не можуть змінюватися миттєво) отже, по них можна задавати початкові умови. МЗС був єдиним методом аналізу динамічних систем на початку розвитку програм аналізу, але із розвитком елементної бази електроніки (наприклад, із появою MOS FET із керуванням від цифрового драйверу) та ускладненням схем, його використання стало неможливим, що пояснюється зв'язком цього метода із явними методами чисельного інтегрування: похідні по фазовим змінним на попередньому кроці визначають змінні стану на k -тому кроці (які здатні втрачати стійкість при аналізі жорстких, із великим розкидом постійних часу, схем).

Розглянемо переваги та недоліки МЗС.

Переваги:

- простота формування і компактність ММС;
- швидка збіжність та простота алгоритмів явних методів числового інтегрування;
- гарна алгоритмізація та економічність.

Недоліки:

- наявність проблем виродження (зірок з джерел струму та індуктивностей та трикутників із джерел напруги та ємностей), що призводять до неможливості вибору (власного) дерева;
- зв'язок з явними методами припускає можливість втрати нестійкості обчислювального процесу для схем із великим розкидом постійних часу (жорстких), є критичність до вибору кроку інтегрування;
- форма ММС неуніверсальна: зручна для розрахунку динамічних режимів та незручна для розрахунку статички, оскільки використовуються трудомісткі асимптотичні методи розрахунку, що знижують точність та погіршують ефективність симуляції.

5.2.2 МВП з розширеним координатним базисом

У загальному випадку ММС є системою ОДР $Y(V, \dot{V}, t) = 0$.

Класичний варіант МВП не знаходить широкого застосування, оскільки з його допомогою неможливо отримати ММС схеми в алгебро-диференційній формі, що містить ідеальні джерела напруги, індуктивності та залежні джерела, що керуються струмом. Тому у програмах ЕСАД застосовують модифікований МВП з неоднорідним координатним базисом: вектор невідомих складається з вектору вузлових потенціалів ϕ та вектору I_2 струмів особливих гілок. Групу *особливих* гілок складають ідеальне E джерело напруги, індуктивності та гілки, струми яких є керуючими для інших гілок. Інші гілки відносяться до *неособливих*. ММС складається з декількох підсистем, матриця Якобі, як і інші матриці, з яких складається ММС, – розширена, тобто містить інформацію щодо провідностей ($\Delta i / \Delta u$) та опорів ($\Delta u / \Delta i$) елементів підсистем для особливих та неособливих гілок окремо..

У порівнянні з МЗС, ММВП більш ефективний для розрахунку електронних схем, оскільки:

- універсальна форма ММС дозволяє легко переходити від динамічних режимів аналізу до статичних;
- неявні методи числового інтегрування, незважаючи на більшу громіздкість, є сталими (стійкими) навіть для жорстких схем;
- ММВП більш зручно застосовувати при аналізі аналогово-цифрових схем, оскільки логічні рівні – це потенціали (напруги);
- розрідженість матриці Якобі стає перевагою ММВП при використанні спискових методів зберігання інформації.

5.3 Контрольні запитання

- 1 Матрично-векторні параметри схеми.
- 2 Поняття координатного базису (КБ).
- 3 Обмеження використання методів однорідного (КБ).
- 4 Порівняти МЗС та ММВП.
- 5 Принцип дуальності в МКС та МВП.

5.4 Індивідуальні завдання

- 1 Задачі: МВП, МКС, метод змінних стану.
- 2 Скласти топологічні матриці інцидентів, контурів, перетинів, провідностей схеми із транзистором.

6 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6

«АНАЛІЗ ФУНКЦІЙ СХЕМ»

6.1 Матрично-векторні параметри схем

Електронна схема характеризується **первинними і вторинними параметрами**. Первинні характеризують компонентно-топологічний склад схеми, а вторинні – зовнішні характеристики (вхідні, вихідні та прохідні), що обчислюються як співвідношення шуканих фазових змінних. Так, до первинних відноситься інформація в матриці **іммітансу** $[W]$ (див. формулу методів формування ММС: в залежності від обраного координатного базису $[X]$ це матриця імпедансу $[Z]$, матриця **адмітансу** $[Y]$, або змішана матриця). До первинних відноситься також вектор, що задає вплив на схему $[Q]$ ($[J]$, або $[E]$).

Електричний стан схеми визначається значеннями струмів та напруг, що отримуються в результаті розв’язування рівнянь схеми відносно вектору стану $[X]$, саме через значення вектору стану визначаються вторинні параметри, оскільки на практиці представляють інтерес не самі струми та напруги з вектору $[X]$, а співвідношення між ними на входах та виходах схеми (наприклад, коефіцієнт підсилення).

При **малосигнальному аналізі** вторинні параметри висловлюються функціями комплексної змінної p , що характеризують властивості схеми відносно деяких фіксованих входів та виходів, та називаються функціями схеми, вони визначають перетворення, яке здійснюється схемою над вхідним впливом. Припускається, що в самій схемі будуть відсутні джерела, що задають, та початкові умови – нульові.

Функції схеми визначаються тільки параметрами її елементів та їхнім способом сполучення, і не залежать від вибору системи координат для даної сукупності входів і виходів. Через це функції схеми можна назвати вторинними параметрами. У загальному вигляді схема може мати декілька входів і виходів. Будь-якому входу і виходу відповідає пара зовнішніх вузлів (полюсів). До вхідних полюсів приєднують джерела напруги і струму, вплив яких враховується вхідними величинами.

Якщо є тільки один вхід, то схема приводиться до двополюсника; за наявності одного входу і одного виходу – схема приводиться до чотириполюсника. Реакція $X_{вихj}$ на j виході від впливу $X_{ехi}$ на всіх m входах на основі принципу суперпозиції може бути висловлена сумою

реакції від впливу на будь-якому вході окремо:

$$X_{\text{вых}j} = F_{1j} \cdot X_{\text{вх}1} + F_{2j} \cdot X_{\text{вх}2} + \dots + F_{mj} \cdot X_{\text{вх}m} = \sum_{i=1}^m (F_{ij} \cdot X_{\text{вх}i}).$$

$$X_{\text{вых}j} = \sum_{i=1}^v (F_{ij} \cdot X_{\text{вх}i}),$$

де F_{ij} – функція схеми, що зв'язує вхідну та вихідну величини.

Отже, схему з декількома входами і виходами можна характеризувати набором функцій F_{ij} , що відбивають властивості схеми при передачі сигналу або енергії від i -входу на j -вихід при відсутності впливу на інших входах. Коефіцієнт передачі напруги та струму:

$$K_U = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}}; \quad K_I = \frac{I_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}}.$$

6.2 Функції схеми та способи їхнього подання

У загальному випадку функції схеми подаються дробово-раціональними функціями виду [4]:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

де $A(p)$ та $B(p)$ – багаточлени деякого ступеню комплексної змінної p з речовинними коефіцієнтами:

$$F(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}$$

Вторинні параметри, стосовні до входу, називають вхідними функціями ($R_{\text{вх}}, Y_{\text{вх}}$). Прогідні, передатні функції: $k_U, k_I, z_{\text{пер}}, y_{\text{пер}}$. До вихідних функцій відносяться $R_{\text{вих}}, Y_{\text{вих}}$.

