

УДК 539.3

Д-р фіз.-мат. наук В. І. Пожуєв, Д. В. Грищак

Державна інженерна академія, м. Запоріжжя

НАБЛИЖЕНИЙ АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРО ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗМІННОЇ ЗА ЧАСОМ МАСИ ПРИ КОМБІНОВАНОМУ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

У роботі запропоновано наближений аналітичний розв'язок задачі про деформування оболонкової конструкції із змінними за часом параметрами при термосиловому динамічному зовнішньому навантаженні. Математична постановка задачі зводиться до необхідності інтегрування диференціального рівняння четвертого порядку у частинних похідних із змінними за часом коефіцієнтами.

Ключові слова: наближений аналітичний метод, асимптотичний підхід, ортотропна циліндрична оболонка, термосилове та динамічне навантаження, метод фазних інтегралів, диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами, чисельний аналіз.

З останніх досліджень оболонкових конструкцій при складному термосиловому навантаженні слід відмітити роботи [1, 2], в яких наводяться основні рівняння даної проблеми і розглянуто випадки, коли параметри оболонки не залежать від часу, а чисельна реалізація проводиться за умови максимальної величини q_{\max} у законі динамічного зовнішнього тиску. Таким чином, автори робіт відходять від необхідності вирішення проблеми інтегрування диференціального рівняння другого порядку із коефіцієнтами, залежними від часу, тобто від урахування залежності розв'язку задачі від закону зміни маси за часом та зовнішнього навантаження $q = q(t)$, що є принциповим для даного дослідження.

1 Постановка задачі. Основні залежності

У даній роботі розглядається деформування циліндричної оболонки із композиційного матеріалу зі змінними за часом маси та зовнішнього тиску при комбінованому термосиловому динамічному навантаженні (рис. 1).

Математична постановка задачі зводиться до необхідності інтегрування диференціального рівняння четвертого порядку у частинних похідних за координатами та неоднорідного диференційного рівняння другого порядку за змінними за часом коефіцієнтами.

На базі принципу Даламбера з урахуванням інерц-

ійних сил у напрямку нормальних переміщень середньої поверхні оболонки (напрямок Z) маємо

$$F_{\gamma}^n = \frac{\gamma(t)}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx dy, \quad (1)$$

де $\gamma(t)$ – питома вага матеріалу оболонки,
 g – прискорення сили ваги;

(при цьому обертання елемента $h dx dy$ відносно напрямків X, Y не враховується) можна записати основні залежності теорії пружних ортотропних оболонок.

Рівняння у проекції на нормаль до середньої поверхні оболонки записується у вигляді:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_x N_x + k_y N_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q(t) R \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\gamma(t)}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Враховуючи відсутність у рівняннях моментів членів, пов'язаних із інерцією обертання та інтегруючи члени вищого порядку малості будемо мати залежності:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_y = 0, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_x = 0. \quad (3)$$

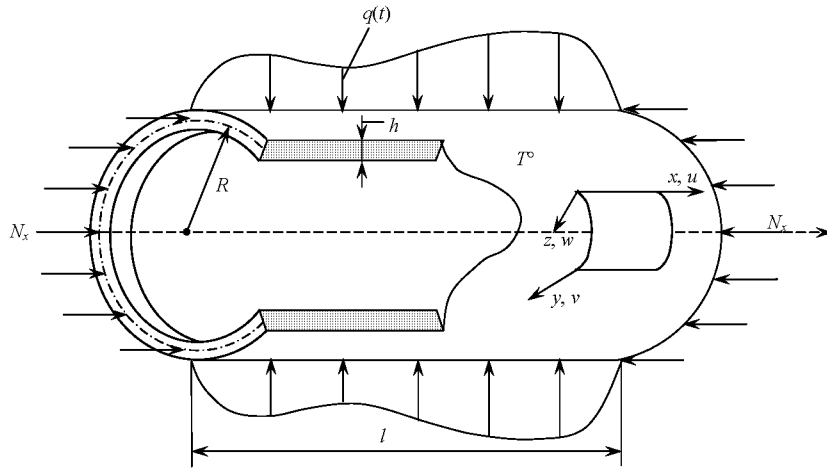


Рис. 1. Геометричні параметри та схема зовнішнього навантаження оболонки із композиційного матеріалу

