

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

СКРЕБЦОВ Андрій Андрійович
ШТАНЬКО Петро Костянтинівич
ОМЕЛЬЧЕНКО Ольга Станіславівна

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Навчальний посібник для студентів інженерних спеціальностей



Видавець:
ТОВ «Видавництво „СТАТУС“»
Адреса редакції: Україна, 69057, м. Запоріжжя,
Соборний просп., буд. 158, оф. 249.
моб. +38 (068) 448-11-28, mail@status.zp.ua
<http://status.zp.ua>

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців,
виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 5316 від 03.04.2017

Здано в набір 17•ІХ•2021. Формат 60x84 ¼₁₆.
Папір офсетний № 1. Гарнітура Таймз. Друк цифровий. Ум. друк. арк. 26,27.
Обл.-вид. арк. 9,27. Друк. арк. відбиток 7881,75. Наклад 300 прим.
Замовлення № 9951/09.2021-А. Ціна договірна.
Термін придатності книжки *необмежений*.

Макет розроблений та віддрукований:
ТОВ «Видавництво „СТАТУС“»

ISBN 978-617-8040-14-7

А. А. Скребцов
П. К. Штанько
О. С. Омельченко

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Навчальний посібник
для студентів інженерних спеціальностей



Запоріжжя
СТАТУС
2022

ББК 22.2я73
УДК 531 (075.8)
О-61

ДЛЯ НОТАТОК

О-61 **Опір матеріалів** : навчальний посібник для студентів
інженерних спеціальностей / А. А. Скребцов,
П. К. Штанько, О. С. Омельченко. — Запоріжжя : НУ
«Запорізька політехніка», СТАТУС, 2022. — 452 с.
ISBN 978-617-8040-14-7

ББК 22.2я73
УДК 531 (075.8)

Головний рецензент:
завідувач кафедру «Механіка», канд. техн. наук,
доцент Володимир Григорович ШЕВЧЕНКО

Рекомендовано до видання Вченою радою НУ «Запорізька
політехніка», протокол № від

ISBN 978-617-8040-14-7

© А. А. Скребцов 2022
© П. К. Штанько 2022
© О. С. Омельченко 2022

Ю

Юнга модуль 52

Я

Ядро перерізу 239

– – побудова 239

Явище резонансу 386

– втомленості матеріалів 399

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	10
1. ВСТУП. ЗАДАЧІ КУРСУ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ.....	12
1.1 Наука про опір матеріалів. Об'єкти вивчення.....	12
1.2 Координати та системи координат.....	15
1.3 Класифікація зовнішніх сил.....	16
1.4 Види деформацій стержнів. Поняття про деформований стан.....	18
1.5 Основні гіпотези науки про опір матеріалів.....	22
1.6 Контрольні запитання.....	23
2. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ.....	24
2.1 Статичні моменти площі. Центр ваги перерізу.....	24
2.2 Моменти інерції плоских фігур.....	30
2.3 Моменти інерції відносно паралельних осей.....	31
2.4 Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей.....	33
2.5 Визначення напрямку головних осей інерції. Головні моменти інерції.....	35
2.6 Радіус інерції. Еліпс інерції.....	37
2.7 Моменти опору плоских перерізів.....	38
2.8 Контрольні запитання.....	41
3. ВНУТРІШНІ СИЛИ. МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ. НАПРУЖЕННЯ І ВНУТРІШНІ СИЛОВІ ФАКТОРИ.....	42
3.1 Внутрішні сили. Метод перерізів.....	42
3.2 Напруження в перерізі.....	47
3.3 Принцип Сен-Венана.....	48
3.4 Контрольні запитання.....	51
4. РОЗТЯГАННЯ І СТИСКАННЯ.....	52
4.1 Напруження і деформації при розтяганні і стисканні.....	52
4.2 Умова міцності і жорсткості. Допустимі напруження і деформації.....	57
4.3 Урахування власної ваги при розтяганні та стисканні..	58

4.4 Контрольні запитання.....	61
5. МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ.....	62
5.1 Випробування матеріалів на розтягання.	
Види зразків	62
5.2 Діаграми розтягання ($P - \Delta \ell$, $\sigma - \varepsilon$).....	63
5.3 Поняття про запас міцності.....	68
5.4 Визначення твердості матеріалів.....	69
5.5 Поняття про концентрацію напруження.....	70
5.6 Контрольні запитання.....	73
6. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ КОНСТРУКЦІЇ.....	75
6.1 Статично невизначувані задачі.....	75
6.2 Розв'язання статично невизначуваних задач.	
Приклади.....	76
6.3 Особливості статично невизначуваних систем.....	83
6.4 Контрольні запитання.....	84
7. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО І ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ.....	85
7.1 Напруження в точці.....	85
7.2 Закон парності дотичних напружень.	
Головні площадки і головні напруження.....	89
7.3 Лінійний напружений стан.....	89
7.4 Плоский напружений стан.....	92
7.5 Пряма задача в плоскому напруженому стані. Круг напружень (круг Мора).....	96
7.6 Зворотна задача в плоскому напруженому стані.....	101
7.7 Об'ємний напружений стан (о.н.с.).....	104
7.8 Деформації при об'ємному напруженому стані. Узагальнений закон Гука.....	104
7.9 Потенціальна енергія деформації.....	109
7.10 Контрольні запитання.....	111
8. КРИТЕРІЇ МІЦНОСТІ.....	113
8.1 Критерії міцності.....	113
8.2 Поняття про теорію Мора.....	117
8.3 Контрольні запитання.....	119
9. ЗСУВ.....	120

Умови резонансу 394
 – закріплення, вплив на величину критичної сили 339
 Універсальне рівняння 206

Ф

Фактори концентраторів напружень 73
 Функції Крилова 336
 Формула Ейлера 300
 – – , вплив умов закріплення 300
 – – , границі застосування 301
 – Кастіліано 258
 – Верещагіна 267
 – Нав'є 184
 – Симпсона-Карнаухова 273
 – Журавського 191
 – Карнаухова 273
 – Ясинського 305

Х

Характеристики механічні матеріалів 62
 – геометричні плоских перерізів 23
 – циклу повторно-змінних напружень 402

Ц

Центр ваги перерізу 23
 – – координати 23
 Центральний еліпс інерції 37
 Цикл, амплітуда напружень 401
 – асиметричний напружень 402
 – пульсуючий – 403
 – симетричний 402
 – навантажень 389
 Циклу параметри повторно-змінних напружень 401

Ч

Частота коливань 385
 – – вимушених 392
 – кругова 385
 Число твердості за методом Бринелля 69
 – – – за методом Роквелла 70
 – – – – Віккерса 71
 – – ступенів вільності 386
 – «зайвих» зв'язків 310
 Чистий зсув 121
 Чисте згинання 180

Ш

Шви зварних з'єднань, типи 129
 Шва, катет, площа, довжина 131
 Шарнірна опора рухома 161
 – – нерухома 162
 Шийка звуження зразка 67

- о трьох моментах 345
- Теорії міцності 114
- – перша, найбільших нормальних напружень 114
- – друга, найбільших лінійних деформацій 114
- – третя, найбільших дотичних напружень 115
- – четверта, критерій питомої потенціальної енергії деформації формозміни 116
- – п'ята, Мора (для крихких матеріалів) 118
- Мора 117
- удару 377

