МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

ДИДАКТИЧНІ МАТЕРІАЛИ

ДО ЛЕКЦІЙНИХ ЗАНЯТЬ З КУРСУ «ФІЗИКА»

ДЛЯ СТУДЕНТІВ ПРИСКОРЕНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

Частина 1. Механіка

Запоріжжя
2016

Дидактичні матеріали до лекційних занять з курсу «Фізика» для студентів прискореної форми навчання. Частина 1. Механіка / Укладач: О.А. Лозовенко. — Запоріжжя, ЗНТУ, 2016. — 94 с.

Укладач: О.А. Лозовенко, доцент, к.пед.н.

Рецензент: О.І. Іваницький, професор, д.пед.н.

Відповідальний
за випуск: О.А. Лозовенко, доцент, к.пед.н.

Затверджено
на засіданні
кафедри фізики

Протокол № 4 від 18.12.2015

ЗМІСТ

ВСТУП

Головною метою даного навчального посібника є надання студентам максимально докладної інформації щодо організації їхньої самостійної роботи протягом вивчення першої частини курсу фізики — механіки. Посібник містить декілька типів дидактичних матеріалів, робота з якими є для студентів вкрай необхідною для засвоєння принаймні основного теоретичного матеріалу курсу.

По-перше, до кожної лекції надається список *рекомендованих для читання матеріалів*: як правило, це параграфи навчальних посібників та підручників, які нескладно отримати в електронному або паперовому варіанті, звернувшись до бібліотеки університету. У деяких випадках після переліку матеріалів наведені так звані *запитання для роздумів* — відповіді на них не такі очевидні, як може знатися на перший погляд. Отже, раджу подумати.

По-друге, також до кожної лекції, у посібнику наведені *слайди із запитаннями для відпрацювання необхідних навичок*. Звертаємо увагу на те, що зазвичай у підручниках не виокремлюють ту частину теоретичного матеріалу, яка могла б бути відтворена математично підготовленим студентом власноруч, якщо б ця частина якимсь чином зникла з книги. Оскільки навички самостійного одержання логіко-математичних наслідків з основ теорії мають доволі універсальний характер і можуть застосовуватися у найрізноманітніших випадках, робота з цими слайдами є дуже важливою.

По-третє, звертаємо увагу на наявність дев'яти обов'язкових *домашніх завдань*, тексти яких містяться у посібнику після матеріалів до лекційних занять. Передбачається, що кожен студент самостійно роздруковує бланк завдання, виконує його та здає викладачу. Терміни здачі домашніх завдань вказані на наступних сторінках разом із загальним планом курсу.

Якщо читачі помітять у даному посібнику помилки або інші недоліки, то буде більш ніш доречним повідомити про це електронною поштою (loks@zntu.edu.ua).

ПЛАН КУРСУ

<table>
<tr><th rowspan="7">Змістовий модуль 1.
Механіка матеріальної точки та математичний апарат фізики</th><th>№</th><th>Зміст лекцій</th><th>Завдання, яке необхідно ЗДАТИ перед лекцією</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Вступ. Завдання та особливості курсу. Поняття матеріальної точки. Координата, шлях, переміщення, швидкість матеріальної точки. Похідна.</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Прискорення матеріальної точки. Рівноприскорений рух. Первісна та визначений інтеграл.</td><td>Домашнє завдання №1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Поняття маси і сили. Закони Ньютона. Сили в природі (тяжіння, гравітаційна, пружності, тертя). Основні властивості векторів.</td><td>Домашнє завдання №2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Застосування законів Ньютона. Основні типи задач з динаміки. Правило трьох векторів.</td><td>Домашнє завдання №3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Поняття імпульсу тіла. Закон збереження імпульсу.
Зіткнення. Центр мас. Реактивний рух. Рівняння Мещерського. Формула Ціолковського.</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>Робота, її розрахунок за допомогою визначеного інтеграла. Кінетична енергія. Потенціальна енергія, її зв'язок із силою. Закон збереження енергії.</td><td>Домашнє завдання №4</td></tr>
</table>

Змістовий модуль 2. Застосування основних законів механіки до розгляду вибраних фізичних задач	**7**	Ряд Маклорена. Розвинення у ряд Маклорена деяких елементарних функцій. Апроксимація фізичних залежностей за допомогою ряду Маклорена. Перевірка відповіді фізичної задачі на граничний випадок.	Домашнє завдання №5
	8	Рівномірний рух по колу, полярна система координат і основні властивості тригонометричних функцій. Кутова швидкість і кутове прискорення. Нормальне і тангенціальне прискорення.	Домашнє завдання №6
	9	Кінетична енергія тіла, що обертається, момент інерції, теорема Гюйгенса-Штейнера.	
	10	Гармонічні коливання пружинного та математичного маятників і диференціальне рівняння другого порядку.	Домашнє завдання №7
	11	Рух фізичного маятника. Згасаючі коливання.	Домашнє завдання №8
	12	Вимушені коливання. Резонанс амплітуди та резонанс швидкості.	Домашнє завдання №9

СЛАЙДИ ТА ІНШІ МАТЕРІАЛИ ДЛЯ РОБОТИ НАД ТЕМАМИ ЛЕКЦІЙ

Лекція 1. Поняття матеріальної точки. Координата, шлях, переміщення, швидкість матеріальної точки. Похідна

Рекомендовані для читання матеріали

1. Соколов Є.П. Екзаменаційна фізика (див. [4]).

I.1. Елементарні поняття кінематики.

I.2. Швидкість. Середня та миттєва швидкість.

2. Мінаєв Ю.П. Математичний апарат фізики для першокурсників (див. [2]).

1.1. Зв’язок між швидкістю змінення значень функції та кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка.

1.2. Формальні означення та деякі властивості похідної та первісних.

1.3. Доведення формули для похідної функції $y = x^n \ (n \in N)$ різними способами (методом математичної індукції та за допомогою бінома Ньютона).

3. Савельєв І.В. Курс загальної фізики (див. [3]).

§1. Механічний рух

§2. Деякі відомості про вектора.

§3. Швидкість.

4. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики (див. [1]).

§1.1. Механічний рух. Уявлення про простір і час у класичній механіці. Кінематичний опис.

§1.2. Основні види руху твердих тіл.

§1.3. Вектор переміщення. Швидкість.

Слайди із запитаннями для відпрацювання необхідних навичок[1]

ПОХІДНА І ПЕРВІСНІ. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ

?1 Розгляньте функцію $y'(x)$, яка породжується функцією $y(x)$ за таким формальним означенням (дефініцією):

$$y'(x) \overset{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ де } \Delta y = y(x+\Delta x) - y(x).$$

Знайдіть за цим означенням ***похідну*** функції $y = 3x^2 + 5x + 4$.

?2 Доведіть такі загальні властивості похідних:

а) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; б) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

в) $(C\cdot f(x))' = C\cdot f'(x)$, де C — довільна константа.

Примітка. Крім означення похідної доведеться скористатися такими інтуїтивно зрозумілими властивостями границь функцій:

а) $\lim\limits_{\xi\to 0}(U(\xi)+V(\xi)) = \lim\limits_{\xi\to 0}U(\xi)+\lim\limits_{\xi\to 0}V(\xi)$; б) $\lim\limits_{\xi\to 0}(U(\xi)\cdot V(\xi)) = \lim\limits_{\xi\to 0}U(\xi)\cdot\lim\limits_{\xi\to 0}V(\xi)$;

в) $\lim\limits_{\xi\to 0}(C\cdot U(\xi)) = C\cdot\lim\limits_{\xi\to 0}U(\xi)$.

?3 Функція $F(x)$ називається ***первісною*** функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$. Скільки первісних може бути в однієї функції? Чим вони відрізняються одна від одної?

Для функції $f(x) = 4x-3$ знайдіть три її первісних, таких, що $F_1(0)=2$; $F_2(0)=-1$, $F_3(0)=0$.

[1] Пояснення та відповіді до цього та наступного слайдів Ви можете знайти у [9-12].

Лекція 2. Прискорення матеріальної точки. Рівноприскорений рух. Первісна та визначений інтеграл

Рекомендовані для читання матеріали

1. Соколов Є.П. Екзаменаційна фізика (див. [4]).
I.3. Прискорення.

2. Мінаєв Ю.П. Математичний апарат фізики для першокурсників (див. [2]).
1.5. Визначений інтеграл і приріст первісної.
1.6. Застосування ідеї інтегрування для обчислення площ та об'ємів геометричний об'єктів, а також роботи силового поля у випадку прямолінійного руху матеріальної точки.

3. Савельєв І.В. Курс загальної фізики (див. [3]).
§4. Прискорення.

4. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики (див. [1]).
§1.4. Прискорення.

5. Математичний апарат фізики: методичні вказівки (див. [9]).
Тема 2. Первісна та визначений інтеграл
«Слайди» з обов'язковими завданнями (С. 20-22).
Відповіді до «слайдів» теми 2 (С. 23-25).
Завдання для самоперевірки (С. 26-30).

Який шлях пройшло тіло за 15 с при рівноприскореному русі, якщо його початкова швидкість 20 м/с, а прискорення, що дорівнює за модулем 4 м/с^2, спрямоване протилежно початковій швидкості?

Підказка: якщо Ви просто підставите числові дані у формулу $l = \upsilon_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, то отримаєте ***неправильну*** відповідь.

Слайди із запитаннями для відпрацювання необхідних навичок

ПЕРША І ДРУГА ПОХІДНА ЗА ЧАСОМ НА ПРИКЛАДІ РІВНОПРИСКОРЕНОГО РУХУ

Швидкість руху матеріальної точки вздовж осі OX $\upsilon_x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ є ***похідною*** координати за часом $\dfrac{dx}{dt}$, яку часто позначають як $\dot{x}$ (над x ставлять точку). Зрозуміло, що при збільшенні x з часом $\upsilon_x > 0$. Природно характеризувати швидкість зміни величини υ_x її похідною за часом $\dfrac{d\upsilon_x}{dt} \equiv \dot{\upsilon}_x$. Цю характеристику називають прискоренням і позначають a_x. Вона вважається другою похідною координати за часом: $\dfrac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x}$.

Наразі будемо розглядати ***рівноприскорений рух***, у якому вважається, що прискорення не залежить від часу $\left(a_x = \mathrm{const}\right)$.

?1 Знайдіть залежність $\upsilon_x(t)$, якщо відомо, що $\upsilon_x(0) = \upsilon_{x0}$, а незмінне прискорення дорівнює a_x.

?2 За тих же умов знайдіть $x(t)$, якщо додатково відомо, що $x(0) = x_0$.

?3 Матеріальна точка рухається так, що: 1) $x(t) = 2t^2 - 4t + 1$; 2) $x(t) = t^2 + 2t - 3$. Вважаючи, що $t \ge 0$, а коефіцієнти задані в SI, для обох випадків виконайте такі завдання: а) знайдіть x_0, υ_{x0}, a_x; б) побудуйте графіки $\upsilon_x(t)$, $x(t)$; в) запишіть рівняння дотичної до графіка $x(t)$ у точці $(0; x_0)$ у вигляді $\tilde{x}(t) = A + Bt$. Який фізичний зміст сталих A і B?

ВІД ПОХІДНОЇ ТА ПЕРВІСНОЇ ДО ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

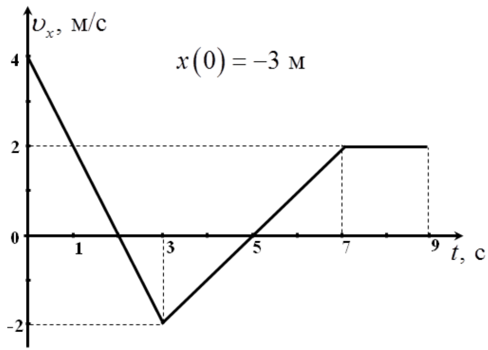
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \Rightarrow \qquad \int f(x)\,dx = \ ?1$$

$$\int_0^2 \sqrt{x(2-x)}\,dx = \ ?2$$ **Підказка**. Згадайте про геометричний зміст визначеного інтеграла.

?3 Доведіть, що $x(t_2)-x(t_1)=\dfrac{\upsilon_x^2(t_2)-\upsilon_x^2(t_1)}{2a_x}=\dfrac{\upsilon_x(t_2)+\upsilon_x(t_1)}{2}\cdot(t_2-t_1)$,

якщо $\dot{x}=\upsilon_x$, $\dot{\upsilon}_x=a_x=\text{const}$.

?4



Побудуйте графіки прискорення $a_x(t)$ і координати $x(t)$ при $t\in[0;9]$ с. Дайте відповіді на такі запитання:

а) Чи є у цих графіків розриви, злами?

б) Які мінімальне і максимальне значення координати на цьому проміжку часу?

в) Які розв'язки рівняння $x(t)=0$ належать проміжку $[0;9]$ с?

Лекція 3. Поняття маси і сили. Закони Ньютона. Сили в природі. Основні властивості векторів

Рекомендовані для читання матеріали

1. Соколов Є.П. Екзаменаційна фізика (див. [4]).

I.4. Дві таємниці векторів.
II.1. Закони Ньютона.
II.2. Спогади про силу тяжіння, силу реакції опори, вагу тіла.
II.3. Сили в природі.
II.4. Закон всесвітнього тяжіння.
II.5. Сила пружності. Закон Гука.
II.7. Сила тертя.

2. Мінаєв Ю.П. Математичний апарат фізики для першокурсників (див. [2]).

2.5. Вибір базису векторів при розв’язуванні задач з механіки.

3. Савельєв І.В. Курс загальної фізики (див. [3]).

§7. Перший закон Ньютона. Інерціальні системи відліку.
§8. Маса та імпульс тіла.
§9. Другий закон Ньютона.
§11. Третій закон Ньютона.
§14. Пружні сили.
§15. Сили тертя.

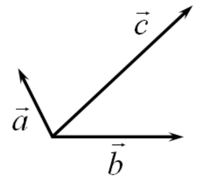
4. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики (див. [1]).

§2.1. Межі застосування класичної механіки.
§2.2. Перший закон Ньютона. Інерціальні системи відліку.

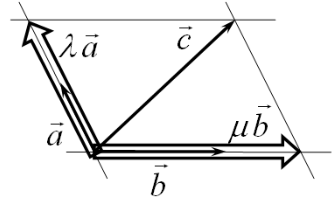
Слайди із запитаннями для відпрацювання необхідних навичок

РОЗКЛАДАННЯ ВЕКТОРА НА ПЛОЩИНІ ЗА ДВОМА НЕКОЛІНЕАРНИМИ ВЕКТОРАМИ

Теорема: будь-який вектор $\vec{c}$ на площині може бути представлений, і причому єдиним способом, у вигляді лінійної комбінації двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

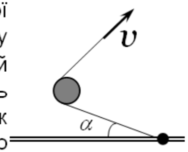


$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}.$$

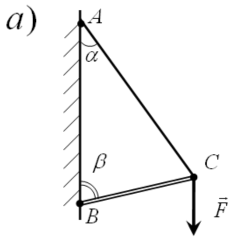


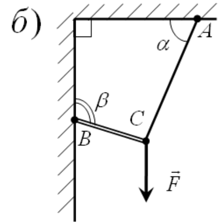
?1 Доведіть, що таке представлення вектора $\vec{c}$ є єдиним, скориставшись методом доведення від супротивного.

?2 Бусинка може рухатись вздовж напрямної під дією нитки, перекинутої через блок, яку тягнуть з постійною швидкістю $\boldsymbol{v}$ за вільний кінець так, щоб вона не провисала. Знайдіть швидкість бусинки у момент, коли кут між напрямною та відрізком нитки, що знаходиться між бусинкою та блоком, дорівнює α.



?3 До стержня *BC*, який притримується тросом *AC*, у точці *C* прикладена вертикальна сила *F*. Визначте силу стиснення (розтягнення) стержня *BC* та силу натягу троса *AC*. Трос та стержень вважати невагомими, кути α та β – заданими.





Лекція 4. Застосування законів Ньютона. Основні типи задач з динаміки. Правило трьох векторів

Рекомендовані для читання матеріали

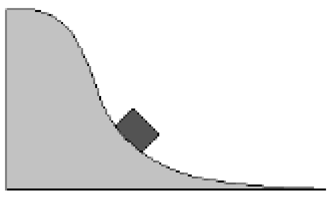
1. Соколов Є.П. Екзаменаційна фізика (див. [4]).
III.3. "Правило трьох векторів".

2. Мінаєв Ю.П. Математичний апарат фізики для першокурсників (див. [2]).
2.5. Вибір базису векторів при розв'язуванні задач з механіки.

3. Савельєв І.В. Курс загальної фізики. (див. [3]).
§17. Практичне застосування законів Ньютона.

4. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики (див. [1]).
§2.7. Деякі наслідки законів Ньютона.

Візок скочується з гірки так, як показано на рисунку. Коли візок буде знаходитися у положенні, вказаному на рисунку, проекції швидкості та прискорення на напрям руху у порівнянні з початковими значеннями…

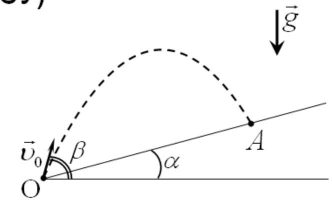


А) зменшаться;
Б) швидкість зменшиться, але прискорення зросте;
В) залишаться сталими;
Г) швидкість збільшиться, але прискорення зменшиться;
Д) збільшаться.
Е) інша комбінація.

Слайди із запитаннями для відпрацювання необхідних навичок

ПОРІВНЯННЯ ТРЬОХ СПОСОБІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ КІНЕМАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ (ВИБІР БАЗИСУ)

Умова задачі. З мінометa обстрілюють об'єкти, які розташовані на схилі гори. На якій відстані від міномета будуть падати міни, якщо їх початкова швидкість υ_0, кут нахилу гори α, а кут обстрілу по відношенню до горизонту β (див. рис.).



?1 Розв'яжіть задачу в системі координат, де вісь Ox є горизонтальною, а Oy — вертикальною. У цій системі траєкторія міни буде параболою, вісь симетрії якої паралельна осі ординат. Точка A є точкою перетину цієї параболи з прямою, що проходить через початок координат і утворює кут α з віссю Ox.

?2 Розв'яжіть задачу, спрямувавши вісь Ox через точку A (під кутом α до горизонту), а вісь Oy — перпендикулярно до Ox. Тоді значення проекцій початкової швидкості будуть такими: $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos(\beta - \alpha)$ і $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin(\beta - \alpha)$. А проекції прискорення такими: $a_x = -g\sin\alpha$ і $a_y = -g\cos\alpha$.

?3 Формулу $\vec{r}(t) = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$ можна розглядати як розклад змінного вектора $\vec{r}(t)$ за неколінеарними сталими векторами $\vec{\upsilon}_0$ і $\vec{g}$. Якщо τ — час польоту міни, то $\vec{r}(\tau) = \overrightarrow{OA}$. Накресліть вектори $\vec{r}(\tau)$ і $\vec{\upsilon}_0\tau$, розпочинаючи їх з точки O, а вектор $\frac{\vec{g}\tau^2}{2}$ — так, щоб наведені вектори утворили трикутник. Скористайтеся теоремою синусів.

Лекція 5. Поняття імпульсу тіла. Закон збереження імпульсу та його застосування

Рекомендовані для читання матеріали

1. Соколов Є.П. Екзаменаційна фізика (див. [4]).
III.1. Закон збереження імпульсу.

2. Д.І. Анпілогов. Методичні вказівки до практичних занять з теми «Центр мас і його застосування» (див. [6]).

2. Мінаєв Ю.П. Математичний апарат фізики для першокурсників (див. [2]).
3.2. Показникова та логарифмічна функції як взаємно обернені.
3.3. Від властивостей степенів до властивостей логарифмів.

3. Савельєв І.В. Курс загальної фізики (див. [3]).
§27. Закон збереження імпульсу.
§28. Зіткнення двох тіл.

4. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики (див. [1]).
§2.3. Маса. Імпульс.
§2.5. Третій закон Ньютона і закон збереження імпульсу.
§2.8. Рух тіл змінної маси. Реактивний рух.