Враховуючи залежності [3]:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y + C_{11}\delta_x + C_{12}\delta_y; \\ N_y &= B_{12}\varepsilon_x + B_{22}\varepsilon_y + C_{21}\delta_x + C_{22}\delta_y; \\ N_{xy} &= B_{33}\gamma_{xy} + C_{33}\chi_{xy}; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + D_{11}\delta_x + D_{12}\delta_y; \\ M_y &= C_{12}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + D_{21}\delta_x + D_{22}\delta_y; \\ M_{xy} &= C_{33}\gamma_{xy} + D_{33}\chi_{xy}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \delta_x &= \frac{\partial Q_x}{\partial x}; \quad \delta_y = \frac{\partial Q_y}{\partial y}; \quad \chi_{xy} = \frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x}; \\ Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \quad Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

та виключаючи Q_x і Q_y рівняння (2) за допомогою (4–6), здобуємо без урахування пружних хвиль і відсутності компонентів інтенсивності зовнішнього навантаження P_x і P_y , залишаючи лише $q(t)$, рівняння у вигляді:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + k_x N_x + \\ &+ k_y N_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q(t) R \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \\ &- \frac{\gamma(t)}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Для циліндричної оболонки кривизни $k_x = 0$, $k_y = \frac{1}{R}$, де R – радіус серединної поверхні оболонки.

Враховуючи в (7) залежності між моментами M_x , M_y , M_{xy} та нормальними переміщеннями точок серединної поверхні [1–2] основне диференціальне рівняння задачі має вигляд:

$$\begin{aligned} D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(2D + D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{z_1 w}{R^2} + \frac{z_2}{R} + \\ + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q(t) R \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\gamma(t)}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де N_x – статичне осьове зусилля;

$q(t)$ – динамічне зовнішнє навантаження;

$$\begin{aligned} D_x = D_{11} = \frac{B_{11} h^2}{12}; \quad D_y = D_{22} = \frac{B_{22} h^2}{12}; \\ D_{xy} = D_{12} = \frac{B_{12} h^2}{12}; \quad D = \frac{B_{33} h^2}{12}, \end{aligned} \quad (9)$$

B_{ij} – мембранні жорсткості пакета шарів, які визначаються через мембранні жорсткості кожного i -го шару композита з урахуванням кутів армування матеріалу φ_i .

Величина параметру жорсткості z_1 визначається як [1]:

$$z_1 = \frac{-\frac{B_{22}}{B_{11}} h E_x - h E_x}{1 - 2 \frac{B_{12}^2}{B_{11} B_{22}} + \frac{B_{12}^4}{B_{11}^2 B_{22}^2} - \frac{1}{B_{11}} h E_x + \frac{B_{12}^2}{B_{11} B_{22} h E_x}}. \quad (10)$$

Зовнішнє температурне навантаження T на оболонку задається параметром z_2 :

$$z_2 = \frac{-\frac{B_{12}}{B_{11}} h E_x T \sum_{i=1}^n \bar{h}_i \alpha_{xi} + h E_y T \sum_{i=1}^n \bar{h}_i \alpha_{yi}}{1 - 2 \frac{B_{12}^2}{B_{11} B_{22}} + \frac{B_{12}^4}{B_{11}^2 B_{22}^2} - \frac{1}{B_{11}} h E_x + \frac{B_{12}^2}{B_{11} B_{22}} h E_x} \quad (11)$$

де

$$E_x = B_{11} - \frac{B_{12}^2}{B_{22}}; \quad E_y = B_{22} - \frac{B_{12}^2}{B_{11}}. \quad (12)$$

Введемо безрозмірні параметри

$$W = \frac{w}{h}; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad \eta = \frac{y}{R}, \quad \tau = \frac{t}{t^*}, \quad (13)$$

де

$$t^* = \left(\frac{\gamma_0 h}{g D_x} \right)^{1/2}, \quad \gamma(t) = \gamma_0 \Phi(\tau).$$