Функції схеми подаються різноманітними методами в залежності від мети дослідження та прийнятого виду аналізу. Визначення функції схеми зводиться до одержання числових значень поліноміальних коефіцієнтів, або подання їх у символічній (алгебраїчній) формі через параметри компонентів схеми. Якщо відомі корені z_i числельника і корені p_i знаменника, функція може бути записана у виді:

$$F(p) = k_0 \cdot \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)},$$

$$\text{де } k_0 = \frac{a_m}{b_n}.$$

Величину z_i називають нулями функції, оскільки при $p = z_i$ числитель $A(p)$ буде в збігатись в нуль. При $p = p_i$ функція може приймати нескінченно велике значення, тому p_i називають полюсами функції. Оскільки коефіцієнти a та b – речовинні числа, то комплексні або фіктивні нулі можуть бути тільки попарно сполучені.

Подаючи оператор у виді $p = \sigma + j\omega$, можна записати:

$$F(p) = F(s, w) e^{jj(s, w)},$$

або

$$F(p) = F_R(s, w) + jF_I(s, w).$$

Розташування нулів та полюсів функції у комплексній площині залежить від співвідношень між параметрами схеми [4]. Полюси функції завжди речовинні (розташовуються на речовинній осі у лівій напівплощині). Нулі можуть розташуватися у залежності від знаку речовинної їхньої частини у будь-який з напівплощин.

При синтезі активних та пасивних аналогових фільтрів в програмах ECAD ця інформація подається у вигляді координат нулів і полюсів на комплексній площині та є одним зі способів визначення параметрів передаточної характеристики фільтра. Також такі графіки можна отримати в постпроцесорі, при умові завдання відповідних виразів по осям при аналізі частотних характеристик.

6.2.1 Дослідження функцій схем у частотному діапазоні

При гармонійному сигналі на вході змінна p приймає вид $p = j\omega$ та функція схеми задається у виді: $F(j\omega) = F(\omega) e^{j\phi(\omega)}$.

Залежність модуля $F(\omega)$ від частоти називається АЧХ, а фази передаточної функції $\phi(\omega)$ від частоти – ФЧХ:

$$|F(j\omega)| = \sqrt{F_R^2(\omega) + F_I^2(\omega)}, \quad \phi(\omega) = \arctg \frac{F_I(\omega)}{F_R(\omega)}.$$

Частотні характеристики можна отримати по графічному зображенню $F(s, w)$ та $j(s, w)$ у комплексній площині або аналітичні по функції $F(p)$ при $p = jw$. Частотні характеристики, що отримуються при гармонійному сигналі на вході, характеризують реакцію схеми при будь-якому збудженні, оскільки періодичні сигнали можна розкласти на гармоніки рядом Фур'є.

Схема не викривлює (не спотворює) сигнал при передачі, якщо збудження та реакція на її вході та виході зв'язані: $g(t) = k_0(t - t)$, де g – імпульсна характеристика схеми. Отже, форма вхідного сигналу зберігається при передачі, якщо усі його елементи запізнюються на одну й ту ж величину t (за наявності реактивних елементів). Частотні характеристики ідеальної схеми мають вид (рисунок 6.1, а). У реальних схемах відсутність викривлення можливе лише у деякому діапазоні частот, який називають смугою пропускання: $\Delta w = w_{B_{sp}} - w_{H_{sp}}$.

Оскільки складові сигналу можуть мати будь-яку частоту у діапазоні $0 < w < \infty$, умови невикривленої передачі такі:

- АЧХ не повинна залежати від частоти.
- фаза повинна бути пропорційна частоті сигналів збудження.

Граничні верхня та нижня частоти визначаються при рівності модуля функції $k = \frac{k_0}{\sqrt{2}}$, де k_0 – значення модуля у смузі пропускання.

Потужність, що віддається навантаженню при $w = w_{sp}$ у два рази менша за потужність при $w_{B_{sp}} < w < w_{H_{sp}}$. Також можна визначити границі смуги при спаданні коефіцієнта передачі на три децибели. Децибел визначається логарифмом співвідношення потужностей:

$$n_{dB} = 10 \lg \left(\frac{P_{out}}{P_{in}} \right).$$

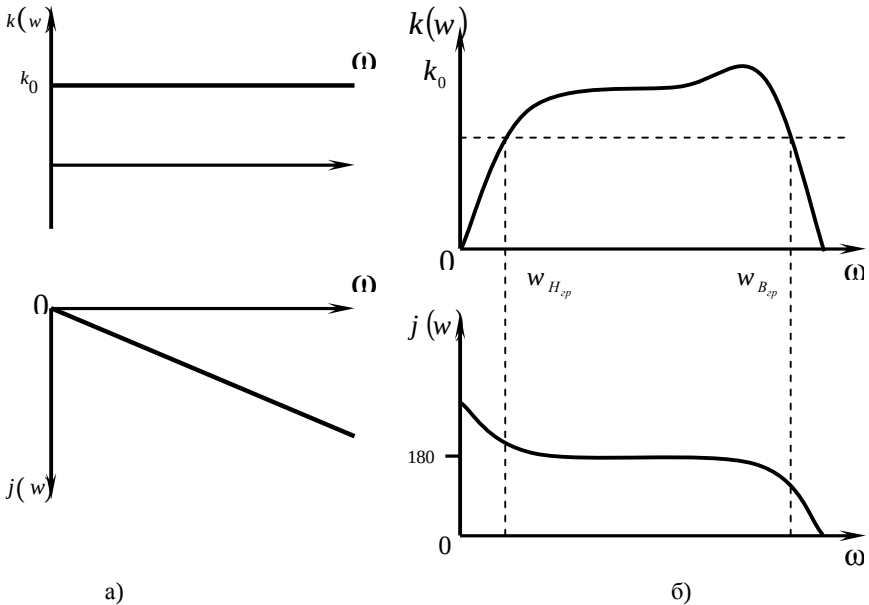
Як правило, для електронних приладів зв'язок між частотною та фазовою характеристикою однозначний. Одна з теорем, що пов'язує частотні характеристики схемної функції формулюється так: площа під фазовою кривою пропорційна різності коефіцієнтів підсилення на нескінченно високих і нульових частотах. Аналітичне співвідношення між модулем і фазою є лише для схемних функцій першого порядку.

У загальному випадку фазове зрушення визначають за нахилом АЧХ по крапках.

Інколи АЧХ і ФЧХ будують у логарифмічному масштабі по осі частот, модуль будується теж у логарифмічному масштабі:

$$F_{\text{дБ}}(w) = 20 \lg F(w).$$

Частотні характеристики реальної схеми наведені на рисунку 6.1,б.