5. Сівухін Д.В. Загальний курс фізики. Механіка (див. [13]).
§21. Рух тіл зі змінною масою. Реактивний рух.

6. Зельдович Я.Б. Вища математика для початківців (див. [8]).
VI. §13. Реактивний рух і формула К.Е. Ціолковського.

Слайди із запитаннями для відпрацювання необхідних навичок

РЕАКТИВНИЙ РУХ

Якщо на ракету діє лише постійна сила реактивного двигуна, то $\left(m_0 - \mu t\right)\dfrac{d\upsilon}{dt} = \mu u$, де μ — маса речовини, що викидається двигуном за одиницю часу зі швидкістю u відносно ракети.

Знайдіть залежність швидкості ракети від часу, вважаючи, що $\upsilon\left(0\right) = 0$, а m_0, μ і u — константи. Побудуйте графік $\upsilon(t)$. Запишіть рівняння дотичної до графіка $\upsilon(t)$ у точці з $t = 0$. Проаналізуйте результат з точки зору адекватності прийнятої моделі.

Перевірте, чи можете Ви з формули $M_0 = M \cdot e^{\frac{\upsilon - \upsilon_0}{u}}$ виразити $\upsilon\left(M_0\right)$, вважаючи M, υ_0 і u відомими параметрами.

Розв'яжіть таке рівняння:

$$u \ln\left(1 - \frac{\mu t}{M_0}\right) = \upsilon_0 - \upsilon \Rightarrow \mu\left(u, M_0, \upsilon, \upsilon_0, t\right) - ?$$

Лекція 6. Робота, кінетична та потенціальна енергія. Закон збереження енергії

Рекомендовані для читання матеріали

1. Соколов Є.П. Екзаменаційна фізика (див. [4]).

III.2. Закон збереження енергії.

2. Мінаєв Ю.П. Математичний апарат фізики для першокурсників (див. [2]).

1.6. Застосування ідеї інтегрування для обчислення площ та об'ємів геометричних об'єктів, а також роботи силового поля у випадку прямолінійного руху матеріальної точки.

2.6. Приклади застосування двох представлень скалярного добутку векторів.

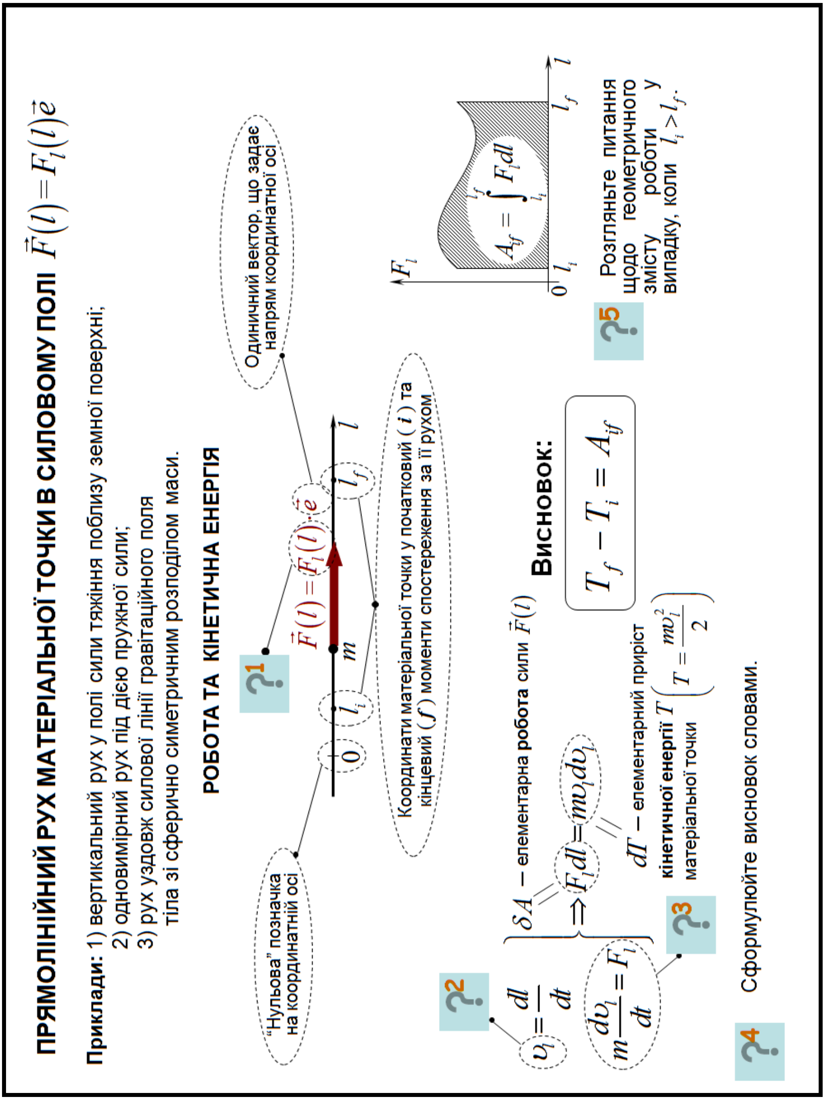
3. Савельєв І.В. Курс загальної фізики (див. [3]).

§19. Кінетична енергія.
§20. Робота.
§21. Консервативні сили.
§22. Потенціальна енергія у зовнішньому полі сил.
§23. Потенціальна енергія взаємодії.
§24. Закон збереження енергії.

4. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики (див. [1]).

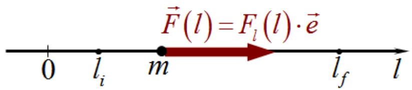
§3.1. Енергія — універсальна міра руху та взаємодії.
§3.2. Робота і потужність.
§3.3. Кінетична енергія. Види механічних сил.
§3.4. Потенціальна енергія системи.
§3.5. Закон збереження енергії в механіці. Дисипація енергії.

Слайди із запитаннями
для відпрацювання необхідних навичок



ПРЯМОЛІНІЙНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ В ПОЛІ СИЛИ $\vec{F}(l)=F_l(l)\vec{e}$

РОБОТА ТА ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ



Обчисліть роботу A_{if} сили $\vec{F}(l)$ під час переміщення з точки з координатою l_i у точку з координатою l_f для випадків:

?1 $F_l(l)=-mg$?2 $F_l(l)=-kl$?3 $F_l(l)=-G\dfrac{Mm}{l^2}$

?4 Яким силовим полям відповідають наведені вище формули? Куди направлена координатна вісь у кожному з цих випадків? Де на координатній осі знаходиться "нуль"?

Для силового поля виду $\vec{F}(l)=F_l(l)\cdot\vec{e}$ можна ввести таку функцію $U(l)$, що $A_{if}=U(l_i)-U(l_f)$. Її називають **потенціальною енергією** матеріальної точки у силовому полі. Зрозуміло, що під час руху, принаймні у таких полях, буде зберігатися сума кінетичної і потенціальної енергії. Таку суму називають **повною механічною енергією** $E=T+U$.

?5 Доведіть твердження щодо збереження повної механічної енергії.

?6 Запишіть вирази для потенціальної енергії $U(l)$ у кожному з розглянутих випадків, враховуючи, що для однозначності функції $U(l)$ треба вибрати точку, в якій потенціальна енергія набуває певного значення (наприклад, нульового). Вважайте, що для (1) і (2) $U(0)=0$, а для (3) $U(\infty)=0$.

Лекція 7. Ряд Маклорена та його застосування у фізиці

Рекомендовані для читання матеріали

1. Мінаєв Ю.П. Математичний апарат фізики для першокурсників (див. [2]).

1.7. Ряд Маклорена для функції $y = (1+x)^{\alpha}$ і приклади наближення деяких фізичних залежностей багаточленами.

4.3. Ряд Маклорена для функцій $y = e^x$ і $y = \ln(1+x)$.

4.4. Ряд Маклорена для тригонометричних і обернених тригонометричних функцій.

4.5. Виникнення потреби в показникових і логарифмічних функціях при спробі математично описати деякі фізичні процеси.

2. Математичний апарат фізики: методичні вказівки (див. [9]).

Тема 3. Ряд Маклорена для функції $y = (1+x)^{\alpha}$

«Слайди» з обов'язковими завданнями (С. 31-32).
Відповіді до «слайдів» теми 2 (С. 33-35).
Завдання для самоперевірки (С. 36-39).

3. Математичний апарат фізики: методичні вказівки (див. [10]).

Тема 10. Похідні та розвинення у ряд Маклорена деяких елементарних функцій

«Слайди» з обов'язковими завданнями (С. 38-46).
Відповіді до «слайдів» теми 10 (С. 47-55).
Завдання для самоперевірки (С. 56-58).

4. Зельдович Я.Б. Вища математика для початківців (див. [8]).

III. §18. Обчислення значень функцій за допомогою рядів.

Слайди із запитаннями для відпрацювання необхідних навичок

ФІЗИЧНІ ПРИКЛАДИ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЇ $y = (1+x)^{\alpha}$ ЗА УМОВИ $x << 1$

1 Подумки оцініть, на скільки відсотків збільшиться період коливань математичного маятника при збільшенні його довжини на 1%. **Примітка:** $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

2 Подумки оцініть, на скільки відсотків зменшиться період коливань LC-контура, якщо ємність конденсатора збільшиться на 10%, а індуктивність котушки на стільки ж відсотків зменшиться. **Примітка:** $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

3 Релятивістські формули для кінетичної енергії та імпульсу такі:

$$T = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2,\ \ p = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Знайдіть коефіцієнт α у такому наближеному виразі для кінетичної енергії, одержаному для $\upsilon << c$: $T \approx \dfrac{m\upsilon^2}{2}\left(1+\alpha\left(\dfrac{\upsilon}{c}\right)^2\right)$.

4 На скільки відсотків формула $U = mgh$ дає завищений результат на висоті 128 км над поверхнею Землі, бо не враховує зменшення прискорення вільного падіння з висотою?

Підказка. Формула НЕ стане правильною, якщо в ній для врахування вказаної залежності формально замінити g на $g\Big/\left(1+\dfrac{h}{R_З}\right)^2$.

РЯД МАКЛОРЕНА ДЛЯ ФУНКЦІЙ $y = e^x$ і $y = \ln(1+x)$. ПРИКЛАДИ АПРОКСИМАЦІЇ ФІЗИЧНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ

?1 Отримайте розвинення у ряд Маклорена для функцій $y = e^x$ і $y = \ln(1+x)$, скориставшись загальною формулою $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right)$. Як, скориставшись розвиненням e^x, знайти числове значення e?

?2 Знайдіть коефіцієнти розвинення $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ без використання загальної формули. ***Підказка.*** Оскільки $(e^x)' = e^x$, диференціювання ряду його не змінить.

?3 Отримайте розвинення для $y = \ln(1+x)$ інтегруванням ряду Маклорена для $y = \frac{1}{1+x}$, на який можна дивитися як на суму нескінченної спадної геометричної прогресії.

?4 Для залежності швидкості ракети від часу була одержана формула: $\upsilon(t) = u \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}$. Перевірте, чи витримує вона перевірку на випадок малих значень t, для яких очікується $\tilde{\upsilon}(t) = \frac{\mu u}{m_0} t$ (чому?). Примітка: μ, u, m_0 — константи.

?5 Якщо соленоїд під'єднати до джерела ЕРС через резистор, то сила струму буде зростати за законом $I(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-\gamma t}\right)$. Виразіть γ через індуктивність соленоїда L і опір резистора R, враховуючи, що дотична до графіка $I(t)$ у точці, яка відповідає початковому моменту часу, повинна мати вигляд $\tilde{I}(t) = \frac{\mathscr{E}}{L} t$ (чому?).

РЯД МАКЛОРЕНА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Легко впевнитися, що значення похідних функції $y = \sin x$ у нулі періодично повторюються з ростом порядку похідної. Дійсно, $(\sin x)^{(4n)} = \sin x$, $(\sin x)^{(4n+1)} = \cos x$, $(\sin x)^{(4n+2)} = -\sin x$, $(\sin x)^{(4n+3)} = -\cos x$, де $n \in N$. Відповідні значення похідних при $x = 0$ у тій самій послідовності такі: $0; 1; 0; -1$. Отже, ряд Маклорена буде складатися з доданків з непарними степенями x, причому знаки будуть чергуватися:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

?1 Одержіть розвинення в ряд Маклорена для функції $y = \cos x$.

Для функції $y = \operatorname{tg} x$ обчислювати похідні помітно складніше. Але можна одержати хоча б декілька перших доданків розвинення цієї функції, скориставшись рядом Маклорена для синуса і косинуса.

?2 Користуючись властивостями функції $y = \operatorname{tg} x$, доведіть, що в околі нуля $\operatorname{tg} x = x + a x^3 + b x^5 + o(x^6)$.

?3 Знайдіть коефіцієнти a і b, користуючись розвиненнями $\sin x$ і $\cos x$, а також тим, що $\operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

?4 Одержіть розвинення в ряд Маклорена для функцій: $y = \left\{x^2 \sin x;\ \cos^2 x;\ \sin x \cos x\right\}$.

РЯДИ МАКЛОРЕНА ДЛЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ ТА ОБЕРНЕНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЯК НАСЛІДКИ РОЗВИНЕННЯ В РЯД МАКЛОРЕНА ФУНКЦІЇ $y=(1+x)^a$

Користуючись розвиненням $(1+x)^a = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(a-i)\, x^k}{k!}$, отримайте розвинення таких функцій:

$\frac{1}{1+x} =$? 1

$\frac{1}{1+x^2} =$? 2

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$? 3

$\ln(1+x) =$? 4а

$\operatorname{arctg} x =$? 5а

$\arcsin x =$? 6а

$\lg(1+x) =$? 4б

$\operatorname{arcctg} x =$? 5б

$\arccos x =$? 6б

Крім “згорнутих” формул випишіть у явному вигляді перші три відмінних від нуля доданки для розвинення в ряд Маклорена кожної з функцій.

Лекція 8. Криволінійний рух. Кутова швидкість і кутове прискорення. Нормальне і тангенціальне прискорення

Рекомендовані для читання матеріали

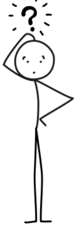
1. Соколов Є.П. Екзаменаційна фізика (див. [4]).
I.8. Рівномірний рух по колу.

2. Мінаєв Ю.П. Математичний апарат фізики для першокурсників (див. [2]).
2.1. Радіанна міра кутів. Лінійна і кутова швидкості. Полярна система координат.
3.6. Обернені тригонометричні функції та найпростіші тригонометричні рівняння.

3. Савельєв І.В. Курс загальної фізики (див. [3]).
§5. Кінематика обертального руху.

4. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики (див. [1]).
§1.5. Кінематика обертального руху.
§1.6. Плоский рух твердого тіла.

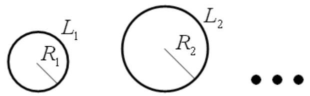
5. Сівухін Д.В. Загальний курс фізики. Механіка (див. [13]).
§4. Швидкість та прискорення при криволінійному русі.



Секундна стрілка годинника удвічі коротша за годинникову. У якої з них лінійна швидкість кінця стрілки більша? У скільки разів?

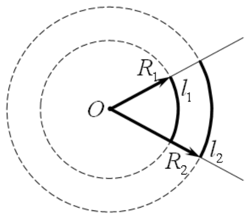
Слайди із запитаннями для відпрацювання необхідних навичок

ЧИСЛО π ТА РАДІАННА МІРА КУТА



$$\frac{L_1}{2R_1} = \frac{L_2}{2R_2} = \ldots = \pi$$

Оскільки всі кола подібні, відношення довжини кола до його діаметра – величина стала і не залежить від розмірів кола. Цю сталу прийнято позначати грецькою буквою π – першою літерою грецького слова “коло” (περιφέρεια). Число π ірраціональне, і приблизно дорівнює 3,14159…



Якщо вершину кута зробити спільним центром концентричних кіл різних радіусів, а потім виміряти довжини відповідних дуг, то як наслідок подібності секторів (див. рис.) виявиться, що $l_1/R_1 = l_2/R_2 = \ldots = const$. Тобто частка не залежить від радіуса кола. З другого боку, зміна кута в кілька разів змінює частку в стільки ж разів. А це означає, що можна ввести міру кута таким чином:

$$\textbf{кут}\left(у\ радіанах\right) = \frac{\textbf{довжина дуги}}{\textbf{радіус кола}}.$$

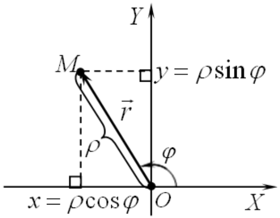
?1 Доповніть речення: а) “Центральний кут в один радіан відсікає дугу кола, довжина якої дорівнює …”; б) “Кутова величина повного кола становить … радіан.”

?2 Знайдіть градусну міру кутів, радіанна міра яких дорівнює 2π, π, $3\pi/4$, $2\pi/3$, $7\pi/6$, α (рад).

?3 Знайдіть радіанну міру кутів, градусна міра яких дорівнює $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, $n°$.

?4 Нехай матеріальна точка рухається по колу радіуса R зі сталою швидкістю v. Знайдіть вираз для кутової швидкості точки ω через задані величини. Який вираз отримаємо у залежності від того, радіанна чи градусна міра використана? Чи зміниться вираз, якщо швидкість v не буде постійною?

ПОЛЯРНА СИСТЕМА КООРДИНАТ. РІВНОМІРНИЙ РУХ ПО КОЛУ



Положення точки на площині задається радіус-вектором $\vec{r}$ з початком у фіксованій точці O. Якщо пов'язати з точкою O прямокутну систему координат XOY, то положення точки можна буде задавати значеннями її ортогональних проекцій на осі OX і OY. Ще одна можливість — задавати модуль радіус-вектора $|\vec{r}| = \rho$ і його напрямок, який фіксується за допомогою кута φ, що відраховується від осі OX проти годинникової стрілки (див. рис.) Як виразити декартові координати x, y через полярні ρ, φ? Тут уже виникає потреба в таких функціях аргументу φ, які отримали назву синуса і косинуса: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

?1 Доведіть, що $-1 \le \cos\varphi \le 1$, $-1 \le \sin\varphi \le 1$, а також знайдіть значення цих функцій для $\varphi = \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Для того, щоб задавати положення точки у полярній системі координат, достатньо, щоб $\varphi \in [0; 2\pi)$. Але часто вигідно вважати, що φ може набувати будь-які дійсні значення. Тоді, наприклад, ***рівномірний*** рух точки по колу радіуса R з центром в O можна задати такими рівняннями: $\rho = R$, $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, де ω — кутова швидкість.

?2 Для того ж самого руху знайдіть, як залежать від часу декартові координати $x(t)$ і $y(t)$. Побудуйте ескізи відповідних графіків для випадку $\varphi_0 = 0$.

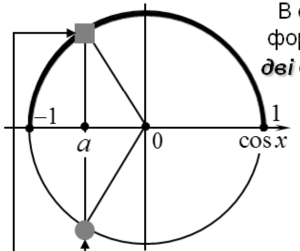
РОЗВЯЗУВАННЯ НАЙПРОСТІШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

?1 Переконайтеся, що розв'язками рівнянь $\mathrm{tg}x = a$ і $\mathrm{ctg}x = a$ є $x = \mathrm{arctg}a + \pi n,\ n \in Z$ і $x = \mathrm{arcctg}a + \pi k,\ k \in Z$ відповідно. Виконайте це двома способами: 1) за допомогою одиничного кола з використанням осі тангенсів (котангенсів) ; 2) з використанням графіків функцій.

?2 Розв'яжіть рівняння: $\sin x = 0$; $\sin x = 1$; $\sin x = -1$; $\cos x = 0$; $\cos x = 1$; $\cos x = -1$.

Розглянемо за допомогою одиничного кола випадок $a \in (-1;0) \cup (0;1)$.

$\cos x = a$



$x_1 = \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$

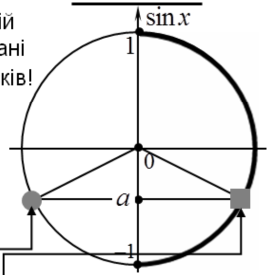
$x_2 = -\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$

$\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}$

Увага!