З урахуванням (13), (14) основне диференціальне рівняння задачі буде мати вигляд

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \tilde{D}_{\xi\eta} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \tilde{D}_{\eta} \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + \tilde{z}_1 W + \tilde{z}_2 + \tilde{N}_{\xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \tilde{q}(\tau) \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \Phi(\tau) \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0, \quad (15)$$

де

$$\tilde{D}_{\xi\eta} = 2 \frac{l^2}{D_{\xi}} (2D + D_{\xi\eta}); \quad \tilde{D}_{\eta} = \frac{l^4}{R^4} \frac{D_{\eta}}{D_{\xi}}; \quad \Phi(\tau) = l^4 \varphi(\tau);$$

$$\tilde{z}_1 = \frac{l^4}{R^2 D_{\xi}} z_1; \quad \tilde{z}_2 = \frac{l^4}{R h D_{\xi}} z_2; \quad \tilde{N}_{\xi} = \frac{N_{\xi}}{D_{\xi}} l^2. \quad (16)$$

2 Розв'язок основного диференціального рівняння

Вважаючи краї оболонки шарнірно опертими, функція прогину $W(\xi, \eta, \tau)$ апроксимується у формі:

$$W(\xi, \eta, \tau) = f(\tau) \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_n \eta, \quad (17)$$

де $\lambda_m = m\pi$;

$\lambda_n = n$;

m – кількість півхвиль вздовж оболонки;

n – кількість хвиль вздовж окружної координати.

Підставляючи (17) у рівняння (15) здобуємо:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \left[\lambda_m^4 + \tilde{D}_{\xi\eta} \lambda_m^2 \lambda_n^2 + \tilde{D}_{\eta} \lambda_n^4 - \tilde{N}_{\xi} \lambda_m^2 - \tilde{q}(\tau) \lambda_n^2 + \tilde{z}_1 \right] f(\tau) + \Phi(\tau) f''(\tau) \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_n \eta = -\tilde{z}_2. \quad (18)$$

Після розкладу правої частини (18) \tilde{z}_2 у ряд по $\sin \lambda_m \xi \sin \lambda_n \eta$ одержимо:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \left[\lambda_m^4 + \tilde{D}_{\xi\eta} \lambda_m^2 \lambda_n^2 + \tilde{D}_{\eta} \lambda_n^4 - \tilde{N}_{\xi} \lambda_m^2 - \tilde{q}(\tau) \lambda_n^2 + \tilde{z}_1 \right] f(\tau) + \Phi(\tau) f''(\tau) = -\frac{16}{\pi^2 m n} \tilde{z}_2. \quad (19)$$

Рівняння (19) можна представити у формі

$$\Phi(\tau) f''(\tau) + \bar{x}(\tau) f(\tau) + A = 0, \quad (20)$$

де

$$\Phi(\tau) = l^4 \varphi(\tau), \quad A = \frac{16}{\pi^2 m n} \tilde{z}_2,$$

$$\bar{x}(\tau) = \lambda_m^4 + \tilde{D}_{\xi\eta} \lambda_m^2 \lambda_n^2 + \tilde{D}_{\eta} \lambda_n^4 - \tilde{N}_{\xi} \lambda_m^2 - \tilde{q}(\tau) \lambda_n^2 + z_1. \quad (21)$$

Тобто задача зводиться до інтегрування неоднорідного сингулярного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами:

$$\varepsilon^2 f''(t) + X(t) f = -\frac{A}{\Phi(\tau) \lambda_m^4}, \quad (22)$$

де $\varepsilon^2 = \frac{1}{\lambda_m^4}$ – малий параметр;

$$X(t) = \frac{1}{\Phi(\tau)} \times$$

$$\times \left[1 + \tilde{D}_{\xi\eta} \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} + \tilde{D}_{\eta} \frac{\lambda_n^4}{\lambda_m^4} - \tilde{N}_{\xi} \frac{1}{\lambda_m^2} - \tilde{q}(\tau) \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} + \frac{z_1}{\lambda_m^4} \right]; \quad (23)$$

$$Q(\tau) = -\frac{A}{\Phi(\tau) \lambda_m^4}. \quad (24)$$

У загальному випадку рівняння (22) не допускає точного розв'язку. Тому для одержання наближеного аналітичного розв'язку сингулярного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами (23) застосовується асимптотичний метод [5].