а – ідеальні; б - реальні
Рисунок 6.1 – Частотні характеристики:

Амплітудно-фазова характеристика (АФХ) будується у полярних координатах та об'єднує АЧХ та ФЧХ (частотний годограф) [4]. АЧХ визначається довжиною вектору, а ФЧХ кутом з фіктивною віссю. При $j(\omega) < 0$ говорять про відставання по фазі, при $j(\omega) > 0$ – про випередження.

Розглянемо методи дослідження функцій часу, які використовуються для одержання точних рішень при ручному або частково автоматизованому розрахунку [4-6].

6.2.2 Дослідження функцій схеми у часовій області

Реакція схеми на одиничний імпульс називається *імпульсною характеристикою* та знаходиться при зворотному перетворенні функції схеми:

$$g(t) = L^{-1}[G(p)].$$

Реакція схеми на одиничну функцію (стрибок напруги) називається *перехідною характеристикою*

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{p}G(p)\right] = L^{-1}[H(p)].$$

Імпульсна та перехідна характеристики зв'язані:

$$g(t) = \frac{d}{dt}[h(t)].$$

Вид імпульсної та перехідної характеристик залежить від співвідношення параметрів схеми, та у кінцевому підсумку, від коефіцієнту відносного згасання ξ .

6.2.3 Зв'язок між частотними і часовими характеристиками

Частотні та часові характеристики описують ту ж саму схемну функцію та можуть бути визначені по її карті нулів та полюсів, тому між ними є зв'язок. Інколи важливо знати не точний хід перехідних та частотних характеристик, а співвідношення між їхніми параметрами, що описуються: часом наростання t_H та викидом перехідної характеристики γ , з одного боку, і смуги пропускання і резонансним підйомом частотної характеристики k_M , з іншого. Інакше кажучи, в ключовому пристрої при мінімальних фронтах перемикавання ці процеси на АЧХ представлені зрушенням граничної частоти в область ВЧ. Для схемних функцій вищих порядків визначити співвідношення аналітично не завжди вдається, тому використовують емпіричні формули:

$$t_H f_{\phi} \approx 0,3; \quad k_M = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}; \quad g = 100e^{\frac{(-px)}{\sqrt{1-\xi^2}}},$$

де ξ – коефіцієнт відносного згасання схеми, чим він менший, тим більші викиди γ та k_M , причому викид виникає при $\xi < 1$, а резонансний підйом k_M – при $\xi < 0.707$. При збільшенні смуги пропускання зменшується час наростання перехідної характеристики.

6.3 Стійкість схем

Як відомо, функція схеми має вид

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

причому, при рівності нулю одного з коренів **характеристичної функції $B(p)$** , функція $F(p)$ прагне до нескінченності, що може викликати автозбудження схеми. Тому для дослідження тривкості (стійкості) схем знаходять корені знаменника $F(p)$, що у загальному виді називається характеристичним рівнянням. Схема буде стійкіше, якщо усі речовинні коріння та усі речовинні частини комплексних коренів характеристичного рівняння схеми у замкнутому стані будуть негативні (тобто немає коріння у правій напівплощині).

Для нелінійних схем, що досліджуються за допомогою лінеаризованих рівнянь, умова тривкості справедлива лише для малих збурень. Отже, задача дослідження стійкості схеми зводиться до визначення знаків речовинних частин коренів характеристичного рівняння схеми зі зворотним зв'язком або встановленню розташування цих коренів на комплексній площині. На практиці застосовуються побічні методи аналізу схем на тривкість, що називаються критеріями тривкості [10].

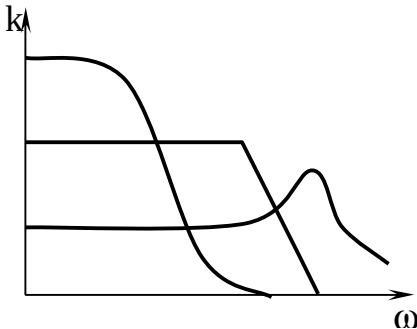


Рисунок 6.2 - Вплив НЗЗ на АЧХ

При введенні негативного зворотного зв'язку (НЗЗ) у схему, полюси передатної функції зміщуються ліворуч від фіктивної осі. При цьому збільшується смуга пропускання, оскільки коефіцієнт широкосмуговості $k\Delta\omega = \text{const}$. Однак, внаслідок появи резонансних викидів (при $\xi < 0.707$) коефіцієнт широкосмуговості (рис. 6.2) може збільшуватися.

Навіть у приладах твердотільної електроніки існують зворотні зв'язки, в загальному випадку – це негативний зв'язок (ефект Міллера), який може бути як статичним, так і динамічним. У біполярному транзисторі елементом зворотного зв'язку є провідність колектора, в ПТКП – опір витоку, у МОПТ – прохідна ємність [6, 12]. У загальному

випадку, електронна схема є системою із багатоканальним зворотним зв'язком.

Існують: алгебраїчний критерій Рауса – Гурвиця, частотні критерії Михайлова та Найквіста, логарифмічний частотний критерій Боде; іммітансний критерій, який зручний для аналізу схем на ВЧ зі складними внутрішніми ЗЗ [4]. Кореневим годографом називають траєкторії, що описується коренем характеристичного рівняння у комплексній площині при зміні загального коефіцієнту підсилення від 0 до ∞ . Вивчаючи вигляд кореневого годографа, можна визначити і вид автоколивання у схемі. Користуючись методом кореневого годографа, можна не тільки робити висновки про тривалість схеми, але й визначати необхідні значення її елементів, при яких реалізуються задані частотно-часові характеристики.

6.4 Дослідження функцій схем у програмах аналізу

При автоматизованому дослідженні функцій схеми у частотному діапазоні (режим *AC Analysis*) спочатку розраховується схема по постійному струму, після цього лінеаризуються усі лінійні компоненти, та виконується розрахунок комплексної амплітуди вузлових потенціалів. До входу схеми має бути підключене джерело синусоїдального або імпульсного сигналів, комплексна амплітуда якого вважається рівною 1В, а початкова фаза рівній нулю (незалежно від того, як задані значення параметрів моделей джерел сигналів). Частота змінюється у директивах завдання на аналіз. Якщо є одне джерело вхідного сигналу, те вихідні напруги будуть співпадати з частотними характеристиками лінеаризованої моделі пристрою (електронної схеми), якщо джерел (незалежних) декілька, то відгуки від кожного сигналу будуть складатися (згідно принципу суперпозиції). ММС в частотному аналізі отримуються як СЛАР із комплексними коефіцієнтами та розв'язується прямим методом LU – розкладу (Краута), отримані таблиці значень змінних (координатного базису) потім оброблюються в пост процесорі шляхом побудови графіків обраних функцій (треба пам'ятати, що можливості постпроцесора в цьому виді аналізу найбільш обмежені внаслідок найбільш простої форми ММС (прийняті припущення про квазілінійність і квазістаціонарність системи).