У

- Удар 376
- види 376
- припущення 377
- Ударна в'язкість матеріалу 379
- – , критична температура 380
- Узагальнена сила 258
- Умова жорсткості 57
- – при крученні 141,142
- Умова міцності 59
- – болта на зріз 125
- – при крученні 142
- – при розтяганні, стисканні 56
- – – – з урахуванням власної ваги 59
- – по теорії Мора 118
- – – – стержнів прямокутного перерізу 153
- – при динамічному

- навантаженні 369
- – при згинанні з крученням для валів 249
- – при косому згинанні 224
- – при зсуві 121
- – при складному згинанні з розтяганням прямого бруса 234
- – при позацентровому розтяганні - стисканні прямого бруса 239
- – при повздовжньо-поперечному згинанні 254
- – для стержнів великої кривизни 286
- – кільця, що обертається 372
- – прямого обертового стержня 374
- – при ударі 381
- – при контактних напруженнях 424
- – при коливаннях 397
- – на зминання 129
- – зварних з'єднань 130
- – – встик при розтяганні 130
- – – – при стисканні 130
- – – – , з'єднаних нахлистом 131
- – – – стержнів прямокутного перерізу 153
- – при згинанні в точках по висоті перерізу балки 173-176
- Умови стійкості стиснутого стержня 301
- застосування формули Ейлера 301

- 9.1 Зсув. Розрахунки на зріз..... 120
- 9.2 Чистий зсув..... 121
- 9.3 Приклади розрахунку на зсув (зріз)..... 127
- 9.4 Розрахунок зварних з'єднань..... 129
- 9.5 Контрольні запитання..... 132
- 10. КРУЧЕННЯ..... 134
- 10.1 Епюри крутильних моментів..... 134
- 10.2 Напруження і деформації при крученні.
Умови міцності і жорсткості..... 138
- 10.2.1 Напруження при крученні..... 138
- 10.2.2 Розрахунок трубчатого перерізу (порожнистого валу)..... 143
- 10.2.3 Визначення кута закручування валу круглого перерізу..... 145
- 10.3 Статично невизначувані задачі при крученні..... 146
- 10.4 Кручення стержнів некруглого поперечного перерізу..... 148
- 10.4.1 Стержні прямокутного перерізу..... 151
- 10.4.2 Стержні відкритого складного профілю..... 153
- 10.5. Розрахунок гвинтових циліндричних пружин..... 155
- 10.6 Головні напруження при крученні..... 159
- 10.7 Контрольні запитання..... 160
- 11. ЗГИНАННЯ..... 161
- 11.1 Найпоширеніші види балок і опор..... 161
- 11.2. Диференційні залежності Д.І. Журавського при згинанні 164
- 11.3 Плоске згинання. Побудова епюр внутрішніх зусиль при плоскому згинанні 166
- 11.3.1 Побудова епюр внутрішніх зусиль при згинанні. 167
- 11.4 Розрахунок на міцність та жорсткість при згинанні..... 173
- 11.4.1 Визначення нормальних напружень в поперечному перерізі балки при чистому згинанні..... 179
- 11.4.2 Визначення дотичних напружень при згинанні (формула Д.І. Журавського)..... 186

11.4.3 Про раціональну форму перерізів.....	192
11.5 Контрольні запитання.....	193
12. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕННЯ БАЛКИ.....	194
12.1 Диференційні рівняння зігнутої осі балки.....	194
12.2 Приклад визначення переміщень інтегруванням диференційного рівняння зігнутої осі балки.....	197
12.3 Визначення переміщень у балках за методом початкових параметрів.....	211
12.4 Контрольні запитання.....	217
13. СКЛАДНИЙ ОПІР	220
13.1 Косе згинання.....	220
13.2 Розрахунки на міцність та жорсткість при косому згинанні.....	224
13.3 Складне згинання з розтяганням прямого бруса.....	232
13.4 Позацентрове розтягання і стискання прямого бруса.....	235
13.5 Визначення напружень при згинанні з крученням...	242
13.6 Розрахунки на міцність і жорсткість валів при згинанні з крученням.....	248
13.7 Повздовжньо-поперечне згинання.....	250
13.8 Контрольні запитання.....	257
14. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ...	255
14.1 Поняття по потенційну енергію деформації.....	255
14.2 Теорема про взаємність робіт і переміщень (теорема Кастіліано).....	257
14.3 Визначення переміщень по методу Мора.....	259
14.4 Визначення переміщень способом Верещагіна.....	266
14.5 Контрольні запитання.....	274
15. НДС ПЛОСКИХ КРИВИХ БРУСІВ ВЕЛИКОЇ КРИВИЗНИ.....	275
15.1 Епюри внутрішніх зусиль в криволінійних брусах..	276
15.2 Визначення напружень плоских кривих стержнях..	277
15.3 Розрахунки на міцність кривих брусів.....	285
15.4 Визначення переміщень у кривих брусах.....	286
15.5 Контрольні запитання.....	293

Реакції опор балки 162
– – зайві 342
– – нерозрізної балки 341
Резонанс 382
Рівнодійна розподіленого навантаження 16
Рівняння нейтральної лінії 223
– трьох моментів 344
– – – окремі випадки 353
– для прогинів 2044
Розподілене навантаження 16,162
– – рівнодіюча 16
Розподілення напружень по перерізу 253
Розрахунок на жорсткість 212
Розтягання 18
– позацентрове 235
– стержня 18,51
– , діаграми 63

С

Сен-Венана принцип 48
Сила зовнішня 17
– – класифікація 17
– внутрішня 41
– власної ваги 55
– відновлююча 390
– збуджувальна 392
– інерції 367
– критична 297
– ейлерова 296
Система координат 15
– – прямокутна просторова 15
– – прямокутна на площині 15

Система координат 15
– коливальна 383
– статично-невизначувана 76
Складний опір 220
Спосіб Верещагіна 265
Статичні моменти 23
Статично невизначувані зусилля 75
– – конструкції 75
– – системи 76
Стержень 17
– прямий обертовий 373
– гнучкість 305
– великої кривизни 276
– малої кривизни 296
– стиснутий 230
– тонкостінні 12
Стійкість 11
Стискання 51
– позацентрове 235
Ступінь статичної невизначуваності 310

Т

Твердість 69
– по Брінеллю 69
– по Роквеллу 70
– по Віккерсу 71
Текучість 66,116
Тензор напружень 230
Теорема Кастіліано 258
– Максвелла-Мора 269
– о взаємності переміщень 322
– – робіт 322