У відповідності до методу фазних інтегралів розв'язок однорідного рівняння (22) без правої частини представляється у вигляді

$$f_0(t) = \exp \int \psi(\tau) d\tau, \quad (25)$$

де

$$\psi(\tau) = \varepsilon^{-1} \psi_0 + \varepsilon^0 \psi_1 + \dots = \sum_{i=0}^n \varepsilon^{i-1} \psi_i(\tau),$$

і залишаючи перший член розкладу (25) будемо мати:

$$\varepsilon^0 : \psi_0^2 + X(\tau) = 0, \quad (27)$$

$$\psi_{0,1,2}(\tau) = \pm i X(\tau)^{1/2}. \quad (28)$$

Розв'язок однорідного рівняння (23) таким чином буде мати вигляд

$$f_0(\tau) = C_1 \sin K(\tau) + C_2 \cos K(\tau), \quad (29)$$

де

$$K(\tau) = \int \varepsilon^{-1} X^{1/2}(\tau) d\tau. \quad (30)$$

Для випадку неоднорідного рівняння (22) частинний розв'язок має вигляд:

$$f_p(\tau) = C_1(\tau)\sin K(\tau) + C_2(\tau)\cos K(\tau), \quad (31)$$

де $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ виявляються із залежностей:

$$C_1'(\tau) = -\frac{y_2(\tau)Q(\tau)}{\varepsilon^2 w(\tau)}; \quad C_2'(\tau) = \frac{y_1(\tau)Q(\tau)}{\varepsilon^2 w(\tau)}, \quad (32)$$

де $y_1(\tau) = \sin K(\tau)$; $y_2(\tau) = \cos K(\tau)$;

$$w(\tau) = y_1(\tau)y_2'(\tau) - y_2(\tau)y_1'(\tau) - \quad (33)$$

відповідний Вронскіан.

Враховуючи (31–3), одержимо:

$$\begin{aligned} w(\tau) &= -\sin K(\tau)\sin K(\tau) \cdot K'(\tau) - \\ & - \cos K(\tau)\cos K(\tau) \cdot K'(\tau) = \\ & = -K'(\tau)(\sin^2 K(\tau) + \cos^2 K(\tau)) = -K'(\tau); \quad (34) \end{aligned}$$

$$C_1'(\tau) = -\frac{\cos K(\tau)Q(\tau)}{\varepsilon^2 [-K'(\tau)]} = \frac{Q(\tau)}{\varepsilon^2 K'(\tau)} \cos K(\tau),$$

$$C_1(\tau) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int \frac{Q(\tau)}{K'(\tau)} \cos K(\tau) d\tau + \bar{C}_1; \quad (35)$$

$$C_2'(\tau) = \frac{\sin K(\tau)Q(\tau)}{\varepsilon^2 [-K'(\tau)]} = -\frac{Q(\tau)}{\varepsilon^2 K'(\tau)} \sin K(\tau),$$

$$C_2(\tau) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \int \frac{Q(\tau)}{K'(\tau)} \sin K(\tau) d\tau + \bar{C}_2. \quad (36)$$

З урахуванням (35), (36) загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння задачі має вигляд:

$$f(\tau) = \sin K(\tau)[I_1(\tau) + d_1] + \cos K(\tau)[I_2(\tau) + d_2], \quad (37)$$

де

$$d_1 = C_1 + \bar{C}_1, \quad d_2 = C_2 + \bar{C}_2, \quad (38)$$

$$I_1(\tau) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int \frac{Q(\tau)}{K'(\tau)} \cos K(\tau) d\tau,$$

$$I_2(\tau) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \int \frac{Q(\tau)}{K'(\tau)} \sin K(\tau) d\tau. \quad (39)$$