В одній кінцевій формулі поєднані ***дві*** серії розв'язків!

$\sin x = a$



$x_1 = \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z$

$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z$

$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z}$

?3 Яких значень набувають $\arcsin a$ і $\arccos a$, якщо $a \in (-1;0) \cup (0;1)$?

?4 Покажіть, як одержати розв'язки рівнянь $\cos x = a$ і $\sin x = a$ за допомогою графіків відповідних функцій. На осі ОХ помітьте використаними нами позначками (■,●) розв'язки, що належать різним серіям.

?5 Не використовуючи в кінцевих формулах символи обернених тригонометричних функцій, запишіть розв'язки таких найпростіших тригонометричних рівнянь:

а) $\sin x = -0,5$; б) $\cos x = -0,5$; в) $\mathrm{tg}x = -1$; г) $\mathrm{ctg}x = -1$.

Лекція 9. Кінетична енергія тіла, що обертається, момент інерції, теорема Гюйгенса-Штейнера

Рекомендовані для читання матеріали

1. Мінаєв Ю.П. Математичний апарат фізики для першокурсників (див. [2]).
2.7. Векторний добуток векторів у деяких фізичних формулах.

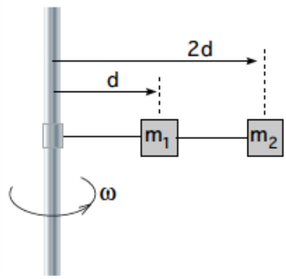
2. Обертальний рух твердого тіла: методичні вказівки (див. [12]).
С. 8-18.
С. 26-57.

3. Савельєв І.В. Курс загальної фізики (див. [3]).
§36. Рух твердого тіла.
§37. Рух центра мас твердого тіла.
§38. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.
§39. Момент інерції.

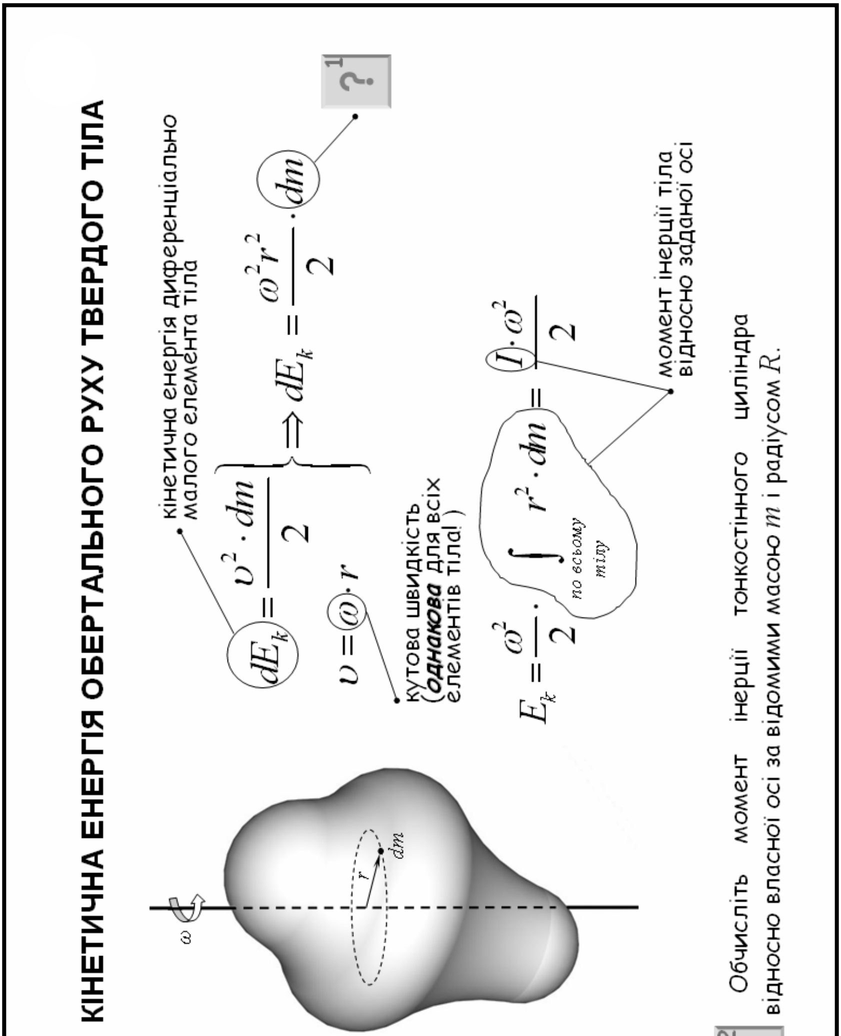
4. Сівухін Д.В. Загальний курс фізики. Механіка (див. [13]).
§35. Теорема Гюйгенса-Штейнера.
§36. Обчислення моментів інерції.

5. Зельдович Я.Б. Вища математика для початківців (див. [8]).
VI. §15. Маса, центр тяжіння і момент інерції стержня.

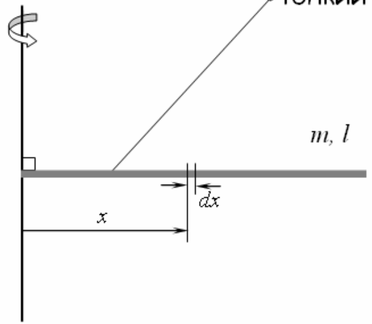
Яка з ниток обірветься першою при збільшенні кутової швидкості обертання системи (див. рис.)? Чи залежить відповідь від співвідношення між масами тіл? Масою ниток та впливом сили тяжіння можна знехтувати.



***Слайди із запитаннями
для відпрацювання необхідних навичок***



ВИПАДКИ, ЩО ВИМАГАЮТЬ НЕСКЛАДНОГО ІНТЕГРУВАННЯ



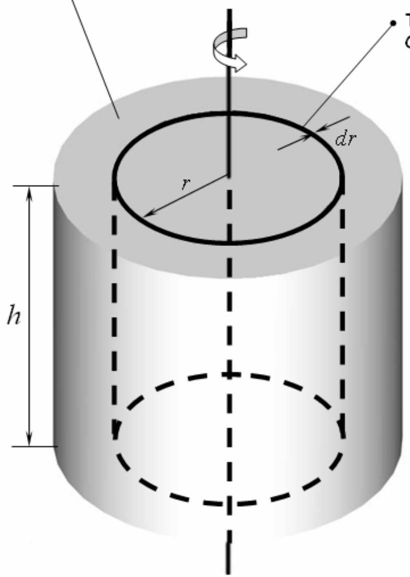
• тонкий однорідний стержень

$$dI = r^2 \cdot dm$$

$$x \qquad \frac{m}{l}dx$$

• можна назвати

$$I = \int\limits_{\text{по всьому тілу}} r^2 \cdot dm = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx =$$



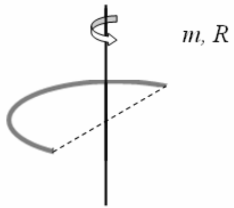
за фізичним змістом є ?[1]

$$dm = \frac{m}{\pi R^2 h} dV = \frac{m}{\cancel{\pi} R^2 \cancel{h}}\left(2\cancel{\pi} r \cancel{h} dr\right) = \frac{2m}{R^2} r dr$$

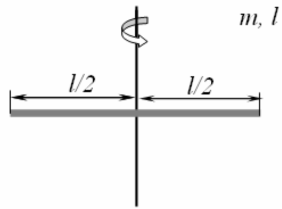
$$I = \int\limits_{\text{по всьому тілу}} r^2 \cdot dm = \ ?^{2}$$

Використовуючи попередні результати, *усно* знайдіть моменти інерції тіл у випадках:

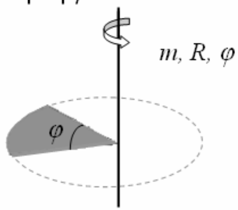
?[1] 1. Напівкільце



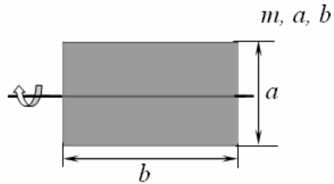
?[2] 2. Стержень



?[3] 3. Сектор круглої пластини



?[4] 4. Прямокутна тонка пластина



?[5] Сформулюйте ідеї, якими Ви користувалися для усного виконання завдання.

КОРИСНА ТЕОРЕМА

$$I_x + I_y + I_z = 2\Theta$$

моменти інерції відносно координатних осей

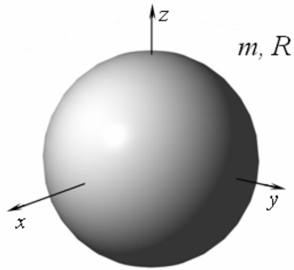
момент інерції відносно точки перетину координатних осей

фізичного змісту не має, але допомагає у розрахунках!

$$\Theta = \int\limits_{\text{по всьому тілу}} \boxed{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} \cdot dm$$

квадрат відстані до початку координат

Момент інерції тонкостінної сфери відносно осі, що проходить через її центр



$$\underbrace{I_x = I_y = I_z = I \quad \Theta = mR^2}_{\text{(симетрія!)}}$$

$\Downarrow$ використовуючи теорему

$I =$? [1]

? [2] Доведіть теорему.

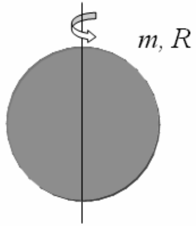
Як для тонкої пластинки довільної форми, що лежить у площині XY, пов'язані:

?[1] а) I_z та Θ;   ?[2] б) I_x, I_y та I_z?

Використовуючи попередні результати, *усно* знайдіть моменти інерції тіл у випадках:

1. Кругла тонка пластинка

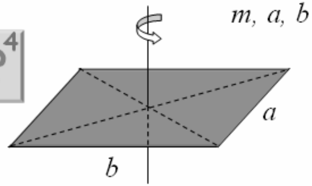
?[3]



Вісь у площині пластинки і проходить через її центр.

2. Прямокутна тонка пластинка

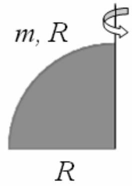
?[4]



Вісь перпендикулярна площині пластинки і проходить через її центр.

3. Чверть круглої тонкої пластинки

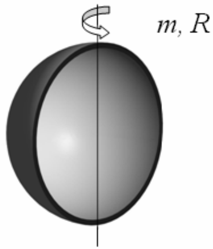
?[5]



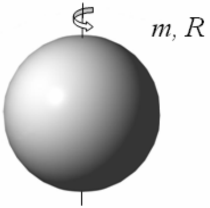
Вісь у площині пластинки.

4. Половина тонкостінної сфери

?[6]



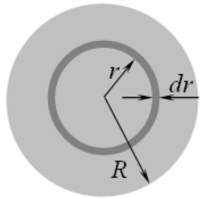
Обчисліть момент інерції однорідної кулі відносно осі, що проходить через її центр, заповнюючи пропуски



Момент інерції кулі відносно вказаної осі (I) пов'язаний з моментом інерції відносно її центра (Θ) так:

$$I = \boxed{?}^{1} \cdot \Theta$$

Для знаходження Θ уявимо, що куля складається з концентричних тонких сферичних шарів ("тонкостінних сфер"). Маса шару радіуса r і завтовшки dr визначиться так:



$$dm = \boxed{?}^{2} \cdot dr.$$

Отже, за означенням моменту інерції відносно точки (див. 5),

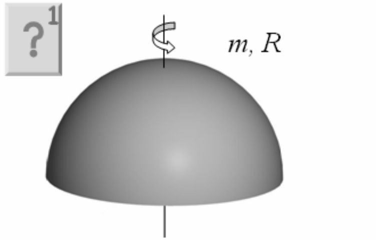
$$\Theta = \int_{\boxed{?}^{3}}^{\boxed{?}^{3}} \boxed{?}^{3} \cdot dr = \boxed{?}^{3}.$$

З урахуванням зв'язку між I та Θ отримуємо:

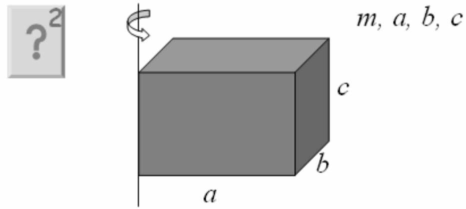
$$I = \boxed{?}^{4}$$

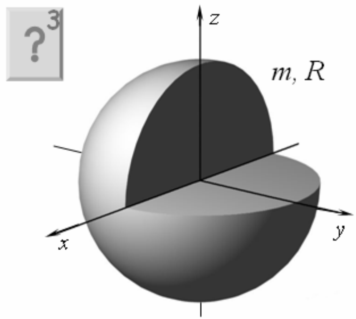
Використовуючи попередні результати, *усно* знайдіть моменти інерції тіл у випадках:

1. Половина однорідної кулі



2. Однорідний прямокутний паралелепіпед





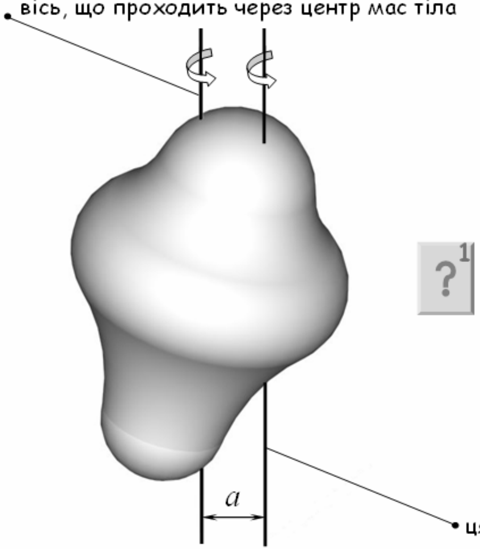
3. Частина однорідної суцільної кулі (відносно кожної з осей)

Теорема Гюйгенса-Штейнера

Моменти інерції тіла *масою* m відносно двох паралельних *осей*, *одна з яких проходить через центр мас тіла*, пов'язані *формулою*:

$$\boxed{I = I_0 + ma^2},$$

де a – відстань між осями.



Якщо припустити, що наведена формула правильна, то як збагнути, яка відповідь на таке запитання:

?[1] *момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас, позначено через* I_0 чи I?

Підказка для *можливого* варіанту доведення теореми Гюйгенса-Штейнера на наступному слайді!

Підказка для можливого варіанту доведення теореми Гюйгенса-Штейнера

Розташуємо систему координат так, щоб її початок співпадав з центром мас тіла, а ми цікавилися моментами інерції відносно осі Z та осі, яка паралельна до неї. Нехай вісь, яка паралельна осі Z, перетинає площину XY у точці $A\,(x_A,\, y_A,\, 0)$ так, що

$$\sqrt{x_A^2 + y_A^2} = a.$$

Тоді $I_0 = \int\limits_{\substack{\text{по всьому}\\ \text{тілу}}} \left(x^2 + y^2\right) dm$, а $I = \int\limits_{\substack{\text{по всьому}\\ \text{тілу}}} \left(\left(x - x_A\right)^2 + \left(y - y_A\right)^2\right) dm.$

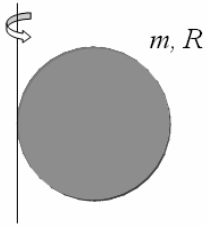
Врахуйте під час доведення, що $\int\limits_{\substack{\text{по всьому}\\ \text{тілу}}} x\,dm = \int\limits_{\substack{\text{по всьому}\\ \text{тілу}}} y\,dm = 0$!

?[1] Звідки взялося останнє твердження, яке рекомендовано врахувати?

?[2] **Продовжіть доведення самостійно!**

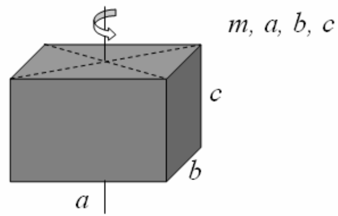
Використовуючи теорему Гюйгенса-Штейнера та попередні результати, *усно* знайдіть моменти інерції тіл у випадках:

1. Кругла тонка пластинка

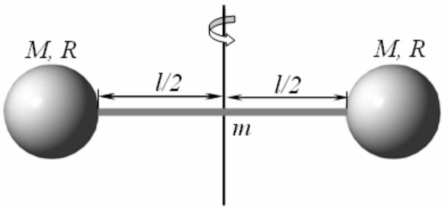


Вісь у площині пластинки.

2. Однорідний прямокутний паралелепіпед



3. Гантель (кулі та стержень однорідні)



Лекція 10. Гармонічні коливання пружинного та математичного маятників і диференціальне рівняння другого порядку

Рекомендовані для читання матеріали

1. Соколов Є.П. Екзаменаційна фізика (див. [5]).

I.1. Основні визначення.

I.2. Вільні механічні коливання.

2. Механічні коливання: методичні вказівки (див. [11]).

3. Савельєв І.В. Курс загальної фізики. (див. [3]).

§49. Загальні відомості про коливання.

§50. Малі коливання.

§52. Лінійні диференціальні рівняння.

§53. Гармонічні коливання.

4. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики (див. [1]).

§10.1. Коливальні процеси.

§10.2. Гармонічні коливання.

§10.3. Векторне зображення гармонічних коливань та їхнє вираження в комплексній площині. Гармонічний осцилятор.

§10.4. Математичний маятник.

5. Сівухін Д.В. Загальний курс фізики. Механіка (див. [13]).

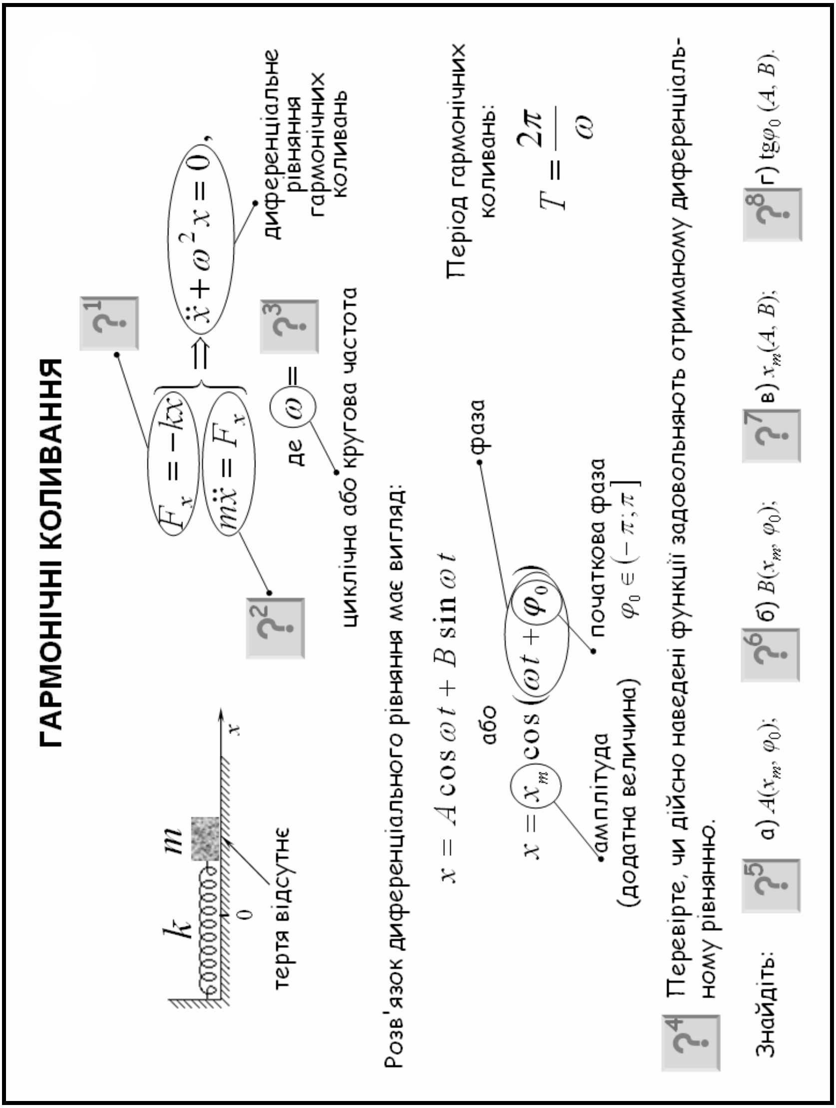
§39. Кінематика гармонічного коливального руху.