Імпульсна характеристика може бути розрахована у режимі *AC* шляхом використання зворотного перетворення Фур'є комплексних

коефіцієнтів передачі, наприклад в *Digital Signal Processing (DSP)* – підпрограмі цифрової обробки сигналів, в якій задаються межі інтервалу частот та кількість відліків.

Передаточні функції схеми розраховуються у режимах аналізу по постійному струму при підключенні до входу ітерованого незалежного джерела напруги або струму. ММС отримується у виді CHAP, що розв'язуються (лінеаризується) методом Ньютона–Рафсона.

Всі вище перелічені можливості доступні при аналізі в режимі «*Перехідні процеси*», оскільки ММС для цього виду аналізу найбільш повнофункціональна (це система нелінійних неоднорідних диференціальних рівнянь).

6.5 Контрольні запитання

- 1 Дослідження функцій схем у програмах аналізу.
- 2 Поняття функцій схеми.
- 3 Дослідження схем в частотному діапазоні.
- 4 Дослідження схем в часовому діапазоні.
- 5 Стійкість схем.
- 6 Матрично-векторні параметри схеми.
- 7 Функції схеми та способи їхнього подання.
- 8 Характеристичне рівняння: карти нулів та полюсів.
- 9 Вплив зворотних зв'язків на функції схеми.

6.6 Індивідуальні завдання

- 1 Задача – отримати АЧХ і ФЧХ селективного фільтру в програмі МС, визначити вторинні параметри.
- 2 Задача – отримати карту нулів і полюсів селективного фільтру в програмі МС, визначити вторинні параметри.
- 3 Задача – отримати графіки перехідних процесів селективного фільтру в програмі МС, визначити вторинні параметри.
- 4 Задача – отримати графіки АФХ селективного фільтру в програмі МС, визначити вторинні параметри.
- 5 Методика дослідження стійкості схем.

7 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7

«ЧИСЛОВІ МЕТОДИ ДЛЯ АНАЛІЗУ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРОННИХ СХЕМАХ»

7.1 Дискретні моделі

При симуляції в ЕСАД для спрощення процедури алгебраїзації / дискретизації, використовують дискретні моделі елементів (компонентів електронних схем). Параметри джерел в дискретних моделях визначаються попереднім станом схеми (значеннями змінних), тобто вони відбивають «пам'ять» системи, зокрема, початкові умови.

В будь-якій схемі всі реактивні елементи можна замінити їхніми дискретними моделями, ідеальну індуктивність та ємність із початковими умовами представити операторними схемами. Початкові умови можна врахувати безпосередньо в операторній схемі, додаючи в неї відповідні джерела напруги та струму, що відбивають стан змінних комутації i_L та u_C (*initial conditions of state variables*).

В лінійних схемах при постійному кроці $h = \text{const}$ опір ємності та провідність індуктивності (параметри R_C та G_L) постійні, отже для всіх моментів часу матриця провідності постійна, тому трудомістка процедура формування та упорядкування цієї матриці виконується тільки раз. Від кроку до кроку змінюються тільки значення правої частини рівнянь ММС, що задають попередній стан системи (пам'ять системи, зокрема, початкові умови).

Розглянутий підхід до розрахунку перехідних процесів називається *методом дискретних моделей*. В результаті застосування цього методу схема заміщення математичної моделі схеми представляється композицією тільки джерел струму/напруги та провідностей/опорів. Джерелами U та J можна емулювати як генератори вхідних сигналів, так і джерела, що замінили ємності та індуктивності. Перехідний процес можна обчислювати за допомогою цих дискретних моделей, змінюючи значення джерел на кожному кроці ітераційного процесу.

В програмах автоматизованого проектування для аналізу схем використовується представлення моделей елементів в дискретному вигляді, форма якого визначається використаним методом чисельного розв'язання рівнянь ММС. Розглянемо форми дискретних моделей для автоматизованого розрахунку [11].

Закон Ома для ємності як функція часу при дискретному способі його просуванні

$$U'_C(t_{n+1}) = \frac{1}{C} i(t_n) \quad (7.1)$$

є точним співвідношенням, в той же час, числові формули відтворюють наближений розв'язок.

Наприклад, для неявної формули Ейлера

$$U_{n+1} = U_n + h * f(U_{n+1}) = U_n + h U'_{n+1}. \quad (7.2)$$

Якщо ми апроксимуємо точний розв'язок $U'(t_{n+1})$ чисельним U'_{n+1} , то рівняння (7.1) прийме вигляд:

$$U'_{n+1} = \frac{1}{C} i_{n+1}. \quad (7.3)$$

Підставивши рівняння (7.3) у (7.2) і, розв'язавши відносно i_{n+1} , отримаємо:

$$i_{n+1} = \frac{C}{h} U_{n+1} - \frac{C}{h} U_n \quad (7.4)$$

Цьому співвідношенню відповідає еквівалентна схема (рисунок 7.1), яка складається з провідності $Y = \frac{C}{h}$ і джерела струму $J = \frac{C}{h} U_n$.

Аналогічно можемо отримати дискретну модель для будь-якої багатокрокової формули чисельного інтегрування.

Проведемо аналогічні міркування для лінійної індуктивності:

$$i'_{n+1} = \frac{1}{L} U_{n+1} \quad (7.5)$$

Підставимо (7.5) в неявну формулу Ейлера:

$$i_{n+1} = i_n + h f(i_{n+1}) = i_n + h i'_{n+1}$$

отримаємо:

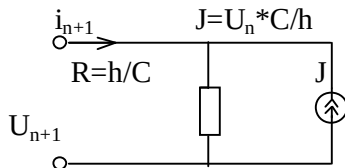


Рисунок 7.1 – Дискретна модель лінійної ємності для неявного методу Ейлера

$$i_{n+1} = \frac{h}{L} U_{n+1} + i_n$$

Цьому співвідношенню відповідає дискретна модель індуктивності для неявного методу Ейлера, наведена на рисунку 7.2.

Таким чином, розрахунок перехідного процесу зводиться до розрахунку множини резистивних дискретних моделей будь-яким відомим методом.

Так, для методу вузлових потенціалів ММС прийме вигляд:

$$[G^{(y)}] [\varphi(t_{k+1})] = [J^{(y)}(t_{k+1})],$$

де $t_{k+1} = (k+1)h$

Вектор вузлових струмів має дві складові – незалежні джерела для моменту часу t_{k+1} та джерела дискретних моделей для моменту t_k .

Означені підходи використовуються в ECAD.

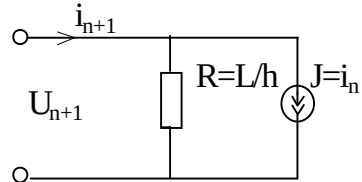


Рисунок 7.2 – Дискретна модель індуктивності

7.2 Розрахунок статичного режиму ключа методом Ньютона

Перед аналізом перехідних процесів необхідно задати **початкові умови**, які можна визначити шляхом попереднього розрахунку статичного режиму (по постійному струму) методом Ньютона (потенціали вузлів на постійному струмі). Розглянемо методику на прикладі.