Початкові умови беруться у формі

$$f(0) = f'(0) = 0. \quad (40)$$

З урахуванням (40) розв'язок (37), отримаємо

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin K(0)[I_1(0) + d_1] + \cos K(0)[I_2(0) + d_2] = 0, \\ d_1 \sin K(0) + d_2 \cos K(0) &= -I_1(0)\sin K(0) - I_2(0)\cos K(0). \quad (41) \end{aligned}$$

Звідки залежність між константами дається виразом

$$d_1 = -d_2 \frac{\cos K(0)}{\sin K(0)} - I_1(0) - I_2(0) \frac{\cos K(0)}{\sin K(0)}. \quad (42)$$

За другою початковою умовою одержимо

$$\begin{aligned} f'(\tau) &= K'(\tau)\cos K(\tau)[I_1(\tau) + d_1] + \sin K(\tau)[I_1'(\tau)] - \\ & - K'(\tau)\sin K(\tau)[I_2(\tau) + d_2] + \cos K(\tau)[I_2'(\tau)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= K'(0)\cos K(0)[I_1(0) + d_1] + \sin K(0)I_1'(0) - \\ & - K'(0)\sin K(0)[I_2(0) + d_2] + \cos K(0)I_2'(0) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -d_2 \frac{K'(0)}{\sin K(0)} &= -\sin K(0)I_1'(0) - \\ & - \cos K(0)I_2'(0) + I_2(0) \frac{K'(0)}{\sin K(0)}; \quad (43) \end{aligned}$$

$$d_2 = +\frac{\sin^2 K(0)}{K'(0)} I_1'(0) + \frac{\sin K(0)\cos K(0)}{K'(0)} I_2'(0) - I_2(0); \quad (44)$$

$$d_1 = -\frac{\sin K(0)\cos K(0)}{K'(0)} I_1'(0) - \frac{\cos^2 K(0)}{K'(0)} I_2'(0) - I_1(0). \quad (45)$$

Загальний розв'язок рівняння (23) таким чином отримуємо у формі:

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \sin K(\tau) \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \int \frac{Q(\tau)}{K'(\tau)} \cos K(\tau) d\tau - \right. \\ & \left. - \frac{\cos^2 K(0)}{k'(0)} \left[\operatorname{tg} K(0) \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{Q(0)}{K'(0)} \cos K(0) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{Q(0)}{K'(0)} \sin K(0) - I_1(0) \right] \right\} + \\ & + \cos K(\tau) \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \int \frac{Q(\tau)}{K'(\tau)} \cos K(\tau) d\tau + \right. \\ & \left. + \frac{\sin^2 K(0)}{K'(0)} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{Q(0)}{K'(0)} \cos K(0) - \right. \\ & \left. - \frac{\sin K(0)\cos K(0)}{K'(0)} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{Q(0)}{K'(0)} \sin K(0) - I_2(0) \right\}; \end{aligned}$$

$$f(\tau) = \sin K(\tau)[I_1(\tau) - I_1(0)] + \cos K(\tau)[I_2(\tau) - I_2(0)] \quad (46)$$

Необхідно зауважити, що початкові умови при цьому виконуються

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin K(0)[I_1(0) - I_1(0)] + \\ & + \cos K(0)[I_2(0) - I_2(0)] = 0; \\ f'(0) &= K'(0)\cos K(0) \cdot 0 + \\ & + \sin K(0)I_1'(0) - 0 + \cos K(0)I_2'(0) = 0. \quad (47) \end{aligned}$$

У прийнятих позначеннях і початкових умовах параметр функції нормального прогину набуває вигляду:

$$W(\xi, \eta, \tau) = \left\{ \begin{array}{l} \sin K(\tau)[I_1(\tau) - I_1(0)] + \\ + \cos K(\tau)[I_2(\tau) - I_2(0)] \end{array} \right\} \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_n \eta. \quad (48)$$

Розв'язок (48) надає можливість обчислити функцію прогину оболонки в залежності від параметрів $X(\tau)$ та \tilde{Z}_2 , які включають вплив жорсткісних параметрів оболонки, статичного осевого зусилля \tilde{N}_ξ , зовнішнього динамічного навантаження $\tilde{q}(\tau)$ та температури T .