§40. Гармонічні коливання тягарця напружині.

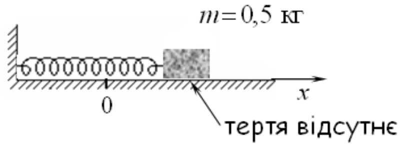
6. Зельдович Я.Б. Вища математика для початківців (див. [8]).

VI. §9. Коливання.

Слайди із запитаннями
для відпрацювання необхідних навичок



Використовуючи попередні результати, знайдіть числові значення величин, позначених знаками запитання, якщо відома залежність координати тіла від часу:



$$x = \cos 2t + \sqrt{3}\sin 2t$$

(вважайте, що коефіцієнти подані в SI)

Початкова координата тіла $?^1$

Амплітуда $?^2$

Початкова фаза коливань $?^3$

Початкова швидкість тіла $?^4$

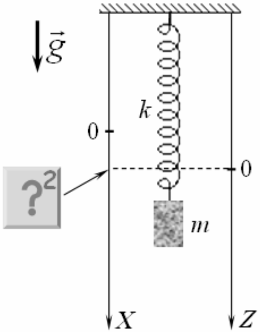
Період коливань $?^5$

Жорсткість пружини $?^6$

$?^7$ Побудуйте ескіз графіка залежності координати тіла від часу $x(t)$

Пружинний маятник у полі тяжіння

?1 Дивлячись на рівняння, запис яких розташований праворуч від рисунка, скажіть, з яких міркувань обрані точки відліку на осях X і Z?



$$m\ddot{x} = -kx + mg$$

$$\Downarrow \quad x = z + \text{?3}$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0, \quad \textbf{де} \quad \omega = \text{?4}$$

$$\Downarrow$$

$$z = a\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Знайдіть $x(t)$ у наступних випадках:

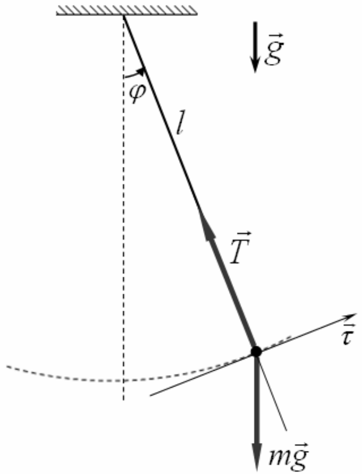
?5 а) $x(0) = 0, \ \dot{x}(0) = 0;$

?6 б) $x(0) = \dfrac{mg}{k}, \ \dot{x}(0) = 0;$

?7 в) $x(0) = \dfrac{2mg}{k}, \ \dot{x}(0) = 0;$

?8 г) $x(0) = \dfrac{mg}{k}, \ \dot{x}(0) = \upsilon_0.$

Математичний маятник



Другий закон Ньютона для тангенціальних складових прискорення та сил запишеться у вигляді:

$$ml\ddot{\varphi} = \text{?1}.$$

тангенціальна складова прискорення

Звідки $\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0$.

?2

Якщо $|\varphi| << 1$, то $\sin\varphi \approx \varphi$.

Тоді рівняння набуває вигляду:

$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$. Отже, для малих кутів

$$\varphi(t) = \text{?3}$$

?4 Як залежить період малих коливань математичного маятника від маси m?

Лекція 11. Рух фізичного маятника. Згасаючі коливання

Рекомендовані для читання матеріали

1. Соколов Є.П. Екзаменаційна фізика (див. [5]).
I.4. Додавання коливань.

2. Механічні коливання: методичні вказівки (див. [11]).

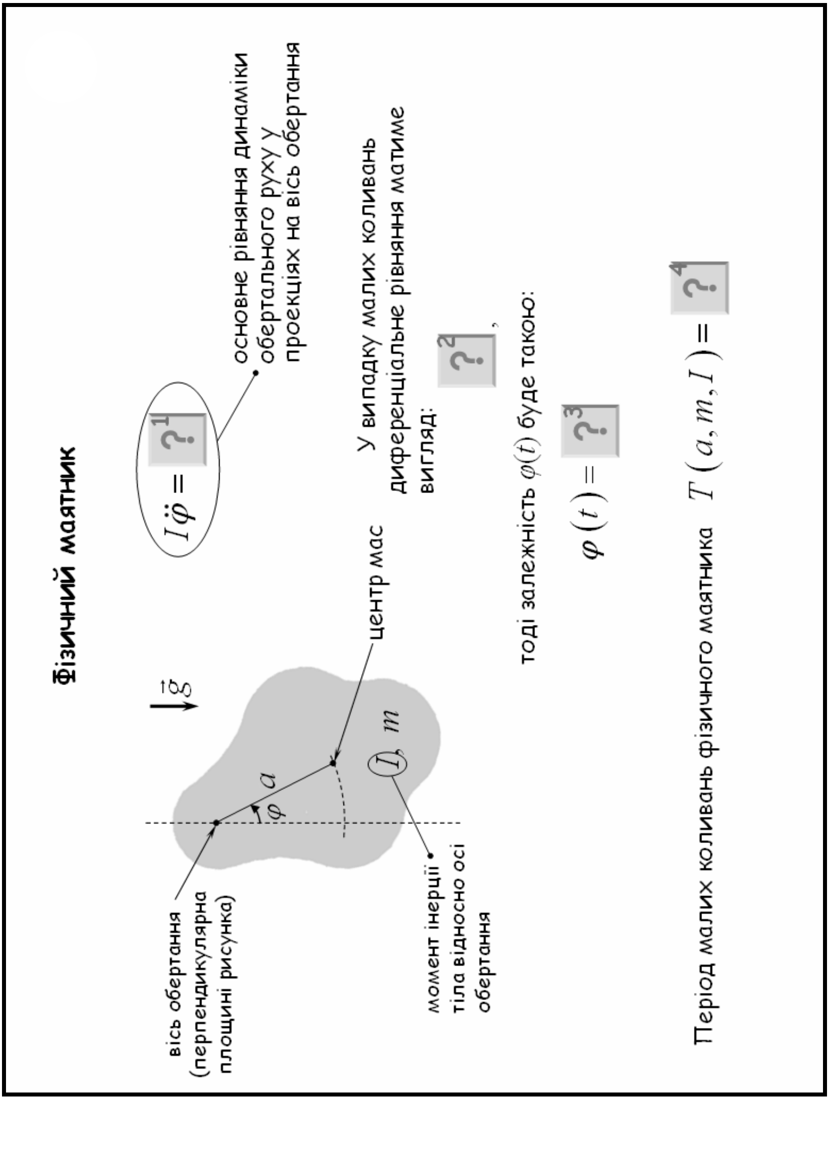
3. Савельєв І.В. Курс загальної фізики (див. [3]).
§54. Маятник.
§58. Затухаючі коливання.

4. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики (див. [1]).
§10.5. Фізичний маятник.
§10.6. Додавання коливань однакового напряму. Биття.
§10.7. Додавання взаємно перпендикулярних коливань.
§10.8. Згасаючі коливання.

5. Сівухін Д.В. Загальний курс фізики. Механіка (див. [13]).
§41. Фізичний матник.

6. Зельдович Я.Б. Вища математика для початківців (див. [8]).
VI. §16. Коливання підвішеного стержня.

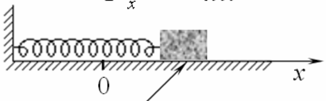
Слайди із запитаннями для відпрацювання необхідних навичок



Гармонічні коливання та закон збереження енергії

а) пружинний маятник

$$F_x = -kx$$

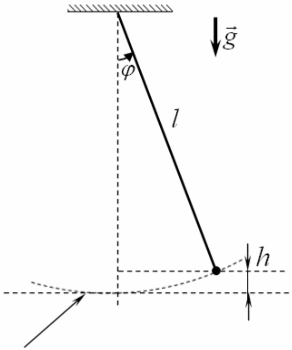


$$\left.\begin{aligned} &E_k + E_p = const \\ &E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} \\ &E_p = \frac{kx^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const$$

$$\Downarrow \boxed{?^1}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

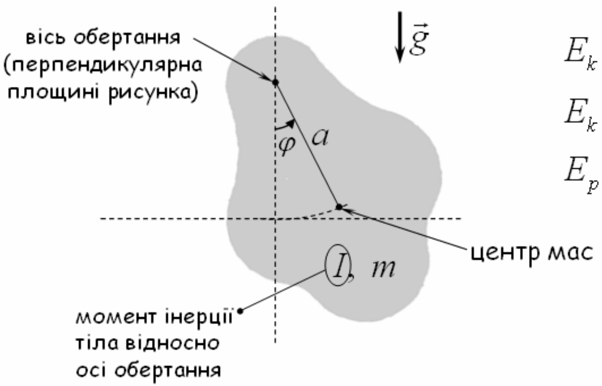
б) математичний маятник



$$\left.\begin{aligned} &E_k + E_p = const \\ &E_k = \boxed{?^2}\dot{\varphi}^2 \\ &E_p = mgh \\ &h = l(1-\cos\varphi) = \boxed{?^3}\sin^2\frac{\varphi}{2} \\ &|\varphi| << 1 \end{aligned}\right\} \overset{\boxed{?^4}}{\Rightarrow} \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

Для потенціальної енергії E_p цей рівень прийнятий за нульовий.

в) фізичний маятник



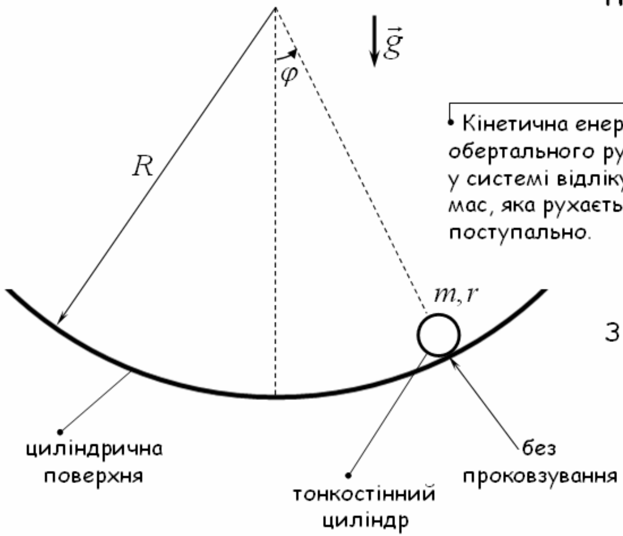
Для $|\varphi| << 1$:

$$\left.\begin{array}{l} E_k + E_p = const \\ E_k = \boxed{?^1}\dot{\varphi}^2 \\ E_p = \boxed{?^2}\varphi^2 \end{array}\right\} \overset{\boxed{?^3}}{\Rightarrow} \ddot{\varphi} + \frac{mga}{I}\varphi = 0$$

Узагальнюючий висновок: якщо вираз для потенціальної енергії тіла можна звести до вигляду $E_p = \beta q^2$ (q — узагальнена координата), а для кінетичної енергії — до вигляду $E_k = \alpha \dot{q}^2$ ($\dot{q}$ — узагальнена швидкість), то це означає, що тіло здійснює гармонічні коливання з періодом

$$T = \boxed{?^4}$$

<u>Задача.</u> Тонкостінний циліндр радіуса r катається без проковзування по циліндричній поверхні радіуса R у полі тяжіння (див. рис.) так, що вісь циліндра здійснює гармонічні коливання. Треба знайти період.



Підказки: Кінетична енергія циліндра

$$E_k = \boxed{?}^{1}\,\omega^2 + \boxed{?}^{2}\,\dot{\varphi}^2.$$

Кінетична енергія обертального руху циліндра у системі відліку центра мас, яка рухається поступально.

Кінетична енергія центра мас циліндра.

Кутова швидкість (а не циклічна частота коливань!), з якою тонкостінний циліндр обертається навколо власної осі.

З умови відсутності проковзування

$$\omega = \boxed{?}^{3}\,\dot{\varphi}.$$

А потенціальна енергія циліндра

$$E_p = \boxed{?}^{4}\,\varphi^2.$$

Скориставшись узагальненим висновком щодо періоду гармонічних коливань (див. 7.4), можна отримати:

$$T = \boxed{?}^{5}.$$

ЗГАСАЮЧІ КОЛИВАННЯ

$$\left.\begin{aligned} F_{опору} &= -\gamma \dot{x} \\ F_{пруж} &= -kx \\ m\ddot{x} &= F_{пруж} + F_{опору} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$ де

$$\beta = \boxed{?^{1}} \qquad \omega_0 = \boxed{?^{2}}$$

ω_0 – власна частота коливань системи

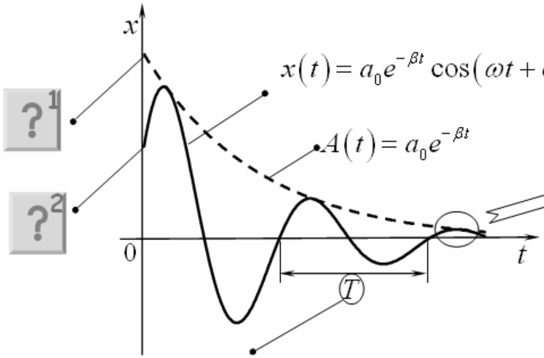
При деякому співвідношенні між β та ω_0 розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$x(t) = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$ де a_0 і φ_0 –

дві довільні константи загального розв'язку однорідного диференціального рівняння другого порядку. Значення цих констант можна визначити лише за наявності додаткової інформації. Зазвичай такою інформацією слугують початкові умови (значення $x(0)$ і $\dot{x}(0)$). А ось ω можна визначити через ω_0 і β, підставивши вираз для $x(t)$ у диференціальне рівняння.

$\boxed{?^{3}}$ Знайдіть вираз для ω.

$\boxed{?^{4}}$ При якому співвідношенні між ω_0 і β коливання будуть згасати за наведеним законом?



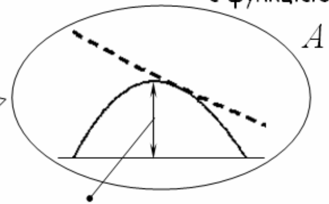
Період згасаючих коливань

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ $\qquad T(\gamma, k, m) =$?3

Увага!

Амплітуда згасаючих коливань є функцією часу:

$$A(t) = a_0 e^{-\beta t}$$



Значення $x(t)$ у черговому максимумі не співпадає з $A(t)$!

Кількісно згасання коливань характеризують часом релаксації τ (час, за який амплітуда згасаючих коливань зменшується в e разів) та логарифмічним декрементом згасання:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}$$

$\lambda(\beta, T) =$?4 $\qquad \tau(\beta) =$?5

Лекція 12. Вимушені коливання. Резонанс амплітуди та резонанс швидкості

Рекомендовані для читання матеріали

1. Соколов Є.П. Екзаменаційна фізика (див. [5]).
I.4. Вимушені механічні коливання.

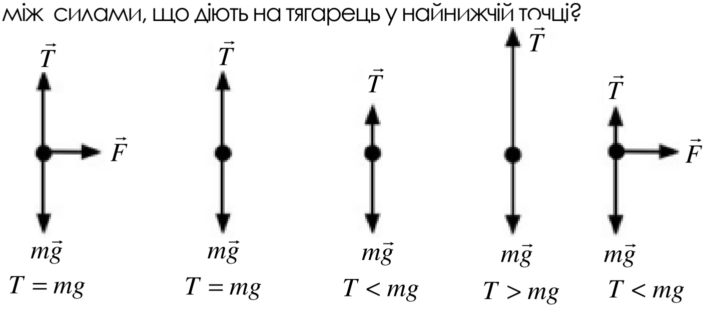
2. Механічні коливання: методичні вказівки (див. [11]).

3. Савельєв І.В. Курс загальної фізики (див. [3]).
§59. Автоколивання.
§60. Вимушені коливання.

4. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики (див. [1]).
§10.9. Вимушені коливання.
§10.11. Поняття про автоколивання.

6. Зельдович Я.Б. Вища математика для початківців (див. [8]).
VI. §11. Вимушені коливання та резонанс.

Тягарець маятника рухається вниз, $\vec{T}$ — сила натягу нитки, $m\vec{g}$ — сила тяжіння. Який рисунок правильно відображає співвідношення між силами, що діють на тягарець у найнижчій точці?



А) Б) В) Г) Д)

Слайди із запитаннями для відпрацювання необхідних навичок

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

$$\left.\begin{aligned} F_{зовн.} &= F_0\cos\omega t \begin{pmatrix}\text{зовнішня}\\ \text{гармонічна}\\ \text{сила}\end{pmatrix} \\ F_{опору} &= -\gamma\dot{x} \\ F_{пруж.} &= -kx \\ m\ddot{x} &= F_{зовн.} + F_{пруж.} + F_{опору} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t,$$

де

$$\beta = \boxed{?^1} \qquad \omega_0 = \boxed{?^2}$$

Загальний розв'язок цього неоднорідного диференціального рівняння являє собою суму окремого розв'язку цього неоднорідного рівняння та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння ($\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$). Роль розв'язку однорідного рівняння зменшується з плином часу (див. згасаючі коливання). Отже, усталені вимушені коливання будуть описуватися окремим розв'язком неоднорідного рівняння, який має вигляд:

$$x(t) = A\cos(\omega t - \alpha),$$ де

$$\operatorname{tg}\alpha(\beta,\omega,\omega_0) = \boxed{?^3} \qquad A(F_0, m, \beta, \omega, \omega_0) = \boxed{?^4}$$

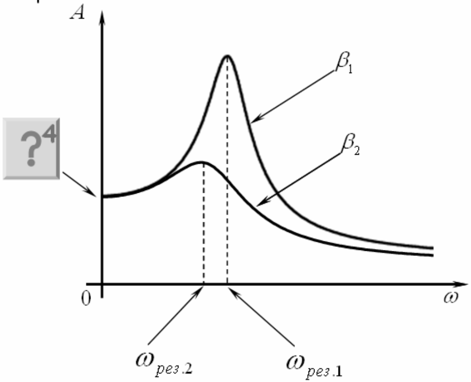
Зверніть увагу на те, що вираз для $x(t)$ не залежить від початкових умов! Його можна використовувати лише для великих значень t, коли вимушені коливання дійсно можна буде вважати усталеними.

РЕЗОНАНС КООРДИНАТИ

Амплітуда усталених вимушених коливань залежить від циклічної частоти зовнішньої сили:

$$A(\omega)=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

При певному значенні ω амплітуда коливань досягає максимального значення. Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при поступовій зміні частоти ω зовнішньої сили ($F=F_0\cos\omega t$) називають **резонансом**, а відповідну циклічну частоту – резонансною.



$\omega_{рез}\left(\omega_0,\beta\right)=$?1

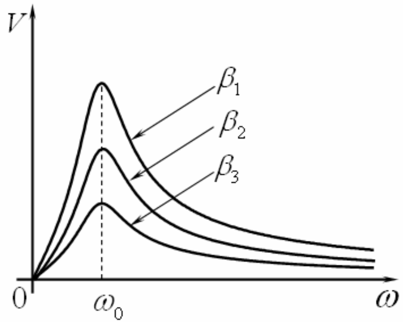
$A_{рез}\left(F_0,m,\omega_0,\beta\right)=$?2

?3 Доведіть, що графіки $A(\omega)$, побудовані для різних β, мають одну спільну точку при $\omega=0$.

?5 Яка з нерівностей відповідає наведеним графікам: $\beta_1<\beta_2$ чи $\beta_1>\beta_2$?