7.2.1 Побудуємо схему заміщення ключа (рисунок 7.3).

Для біполярного транзистора використана спрощена схема заміщення, отримана з моделі Еберса–Молла (рисунок 7.4).

Оскільки аналізується статика, ємностями колектора і емітера моделі Еберса–Молла можна знехтувати. Нехтуємо опором утікання та елементами, що моделюють інверсний режим. Для спрощення обчислень нехтуємо об'ємними опорами бази, емітера і колектора. Для аналізу статичного режиму відкидаємо ємність C_H , оскільки її опір постійному струму нескінченний.

Спрощена модель наведена на рисунку 7.5. Підставляючи її в схему рис.7.3, отримуємо модель ключа (рисунок 7.6).

7.2.2 Отримаємо рівняння математичної моделі ключа.

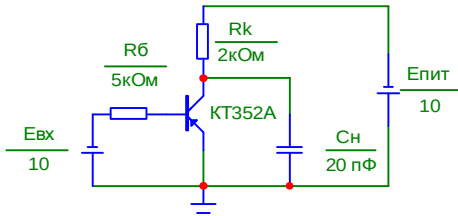


Рисунок 7.3 – Схема ключа

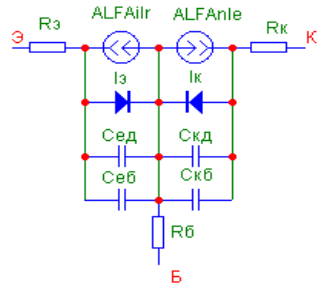


Рисунок 7.4 – Модель Еберса–Молла

Стани четвертого та першого вузлів визначені (вони задаються джерелами), складемо рівняння по першому закону Кірхгофа для вузлів 2 та 3:

$$2: \quad I_{Rб} + Jэ - Jк = 0;$$

$$3: \quad Jк - I_{Cбн} + I_{Rк} = 0.$$

Система буде нелінійною, оскільки БТ – нелінійний компонент:

$$2: \quad I_{Rб} + Jэ - \alpha_N * Jэ = 0;$$

$$3: \quad \alpha_N * Jэ - I_{Cбн} + I_{Rк} = 0,$$

де

$$Jэ = I_{э0} * (e^{Uэ/mфt} - 1) = I_{э0} * (e^{U2/mфt} - 1);$$

$$Jк = \alpha_N * I_{э0} * (e^{Uэ/mфt} - 1) = \alpha_N * I_{э0} * (e^{U2/mфt} - 1);$$

$$I_{Cн} = Cн * dU_{Cн}/dt = Cн * (d U3/ dt).$$

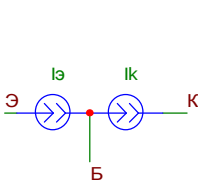
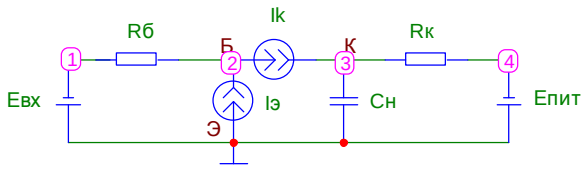
Рисунок 7.5 – Спрощена модель для БТ *pnp*-типу

Рисунок 7.6 – Схема заміщення ключа для розрахунку статики

Виразимо струми I_{R6} и I_{Rk} через напруги:

$$\begin{aligned} 2: (U_2 - E_{вх})/R_6 + (1 - \alpha_N) I_0 * (e^{U_2/m\phi t} - 1) &= 0. \\ 3: \alpha_N * I_0 * (e^{U_2/m\phi t} - 1) - C_n * (d U_3 / dt) + (U_3 - E_{пит})/R_k &= 0 \end{aligned} \quad (7.6)$$

7.2.3 Розрахуємо режим по постійному струму, використовуючи рівняння для третього вузла (вихідна напруга). Для отримання ММС у формі метода вузлових потенціалів загальний вид метода Ньютона – Рафсона:

$$Y(u^j) * (u^{j+1}) = -J(u^j) + Y(u^j) * (u^j) ,$$

де зліва – вектор-стовпець невідомих напруг вузлів $[U^{j+1}]$, справа – вектор-стовпець відомих напруг вузлів, які помножені на компоненти матриці провідності, що визначає додаткові струми на поточній ітерації;

$J(u^j)$ – вектор задаючих струмів;

$Y(u^j)$ – матриця провідності схеми на поточній ітерації.

У режимі спокою $I_{CH} = C_n * dU_{ch}/dt = 0$, тому рівняння 7.10 прийме вид

$$3: \alpha_N * I_0 * (e^{U_2/m\phi t} - 1) + (U_3 - E_{пит})/R_k = 0 .$$

Розв'язок цього рівняння для одного невідомого, наприклад, напруги третього вузла, має вид:

$$u_3^{j+1} = u_3^j - \frac{f(u_3^j)}{f'(u_3^j)} ,$$

де

$$f(u_3^j) = \alpha_N * I_0 * (e^{U_2/m\phi t} - 1) + (U_3 - E_{пит})/R_k ;$$

$$f'(u_3^j) = 1/R_k .$$

Приймаємо **початкове наближення**: напруга на відкритому транзисторі

$$U_3 \approx U_{ке_{нас}} \approx 0.3 \text{ В},$$

де $U_{\text{ке}_{\text{нас}}}$ – залишкова напруга на відкритому БТ (напруга насичення).

Підставляючи числові значення, та нехтуючи членами малого порядку, отримаємо:

$$u_3^{j+1} = u_3^j - \frac{0.91 \cdot 0.01 \cdot 10^{-6} \cdot (e^{0.7/m\phi t} - 1) + (u_3^j - 10) / 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-3}}.$$

В якості початкового наближення для третього вузла приймаємо $U_{\text{ке}_{\text{нас}}} U_3^0 \approx 0,3$ В. Підставляючи значення, отримаємо на першій ітерації $U_1^1 \approx 0,31$ В.

Визначаємо похибку

$$\Delta = U_1^1 - U_1^0 \approx 0,01 \text{ В},$$

(максимальну абсолютну похибку приймаємо $\varepsilon_{\text{max}} = 0.01$). Оскільки значення $\Delta < \varepsilon$, ітерації можна припинити.

Отже, розраховане значення вихідної напруги в стаціонарному режимі $U_3 \approx 0,31$ В. Його приймаємо за **початкові умови** для розрахунку перехідного процесу.

Варіанти завдання для ІДЗ (контрольної роботи – в додатку А).

7.3 Розрахунок перехідного процесу в ключі методом Ейлера

На вході – ідеальна, без фронту сходинок (фронт імпульсу – з 10 В до нуля, або навпаки). Транзистор починає закриватися, ємність навантаження заряджається. Напруга на ній буде змінюватися від 0,31 В майже до Епит.

Визначаємо цю напругу через напругу третього вузла: $u_3 \approx u_{\text{CH}}$.

Прийmemo що транзистор закрився миттєво (струм через транзистор не йде), тобто весь струм при закритті ключа йде через ємність навантаження, заряджаючи її.