19.3 Розрахунки на міцність прямого обертового стержня.....	372	– – простих фігур (таблиця) 38	– графічне визначення (круг Мора) 96
19.4 Контрольні запитання.....	374	– крутильний 42	– динамічні 365
20. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕННЯ І РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ УДАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ.....	375	– – , побудова епюр 135	– допустимі 56
20.1 Допущення при ударі.....	375	– опорний 253	– – при зсуві 125,56
20.2 Напруження при ударі. Умова міцності.....	376	– опору плоских перерізів 37	– – при чистому зсуві 125
20.3 Механічні властивості матеріалу при ударі.....	380	– – – , таблиця 38	– – для заклепочних та зварних з'єднань 126
20.4 Контрольні запитання.....	383	– – при крученні 140	– – на зминання 129
21. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ КОЛИВАННЯХ.....	384	– – – – , таблиця 148	– – для зварних з'єднань 131
21.1 Коливання: основні поняття.....	384	Моменти статичні площі фігури	– – при розтяганні 56,113
21.2 Вільні (гармонійні) коливання пружної системи з одним ступенем вільності.....	388	– – – – , таблиця 38	– – на стійкість 303
21.3 Вимушені коливання систем з одним ступенем вільності.....	391	Н	– повне 47
21.4 Явище резонансу і заходи по його запобіганню.....	394	Навантаження, миттєво прикладене 16	– – , закон парності 87
21.5 Визначення напружень і розрахунки на міцність при коливаннях.....	395	– змінне за часом 16	– – при крученні 141
21.6 Контрольні запитання.....	398	– динамічне 16, 364	– – контактне 414,424
22. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ПОВІЛЬНО-ЗМІННИХ НАВАНТАЖЕННЯХ.....	399	– одиничне 260	– зминання 129
22.1 Явище втомленості матеріалів. Означення.....	399	– повільно-змінне 390	– при плоскому напруженому стані 93, 94
22.2 Параметри циклу повторно-змінних напружень....	401	– рівномірно розподілене 17	– максимальні напруження зминання 129
22.3 Методи визначення границі втомленості.....	403	– статичне 16	– в плоских кривих брусах 282
22.4 Вплив конструктивно-технологічних факторів....	405	– ударні 366-367	– при зсуві 125
22.5 Розрахунки на міцність при повторно-змінних навантаженнях.....	409	– фіктивне 258	– при ударі 377
22.6 Контрольні запитання.....	412	Напруження 46,85	Напружений стан 88
23. КОНТАКТНІ НАПРУЖЕННЯ.....	413	– допустиме 67,56	– – лінійний 89
23.1 Основні поняття.....	413	– критичне 300	– – плоский 92
23.2 Формули для визначення контактних напружень.....	415	– нормальне 46	– – об'ємний 104
23.3 Умови міцності при контактних напруженнях.....	423	– дотичне 46	Незалежність дії сил (принцип) 21,220
		– октаедричні 104	Нейтральна лінія 180
		– контактні, максимальні 414	Нейтральний шар 180
		– в кільцях, що обертаються 367	
		– правило знаків 91	
		– в точці 85	
		– в перерізі 46	
		– головні 87	

Координат прямокутні системи
14, 15
– система права і ліва 16
Кривизна зігнутої осі балки 194
Критична сила 297
Круг Мора 95
– – , радіус 96
Кручення 19, 133
– , гіпотези 133
– , правило знаків для
крутильних моментів 133
– стержнів некруглого
поперечного перерізу 147
– – – – – таблиця 148
– – трубчатого перерізу 142
– – прямокутного перерізу 151
– , умова міцності 140
– з згинанням (напруження) 241
– – – (умови міцності) 245
– стержнів відкритого складного
профілю 152
Кут зсуву 121
– закручування 20, 137, 138,
– – допустимий 145
– – найбільший 248
– – відносний 139,144,248
– повороту перерізу балки 179

Л

Лінія нейтральна 184,237– 239
– – кривого стержня 281
– – при внецентровому 238
– – при косому згинанні 224

М

Масивні тіла 12
Маса вантажу 386
Максвелла-Мора метод 258
– – – порядок визначення
переміщень 258
Механічні характеристики 61
– властивості матеріалу при
ударі 378
Метод перерізів 41
– Брінелля 68
– Віккерса 70
– початкових параметрів 197
– Роквелла 69
Міцність 11
– критерії 112
Модуль об'ємної деформації 108
– пружності 52
– – при зсуві 122
Модулі пружності , залежності
121, 122
Момент згинальний 42
– – , зв'язок з навантаженням
164
– – в плоских кривих брусах,
знаки 278
– – при згинанні з крученням,
повний 240
– – фіктивний 245
– інерції осьовий 29
– – відцентровий 30
– – головний 35
– – полярний 30
– – відносно паралельних осей
31
– – при повороті осей 32

23.4 Контрольні запитання..... 427
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ..... 428
ВІДОМОСТІ З МАТЕМАТИКИ..... 429
СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЇ СТАЛІ 431
ПРЕДМЕТНИЙ ВКАЗІВНИК..... 441

ПЕРЕДМОВА

Опір матеріалів є однією з найважливіших дисциплін, яка формує інженерне мислення студентів механічних та будівельних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів і є теоретичним фундаментом їх технічної освіти. Вивчення опору матеріалів потребує рівнозначної кількості теоретичних, практичних та експериментальних знань. Наслідком цього є необхідність вдосконалення науково-методичної літератури з курсу. Тому розроблений посібник є актуальним та містить основні положення, визначення, правила, теореми, розрахункові формули та методи опору матеріалів, викладені у конспективній формі відповідно до розділів курсу. Практичне застосування основних формул та методів відображене у прикладах до кожного розділу. Методика виведення розрахункових формул наведена без деталізації проміжних результатів. У посібнику є також достатня кількість довідкових матеріалів, необхідних для розв'язування практичних задач або виконання розрахунково-графічних робіт, у вигляді схем та довідникових таблиць.

Матеріал розбитий на розділи, кожен з яких складається з теоретичної частини, розв'язаних прикладів практичних задач та контрольних запитань. Контрольні запитання можуть бути одночасно запитаннями модульного контролю, тому побудовані так, що вимагають логічно обґрунтованих відповідей.

Приклади підібрані близькими за змістом до контрольних та розрахункових задач. Значна увага приділена розділам, які вважаються складнішими, зокрема енергетичним методам визначення переміщень, міцності стержнів при періодично-змінних та динамічних навантаженнях, стійкості стержнів.

Посібник призначений для ефективної самопідготовки студентів при мінімальних витратах часу, для впорядкування та закріплення набутих знань, а також при дистанційній формі навчання. Ефективне застосування наведених у посібнику матеріалів базується на загальному попередньому вивченні

221
 – площина 222
 – косо 219
 – плоске 165
 – плоске поперечне 165
 Зовнішні сили 16
 – – класифікація 16, 17
 Зразки для розтягання (розміри) 61
 Зсув або зріз (визначення) 18
 – абсолютний 18, 119
 – відносний 19, 119
 Зусилля 41
 – елементарні 46

I

Індентор 68
 Інтенсивність навантаження 161,164
 – реакції основи 330
 Інерції радіус 36
 Інтегральні рівняння рівноваги 47

K

Кастіліано теорема 257
 Коефіцієнт Пуассона 55
 – – динамічний 104
 – динамічності 365
 – – при ударі 379
 – – при коливанні 393
 – запасу міцності 67
 – – – при ударі 381
 – – – – загальний 409

– – – по границі текучості 67
 – – стійкості 298
 – – міцності при повторно-змінному навантаженні:
 а) по нормальним напруженням 410
 б) по дотичним напруженням 410
 – збільшення коливань 394
 – концентрації напружень 72
 а) теоретичний 72
 б) дійсний(ефективний) 72
 – – :
 а) для нормальних напружень 410
 б) для дотичних напружень 410
 Коефіцієнт запасу міцності при контактних напружень 412
 – асиметрії циклу 402
 – постелі 332
 – раціональності перерізу при згинанні 192
 Кільце, що швидко обертається 365
 Консольна балка 163
 Концентратори напружень, види
 Концентрація напружень 73
 Коливання основні поняття 375
 – власні 382
 – вимушені 382,388
 – – системи з одним ступенем вільності 390
 Контактні напруження, основні поняття 403
 Координати центра ваги 25
 – точки 23

Енергія чистого згинання 256
 – кручення 257
 – розтягання – стискання 257
 – кручення пружини 257
 – зсуву (чистого) 123
 – удара 374
 – баланс 256
 Еліпс інерції 36,37
 – – центральний 36
 Ексцентриситет 235
 Епюра 42
 – порядок побудови 44
 Епюри згинальних моментів 167
 – повздовжніх сил 44,46
 – – – правила побудови 44,46
 – правила перевірки побудови 135
 – крутильних моментів 134
 – – – правила побудови 134
 – кутів закручування 132
 – поперечних сил 167
 – напружень і переміщень в стержнях 58
 Епюри внутрішніх зусиль в кривих брусах 276