РЕЗОНАНС ШВИДКОСТІ

Для усталених коливань $x(t) = A\cos(\omega t - \alpha)$, де $A(\omega) = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$



$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t - \alpha)$$

амплітуда швидкості V

$$V(\omega) = \frac{F_0\omega}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

?[1] Доведіть, що для різних значень β амплітуда швидкості $V(\omega)$ набуває максимального значення, коли $\omega = \omega_0$. Як співвідносяться між собою різні значення β, що наведені на рисунку?

ОБОВ'ЯЗКОВІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

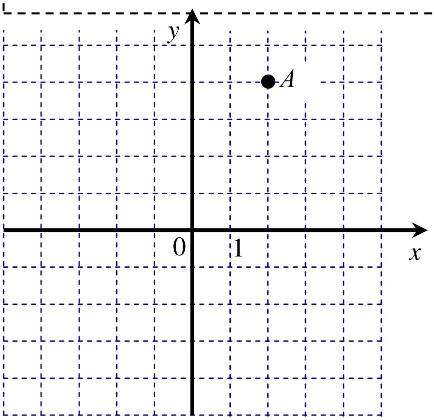
_______________________________ ________

П.І. студента *група*

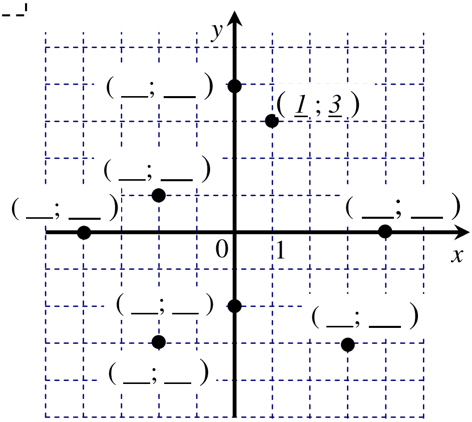
1

1. Позначте положення кожної точки.

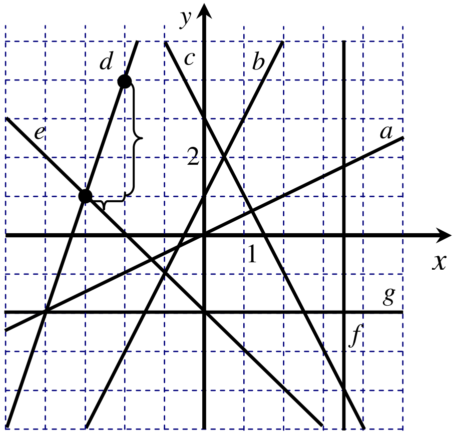
$A(2;4)$, $B(-1;3)$, $C(3;-2)$, $D(0;1)$,
$E(4;0)$, $F(0;-4)$, $G(-2;0)$, $H(-3;-2)$



2. Визначте координати кожної позначеної точки.



3. Знайдіть відповідність між графіком прямої та значенням кутового коефіцієнта нахилу.

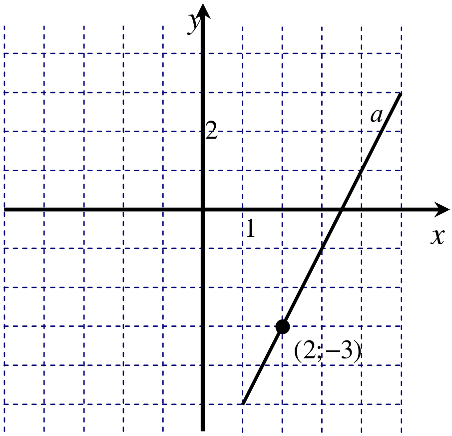


$k = 3$	d
$k = 0$	___
$k = -2$	___
$k = \frac{1}{2}$	___
$k = 2$	___
$k \to \infty$	___
$k = -1$	___

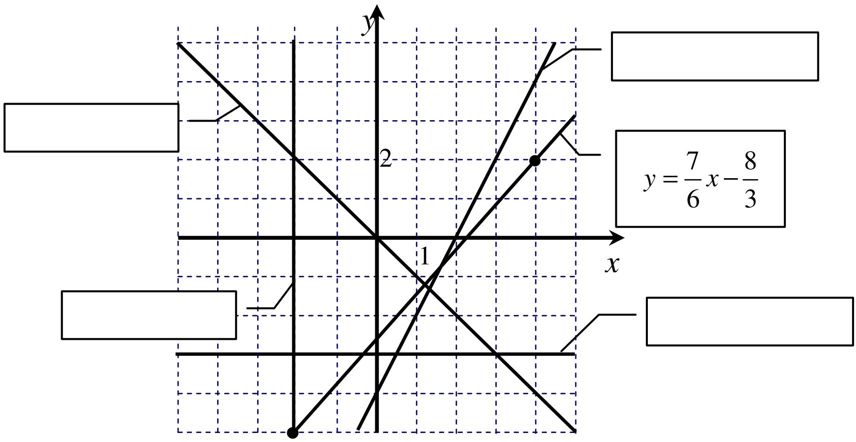
1

4. Побудуйте прямі, знаючи кутові коефіцієнти нахилу та координати точок, через які вони проходять.

$k = 2;\ (2;-3)$	a
$k = 4;\ (-1;0)$	___
$k = \frac{1}{3};\ (0;-3)$	___
$k = -\frac{1}{2};\ (-1;3)$	___
$k = 0;\ (0;2)$	___



5. Запишіть рівняння кожної з наведених на рисунку прямих.



***Коментарі до прикладу**:* Обрання двох точок, координати яких точно відомі, дозволяє визначити коефіцієнт нахилу прямої: $k = 7/6$. Далі, після підстановки до рівняння прямої ($y = kx + b$) цього коефіцієнта і координат однієї з точок (наприклад, $(4;2)$), можна знайти b: $2 = (7/6)\cdot 4 + b \implies b = -8/3$.

1

6. Запишіть вираз для зміни функції Δy, якщо незалежна координата x була змінена на Δx.

$y = x^2$ $\qquad \underline{\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2}$

$y = 3x^2$

____

$y = x^3$

____

$y = x^3 + 6$

____

7. Знайдіть значення границь:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \underline{\lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\,\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x^3\,\Delta x + 6x^2\,(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4}{\Delta x} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

8. Знайдіть значення похідної функції $y = 3x^2 + 5x + 4$ за означенням (тобто, використовуючи формулу $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$).

____

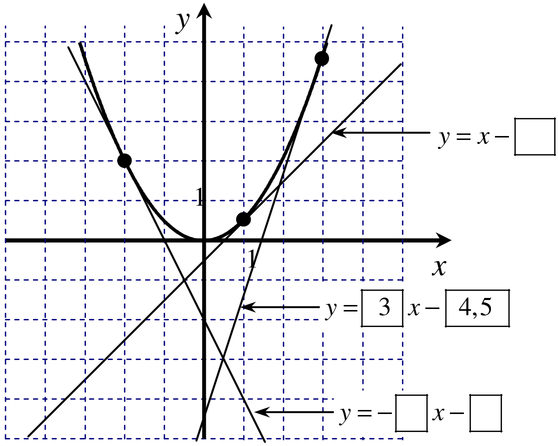
____

9. Знайдіть похідні функцій за вказаними змінними.

$y(x) = 3 - 4x$	$\frac{dy}{dx} = \underline{-4}$	$x(t) = 3 - \frac{1}{2}t^2$	$\frac{dx}{dt} = \_\_\_\_\_\_$
$y(x) = 2x - \frac{3}{4}x^2 + 1$	$\frac{dy}{dx} = \_\_\_\_\_\_$	$x(t) = \upsilon_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$	$\frac{dx}{dt} = \_\_\_\_\_\_$
$y(t) = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}$	$\frac{dy}{dt} = \_\_\_\_\_\_$	$y(t) = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$	$\frac{dy}{dt} = \_\_\_\_\_\_$

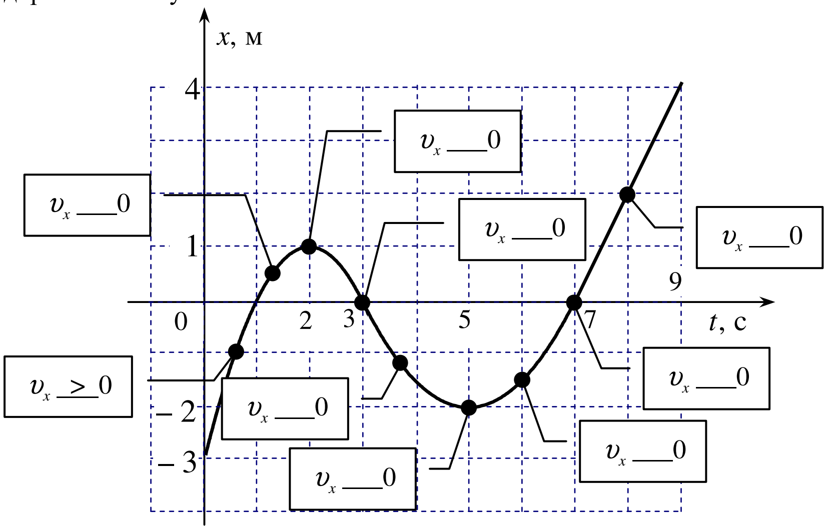
1

10. До параболи $y = 0,5x^2$ у трьох точках провели дотичні. Заповніть пропущені місця у рівняннях цих дотичних.



Коментарі до прикладу: Кутовий коефіцієнт нахилу дотичної дорівнює значенню похідної функції в обраній точці: $k = y'(3) = 3$ (оскільки $y' = x$). Далі знаходимо вертикальну координату обраної точки ($0,5 \cdot 3^2 = 4,5$) і визначаємо вільний член b: $4,5 = 3 \cdot 3 + b \ \Rightarrow\ b = -4,5$.

11. Визначте знак проекції швидкості тіла у вказаних на графіку точках. Зверніть увагу на те, що у деякі моменту часу швидкість тіла буде дорівнювати нулю.

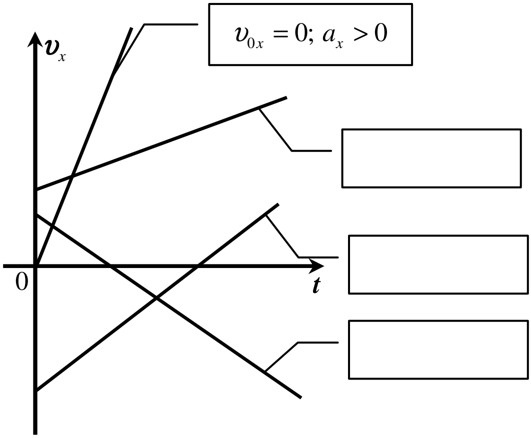


....

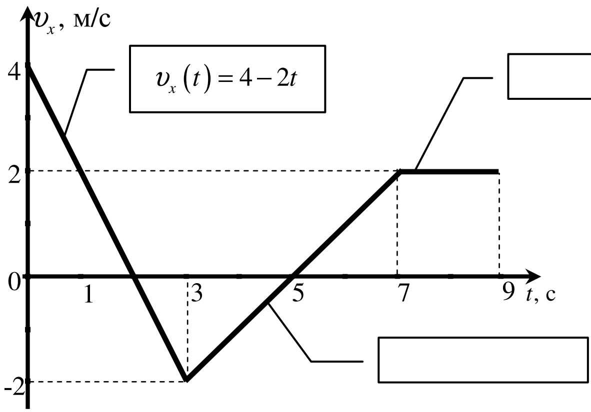
______________________________ ________

П.І. студента *група* 2

1. Визначте знак початкової швидкості та проекції прискорення тіла за графіком.



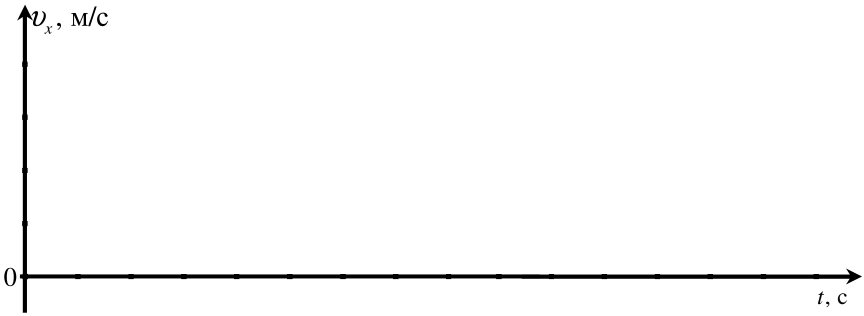
2. Знайдіть значення проекції прискорення тіла та рівняння залежності $\upsilon_x(t)$.



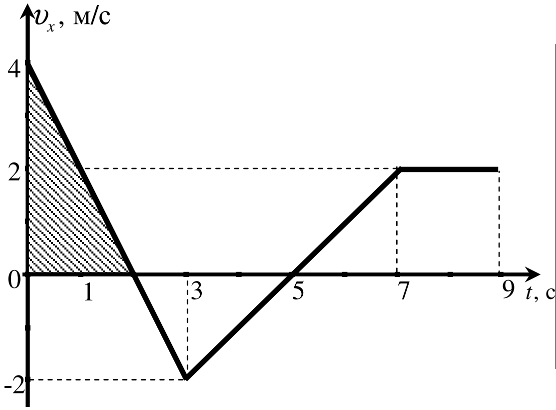
інтервал часу	проекція прискорення
0 – 3 с	–2 м/с^2
3 – 7 с	
7 – 9 с	

3. Побудуйте графік залежності швидкості тіла від часу, використавши дані, що наведені в тексті: «Тіло починає рухатися зі стану спокою вздовж прямої з прискоренням 2 м/с^2. Через чотири секунди воно перестає збільшувати свої швидкість і 5 секунд рухається рівномірно. Протягом наступних 6 секунд тіло гальмує до зупинки».

2



4. Визначте шлях, який пройшло тіло за вказаний інтервал часу, напрям руху тіла та заповніть пропуски у тексті.



інтервал часу	шлях	напрям руху
0 – 2 с	4 м	+
2 – 3 с		
3 – 5 с		
5 – 7 с		
7 – 9 с		

Якщо це тіло почало рухатися з точки, координата якої дорівнює -3 м, то через 2 секунди його координата буде *1* м, ще через секунду — ________, а в момент часу 7 с — __________. Всього за 9 секунд тіло пройшло шлях ________ і в момент часу 9 с опинилося в точці з координатою ________.

5. Запишіть формули для розрахунку пройденого тілом шляху, якщо відомі вказані величини (вважайте, що напрям руху тіла не змінювався, прискорення було сталим).

початкова швидкість, прискорення, час $S = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$

початкова і кінцева швидкості, прискорення $S =$ ________________

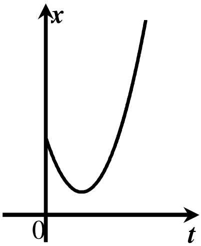
початкова і кінцева швидкості, час $S =$ ________________

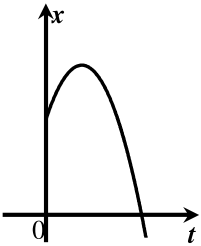
2

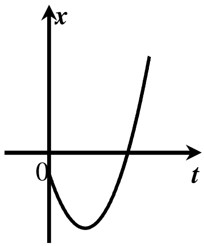
6. Матеріальна точка рухається вздовж осі *Ox*. Запишіть вираз для залежності $x(t)$.

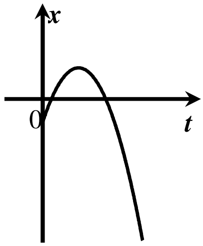
Рух відбувається з прискоренням 4 м/с^2. В момент часу $t=0$ тіло знаходилось у точці початку координат, а його швидкість дорівнювала нулю.	$x(t)=\frac{4\cdot t^2}{2}=2\cdot t^2$
Залежність швидкості від часу $\upsilon_x(t)=3-t$, початкова координата $x_0=4$ м.	
Стале прискорення дорівнює 3 м/с^2, початкова швидкість дорівнює 2 м/с і спрямована протилежно до напрямку осі *Ox*, початкова координата дорівнює 1 м.	
Рух відбувається зі швидкістю 5 м/с, а координата через 3 с після початку руху дорівнювала (-2) м.	

7. За наведеним ескізом графіка залежності $x(t)=x_0+\upsilon_{0x}t+\frac{a_x t^2}{2}$ порівняйте з нулем значення сталих x_0, υ_{0x}, a_x.





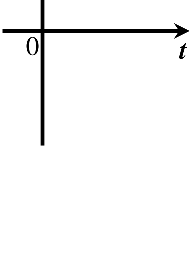




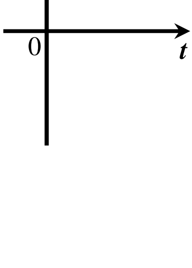
$x_0>0$				
$\upsilon_{0x}<0$				
$a_x>0$				

8. Зробіть ескізи графіків залежності $x(t)=x_0+\upsilon_{x0}t+\frac{a_x t^2}{2}$ за вказаних умов.

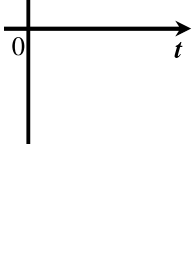
$x_0>0,\upsilon_{0x}=0,a_x>0$



$x_0<0,\upsilon_{x0}<0,a_x>0$



$x_0>0,\upsilon_{0x}>0,a_x>0$

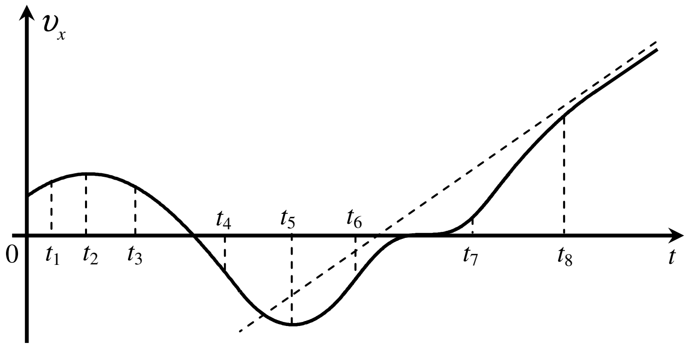


2

9. Заповніть таблицю похідних і первісних.

первісна $F(x)=$	функція $f(x)=$	похідна $f'(x)=$
$(4/3)x^3-(3/2)x^2+2x+C$	$4x^2-3x+2$	$8x-3$
$-2/x$		
		$5x$
	$2\sqrt{x}$	
координата $x(t)=$	швидкість $\upsilon_x(t)=$	прискорення $a_x(t)=$
	$4t-4$	
t^2+2t-3		

10. Тіло рухається вздовж осі *OX* так, що графік залежності $\upsilon_x(t)$ є таким:



Чи правильні твердження, що наведені нижче?
(Варіанти відповідей: «+» — так, «−» — ні, «0» — неможливо визначити)

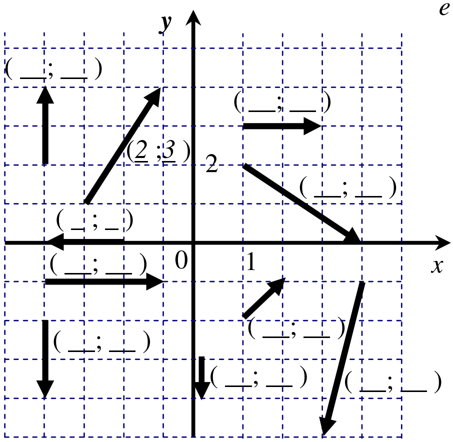
Про проекцію прискорення:		*Про координату:*	
$a_x(t_5)=0$	+	від t_2 до t_3 зростає	
$a_x(t_3)>a_x(t_6)$		$x(t_4)>0$	
при $t\to\infty$ прямує до певного додатного значення		при $t=t_5$ має мінімальне значення	
при $t=t_2$ дорівнює нулю		між t_3 та t_4 змінює свій знак	

....