Тоді рівняння для третього вузла прийме вид:

$$C_N \cdot (d u_3 / dt) = \alpha_N \cdot I_{\text{Э0}} \cdot (e^{U_2/m\phi t} - 1) + (u_3 - E_{\text{пит}}) / R_K = 0. \quad (7.7)$$

Запишемо рівняння метода Ейлера для напруги u_{CH}

$$u_{\text{CH}}^{i+1} = u_{\text{CH}}^i + h \cdot du_{\text{CH}}^j / dt,$$

або

$$u_3^{i+1} = u_3^i + h \cdot du_3^j / dt,$$

де i – номер кроку часу.

Перепишемо рівняння 7.7 з урахуванням того, що

$$U_2 \approx 0 \text{ В}, \text{ або } \alpha_N \cdot I_{\Sigma 0} \cdot (e^{U_2/m\phi t} - 1) \rightarrow 0.$$

$$\text{Тоді } du_3/dt = (u_3 - E_{\text{пит}})/R_k \cdot C_H.$$

Розрахункова формула прийме вид:

$$u_3^{i+1} = u_3^i + h \cdot (u_3 - E_{\text{пит}})/R_k \cdot C_H,$$

Приймаємо крок інтегрування на порядок менший, ніж постійна часу заряду ємності $\tau = R_k \cdot C_H = 40 \text{ нс}$, $h = 0.1 \cdot (R_k \cdot C_H)$, та підставляючи числові значення, отримуємо розрахункову формулу:

$$u_3^{i+1} = u_3^i + 0.1 \cdot (u_3 - 10).$$

По ній здійснюємо обчислення $u_C^i = u_3$ на двадцяти-тридцяти часових кроках. Отримані результати занести в таблицю, тут напруга на ємності є вихідною напругою ($u_3 = u_{\text{вих}}$):

крок	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t, нс										
u _{вих} , В										

За даними таблиці будуюмо графік. Визначаємо час наростання/спадання вихідної напруги.

У програмах симуляції не використовується явний метод Ейлера, внаслідок його маленької області стійкості та низької точності (це метод першого порядку). Для метода Ньютона використовуються спеціальні додаткові алгоритми, які підвищують його збіжність [7].

7.4 Алгоритм симуляції в ECAD

У загальному виді ММС являє собою систему нелінійних алгебро-диференціальних рівнянь [1]:

$$\Phi(X, \dot{X}, t) = P(t) \quad (7.7)$$

де X – вектор координатного базису;

P – вектор правих частин рівнянь, що включає значення незалежних джерел у даний момент часу;

t – поточний час.

Загальне рівняння ММВП має вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Y & a \\ b & Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ E \end{bmatrix}, \quad (7.8)$$

де вектор правих частин включає незалежні джерела струму та напруги, струми дискретних моделей реактивних елементів та є «пам'яттю системи»;

Y та Z – відповідно приватні похідні струму по напрузі та напруги по струму, тобто диференційні адмітанси та імпеданси.

Система (7.8) для кожного дискретного моменту часу може бути замінена системою нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$W_{n+1}(X_{n+1}) = Y_{n+1}. \quad (7.9)$$

Заміна рівняння (7.8) на (7.9) називається алгебраїзацією і може бути виконана, якщо замість значення вектора похідних у момент часу t_{n+1} підставити його значення, що обумовлюється по формулі неявного методу чисельного інтегрування:

$$X_{n+1} = a_0 \cdot X_{n+1} - R,$$

де a_0 , R – коефіцієнти, формули для обчислення яких визначаються застосовуванням неявним методом інтегрування.

Значення a_0 та R залежать від величин поточного і попереднього кроків інтегрування, а також значень вектора X в попередніх дискретних часових точках.

Якщо кожне нелінійне рівняння $y = f(x)$, що входить у ММС, розкласти в околицях точки X_{n+1}^{j+1} в ряд Тейлора:

$$Y_{n+1}^{j+1} = f(X_{n+1}^{j+1}) = f(X_{n+1}^j) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{X=X_{n+1}^{m+1}} \cdot (X_{n+1}^{j+1} - X_{n+1}^j) + R(X), \quad (7.10)$$

де j та $j+1$ – індекси поточної і попередньої ітерації;

$R(X)$ – залишковий член,

а потім підставити в (7.9) замість Y_{n+1}^{m+1} вираз (7.10) без залишкового члена, то можна організувати симуляцію ітераційним методом, еквівалентним методу Ньютона, при цьому, на кожній ітерації система нелінійних алгебраїчних рівнянь (7.10) замінюється системою лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$A_{n+1}^j \cdot X_{n+1}^{j+1} = B_{n+1}^j, \quad (7.11)$$

де A_{n+1}^j і B_{n+1}^j – матриця системи (Якобі) і вектор правих частини, що залежать від величини поточного часу t_{n+1} і значення вектора X_{n+1}^j координатного базису на j -тій ітерації. Ця процедура називається лінеаризацією. Отже, на кожній ітерації ММС може бути зведена до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (7.11).

7.5 Контрольні запитання

- 1 Дискретні моделі елементів схеми.
- 2 Початкові умови, початкове наближення.
- 3 Метод Ейлера.
- 4 Метод Ньютона.
- 5 Лінеаризація/ апроксимація рядом Тейлора.

7.6 Індивідуальні завдання

- 1 Задача – розрахувати статичний режим методом Ньютона (варіанти – в додатку А).
- 2 Задача – розрахувати динамічний режим методом Ейлера (варіанти – в додатку А).
- 3 Метод алгебраїзації – Гіра.
- 4 Алгоритмічні збої в ECAD.
- 5 Алгоритми розв’язання диференціальних рівнянь в CAS та CAE.

8 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 8 «СИНТЕЗ ТА ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ»

8.1 Показники якості електронних систем

Номенклатура показників якості продукції – це сукупність характеристик властивостей продукції, які визначають її якість як продукту виробництва та здатність задовольнити потреби споживача. Групи показників якості [1]:

- показники призначення, які поділяються на підгрупи (характеризують основні властивості продукції, область або спосіб використання: функціональні, конструктивні та експлуатаційні);
- показники надійності. Надійність – властивість виробу зберігати свої функції та експлуатаційні показники в заданих межах на протязі певного часу (безвідмовність, довговічність, здатність до зберігання, ремонтпридатність);
- показники економного використання ресурсів, трудових, в тому числі;
 - ергономічні показники;
 - естетичні показники;
 - показники технологічності (працемісткість, матеріалоемкість, енергоемкість, технологічна собівартість);
 - показники транспортабельності;
 - показники стандартизації та уніфікації;
 - патентно–правові показники;
 - показники стійкості до зовнішніх збурень та впливів;
 - економічні показники.