Ж

Жорсткість 11
 – розрахунок (визначення) 184
 – відносна 53
 – балки при згинанні 161
 – поперечного перерізу стержня при розтяганні та стисканні 54
 – поперечного перерізу стержня

при крученні 141
 – при зсуві 122
 – стержнів в статично невизначуваних системах 80
 Журавського формула 191

З

Задача в плоскому напруженому стані, пряма 96
 Задачі статично невизначувані 76
 – – – розв'язування 75
 Зайві зв'язки 303
 Закон Гука (деформування пружних тіл), см. Гука закон 141
 – – для абсолютних подовжень 53
 – – узагальнений 106
 – – при чистому зсуві 121
 – – при крученні 139
 – парності дотичних напружень 86, 94
 – збереження енергії 254
 Залежності диференційні Журавського 163
 Запас міцності 67
 – – вибір 67
 – – коефіцієнт 67
 Затиснення (закріплення) жорстке 161
 Зварювання, допустимі напруження 127
 Згинання складне 219
 – з розтяганням прямого бруса

курсів з вищої математики та теоретичної механіки. Посібник відповідає стандартам освітніх програм по опору матеріалів для студентів механічних спеціальностей та адаптований для освітнього рівня здобувачів.

Посібник створено на підставі сучасних підручників з опору матеріалів та доповнено матеріалами лекцій провідного доцента кафедри «Механіка» Запорізького національного технічного університету кандидата технічних наук, доцента [В.Т. Кудіна](#), та завідувача кафедрою «Механіка» Національного університету «Запорізька політехніка» кандидата технічних наук, доцента В.Г. Шевченка.

Автори вдячні рецензенту за сумлінну працю, зроблені зауваження та поради.

1. ВСТУП. ЗАДАЧІ КУРСУ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1.1 Наука про опір матеріалів. Об'єкти вивчення

Опором матеріалів називають науку про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин та споруд.

Під міцністю розуміють здатність конструкції, її частин та деталей витримувати певне навантаження не руйнуючись.

Жорсткість – це здатність конструкції та її елементів протистояти деформуванню (змінюванню форми і розмірів) під дією зовнішніх навантажень.

Стійкістю називають здатність конструкції або її елементів зберігати початкову форму пружної рівноваги.

Опір матеріалів у теоретичній частині базується на теоретичній механіці і математиці, а в експериментальній – на фізиці та матеріалознавстві.

Отже, **опір матеріалів** – це найбільш загальна наука про міцність елементів конструкцій, машин та споруд. Вона тісно стикається з іншими дисциплінами, такими, як будівельна механіка стержньових систем, теорія пружності і теорія пластичності. Основна ж роль у вирішенні задач міцності належить опору матеріалів.

Усю різноманітність видів конструктивних елементів, що застосовуються в конструкціях, спорудах і машинах, можна звести до основних форм: стержні, оболонки, пластини та масивні тіла.

Стержнем або брусом називається тіло, у якого один розмір (довжина) значно перевищує два інших (поперечних) розміри. Стержні бувають прямолінійні та криволінійні, як призматичні так і змінного перерізу (Рис. 1.1). Це вали, осі, балки, вантажно-підйомні гаки, кільця ланцюгів тощо.

Втомленість, зони зламу деталі від втомленості 394

Втомленості криві (криві Веллера) 398

Г

Гвинтові циліндричні пружини 153

Геометричні характеристики плоских перерізів 23

Гіпотези опору матеріалів 21, 22

Гіпотеза плоских перерізів 52

Гнучкість 299, 302, 304

Головні осі 34

– площадки 84,86

– напруження 85

Границя міцності 67

– пропорційності 66

– пружності 63

– текучості 66

Гука закон 14

– – при розтяганні і стисканні 52

– – для абсолютних подовжень

53

– – узагальнений 106

– – при чистому зсуві 121

– – при крученні 139

Д

Деформація

– допустима 57

– відносна 105,163

– види 17, 18

– згинання (прогин та кут повороту) 20,164

– кручення 133

– зминання 127

– об'ємна 107

– залишкова 17,66,113

– пластична 18

– поперечна 54

– абсолютна 53

– продольна 51

– пружна 14,64

– зсува 119

– бруса кривого 276

– стержня з урахуванням власної ваги 59

Діаграми розтягання 62

Ділянка зміцнення 65

Диференційне рівняння пружної лінії деформованого стержня 281

Диференційні залежності при згинанні (Журавського) 189

– рівняння пружної лінії балки (для малих розмірів) 193-194

– – зігнутої осі балки на

пружній основі 330

– – вільних коливань 384

– – вимушених коливань 387

Е

Енергія деформації потенціальна 108,123,256

– – закон збереження 255,375

– – потенціальна формозміни

115

ПРЕДМЕТНИЙ ВКАЗІВНИК

А

Абсолютне подовження при розтяганні 18, 52
 – укорочення при стисканні 18
 Абсолютний зсув(або зріз) 18
 Аварії внаслідок втрати стійкості 306
 – – резонанса 384
 – – втоми 398
 Амплітуда коливань 381, 382
 – вимушених коливань 386
 – Арка як криволінійний стержень 276

Б

Балка 159
 – двохпорна однопрольотна 161
 – – – з консолями 161
 – жорстко закріплена консольна 161
 – однопрольотна проста 161
 – багатопрольотна 337
 – на пружній основі 327
 – статично невизначувана 299
 – трьохпрольотна нерозрізна 352
 – фіктивна 343,348
 Брус 11
 – великої кривизни 273
 – малої кривизни 273
 Болт 8, 19, 126

В

Вал 131
 Вага власна 16, 57
 – – , урахування при розтяганні та стисканні 57
 Випробування на розтягання 59, 61
 Вісь зігнутої балки 164
 – – – диференційні рівняння 184-186
 Вісі координат 15
 – – права та ліва системи 16
 Взаємність переміщень 318
 – робіт 256, 317
 Внутрішні сили 41
 Волокно 177
 В'язкість ударна матеріалу 376
 Витривалість (границя втомленості) 397
 Внутрішні силові фактори 41-42
 Види напруженого стану 87
 Визначення ступені статичної невизначуваності плоских систем 306
 – переміщень у балках 188, 201
 – – у кривих брусах 275
 Витривалості границя, вплив масштабного фактора 408
 – – – технологічний фактор 406
 – – – статистичний фактор 409
 – – , заходи по підвищенню 408
 Втрата стійкості 298

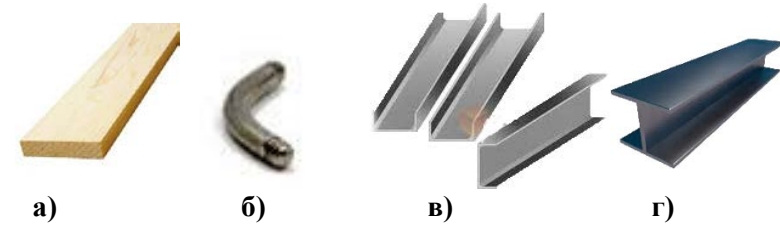


Рисунок 1.1 – Види стержнів

Стержні, товщина стінки яких значно менша від габаритних розмірів поперечного перерізу, називають тонкостінними (Рис. 1.1, г).