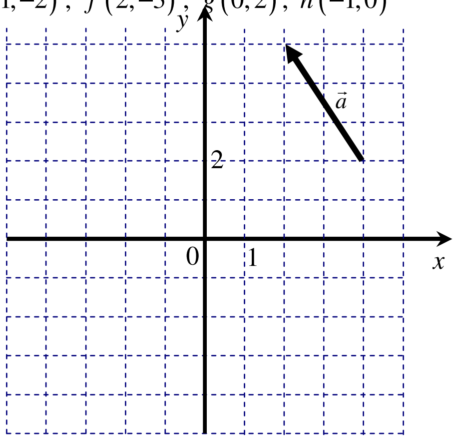
П.І. студента ______________________ група __________

3

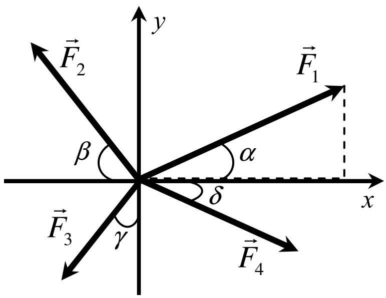
1. Запишіть проекції кожного вектора на осі координат.



2. Зобразіть вказані вектори.
$\vec{a}(-2;3)$; $\vec{b}(1;4)$; $\vec{c}(0;-2)$; $\vec{d}(3;0)$; $\vec{e}(-1;-2)$; $\vec{f}(2;-3)$; $\vec{g}(0;2)$; $\vec{h}(-1;0)$



3. Знайдіть проекції кожної з вказаних на рисунку сил на осі координат.



	$\vec{F}_1$	$\vec{F}_2$	$\vec{F}_3$	$\vec{F}_4$
OX	$F_1\cos\alpha$			
OY	$F_1\sin\alpha$			

4. Запишіть кожний з векторів з попереднього завдання через одиничні вектори $\vec{i}$ (вектор вздовж осі OX) та $\vec{j}$ (вектор вздовж осі OY).

$\vec{F}_1 = F_1\cos\alpha\cdot\vec{i} + F_1\sin\alpha\cdot\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{F}_3 =$ ______________________

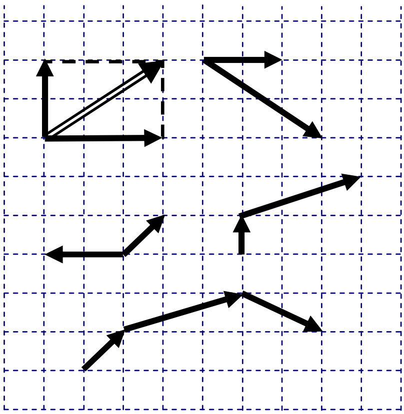
$\vec{F}_2 =$ ______________________ $\qquad$ $\vec{F}_4 =$ ______________________

3

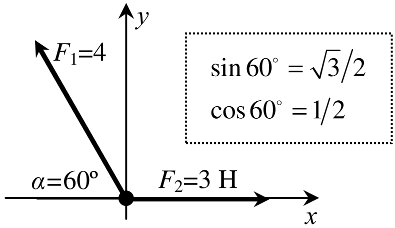
5. Заповніть пропущені місця.

вектор	проекція на OX	проекція на OY	проекція на OZ	модуль
$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$	$a_x = 3$	$a_y = 4$	$a_z = -5$	$\sqrt{50}$
$\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$				
$\vec{c} =$	$c_x = -2$	$c_y = 0$	$c_z = 1$	
$\vec{d} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$				

6. Покажіть на рисунку, куди буде спрямована сума вказаних векторів.



7. Знайдіть модуль результуючої сили, що діє на тіло (див. рис.).



	$\vec{F}_1$	$\vec{F}_2$	$\vec{F}_{рез}$
OX			
OY			

8. Залежність радіус-вектора частинки від часу описується законом $\vec{r}(t) = 3t \cdot \vec{i} - 2t^2 \cdot \vec{j}$. Знайдіть вказані величини.

залежності координат частинки від часу: $x(t) =$ ________________

$y(t) =$ ________________

швидкість частинки $\vec{v}(t) = d\vec{r}/dt =$ ________________

модуль швидкості частинки $v(t) = |\vec{v}(t)| =$ ______________

прискорення частинки $\vec{a}(t) = d\vec{v}/dt =$ ________________

модуль прискорення частинки $a(t) = |\vec{a}(t)| =$ __________________

9. Залежність швидкості частинки від часу описується законом $\vec{\upsilon}(t) = -5t^2 \cdot \vec{i} + 4t^3 \cdot \vec{j}$. Знайдіть вказані величини, вважаючи, що $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$.

залежності радіус-вектора частинки від часу: $\vec{r}(t) =$ ____________________

модуль швидкості частинки $\upsilon(t) = |\vec{\upsilon}(t)| =$ ________________

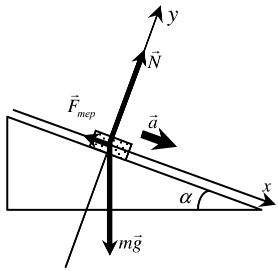
прискорення частинки $\vec{a}(t) = d\vec{\upsilon}/dt =$ ____________________

модуль прискорення частинки $a(t) = |\vec{a}(t)| =$ ______________________

10. Тіло масою m зісковзує з похилої площини. Другий закон Ньютона у цьому випадку має вигляд:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{тер} + \vec{N} = m\vec{a} \text{ .}$$

Враховуючи, що похила площина має кут α з горизонтом, заповніть таблицю та запишіть другий закон Ньютона у проекціях на осі, що позначені на рисунку.



	$\vec{N}$	$\vec{F}_{тер}$	$m\vec{g}$	$\vec{a}$
OX				
OY				

другий закон Ньютона в проекції на осі

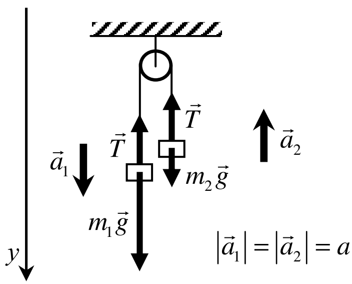
OX: ______________________________ $= ma$

OY: ______________________________ $= 0$

11. Два тіла зв'язані ниткою, що перекинута через блок, так як показано на рисунку. Запишіть другий закон Ньютона у проекціях на вказану вісь для обох тіл.

тіло m_1 : ______________________________

тіло m_2 : ______________________________



3

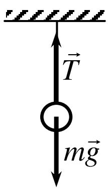
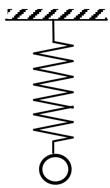
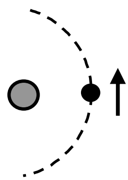
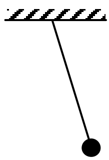
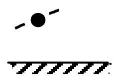
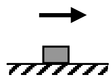
12. Заповніть пропущені у тексті місця.

● За законом Гука сила пружності, що виникає в пружині під час її розтягування, залежить від величини деформації за формулою ___________________. Для пружини жорсткістю 20 кН/м під час її розтягування на 2 см ця сила буде дорівнювати __________ Н. Якщо величину деформації збільшити на 50%, то сила пружності зросте у ______ рази.

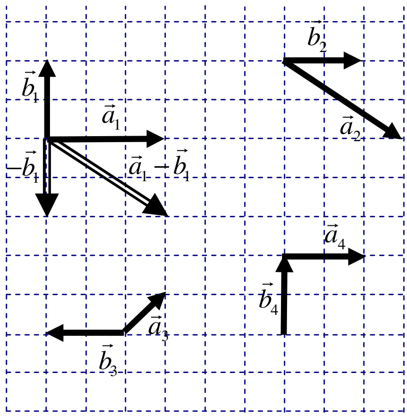
● За законом Всесвітнього тяжіння сила гравітаційної взаємодії між двома точковими масами залежить від відстані між цими масами за формулою

___________________. Якщо порахувати за цією формулою силу, з якою притягуються Місяць (маса $7{,}3\cdot10^{22}$ кг) і Земля (маса $6\cdot10^{21}$ тонн), які знаходяться на відстані $3{,}8\cdot10^{5}$ км, то ця сила буде дорівнювати __________Н. Якщо б маса одного з тіл була у 2 рази більшою, а відстань між ними — у 3 рази меншою, то сила взаємодії б *збільшилася/зменшилася* у _________________ разів.

13. Позначте сили, що діють на тіло у кожному з наведених випадків. Опором повітря можна знехтувати.

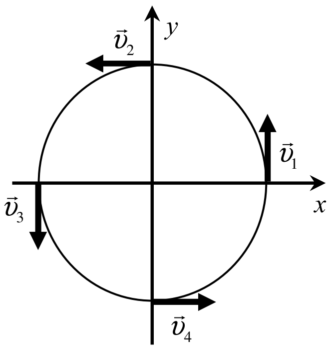
Тіло висить на нероз-тяжній нитці	Тіло висить на пружині	Супутник обертається навколо планети	Маятник коливаєть-ся	Тіло кинули біля поверхні землі	Тіло рухається по шорст-кій поверх-ні після поштовху
					

1. Покажіть на рисунку, куди буде спрямована різниця векторів $\vec{a}_i$ і $\vec{b}_i$, та заповніть пропущені місця у таблиці.



	$\vec{a}_1$	$\vec{b}_1$	$\vec{a}_1-\vec{b}_1$
OX	3	0	3
OY	0	2	-2
	$\vec{a}_2$	$\vec{b}_2$	$\vec{a}_2-\vec{b}_2$
OX			
OY			
	$\vec{a}_3$	$\vec{b}_3$	$\vec{a}_3-\vec{b}_3$
OX			
OY			
	$\vec{a}_4$	$\vec{b}_4$	$\vec{a}_4-\vec{b}_4$
OX			
OY			

2. Знайдіть модуль зміни швидкості тіла, яке рухається по колу зі сталою за модулем швидкістю υ, у вказаних точках ($|\vec{\upsilon}_i| = \upsilon$).



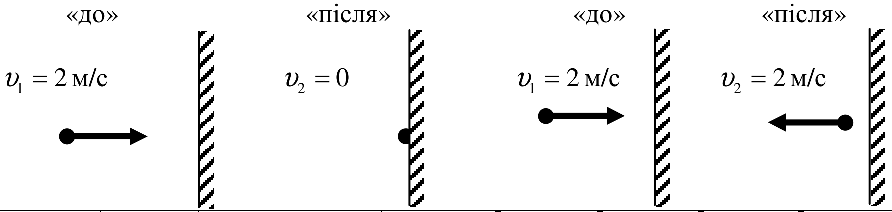
	$\vec{\upsilon}_2$	$\vec{\upsilon}_1$	$\Delta\vec{\upsilon}_{12}$	$\lvert\Delta\vec{\upsilon}_{12}\rvert$
OX	$-\upsilon$	0	$-\upsilon$	$\upsilon\sqrt{2}$
OY	0	υ	$-\upsilon$	
	$\vec{\upsilon}_3$	$\vec{\upsilon}_1$	$\Delta\vec{\upsilon}_{13}$	$\lvert\Delta\vec{\upsilon}_{13}\rvert$
OX				
OY				
	$\vec{\upsilon}_4$	$\vec{\upsilon}_1$	$\Delta\vec{\upsilon}_{14}$	$\lvert\Delta\vec{\upsilon}_{14}\rvert$
OX				
OY				

3. Відомо, що початкова швидкість частинки $\vec{\upsilon}_1 = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ (м/с), кінцева — $\vec{\upsilon}_2 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ (м/с). Знайдіть: приріст швидкості $\Delta\vec{\upsilon} =$ ___________, модуль приросту швидкості $|\Delta\vec{\upsilon}| =$ ____, приріст модуля швидкості $\Delta\upsilon = |\vec{\upsilon}_2| - |\vec{\upsilon}_1| =$ _______.

4

4. Знайдіть величину зміни імпульсу тіла масою 0,2 кг у кожній ситуації.

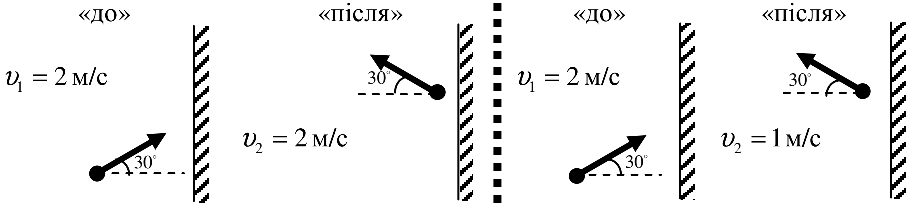
Абсолютно непружний удар | ***Абсолютно пружний удар***



	$\vec{p}_2$	$\vec{p}_1$	$\Delta\vec{p}$
OX	0	$0,2 \cdot 2 = 0,4$	$-0,4$
$\lvert\Delta\vec{p}\rvert = 0,4$ кг м/с			

	$\vec{p}_2$	$\vec{p}_1$	$\Delta\vec{p}$
OX			
$\lvert\Delta\vec{p}\rvert =$			

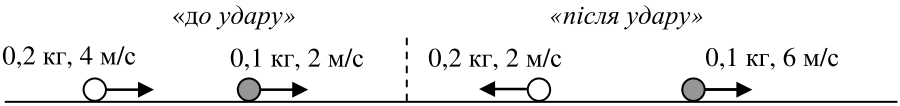
Абсолютно пружний удар ***Частково пружний удар***



	$\vec{p}_2$	$\vec{p}_1$	$\Delta\vec{p}$
OX			
OY			
$\lvert\Delta\vec{p}\rvert \approx$			

	$\vec{p}_2$	$\vec{p}_1$	$\Delta\vec{p}$
OX			
OY			
$\lvert\Delta\vec{p}\rvert \approx$			

5. Визначте для наведеної нижче ситуації, чи можлива вона, чи ні. Вважайте, що зовнішні сили відсутні, удар абсолютно ***пружний і центральний***.



Сумарний імпульс тіл до удару: _______ кг·м/с.

Сумарний імпульс після удару: _______ кг·м/с.

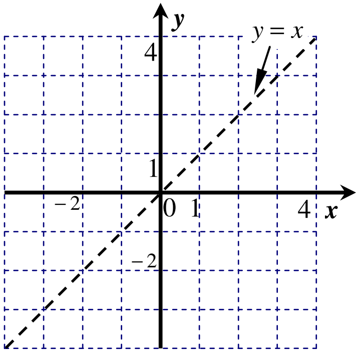
Відповідь: ________________________.

4

6. Побудуйте графіки залежності $y = 2^x$ і $y = \log_2 x$ використовуючи таблицю значень. Зверніть увагу на симетрію цих графіків відносно прямої $y = x$.

для функції $y = 2^x$					
x	–2	–1	0	1	2
y	0,25	0,5			

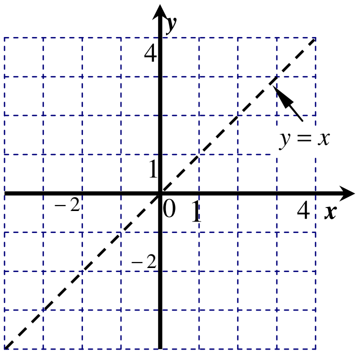
для функції $y = \log_2 x$					
x	–1	0	1	2	4
y	—	—	0		



7. Побудуйте графіки залежності $y = (1/2)^x$ і $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ використовуючи таблицю значень. Зверніть увагу на симетрію цих графіків відносно прямої $y = x$.

для функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$					
x	–2	–1	0	1	2
y	4	2			

для функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$					
x	–1	0	1	2	4
y	—	—	0		



8. Позначте, які з наведений функцій є спадними (↓), а які — зростаючими (↑).

$y = \log_5 x$	↑
$y = (0,5)^x$	
$y = \left(\sqrt{2}\right)^x$	
$y = \log_{0,7} x$	

9. Порівняйте з одиницею.

2^{-5}	<1
$(1/3)^{\frac{1}{3}}$	
$(1/2)^{-5}$	
$(\pi - 1)^2$	

$\boxed{4}$

10. Порівняйте x та y, якщо відомо, що нерівність вірна:

$2^x > 2^y$	$x > y$
$\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^y$	
$\left(\frac{7}{6}\right)^x < \left(\frac{7}{6}\right)^y$	
$1,3^x > 1,3^y$	
$0,3^x > 0,3^y$	

11. Знайдіть x:

$\log_{81} x = \frac{1}{2}$	$x = 9$
$\log_{0,1} x = -2$	
$\log_x 36 = -2$	
$\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$	
$\log_x 25 = 2$	

12. Порівняйте основу $a > 0$ з одиницею, якщо відомо, що нерівність вірна.

$a^2 < a^3$	
$a^{\frac{2}{5}} > a^{\frac{3}{5}}$	
$a^{\frac{1}{3}} > a^{\frac{2}{3}}$	
$a^{-2} > a^2$	

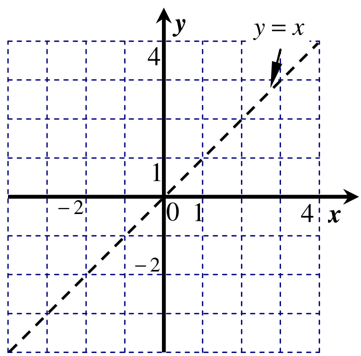
13. Знайдіть логарифми чисел (вважаючи, що $a > 0$, $a \neq 1$).

$\log_a a =$	1
$\log_a a^2 =$	
$\log_{\sqrt{a}} a =$	
$\log_a \frac{1}{a} =$	

14. Побудуйте графік залежності $y = e^x$ і $y = \ln x$ використовуючи таблицю значень. Зверніть увагу на симетрію цих графіків відносно прямої $y = x$. Обчислення виконайте з точністю до десятих.

для функції $y = e^x$					
x	-2	-1	0	1	2
y	0,1	0,4	1		

для функції $y = \ln x$					
x	-1	0	1	2	4
y	—	—	0		



______________________________ ________

П.І. студента *група* 5

1. Розв'яжіть рівняння.

$10^x = 1/e \;\Rightarrow\; \underline{x = -\lg e}$ $\ln x = -10 \;\Rightarrow\; x =$ ____________

$2^x = 0{,}125 \;\Rightarrow\; \underline{x = -3}$ $\log_3 x = 2 \;\Rightarrow\; x =$ ____________

$e^x = 100 \;\Rightarrow\; x =$ ________ $\lg x = -e \;\Rightarrow\; x =$ ____________

$3^x = 1/81 \;\Rightarrow\; x =$ ________ $e^x = 0{,}1 \;\Rightarrow\; x =$ ____________

2. Виразіть шукану величину:

$M_0 = M \cdot e^{\frac{\upsilon - \upsilon_0}{u}} \;\Rightarrow\; \underline{\upsilon = \upsilon_0 + u \ln \frac{M_0}{M}}$

$u \ln\left(1 - \frac{\mu t}{M_0}\right) = \upsilon_0 - \upsilon \;\Rightarrow\; \mu =$ ________________

$\upsilon = u \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t} \;\Rightarrow\; m_0 =$ ________________

$x = \frac{m \upsilon_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right) \;\Rightarrow\; t =$ ________________

3. За відомою залежністю проекції швидкості від часу $\upsilon_x(t)$ і початковою координатою $x(0) = 0$ знайдіть залежності від часу проекції прискорення $a_x(t)$ і координати $x(t)$ (коефіцієнти вважати заданими в SI).

координата $x(t) =$	швидкість $\upsilon_x(t) =$	прискорення $a_x(t) =$
$5t - \frac{10}{7} + \frac{10}{7} e^{-1{,}4t}$	$5 - 2e^{-1{,}4t}$	$2{,}8 e^{-1{,}4t}$
	$-3e^{-2t}$	
	$7 - 6e^{-0{,}9t}$	
	$5 - 3e^{-0{,}1t}$	

5

4. Поставте у відповідність диференціальному рівнянню функцію, яка ***може*** бути його розв'язком.

рівняння	розв'язок
$\frac{d\upsilon_x}{dt} = -2\upsilon_x$	$\upsilon_x(t) = 3e^{-2t} + 5$
$\dot{\upsilon}_x = -3\upsilon_x$	
$\frac{d\upsilon_x}{dt} + 4\upsilon_x = 0$	
$\dot{\upsilon}_x + 5\upsilon_x = 0$	

варіанти функцій
$\upsilon_x(t) = 2e^{-4t} - 5$
$\upsilon_x(t) = 4e^{-3t} + 2$
$\upsilon_x(t) = 3e^{-2t} + 5$
$\upsilon_x(t) = 3e^{-5t} - 4$

5. Заповніть пропущені у тесті місця.