Функціональні показники (показники якості) призначення в основному і характеризують рівень якості продукції, тому їх використовують як **критерії оптимальності** при проектуванні електронних систем (наприклад, швидкодія, смуга пропускання, споживана потужність, масогабаритні показники і т.п.), та є функціями внутрішніх параметрів системи (**цільові функції**). Якщо оптимізація ведеться за всіма показниками якості – це **глобальна векторна оптимізація**. Частіше один з критеріїв використовують як ведучий, інші переводяться в **обмеження**, вид яких (лінійні, нелінійні, або дискретні) визначає назву, математику та методику оптимізації (задача лінійного програмування – ЗЛП, нелінійного – ЗНП). Оптимізація по одному критерію із

лінійними обмеженнями називається **лінійною скалярною локальною** оптимізацією.

В програмах автоматизованого проектування можна реалізувати задачу векторної нелінійної параметричної оптимізації; початкове наближення для оптимальних параметрів відшукати за допомогою **багатоваріантних видів аналізу**, мінімізувати кількість впливових параметрів в цільовій функції методами аналізу **чутливості**.

8.2 Параметрична оптимізація в Micro-Cap

Задача параметричної оптимізації – відшукування такого набору параметрів схеми, при якому показники якості стають екстремальними. Параметрична оптимізація [1, 7] виконується в програмі Micro-Cap методами Пауелла (*Powell*) в будь-якому з видів аналізу: аналіз перехідних процесів, малосигнальний АС-аналіз і розрахунок DC характеристик та виконує оптимізацію параметрів компонентів схеми та її моделей по критеріях, вказаних в [7].

При цьому можлива оптимізація по максимальному (Maximizes), мінімальному (Minimizes) або заданому (Equates) значенню вибраного критерію.

Наприклад, в схемі диференційного підсилювача необхідно знайти значення опорів R5 та R2, при яких максимізується підсилення на частоті в 10 кГц. Для цих опорів задаються моделі RMOD та у вікні оптимізатора задається параметр RES RMOD та умови його варіації. Досліджувана схема та результати моделювання (АЧХ), отримані при оптимальному значенні опорів R5 та R2 наведені на рисунку 8.1.

Вікно завдання налагодження параметрів процедури оптимізації (визивається натисканням CTRL+F11) та вікно вибору типу цільової функції та її параметрів наведено нижче (рис.8.2).

У цьому діалоговому вікні вводиться наступна інформація.

Find – вибір параметрів, що оптимізуються;

Low – максимальне значення параметра, що оптимізується;

Step – крок зміни параметра, що оптимізується;

Current – поточне значення параметра, що оптимізується;

Optimized – пошук оптимального значення параметру;

Method – вибір методу оптимізації:

Standard Powell – стандартний метод оптимізації Пауелла,

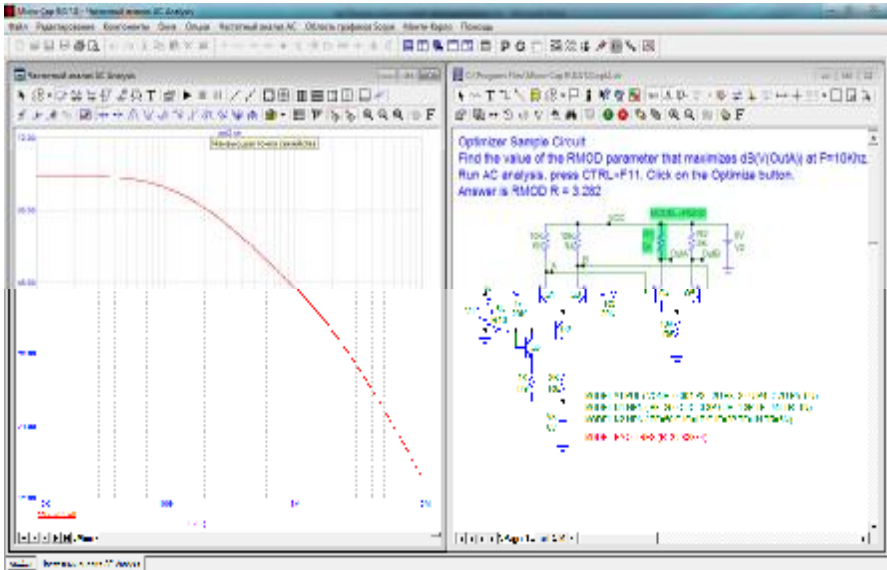


Рисунок 8.1 – Досліджувана схема та її АЧХ

Покроковий *Powell (Stepping Powell)* – параметри змінюються від значення *Low* до значення *High* з кроком *Step*.

Error – корінь квадратний із сумарної помилки (різниці між цільовою функцією та її фактичною величиною).

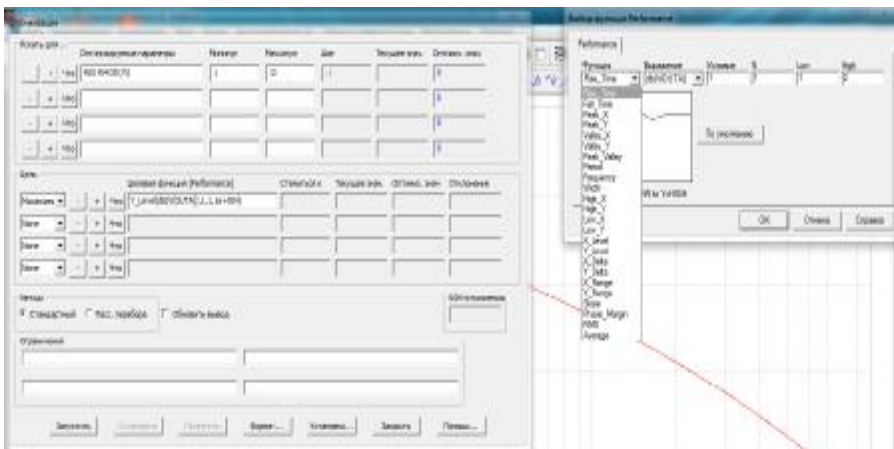


Рисунок 8.2 – Діалогове вікно формування завдання на оптимізацію

Constraints – обмеження типу нерівностей і рівнянь.

Наприклад:

$PD(R1) \leq 100m$, $V(Out) \geq 1.2$, $VCE(Q1) * IC(Q1) \leq 200m$.

Optimize – початок оптимізації.

Apply – зміна на схемі значення параметрів відповідно до результатів оптимізації.

Format – вибір форми представлення чисел.

Close – завершення режиму оптимізації.

Після заповнення діалогового вікна натисненням на панель *Optimize* виконують оптимізацію і потім натисканням на панель *Apply* переносять знайдені оптимальні значення параметрів на схему.

Приведемо **методику** параметричної оптимізації.

а) Для дослідження пристрою спочатку необхідно створити креслення схеми в редакторі схем *Circuit Editor*.

б) Вибираємо вид аналізу, наприклад, *Аналіз – Перехідні процеси...* (Alt+1).

в) Попередній пошук напрямку для параметричної оптимізації здійснюється багатоваріантними методами, наприклад, *Stepping*, окремим розрахунком чутливості для визначення складу варійованих/впливаючих параметрів в цільовій функції.