Оболонка – це тіло, обмежене криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій відстані одна від одної. Поверхня, рівновіддалена від твердих поверхонь оболонки, називається **серединною поверхнею**. За формою серединної поверхні розрізняють оболонки циліндричні (а), конічні (б), сферичні (в) (Рис. 1.2). Якщо серединна поверхня є площиною, то розрахунковий об'єкт називають **пластиною**. Пластини бувають круглі, прямокутні та інших обрисів.

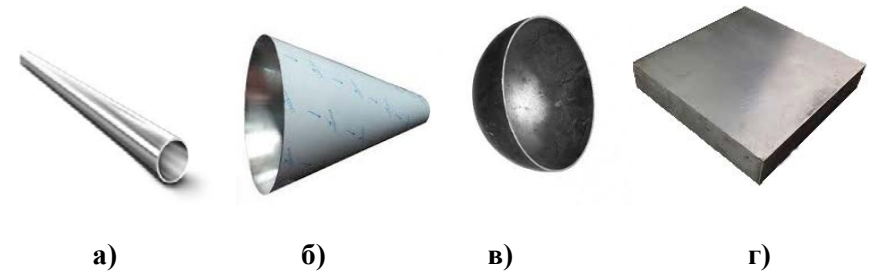


Рисунок 1.2 – Види оболонок

Як приклади можна розглянути резервуари котлів, куполи будинків, обшивки фюзеляжу, крила літака.

Тіла, в яких усі три розміри одного порядку, називають масивними тілами. До них належать фундаменти споруд, підпирні стінки, тощо.

Номер про-філо	Розміри, мм				Площа поперечного перерізу, см ²	Довідкові значення для осей										Кут нахилу осей до α	Маса І м, кг		
	B	b	r	R		y — y'		z — z'		u — u'		γ ⁰ , см	z ⁰ , см	J _y ⁰ , см ⁴	J _u ⁰ , см ⁴				
						J _y ⁰ , см ⁴	W _y ⁰ , см ³	I _y ⁰ , см	J _u ⁰ , см ⁴	W _u ⁰ , см ³	I _u ⁰ , см								
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392	0,91
3/2	30	20	3	3,5	1,2	1,43	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,26	0,25	0,43	0,51	1,00	0,43	0,427	1,12
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,86	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,34	0,32	0,43	0,54	1,04	0,54	0,421	1,46
4/2,5	40	25	3	4	1,3	1,89	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	1,48
			4			2,47	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	0,381	1,94
			5			3,03	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374	2,38
4/3	40	30	4	4	1,3	2,67	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	1,09	0,75	0,64	0,78	1,28	1,68	0,544	2,09
			5			3,28	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	1,33	0,91	0,64	0,82	1,32	2	0,539	2,57
4,5/2,8	45	28	3	5	1,7	2,14	1,45	1,43	1,32	0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382	1,68
			4			2,80	1,90	1,42	1,60	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379	2,20
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403	1,90
			4			3,17	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401	2,49
5,6/3,6	56	36	4	6	2	3,58	11,37	3,01	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406	2,81
			5			4,41	13,82	3,70	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404	3,46
6,3/4	63	40	4	7	2,3	4,04	16,33	3,83	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397	3,17
			5			4,98	19,91	4,72	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	3,91
			6			5,90	23,31	5,58	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393	4,63
			8			7,68	29,60	7,22	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	0,387	6,03
6,5/5	65	50	5	6	2	5,56	23,41	5,20	12,08	3,23	1,47	6,41	2,68	1,07	1,26	2	9,77	0,576	4,36
			6			6,60	27,46	6,16	14,12	3,82	1,46	7,52	3,15	1,07	1,30	2,04	11,46	0,575	5,18
			7			7,62	31,32	7,08	16,05	4,38	1,45	8,60	3,59	1,06	1,34	2,08	12,94	0,571	5,98
			8			8,62	35	7,99	18,88	4,93	1,44	9,65	4,02	1,06	1,37	2,12	13,61	0,570	6,77

У ХХ ст. значну роль у розвитку механіки й поширенні наукових знань у галузі опору матеріалів відіграли підручники видатних учених В.Л. Кирпичова, С.П. Тимошенка, М.М. Беляєва, О.О. Уманського, В.І. Феодосьєва, О.А. Ільюшина, І.А. Біргера та ін.



Рисунок 1.5 – Портрет Роберта Гука

У 1678 році англійський вчений **Роберт Гук³** установив **закон деформування пружних тіл**, за яким деформація пружного тіла пропорційна діючому на нього зусиллю. Цей закон є **основним у теорії опору матеріалів**

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (1.1)$$

1.2 Координати та системи координат

Координатами точки називаються такі **величини, які визначають положення цієї точки (в просторі, на плоскій або кривій поверхні, на прямій або кривій лінії).**

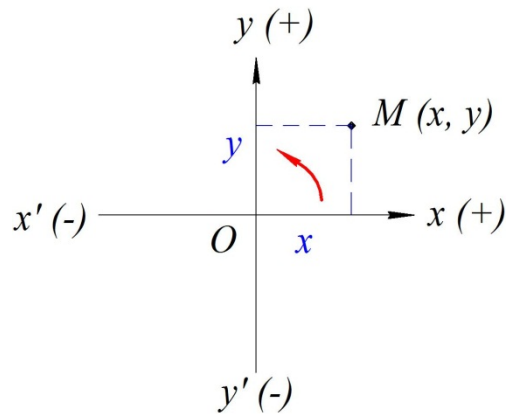
Прямокутна система координат на площині.

Положення точки на площині визначається двома координатами.

Проводять дві взаємно перпендикулярні прямі $x'x$ та $y'u$ (Рис. 1.6). Вони називаються **осями координат**. Одна з них $x'x$ (частіше горизонтальна) називається **віссю абсцис**, друга $y'u$ – **віссю ординат**. Точка їх перетину називається початком координат та позначається літерою O .

³ Роберт Гук (1635–1703), англійський фізик, математик, вчений, винахідник і архітектор.

Для вимірювання відрізків на осях координат обирають одиниці масштабу (вільно, але однаково для обох осей).

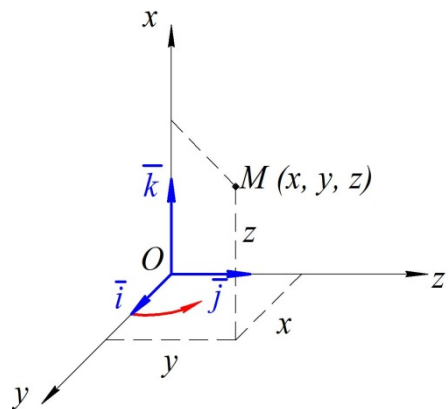


Додатний напрямок на осі позначають стрілкою. Прийнято обирати додатний напрямок таким чином, щоб Ox після повороту на 90° проти ходу годинникової стрілки сумістився з додатним «+» напрямком Oy .

Рисунок 1.6 – Плошка прямокутна система координат

Прямокутна просторова система координат.

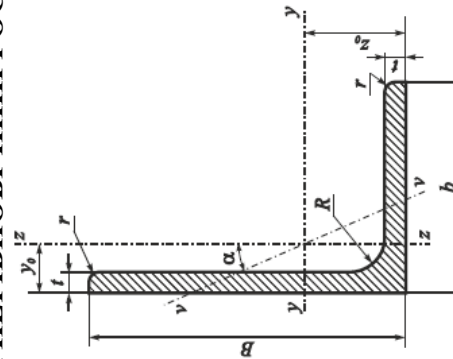
Три взаємно перпендикулярні вісі Ox , Oy , Oz (Рис. 1.7), які проходять через точку O , утворюють прямокутну просторову систему координат. Точка O – початок координат, прямі Ox , Oy , Oz – осі координат (Ox – ось абсцис, Oy – ось ординат, Oz – ось аплікат). Масштаб для усіх осей однаковий.