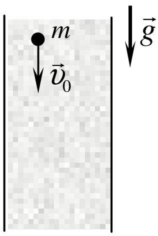
● Якщо на матеріальну точку діє лише сила опору середовища $F_{оп} = -\alpha\upsilon_x$ (α — деякий сталий коефіцієнт, що залежить від характеристик середовища і від форми тіла), то залежність швидкості цього тіла від часу має вигляд $\upsilon_x(t) = \upsilon_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$, де υ_0 — швидкість тіла у початковий момент часу.

Зменшення швидкості тіла у два рази відбудеться через час $\tau =$ __________.

Залежність координати цього тіла від часу є такою: $x(t) = A - \frac{m\upsilon_0}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t}$, де сталу A можна визначити з початкових умов. Якщо $x(0) = 0$, то $A =$ _______________.

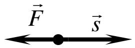
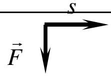
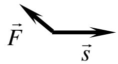
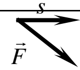
Остаточно залежність $x(t)$ можна записати у вигляді $x(t) =$ ____________________.

● Якщо на матеріальну точку діє і сила опору середовища, і сила тяжіння, то залежність швидкості цього тіла від часу має вигляд $\upsilon_x(t) = \frac{m}{\alpha}g + \left(\upsilon_0 - \frac{m}{\alpha}g\right)e^{-\frac{\alpha}{m}t}$. У такій ситуації через деякий час сила опору стає рівною силі тяжіння і тіло починає рухатися рівномірно. Дійсно, при $t \to \infty$ $\upsilon_x =$ _____________. Залежність координати цього тіла від часу у цьому випадку має більш складний вигляд: $x(t) = A + \frac{mg}{\alpha}t - \left(\frac{m\upsilon_0}{\alpha} - \frac{m^2 g}{\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha}{m}t}$. Якщо у початковий момент матеріальна точка знаходилася у точці з координатою $x = 0$, то стала A має дорівнювати ______________.



5

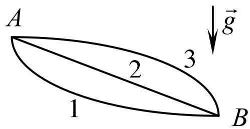
6. Порівняйте з нулем роботу сили $\vec{F}$ у кожному з випадків (вектор $\vec{s}$ — переміщення).

				
$A < 0$	A __ 0	A __ 0	A __ 0	A __ 0

7. Знайдіть вказані величини для заданої пари векторів.

вектори	$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$	$\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$	$\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$ $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j}$
модулі векторів	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{50}$, $\lvert\vec{b}\rvert = \sqrt{41}$		
скалярний добуток	$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -25$		
кут між векторами	$\cos\varphi = \dfrac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert} \approx -0,55$ $\varphi \approx 123°$		
кути між векторами та віссю OX	$\cos\alpha = \dfrac{\left(\vec{a}, \vec{i}\right)}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{i}\rvert} \approx 0,42$ $\alpha \approx 65°$ $\cos\beta = \dfrac{\left(\vec{b}, \vec{i}\right)}{\lvert\vec{b}\rvert \cdot \lvert\vec{i}\rvert} \approx -0,16$ $\beta \approx 99°$		

8. Порівняйте роботу сили тяжіння при переміщенні тіла з точки A в точку B за трьома траєкторіями.



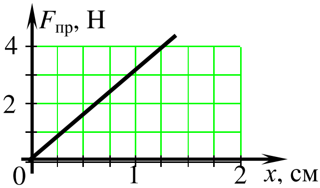
А. $A_1 < A_2 < A_3$.   **Б**. $A_1 > A_2 > A_3$.

В. $A_1 < A_2 = A_3$.   **Г**. $A_1 = A_2 = A_3$.

Відповідь: ______.

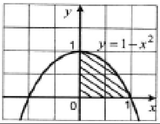
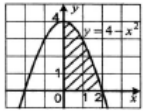
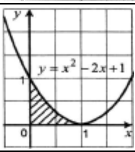
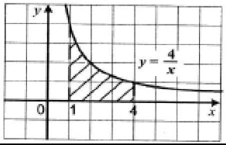
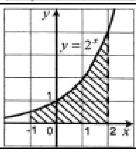
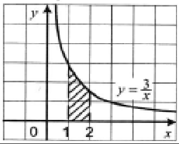
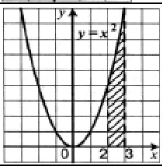
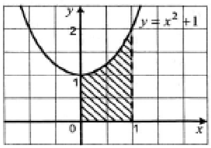
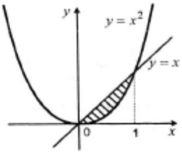
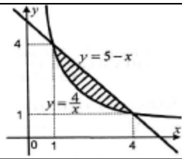
5

9. За графіком залежності проекції сили пружності від видовження пружини знайдіть: 1) жорсткість пружини $k =$ ____________ Н/м; 2) роботу, яку необхідно виконати для розтягування пружини на 1,25 см $A =$ ____________Дж.



10. Балка масою 100 кг лежить на горизонтальній поверхні. Яку мінімальну роботу треба виконати, що поставити її вертикально, якщо її довжина 2 м? Відповідь: ________ Дж.

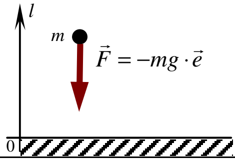
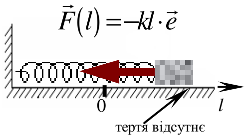
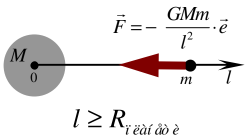
11. Запишіть визначений інтеграл, за допомогою якого можна визначити площу S заштрихованої фігури, і знайдіть цю площу.

фігура	інтеграл	S	фігура	інтеграл	S
	$\int_0^1 (1-x^2)\,dx$	$\frac{2}{3}$			
					
					
					
					

____________________________________ ________

П.І. студента *група* 6

1. Обчисліть роботу A_{if} сили $\vec{F}(l)$ під час переміщення вздовж прямої з точки з координатою l_i у точку з координатою l_f. Вираз для сили $\vec{F}(l)$ вказаний на рисунку, $\vec{e}$ — одиничний вектор вздовж осі l.

	$A_{if} = \int_{l_i}^{l_f} (-mg)\,dl = -mg\left(l_f - l_i\right) = mgl_i - mgl_f$
	
	

2. Обчисліть роботу заданої сили в описаних ситуаціях.

● Матеріальна точка рухається прямолінійно, причому величина переміщення дорівнює 3 м, а сила, що діє на неї складає 4 Н і спрямована під кутом 30° до напряму переміщення.

$A =$ ____

● Матеріальна точка рухається прямолінійно, причому вектор переміщення дорівнює $\vec{s} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ (м), а сила, що на неї $\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ (Н).

$A =$ ____

● Матеріальна точка рухається вздовж прямої $y = 2x$ між точками з координатами $x_1 = 1$ м, $x_2 = 2$ м, а сила, що діє на неї дорівнює $\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ (Н).

$A =$ ____

● Матеріальна точка рухається вздовж осі OX між точками з координатами $x_1 = 1$ см, $x_2 = 4$ см, а сила, що діє на неї залежить від координати: $F = 2x$ (Н).

$A =$ ____

6

3. Розв'яжіть системи рівнянь, виразивши вказану величину через ті, що стоять у дужках, та запишіть відповідь до задачі у загальному вигляді.

Умова задачі	*Система рівнянь*
На яку відстань від поверхні Землі віддалилося б тіло, кинуте вертикально вгору зі швидкістю υ, якщо б у Землі була відсутня атмосфера?	$\left.\begin{matrix} \frac{m\upsilon^2}{2}-\frac{GmM}{R}=-\frac{GmM}{R+l} \\ g=\frac{GM}{R^2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow l(\upsilon, g, R)-?$
Відповідь:	$l=$ ______________________________
Куля масою m_1 налітає на нерухому кулю масою m_2. Відбувається лобове пружне зіткнення. Як залежить доля α переданої під час удару енергії від відношення мас куль $k=\frac{m_1}{m_2}$?	$\left.\begin{matrix} m_1\upsilon_0=m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2 \\ \frac{m_1\upsilon_0^2}{2}=\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_2^2}{2} \\ W_0=\frac{m_1\upsilon_0^2}{2},\ W_2=\frac{m_2\upsilon_2^2}{2} \\ \alpha=\frac{W_2}{W_0},\ k=\frac{m_1}{m_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha(k)-?$
Відповідь:	$\alpha=$ ______________________________
Дві металеві кулі підвішені на нитках так, що коли вони торкаються одна одну, їхні центри мас знаходяться на відстані l нижче точок підвісу, а нитки вертикальні. Маси куль m_1 та m_2. Меншу кулю відводять у бік так, що нитка відхиляється на кут $\alpha=90°$, і відпускають. Вважаючи кулі абсолютно пружними, визначте, на яку висоту вони піднімуться після удару.	$\left.\begin{matrix} m_2gl=\frac{m_2\upsilon^2}{2} \\ m_2\upsilon=m_1u_1+m_2u_2 \\ \frac{m_2\upsilon^2}{2}=\frac{m_1u_1^2}{2}+\frac{m_2u_2^2}{2} \\ m_1gh_1=\frac{m_1u_1^2}{2} \\ m_2gh_2=\frac{m_2u_2^2}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} h_1(m_1, m_2, l)-? \\ h_2(m_1, m_2, l)-? \end{matrix}$
Відповідь:	$h_1=$ ______________________________ $h_2=$ ______________________________

6

4. Запишіть перші три доданки розвинення в ряд Маклорена таких функцій:

$y=(1+x)^3$	$y\approx 1+3x+3x^2$	$y=\sqrt{1-x}$	$y\approx$
$y=(1+x)^4$	$y\approx$	$y=e^x$	$y\approx$
$y=\dfrac{1}{1+x}$	$y\approx$	$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$	$y\approx$
$y=e^x-1$	$y\approx$	$y=2^x$	$y\approx$
$y=e^{-x^2}$	$y\approx$	$y=\ln(1-x)$	$y\approx$

5. Запишіть апроксимуючі функції з точністю до перших двох ненульових членів:

$h=l\left(1-\sqrt{1-\dfrac{x^2}{l^2}}\right)$, $\quad x<<l \quad$ $h\approx$ ______

$T=mc^2\left[\left(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right] \quad \upsilon<<c \quad$ $T\approx$ ______

$U=GMm\left(\dfrac{1}{R_3}-\dfrac{1}{R_3+h}\right) \quad h<<R_3 \quad$ $U\approx$ ______

$\upsilon(t)=\upsilon_0\left(1+\dfrac{\alpha}{m}\upsilon_0\,t\right)^{-1} \quad t\to 0 \quad$ $\upsilon\approx$ ______

$\upsilon(x)=\upsilon_0\left(1-\dfrac{2k}{m\upsilon_0^2}x\right)^{1/2} \quad x\to 0 \quad$ $\upsilon\approx$ ______

$F=\dfrac{GMm}{7}\left(\dfrac{8}{d^2}-\dfrac{1}{(d-R/2)^2}\right) \quad d>>R \quad$ $F\approx$ ______

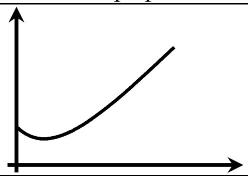
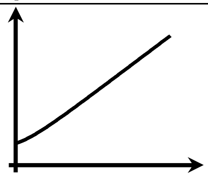
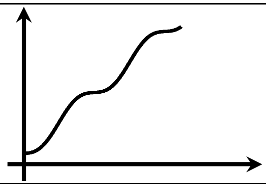
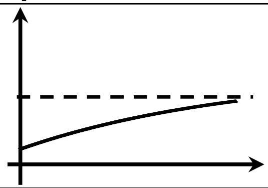
$l=\sqrt{\left(m_0c^2/F\right)^2+c^2t^2}-m_0c^2/F \quad \dfrac{Ft}{m_0c}<<1 \quad$ $l\approx$ ______

$\upsilon(t)=-u\ln\left(1-\dfrac{\mu\,t}{m_0}\right) \quad t\to 0 \quad$ $\upsilon\approx$ ______

$\upsilon_x(t)=\dfrac{m}{\alpha}g+\left(\upsilon_0-\dfrac{m}{\alpha}g\right)e^{-\frac{\alpha}{m}t} \quad t\to 0 \quad$ $\upsilon\approx$ ______

6

6. Вкажіть до кожного графіка відповідну залежність $x(t)$. Будьте уважні: деяким графікам не відповідає жодна залежність, а деяким — кілька залежностей.

графік	функція/ї
	
	
	
	

варіанти
$x(t)=3+t+0,3e^{-2t}$
$x(t)=4+5t+e^{-3t}$
$x(t)=5-3e^{-0,1t}$
$x(t)=7-6e^{-0,9t}$
$x(t)=3+t+e^{-2t}$

7. Заповніть пропущені місця.

● Матеріальна точка рухається так, що її координата змінюється за законом $x(t)=5-3e^{-0,1t}$. Вираз для дотичної до графіка цієї залежності в початковий момент $(t=0)$ має вигляд $\tilde{x}=A+Bt$, де $A=$ __________, $B=$ ______________.

● Якщо ж ця точка буде рухатися так, що її координата буде змінюватися за законом $x(t)=4+5t+e^{-3t}$, то рівняння дотичної в початковий момент часу буде мати вигляд $\tilde{x}=$ __________________.

______________________________ ________

П.І. студента *група*

7

1. Кінетична енергія обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі визначається формулою…

Відповідь: _____

2. Момент інерції твердого тіла відносно заданої осі дорівнює …

Відповідь: _____

3. Враховуючи, що через I_x, I_y, I_z позначені моменти інерції тіла відносно координатних осей, а через Θ — момент інерції відносно точки перетину цих осей, оберіть правильне твердження:

А) $2\left(I_x + I_y + I_z\right) = \Theta$; Б) $I_x + I_y + I_z = \Theta$;

В) $I_x + I_y + I_z = 3\Theta$; Г) $I_x + I_y + I_z = 2\Theta$. Відповідь: _____

4. У міжнародній системі фізичних величин момент інерції вимірюється у …

Відповідь: _____

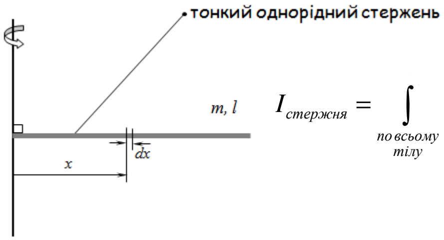
5. Якщо тіло здійснює і обертальний (навколо певної осі), і поступальний рух, то його загальну кінетичну енергію можна визначити за формулою:

А) $E_k = \dfrac{m\upsilon^2}{2} \pm \dfrac{I\omega^2}{2}$ (знак обирається в залежності від напрямку обертання);

Б) $E_k = \dfrac{I\omega^2}{2}$; В) $E_k = \dfrac{I\omega^2}{2} - \dfrac{m\upsilon^2}{2}$; Г) $E_k = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{I\omega^2}{2}$. Відповідь: _____

6. Продовжить процес виведення формули для моменту інерції тонкого однорідного стержня маси m і довжини l відносно осі, що проходить через один з його кінців перпендикулярно до стержня (див. рис.).

$$r = x \qquad dm = \frac{m}{l} \cdot dx$$



$$I_{стержня} = \int\limits_{\substack{по\,всьому \\ тілу}} r^2 dm = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

7

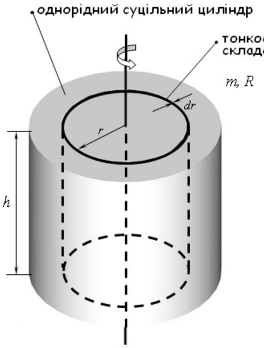
Додаткові запитання:

У яких одиницях вимірюється величина $\dfrac{m}{l}$? Відповідь: ______________

Як можна назвати таку фізичну величину? Відповідь: ______________

____

7. Продовжить процес виведення формули для моменту інерції однорідного суцільного циліндра маси m, радіуса R і висоти h відносно осі, що співпадає з віссю циліндра.



$$dm = \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot dV = \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot \left(2\pi r h\, dr\right) = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$I_{циліндра} =$ ____

____

____

Додаткові запитання:

Який фізичний зміст має величина $\dfrac{m}{\pi R^2 h}$? Відповідь: ____________________

____

В яких одиницях вона вимірюється? Відповідь: ______________________

Виявилося, що $I_{\text{öèë³íäðà}}$ не залежить від h. Чи означає це, що, розпилявши циліндр на два з $h_1 = \dfrac{1}{3}h$ і $h_2 = \dfrac{2}{3}h$, ми отримаємо циліндри з однаковими моментами інерції відносно тієї ж самої осі? Відповідь і пояснення: ________

____

Якщо ні, то чому дорівнюватиме I_2/I_1 ? Відповідь: ______________________

____

7

Оберіть правильні твердження:

8. А) через I_0 у теоремі Гюйгенса – Штейнера ($I = I_0 + ma^2$) позначений момент інерції тіла відносно будь-якої заданої осі, що паралельна осі відносно якої момент інерції дорівнює I; відстань між осями позначена через a.

Б) через I_0 у теоремі Гюйгенса – Штейнера ($I = I_0 + ma^2$) позначений момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла і паралельна осі відносно якої момент інерції дорівнює I; відстань між осями позначена через a.

В) через I та I_0 у теоремі Гюйгенса – Штейнера ($I = I_0 + ma^2$) позначені моменти інерції тіла відносно двох перпендикулярних осей; відстань між осями позначена через a.

Г) через a у теоремі Гюйгенса – Штейнера ($I = I_0 + ma^2$) позначений максимальний лінійний розмір тіла.

Відповідь: _____

9. Момент інерції тонкого кільця маси m і радіуса R відносно осі, що проходить через його центр перпендикулярно до площини кільця …

А) … дорівнює моменту інерції напівкільця (m, R) відносно тієї ж осі;

Б) … у два рази більший, ніж момент інерції напівкільця (m, R) відносно тієї ж осі;

В) … у два рази менший, ніж момент інерції напівкільця (m, R) відносно тієї ж осі;

Г) … дорівнює моменту інерції диска (m, R) відносно тієї ж осі.

Відповідь: _____

Запишіть відповідну формулу:

8. Момент інерції однорідного суцільного циліндра масою m і радіусом R відносно його осі, дорівнює _______________

9. Момент інерції гантелі, що складається з точкових мас m_1 і m_2, які знаходяться на кінцях легкого стержня, якщо вісь її обертання перпендикулярна стержню та знаходиться на відстанях r_1 та r_2 від точкових мас, дорівнює __________________________

7

10. До маховика з моментом інерції I, що обертається з кутовою швидкістю ω_1, приклали гальмівну колодку. Через деякий час кутова швидкість маховика зменшилася до значення ω_2. За цей час у вигляді теплоти виділилася енергія ___________________________________

11. Кінетична енергія обертального руху тонкого кільця радіусом R і масою m, який розкручено до кутової швидкості ω навколо його осі, дорівнює ___________

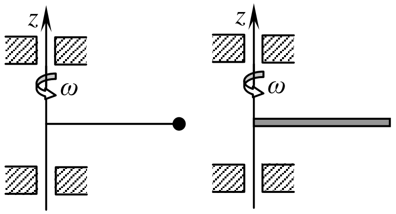
12. Тонкостінна сфера має масу m і радіус R. Для того, щоб розкрутити її до частоти ω навколо її осі знадобиться енергія ____________________________

13. Тонкостінний циліндр має масу m, радіус R і висоту h. Момент інерції циліндра відносно нерухомої осі *z*, що співпадає з однією з твірних циліндричної поверхні, дорівнює ____________________________

14. Два подібних маховика зроблені з однакового металу, причому лінійні розміри першого вдвічі більші лінійних розмірів другого. Як відносяться кінетичні енергії маховиків за їх однакової кутової швидкості обертання?