Для оболонки з незалежними від часу параметрами та зовнішнього навантаження розв'язок (46) має вигляд:

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \sin K\tau \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{Q}{K^2} \sin K\tau + d_1 \right] + \\ &+ \cos K\tau \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{Q}{K^2} \cos K\tau + d_2 \right] = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{Q}{K^2} + d_1 \sin K\tau + d_2 \cos K\tau. \end{aligned} \quad (49)$$

При початкових умовах (40) одержимо

$$d_1 = 0, \quad d_2 = -\frac{Q}{K^2} = -\frac{A}{X\lambda_m^4}. \quad (50)$$

Загальний розв'язок у цьому випадку має вигляд:

$$W(\xi, \eta, \tau) = \frac{A}{X\lambda_m^4} (\cos K\tau - 1) \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_n \eta. \quad (51)$$

Необхідно зауважити, що розв'язок (51), що задовольняє основному диференціальному рівнянню та початковим умовам, відрізняється, від розв'язку, наданому у роботі [1].

3 Чисельна реалізація. Порівняння основних залежностей від параметрів оболонки та зовнішнього навантаження, не залежних від часу

З урахуванням (42)

$$W(\xi, \eta, \tau) = \frac{A}{K^2} (\cos K\tau - 1) \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_n \eta$$

маємо при

$$\xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{1}{2}. \quad (52)$$

Характерні залежності для параметру нормального прогину у даному випадку наведені на рис. 2–5.

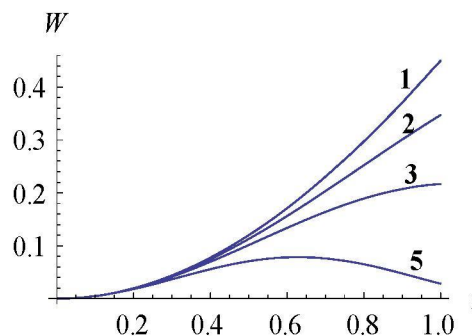


Рис. 2. Залежність параметру нормального прогину оболонки в заданій точці серединної поверхні при $A = 1$, $K = 1, 2, 3, 5$

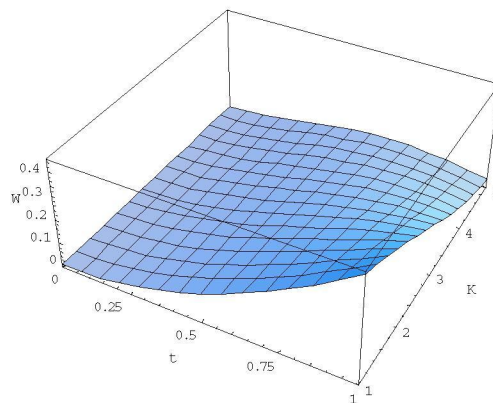


Рис. 3. Залежність деформації оболонки від параметрів K і часу

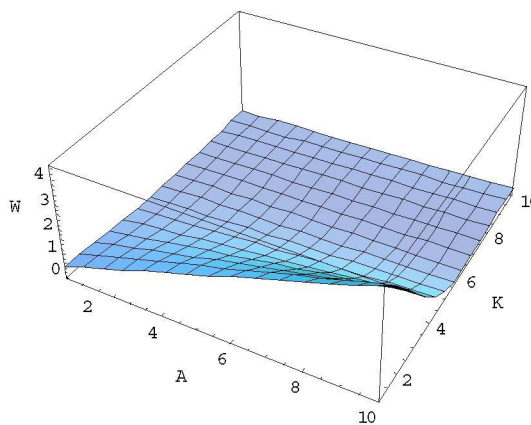


Рис. 4. Залежність деформації оболонки від амплітуди A і параметру K при $\tau = 1$