Відклавши на осях у додатному напрямку відрізки OA , OB , OC , які дорівнюють одиниці масштабу, отримуємо три вектори \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} .

Рисунок 1.7 – Прямокутна просторова система координат

КУТНИК НЕРІВНОБІЧНИЙ ГОСТ 8240-89



Позначення:
 B — ширина більшої полиці; b — ширина меншої полиці; t — товщина полиці; R — радіус внутрішнього заокруглення; r — радіус заокруглення полиці; J — момент інерції; i — радіус інерції; y_0, z_0 — відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиці; J_{yz} — відцентровий момент інерції

7.5	75	5	9	3	7.39	39.53	7.21	2.31	62.65	2.91	16.41	5.74	1.49	23.10	2.02	5.80
	6	6			8.78	46.57	8.57	2.30	73.87	2.90	19.28	6.62	1.48	27.30	2.06	6.89
	7	7			10.15	53.34	9.89	2.29	84.61	2.89	22.07	7.43	1.47	31.20	2.10	7.96
	8	8			11.50	59.84	11.18	2.28	94.89	2.87	24.80	8.16	1.47	35	2.15	9.02
	9	9			12.83	66.10	12.43	2.27	104.72	2.86	27.48	8.91	1.46	38.60	2.18	10.07
8	80	5.5	9	3	8.63	52.68	9.03	2.47	83.56	3.11	21.80	7.10	1.59	30.90	2.17	6.78
	6	6			9.38	56.97	9.80	2.47	90.40	3.11	23.54	7.60	1.58	33.40	2.19	7.36
	7	7			10.85	65.31	11.32	2.45	103.66	3.09	26.97	8.55	1.58	38.30	2.23	8.51
	8	8			12.30	73.36	12.80	2.44	116.39	3.08	30.32	9.44	1.57	43	2.27	9.65
	10	10			15.14	88.58	15.67	2.42	140.31	3.04	36.85	11.09	1.56	56.70	2.35	11.88
	12	12			17.90	102.74	18.42	2.40	162.27	3.01	43.21	12.62	1.55	59.50	2.42	14.05
9	90	6	10	3.3	10.61	82.10	12.49	2.78	130	3.50	33.97	9.88	1.79	48.10	2.43	8.33
	7	7			12.28	94.30	14.45	2.77	149.67	3.49	38.94	11.15	1.78	55.40	2.47	9.64
	8	8			13.92	106.11	16.36	2.76	168.42	3.48	43.80	12.34	1.77	62.30	2.51	10.93
	9	9			15.60	118	18.29	2.75	186	3.46	48.60	13.58	1.77	68.00	2.55	12.20
	10	10			17.17	128.60	20.07	2.74	203.93	3.45	53.27	14.54	1.76	75.30	2.59	13.48
	12	12			20.33	149.67	23.85	2.71	235.88	3.41	62.40	16.53	1.75	86.20	2.67	15.96
10	100	6.5	12	4	12.82	122.10	16.69	3.09	193.46	3.89	50.73	13.38	1.99	71.40	2.68	10.06
	7	7			13.75	130.59	17.90	3.08	207.01	3.88	54.16	14.13	1.98	76.40	2.71	10.79
	8	8			15.60	147.19	20.30	3.07	233.46	3.87	60.92	15.66	1.98	86.30	2.75	12.25
	10	10			19.24	178.95	24.97	3.05	283.83	3.84	74.08	18.51	1.96	110	2.83	15.10
	12	12			22.80	208.90	29.47	3.03	330.95	3.81	86.84	21.10	1.95	122	2.91	17.90
	14	14			26.28	237.15	33.83	3	374.98	3.78	99.32	23.49	1.94	138	2.99	20.63
	15	15			27.99	250.68	35.95	2.99	395.87	3.76	105.48	24.62	1.94	145	3.03	21.97
	16	16			29.68	263.82	38.04	2.98	416.04	3.74	111.61	25.79	1.94	152	3.06	23.30
11	110	7	12	4	15.15	175.61	21.83	3.40	278.54	4.29	72.68	17.36	2.19	106	2.96	11.89
	8	8			17.20	198.17	24.77	3.39	314.51	4.28	81.83	19.29	2.18	116	3	13.50
12	120	8			18.80	259.75	29.68	3.72	412.45	4.68	107.04	23.29	2.39	153	3.25	14.76
	10	10			23.24	317.16	36.59	3.69	503.79	4.66	130.54	27.72	2.37	187	3.33	18.24
	12	12			27.60	371.80	43.30	3.67	590.28	4.62	153.33	31.79	2.36	218	3.41	21.67
	15	15			33.99	448.90	52.96	3.63	711.32	4.57	186.48	37.35	2.34	262	3.53	26.68
12.5	125	8	14	4.6	19.69	294.36	32.20	3.87	466.76	4.87	121.96	25.67	2.49	172	3.36	15.46
	9	9			22	327.48	36	3.86	520	4.86	135.88	28.26	2.48	192	3.40	17.30
	10	10			24.33	359.82	39.74	3.85	571.04	4.84	148.59	30.45	2.47	211	3.45	19.10
	12	12			28.89	422.23	47.06	3.82	670.02	4.82	174.43	34.94	2.46	248	3.52	22.68
	14	14			33.37	481.76	54.17	3.80	763.90	4.78	199.62	39.10	2.45	282	3.61	26.20
	16	16			37.77	538.56	61.09	3.78	852.84	4.75	224.22	43.10	2.44	315	3.68	29.65
14	140	9	14	4.6	24.72	465.72	45.55	4.34	739.42	5.47	192.03	35.92	2.79	274	3.78	19.41

Вони називаються **основними векторами або одиничними ортами** (див. рис. 1.7).

Додатні напрями на осях прийнято обирати так, щоб поворот на 90° , який поєднує додатний напрям Ox з напрямом Oy (див. рис. 1.7), був проти ходу годинникової стрілки, якщо спостерігати його з боку відрізка Oz . **Така система координат називається правою.** У лівій системі координат такий поворот здійснюється за годинниковою стрілкою.

1.3 Класифікація зовнішніх сил

Сили взаємодії елемента конструкції з середовищем або іншими тілами називають **зовнішніми силами**. Їх класифікують наступним чином.

1. За характером прикладення сил:

- статичні (не приймають участі сили інерції);
- динамічні (приймають участь сили інерції):
 - миттєво прикладені;
 - ударні;
 - повторно – змінні.

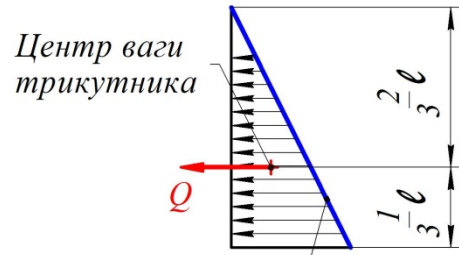
2. За зміною у часі:

- постійні;
- змінні;
- на певний час дії.

3. За характером розподілення:

- об'ємні або масові (власна вага, сила інерції);
- поверхневі;
- зосереджені;
- розподілені по поверхні або лінії.