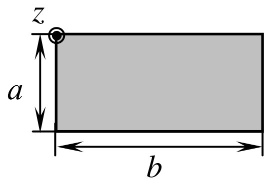
Відповідь: *кінетична енергія першого маховика більша у ____ рази(ів).*

15. Розгляньте дві механічні системи (див. рис.). Перша являє собою тягарець масою m, що закріплений на горизонтально розташованому невагомому стержні довжиною l, а друга — горизонтально розташований однорідний стержень масою m і довжиною l. Кінці стержнів з'єднані з вертикальними осями, що обертаються з кутовою швидкістю ω. Як відносяться кінетичні енергії цих тіл?



Відповідь: *кінетична енергія тягарця більша/менша* (підкресліть!) *за кінетичну енергію стержня у ______ рази(ів).*

16. Знайти момент інерції тонкої прямокутної пластинки відносно осі *Z*, яка перпендикулярна до пластини. Відомі маса пластинки *m* та її розміри *a* і *b*.

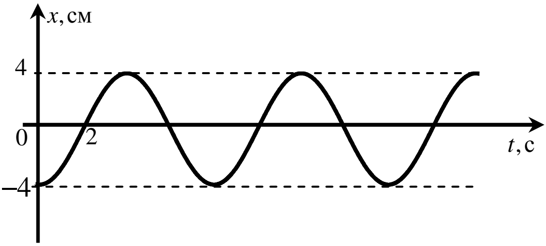


Відповідь: ______________

П.І. студента ______ група ______

8

1. Визначте за наведеним графіком залежності координати тіла від часу основні характеристики гармонічного коливання:



амплітуда коливань ______

період коливань _________

частота коливань ________

циклічна частота коливань ______________

2. Запишіть рівняння гармонічних коливань тіла, якщо про його рух відомо таке:

«Тіло коливається вздовж осі OX із амплітудою 3 см і періодом 0,8 секунд. У початковий момент часу тіло знаходилося у точці з координатою 3 см, а його швидкість дорівнювала нулю».

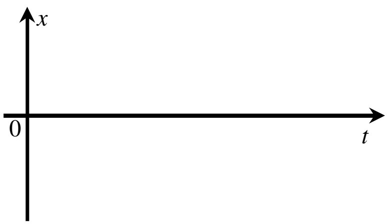
$x(t) =$ ___________________________.

«Тіло коливається вздовж осі OX із амплітудою 3 см і періодом 0,8 секунд. У початковий момент часу тіло знаходилося у початку координат, а його швидкість мала певне додатне значення».

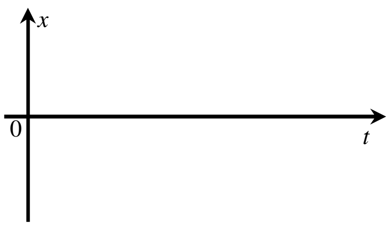
$x(t) =$ _________________________________.

3. Побудуйте ескізи графіків наведених нижче залежностей $x(t)$ і позначте у кожному випадку амплітуду та період коливань:

$x(t) = 2\cos 4t$



$x(t) = 3\sin 2t$



4. Диференціальне рівняння гармонічних коливань пружинного маятника після введення позначення $k/m = \omega^2$ має вигляд …

А) $\ddot{x} + \omega^2 x = x$; Б) $\ddot{x} + \omega^2 \dot{x} = 0$; В) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$; Г) $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$.

Відповідь: ____

8

5. Циклічна частота гармонічних коливань пружинного маятника залежить від …
А) … маси тягарця та жорсткості пружини;
Б) … початкової швидкості тягарця;
В) …. маси тягарця та прискорення вільного падіння;
Г) … довжини пружини та прискорення вільного падіння.

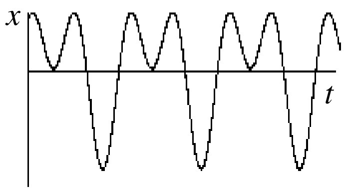
Відповідь: ____

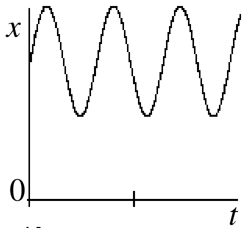
6. Залежність координати тягарця пружинного маятника, що здійснює гармонічні коливання, від часу **не** може мати вигляд:

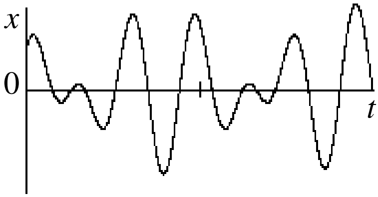
А), $x = x_m \cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$;
В) $x = C + A\cos \omega t + B\sin \omega t$;
Б) $x = A\cos \omega t + B\sin \omega t$;
Г) $x = At + B\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$.

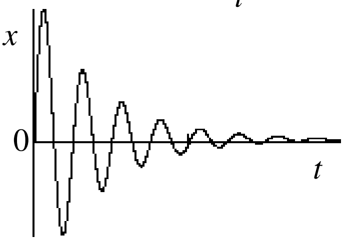
Відповідь: ____

7. Графік залежності координати тіла, що здійснює гармонічні коливання, від часу може мати вигляд:

А) 

В) 

Б) 

Г) 

Відповідь: ____

8. За якої умови коливання математичного маятника є гармонічними?
А) Якщо довжина нитки маятника більша за 1 м.
Б) Якщо кут відхилення маятника від положення рівноваги набагато менше одиниці.
В) Якщо кут відхилення маятника від положення рівноваги не перевищує 90°.
Г) Якщо маса тягарця не перевищує 1 кг.

Відповідь: ____

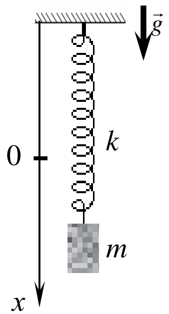
8

9. Оцініть, як і на скільки відсотків збільшиться період коливань математичного маятника при збільшенні його довжини на 1%.

Відповідь: ____________

10. Оцініть, на скільки відсотків зміниться частота коливань пружинного маятника при збільшенні маси тягарця на 1%.

Відповідь: ___________



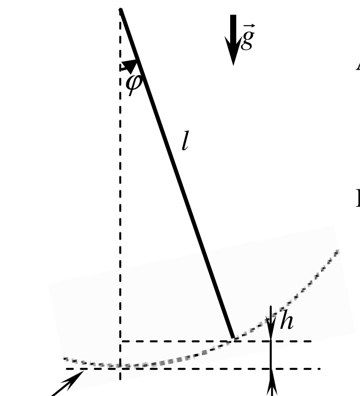
11. Другий закон Ньютона, записаний для пружинного маятника у полі тяжіння (див. рис., початок координат відповідає положенню тіла при нерозтягнутій пружині) має вигляд:

А) $m\ddot{x} = -kx$; Б) $m\ddot{x} = -kx + mg$;

В) $m\ddot{x} = mg$; Г) $-kx = mg$.

Відповідь: ____

12. Потенціальну та кінетичну енергії математичного маятника (див. рис.) можна записати у такому вигляді:



А) $\begin{cases} E_k = \dfrac{ml\dot{\varphi}^2}{2}; \\ E_p = mgl\sin\dfrac{\varphi}{2}, \end{cases}$ Б) $\begin{cases} E_k = ml\dot{\varphi}^2; \\ E_p = mgl\sin\varphi, \end{cases}$

В) $\begin{cases} E_k = \dfrac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}; \\ E_p = 2mgl\sin^2\dfrac{\varphi}{2}, \end{cases}$ Г) $\begin{cases} E_k = ml^2\dot{\varphi}^2; \\ E_p = mgl\sin^2\varphi. \end{cases}$

Відповідь: ____

8

13. Вкажіть періоди наведених нижче функцій:

$U(t) = U_m \sin \omega t$	$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
$P(t) = \dfrac{U_m^2 \cos^2 \omega t}{R}$	
$x(t) = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$	
$x(t) = A\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}} \cdot t\right) + B$	
$I(t) = I_m \cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right)$	

14. Координата матеріальної точки масою m змінюється за законом: $x(t) = \dfrac{mg}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)$. Надайте відповіді на такі запитання:

а) Як залежить від часу швидкість $\upsilon_x(t)$ матеріальної точки?

$\upsilon_x(t) =$ ____

б) Як залежить від часу прискорення $a_x(t)$ матеріальної точки?

$a_x(t) =$ ____

в) Як залежить від координати сила $F(x)$, що діє на матеріальну точку?

$F(x) =$ ____

15. Знайдіть амплітуду коливань, якщо залежність координати тіла від часу має вигляд $x(t) = 3 + 2\cos 4t + 3\sin 4t$ (вважайте, що числові значення задані в SI).

Відповідь: ________

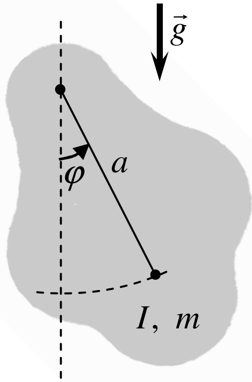
....

______________________________ ________

П.І. студента *група*

9

1. Основне рівняння динаміки обертального руху для фізичного маятника (див. рис.) має вигляд:



А) $I\ddot{\varphi} = -mga\sin\varphi$; Б) $I\ddot{\varphi} = -mga\cos\varphi$;

В) $I\ddot{\varphi} = mga\cos\varphi$; Г) $I\ddot{\varphi} = mga\sin\varphi$.

Відповідь: _____

2. З рівняння $mga\left(1-\cos\varphi\right)+\frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}\right)^2 = \mathrm{const}$

при $|\varphi| << 1$ можна отримати диференціальне

рівняння $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$. Зробіть це:

____

____

____

Виразіть ω через додатні константи m, k, a, I :

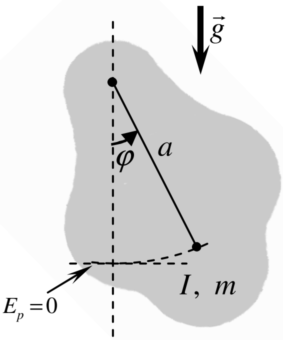
$\omega =$ ________________

3. Період гармонічних коливань фізичного маятника дорівнює:

А) $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$; Б) $T = \sqrt{\frac{I}{mga}}$; В) $T = 2\pi\sqrt{\frac{mga}{I}}$; Г) $T = \sqrt{\frac{mga}{I}}$.

Відповідь: _____

4. Потенціальну та кінетичну енергії фізичного маятника (див. рис.) можна записати у такому вигляді:



А) $\begin{cases} E_k = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}; \\ E_p = mga\left(1-\cos\varphi\right), \end{cases}$ Б) $\begin{cases} E_k = I\dot{\varphi}^2; \\ E_p = mga\left(1-\cos\varphi\right), \end{cases}$

В) $\begin{cases} E_k = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}; \\ E_p = mga\cos\varphi, \end{cases}$ Г) $\begin{cases} E_k = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}; \\ E_p = mga\sin\varphi. \end{cases}$

Відповідь: _____

9

5. Під час розв'язування певної задачі про тіло, що здійснює гармонічні коливання, були визначені кінетична та потенціальна енергії цього тіла:

$$E_k = \frac{1}{2}\left(mx^2 + I\right)\dot{\varphi}^2; \qquad E_p = \left(Ma - mx\right)\left(1 - \cos\varphi\right)g .$$

Вважаючи, що усі величини, крім кута відхилення φ, є позитивними константами, знайдіть період коливань цього тіла. Для цього:

1) запишіть закон збереження енергії:

____

2) продиференцюйте отримане рівняння за часом:

____

3) спростіть отриманий вираз:

____

4) використайте той факт, що коливання маятника будуть гармонічними лише за умови $|\varphi| << 1$ (тобто, скористайтеся розвиненням в ряд Маклорена):

____

5) запишіть рівняння у вигляді $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$:

____

6) знайдіть період коливань тіла: ______________________

6. Виберіть **не**правильне твердження:

А) Залежність $x(t) = 2\cos 5t + 3\sin 5t$ описує гармонічні коливання.

Б) Залежність $x(t) = 5\sin 3t + 6\cos 4t$ не може описувати гармонічні коливання.

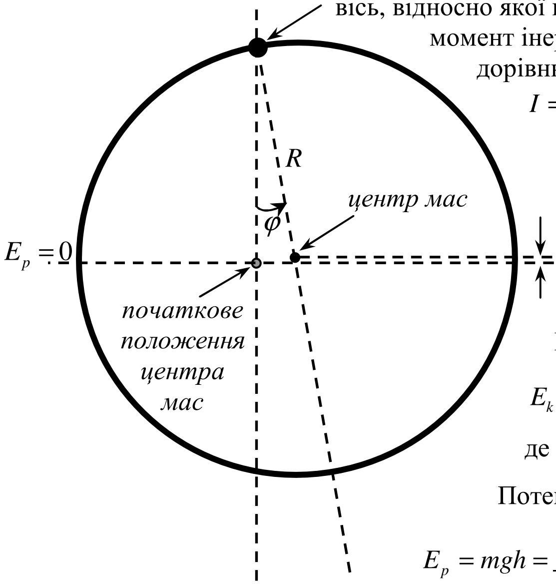
В) Залежність $x(t) = 4\sin^2 5t + 2$ описує гармонічні коливання.

Г) Залежність $x(t) = 7\cos 2t - 7\sin 3t$ описує гармонічні коливання.

Відповідь: ____

9

7. Обруч масою m та радіусом R здійснює малі коливання навколо горизонтальної осі, що проходить крізь отвір в обручі. Нехтуючи тертям, знайдіть період коливань обруча. Для цього заповніть пропущені у тексті місця:



вісь, відносно якої відбуваються коливання

момент інерції обруча відносно цієї осі дорівнює

$$I = mR^2 + \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

зміна положення центр мас

$$h(R,\varphi) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Кінетична енергія обруча:

$$E_k = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad},$$

де $\dot{\varphi}$ — це ________________

Потенціальна енергія обруча:

$$E_p = mgh = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Закон збереження енергії у цьому випадку буде мати вигляд:

____

Якщо продиференціювати отриманий вираз за часом, то отримаємо таке:

____

Використання того факту, що коливання обруча є малими, тобто $|\varphi| << 1$, дозволяє скористатися розвиненням у ряд Маклорена:

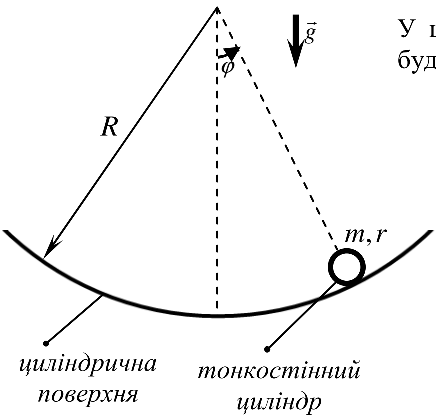
____

Отже, рівняння малих коливань обруча має вигляд $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$, де циклічна частота $\omega =$ ________________, тобто період коливань дорівнює

______________________________.

9

8. Тонкий циліндр радіуса r катається без проковзування по циліндричній поверхні радіуса R у полі сили тяжіння так, що вісь циліндра здійснює гармонічні коливання. Знайдіть період цих коливань. Для цього заповніть пропущені у тексті місця і скористайтеся тим фактом, що період гармонічних коливань можна найти так: $T = 2\pi\sqrt{\alpha/\beta}$, де α і β — коефіцієнти у виразах для кінетичної та потенціальної енергій тіла ($E_k = \alpha\dot{\varphi}^2$ і $E_p = \beta\varphi^2$).



У цьому випадку кінетична енергія тіла буде дорівнювати сумі двох складових:

$$E_k = \underbrace{E_k^{оберт}}_{\text{Кінетична енергія обертального руху циліндра}} + \underbrace{E_k^{поступ}}_{\text{Кінетична енергія центра мас циліндра}}$$

У системі центра мас, яка рухається поступально, кінетична енергія обертального руху циліндра є такою:

$$E_k^{оберт} = \frac{I\omega^2}{2} = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

Зверніть увагу на те, що ω тут — це кутова швидкість (а не циклічна частота коливань!), з якою тонкостінний циліндр обертається навколо власної осі. Кінетична енергія поступального руху циліндра виражається формулою $E_k^{пост} = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$, де υ — швидкість центра мас. Оскільки центр мас рухається по колу радіуса ________, а кутова швидкість цього руху дорівнює $\dot{\varphi}$, то $\upsilon = (R-r)\dot{\varphi}$. Отже, $E_k^{пост} =$ ____________. З того, що проковзування відсутнє, випливає рівність $\omega = \upsilon/r$. Тобто зв'язок між швидкостями ω і $\dot{\varphi}$ у нашій ситуації має вигляд $\omega =$ ________. Остаточно для кінетичної енергії циліндра отримуємо: $E_k =$ ____________. Формула для потенціальної енергії циліндра така сама як і у випадку математичного маятника, треба лише замінити l на $R-r$ і скористатися тим фактом, що $|\varphi| << 1$ (коливання гармонічні): $E_p = mg$ (_____)$(1-\cos\varphi) \approx$ ____________. Після використання формули для періоду коливань маємо таку відповідь: $T = 2\pi\sqrt{\alpha/\beta} =$ ____________________.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІИЕРАТУРИ

Основна

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики: У 3 т./ За ред. І.М. Кучерука. — 2-ге вид., випр. — К.: Техніка. 2006. Т.1: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка / І.М. Кучерук, І.Т. Горбачук, П.П.Луцик. — 532 с.

2. Мінаєв Ю.П. Математичний апарат фізики для першокурсників : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / Ю.П. Мінаєв. — Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2013. — 200 с.

3. Савельев И.В. Курс общей физики: Учебное пособие для студ. втузов. В 3-х т. Т.1. Механика. Колебания и волны. Молекулярная физика — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 389 с.

4. Соколов Є. П. Екзаменаційна фізика. Лекції: навчальний посібник [для студ. вищ. навч. закл.]: в 2 т. / Євгеній Петрович Соколов. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2009. — Т.1. — 184 с.

5. Соколов Є. П. Екзаменаційна фізика. Лекції: навчальний посібник [для студ. вищ. навч. закл.]: в 2 т. / Євгеній Петрович Соколов. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2009. – Т.2. – 222 с.

Додаткова

6. Анпілогов. Д.І. Методичні вказівки до практичниї занять з теми «Центр мас і його застосування» для слухачів факультету довузівської підготовки 1 та 2 рівня інженерно-технічної спеціалізації. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2006. – 66 с.

7. Детлаф А.А, Яворский Б.М, Курс физики: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. школа, 1989. – 607 с.

8. Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике / Я.Б. Зельдович. — М., 1968. — 576 с.

9. Математичний апарат фізики: методичні вказівки з дисципліни "Фізика" для слухачів факультету загальнотехнічної підготовки. Частина 1 / Укладачі: І.П. Даценко, О.А. Лозовенко, Ю.П. Мінаєв. — Запоріжжя, ЗНТУ, 2014. — 82 с.

10. Математичний апарат фізики: методичні вказівки з дисципліни "Фізика" для слухачів факультету загальнотехнічної підготовки. Частина 2 / Укладачі: І.П. Даценко, О.А. Лозовенко, Ю.П. Мінаєв. — Запоріжжя, ЗНТУ, 2014. — 78 с.

11. Механічні коливання: Методичні вказівки з дисципліни "Фізика" для слухачів факультету загальнотехнічної підготовки / Укладачі: І.П. Кенєва, О.А. Лозовенко, Ю.П. Мінаєв. — Запоріжжя: ЗНТУ, 2011. — 86 с.

12. Обертальний рух твердого тіла: Методичні вказівки з дисципліни "Фізика" для слухачів факультету загальнотехнічної підготовки / Укладачі: І.П. Кенєва, О.А. Лозовенко, Ю.П. Мінаєв. — Запоріжжя: ЗНТУ, 2011. — 86 с.

13. Сивухин Д.В. Механика: Учебное пособие для вузов. – Т.1. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 576 с.

14. Трофимова Т.И. Курс физики. — М.: Высшая школа, 1985.— 300 с.