г) Крім безпосередньої оптимізації в *МС* є можливість проаналізувати схему при випадковому розкиді параметрів елементів. Для цього необхідно виконати розрахунок *Monte Carlo*.

д) Наступний етап – оптимізація схеми. Оптимізація стає доступною тільки після виконання аналізу (наприклад, *Перехідні процеси*).

Після виконання аналізу, запускаємо вікно налаштування оптимізації. Якщо знайдені значення нас влаштовують, то можна натискати на кнопку *Застосувати*, і знайдені значення перенесуться на схему.

8.3 Синтез аналогових фільтрів

Програма синтезу аналогових фільтрів *Filter Designer* дозволяє синтезувати схему пасивного, або активного фільтра за допомогою параметрів форми амплітудно-частотних характеристик, зокрема карти нулів та полюсів; результати синтезу подаються у вигляді макромоделей фільтрів, зокрема у вигляді чорного ящика і можуть бути передані в схемний редактор для подальшого моделювання.

У програмі виробляється апроксимація частотних характеристик ФНЧ, ФВЧ, ПФ і РФ за допомогою поліномів Баттерворта, Чебишева, еліптичних поліномів і поліномів Бесселя. Передбачений синтез фільтрів з амплітудно–частотними характеристиками довільного вигляду та синтез фазових коректорів. Можлива реалізація фільтрів на пасивних LC–колах, активних RC–фільтрів і фільтрів, що переключаються, на конденсаторах, тобто фільтрів, що обробляють дискретні відліки сигналів (тому вони ще мають назву дискретних фільтрів). Максимальний порядок фільтрів дорівнює 32 [7].

8.4 Контрольні запитання

- 1 Показники якості електронних систем.
- 2 Параметричний синтез та оптимізація – визначення, ціль.
- 3 Параметрична оптимізація – методика алгоритму.
- 4 Параметрична оптимізація – методика користувача.
- 5 Синтез аналогових фільтрів.
- 6 Показники якості електронної схеми.
- 7 Розрахунок коефіцієнтів чутливості.
- 8 Методика параметричної оптимізації.

8.5 Індивідуальні завдання

- 1 Синтез моделей.
- 2 Евристичні методи синтезу/ оптимізації.
- 3 Автоматизоване проектування ПЛІС.
- 4 Тенденції розвитку програм ECAD.
- 5 Історія розвитку програм ECAD.
- 6 Програми наскрізного проектування.
- 7 Математичне забезпечення програм конструкторського проектування.
- 8 Програми САЕ.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

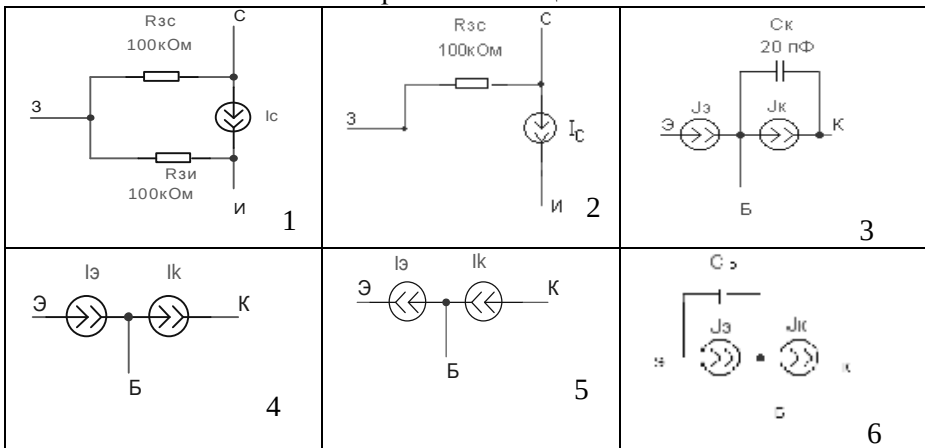
- 1 **Норенков, И.П.** Основы автоматизированного проектирования: учеб. для вузов [Текст] /И.П.Норенков. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. – 430 с.
- 2 **Бессонов, Л.А.** Теоретические основы электротехники [Текст] /Бессонов Л.А.–М.: Гардарики, 2002.– 638 с.
- 3 **Тугов, Н.Н.** Полупроводниковые приборы [Текст] /Н.Н.Тугов, Б.А.Глебов, Н.А.Чарыков – М.: Энергоиздат, 1990 – 676 с.
- 4 **Сигорский, В.П.** Основы анализа электронных схем [Текст] /В.П.Сигорский. – К.: Вища школа, 1971. – 567с.
- 5 **Дьяконов, В.П.** MATLAB 6/6.1/6.5 + SIMULINK 4/5 в математике и моделировании. Полное руководство пользователя [Текст] /В.П.Дьяков. М.: СОЛОН–Пресс. – 2003. – 576с.
- 6 Методичні вказівки до лабораторних занять з дисципліни “Моделювання в електроніці” для студентів спеціальності 6.050801 “Мікро- і наноелектроніка” денної і заочної форм навчання [Текст] / Укл.: О.В. Василенко,– Запоріжжя: ЗНТУ, 2011. – 50 с.
- 7 Micro-Cap 10, Analog and Digital Behavioral Modeling [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.spectrum-soft.com/demo/abm.shtml>
- 8 Компьютерный инжиниринг: учеб. пособие [Текст] / А. И. Боровков [и др.]. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 93 с.
- 9 ГОСТ 23501.101–87 «Системы автоматизированного проектирования. Основные положения» [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://protect.gost.ru/v.aspx?control=7&id=140533>

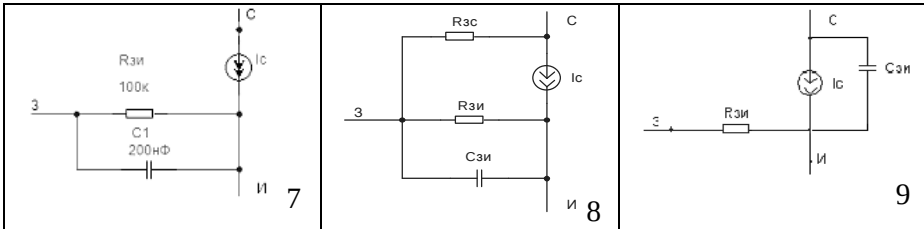
Додаток А

Варіанти до індивідуального домашнього завдання

№ варіанта	№ схеми заміщення	№ схеми	Прилад
1	1	2	малопотужний п-канальний
2	1	3	
3	2	3	
4	2	2	малопотужний п-канальний
5	8	1	малопотужний п-канальний
6	7	4	
7	9	4	
8	9	1	малопотужний п-канальний
9	7	1	малопотужний п-канальний
10	2	2	малопотужний п-канальний
11	3	6	
12	4	5	
13	5	7	малопотужний ррр
14	6	6	
15	3	8	
16	4	7	
17	6	8	

Номера схем заміщення





Номера схем