Рівнодійна розподіленого навантаження чисельно дорівнює площі фігури його епюри та прикладена в центрі ваги цієї фігури (Рис. 1.8).



Закон зміни інтенсивності (q)

Рисунок 1.8 – Схема визначення рівнодійної розподіленого навантаження

$$Q = \frac{1}{2} qH. \quad (1.2)$$

Крім того, бувають навантаження, які можна подати у вигляді зосередженого моменту (пари сил) з розмірністю (Нм, кНм, МНм).

1.4 Види деформацій стержнів. Поняття про деформований стан

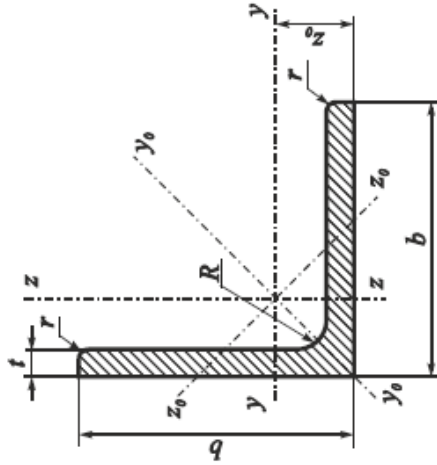
Реальні тіла змінюють свою форму і розміри внаслідок навантаження їх зовнішніми силами або зміни температури, тобто **деформуватися**. При деформуванні тіла його точки, а також уявно проведені лінії або перерізи переміщуються в площині або в просторі відносно свого початкового положення.

Деформації бувають пружні, тобто такі, що зникають після припинення дії сил, які спричинили їх, та пластичні, або залишкові – ті, що не зникають.

Основним об'єктом, що розглядається в опорі матеріалів, є **стержень з прямолінійною віссю**. В опорі матеріалів вивчають такі **основні види деформацій стержня: розтягання, стискання, зсув (зріз), кручення та згинання.**

Розглядають також більш складні деформації, що є наслідком сполучення кількох основних видів деформації.

Номер про-філью	Розміри, мм				Площа попе-речного пере-різу, см ²	Довідкові значення для осей											
	b	r	R	r		y — y			y ₀ — y ₀			z ₀ — z ₀			J _{y₀} , см ⁴	z ₀ , см	Маса, кг
						J _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см	J _{y₀ max} , см ⁴	i _{y₀ max} , см	J _{z₀ min} , см ⁴	W _{z₀} , см ³	i _{z₀} , см				
4	40	3	5	1,7	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85		
	4	4	5	1,7	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42		
	5	5	6	1,7	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98		
4,5	45	3	5	1,7	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3	1,21	2,08		
	4	4	5	1,7	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73		
	5	5	6	1,7	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37		
5	50	3	5,5	1,8	9,35	2,95	1,36	14,80	1,71	3,90	2,96	0,88	5,45	1,34	3,99		
	4	4	5,5	1,8	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1	4,16	1,33	2,32		
	5	5	6	1,8	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05		
5,6	56	4	6	2	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44		
	4	4	6	2	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25		
	5	5	7	2,3	16,21	3,70	1,85	25,69	2,33	6,72	2,93	1,19	9,48	1,62	3,71		
6	60	5	7	2,3	19,79	4,56	1,84	31,40	2,32	8,18	3,49	1,18	11,61	1,66	4,58		
	5	5	7	2,3	23,21	5,40	1,83	36,81	2,31	9,60	3,99	1,18	13,60	1,70	5,43		
	6	6	8	2,7	29,55	7	1,81	46,77	2,27	12,34	4,90	1,17	17,22	1,78	7,10		
6,3	63	4	7	2,3	35,32	8,52	1,79	55,64	2,24	15	5,70	1,16	20,32	1,85	8,70		
	4	4	7	2,3	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11	1,69	3,90		
	5	5	8	2,7	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74	4,81		
7	70	4,5	8	2,7	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78	5,72		
	5	5	8	2,7	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17	1,88	4,87		
	6	6	9	3,0	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	5,38		
7,3	75	5	9	3,0	37,58	7,42	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	6,39		
	5	5	9	3,0	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99	7,39		
	6	6	10	3,3	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02	8,37		
8	80	5,5	10	3,3	57,90	11,82	2,10	91,52	2,64	24,27	8,17	1,36	33,60	2,10	10,29		
	5	5	10	3,3	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44		
	6	6	11	3,6	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25		



Позначення:

b — ширина полиці; t — товщина полиці; R — радіус внутрішнього заокруглення; r — радіус заокруглення полиці; J — момент інерції; i — радіус інерції; z_0 — відстань від центра ваги до зовнішньої грані полиці; J_{yz} — відцентровий момент інерції; W — момент опору

Розтягання (стискання) виникає тоді, коли до стержня вздовж осі прикладено протилежно спрямовані сили. (Рис.1.9). Зміну $\Delta \ell$ початкової довжини ℓ стержня називають абсолютним подовженням при розтяганні або абсолютним укороченням при стисканні.

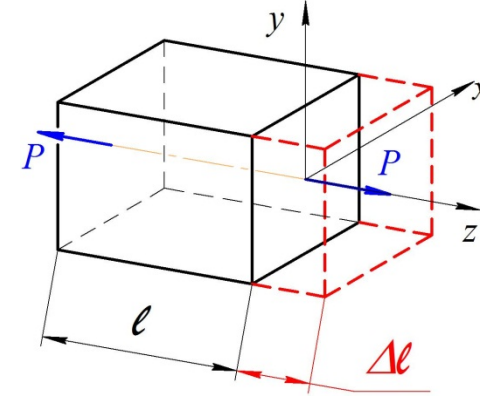


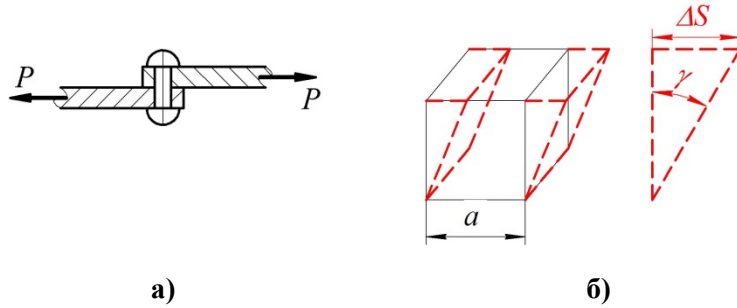
Рисунок 1.9 – Розтягання стержня

Відношення абсолютного подовження (укорочення) $\Delta \ell$ до початкової довжини ℓ стержня називають середнім відносним подовженням (укороченням) по довжині ℓ

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta \ell}{\ell}. \quad (1.3)$$

В умовах розтягання або стискання працюють багато елементів конструкцій: стержні ферми, колони, шток поршневої машини, стяжний болт та ін.

Зсув або зріз виникає тоді, коли зовнішні сили зміщують два паралельних плоских перерізи стержня один відносно одного при незмінній відстані між ними (Рис. 1.10, а). Зміщення ΔS називається абсолютним зсувом. Для визначення відносного зсуву виділемо елементарний об'єм з розмірами $a \times a \times a$ (Рис. 1.10, б).



а) б)
Рисунок 1.10 – Деформація зсуву

Відношення абсолютного зсуву ΔS до відстані a між площинами, що зсуваються (тангенс кута γ), називають відносним зсувом. Внаслідок малості кута γ його тангенс прирівнюють до значення кута ($tg\gamma \approx \gamma$). Отже відносний зсув

$$\gamma = \frac{\Delta S}{a}. \tag{1.4}$$

На зсув, або зріз, працюють, наприклад, заклепки і болти, що скріплюють елементи, які зовнішні сили прагнуть зрушити один відносно одного.