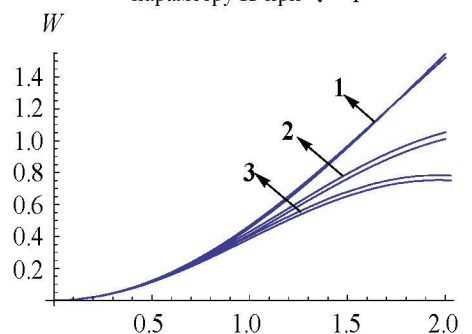


Рис. 5. Порівняння запропонованого аналітичного та прямого чисельного розв'язків для параметрів $A = 1, K = 1, q_0 = 0,1$ для випадків: 1) $q_{\max}, \tau = 2$; 2) $q = q_0\tau, \tau = 2$; 3) $q = q_0\tau, \tau = 3$

У випадку, коли на оболонку діє зовнішній тиск, залежний від часу, наприклад, за законом $q(t) = q_0 t$, основний розв'язок задачі береться у вигляді (48). З урахуванням початкових умов (40) константи d_1 і d_2 знаходяться відповідним чином у вигляді формул (44), (45). У цьому конкретному випадку різниця між розв'язком, наданим у роботах [1–2] для q_{\max} і запропонованими у даній роботі розв'язками полягає у принципово різних залежностях для функції $K(t)$, що суттєво впливає на характер деформування оболонки. Як видно з порівняльного аналізу (рис. 5), розрахунок за методикою q_{\max} дає похибку у 34,5 % при $\tau = 2$, у порівнянні з підходом, запропонованим у даній роботі.

Висновки

У даній роботі запропоновано наближений аналітичний розв'язок задачі про поведінку ортотропної циліндричної оболонки з параметрами маси, залежними від часу, при комбінованому термосиловому динамічному зовнішньому навантаженні. На базі комп'ютерної алгебри із застосуванням програмного комплексу «Mathematica» надано у чисельний аналіз впливу параметрів оболонки та зовнішнього навантаження на характер деформування ортотропної конструкції.

Пожуев В.И., Грищак Д.В. Приближенное аналитическое решение задачи деформирования ортотропной цилиндрической оболочки переменной во времени массы при комбинированном термосиловом нагружении

В работе предложено приближенное аналитическое решение задачи деформирования оболочечной конструкции переменной во времени параметрами при термическом и силовом динамическом внешнем нагружении. Математическая постановка задачи сводится к необходимости интегрирования дифференциального уравнения четвертого порядка в частных производных с переменными во времени коэффициентами.

Ключевые слова: *приближенный аналитический метод, асимптотический подход, ортотропная цилиндрическая оболочка, термосиловое и динамическое нагружение, метод фазовых интегралов, дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, численный анализ.*

Pozhuyev V., Gristchak D. An approximate analytical solution of deformable state problem of the orthotropic cylindrical shell with variable on time mass under combined thermoforced loading

The approximate analytical solution of deformation problem of shell structure with variable on time parameters under the thermal and forced dynamic external loading is offered. Mathematical problem connected with the necessity of partial differential fourth order equation with variable on time coefficients integration.

Key words: *Approximate analytical method, asymptotic approach, orthotropic cylindrical shell, thermoforced and dynamic loading, phase integral method, differential equations with variable coefficients, numerical analysis.*

Список літератури

1. Ларичев Е. А. Определение критической динамической нагрузки композиционной оболочки при сложном термосиловом нагружении [Электронный ресурс] / Е. А. Ларичев, В. С. Сафронов, И. К. Туркин // «Труды МАИ», Московский авиационный институт (государственный технический университет). – 25.04.2007. – Вып. 27. – С. 1–11.
2. Ларичев Е. А. Исследование несущей способности композиционной оболочки при действии статического и динамического внешнего давления, неравномерного нагрева и осевого сжатия / Е. А. Ларичев, В. С. Сафронов, И. К. Туркин : материалы 17 научно-технической конференции / Конструкции и технологии получения изделий из неметаллических материалов. – Обнинск, 2004. – С. 140–141.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М. : Наука, 1961. – 384 с.
4. Пожуев В. И. Приближенный аналитический метод анализа колебаний конструкций с массой, не периодически зависящей от времени / В. И. Пожуев, Д. В. Грищак // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2009. – Вип. 10. – С. 240–246.

Одержано 20.01.2011