Кручення виникає при дії на стержень зовнішніх сил (прикладених по дотичній), які утворюють крутильний момент відносно осі стержня (Рис. 1.11).

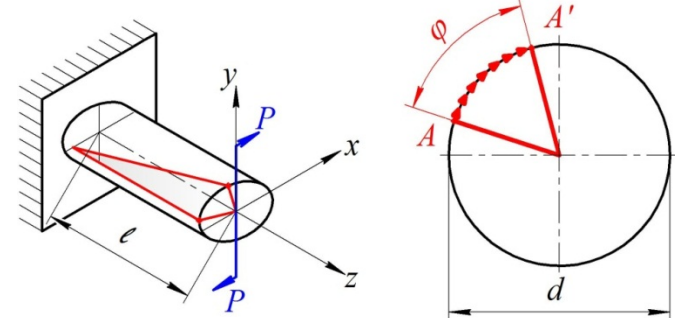
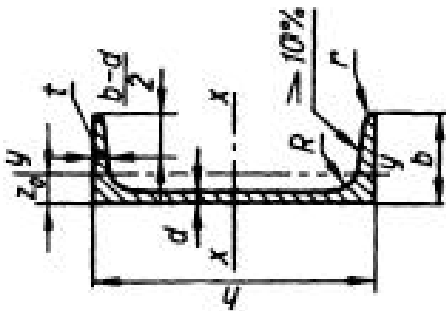


Рисунок 1.11 – Деформація кручення

Деформація кручення супроводжується поворотом

Номер про-філью	Розміри, мм				Площа перерізу $F, \text{см}^2$	$J_{x^2}, \text{см}^4$	$W_{x^2}, \text{см}^3$	$i_{x^2}, \text{см}$	$S_{x^2}, \text{см}^3$	$J_{y^2}, \text{см}^4$	$W_{y^2}, \text{см}^3$	$i_{y^2}, \text{см}$	$J_{z^2}, \text{см}^4$	$W_{z^2}, \text{см}^3$	$i_{z^2}, \text{см}$	Маса $l, \text{кг}$
	h	b	d	r												
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84		
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,16	1,24	5,90		
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05		
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59		
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,54	1,54	10,4		
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3		
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3		
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80	14,2		
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3		
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94	16,3		
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4		
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4		
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8		
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0		
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6		
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0		
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8		
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7		
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8		
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5		
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9		
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3		



- h — висота стінки;
 b — ширина полиці;
 s — товщина швелера;
 R — радіус внутрішнього заокруглення полиці;
 F — площа поперечного перерізу;
 I — момент інерції;
 W — момент опору;
 i — радіус інерції;
 S_x — статичний момент напівперерізу;
 x_0 — відстань від осі у до зовнішньої грані стінки

поперечних перерізів стержня один відносно одного навколо його осі. Кут φ цього повороту називають **кутом закручування на довжині l** . Відношення кута закручування φ до l називають **відносним кутом закручування θ**

$$\theta = \frac{\varphi}{l}. \quad (1.5)$$

На кручення працюють вали, шпинделі токарних і свердлильних верстатів і інші деталі.

Деформація згинання полягає у викривленні осі прямого стержня або в зміні кривизни кривого стержня (Рис. 1.12). У прямих стержнях переміщення точок, які спрямовані перпендикулярно осі, називають прогинами та позначають літерою W .

W – відстань між осями. При згинанні відбувається поворот перерізів відносно початкового положення. Кути повороту перерізів відносно початкового положення позначають літерою φ .

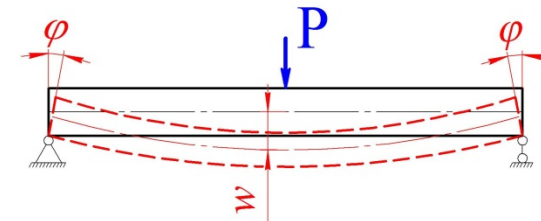


Рисунок 1.12 – Деформація згинання

На згинання працюють балки міжповерхових перекриттів, мостів, осі залізничних вагонів, листові ресори, вали, зуби шестерень, спиці коліс, важелі і багато інших деталей.

Унаслідок одночасної дії на тіло сил, що спричиняють різні види деформації, виникає більш складна деформація, тобто згинання з крученням, або згинання з розтяганням, тощо.

1.5 Основні гіпотези науки про опір матеріалів

Для вирішення практичних задач опору матеріалів вводять деякі гіпотези щодо структури й властивостей матеріалів, а також про характер деформації.

1. Гіпотеза про суцільність матеріалу. Вважається, що матеріал суцільно заповнює форму тіла. Відсутні внутрішні дефекти (пори, флокени, порожнини, тріщини).

2. Гіпотеза про однорідність та ізотропність. Матеріал вважається однорідним та ізотропним, тобто в будь-якому об'ємі та в будь-якому напрямі властивості матеріалу вважаються однаковими (для деталей, виготовлених деформаційною обробкою). Інколи припущення про ізотропію для деяких матеріалів не виконується. Наприклад: деревина, армовані композитні матеріали, тощо.

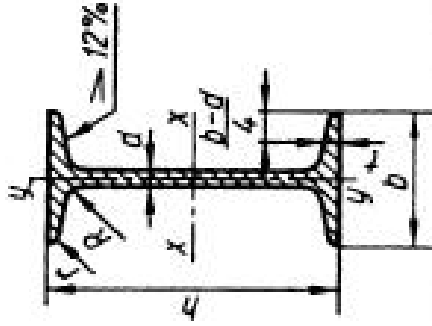
3. Гіпотеза про малість деформацій. Припускається, що деформації малі порівняно з розмірами тіла. Це дає змогу здебільшого нехтувати змінами в розташування зовнішніх сил відносно окремих частин тіла та складати рівняння статyki як для недеформованого тіла.

4. Гіпотеза про ідеальну пружність матеріалу. Припускається, що всі тіла ідеально пружні. Тіло, яке здобуло деформацію, після усунення причин, що спричиняли її, повністю відновлює свою початкову форму

Прийнявши гіпотези про малість деформацій та про лінійну залежність між деформаціями і зусиллями, можна при розв'язуванні більшості задач опору матеріалів застосовувати **принцип суперпозиції** (принцип незалежності і додавання дії сил). Результати розрахунків добре узгоджуються з даними практики.

Зазначені гіпотези, а також деякі інші (принцип Сен-Венана), розглянуті далі, дозволяють розв'язувати широке коло задач на міцність, жорсткість та стійкість.

Номер про-філо	Розміри, мм				Площа перерізу $F, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	Маса $l, \text{м, кг}$
	h	b	d	t									
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,9	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	608	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108



h — висота балки; b — ширина полиці; d — товщина стінки; t — середня товщина полиці; J — момент інерції;
 W — момент опору; I — радіус інерції; S — статичний момент півперерізу

1.6 Контрольні запитання

1. Що називається опором матеріалів?
2. Поняття міцності, жорсткості та стійкості.
3. Основні види конструкційних елементів.
4. Чим відрізняється права та ліва просторові системи координат?
5. Визначення рівнодійної розподіленого навантаження.
6. Які основні види деформацій викликаються зовнішніми силами?
7. Дайте визначення деформацій розтягання-стискання, кручення, зсуву, згинання і кута закручування.
8. Що називається абсолютним і відносним подовженням (скороченням)?
9. Що називається абсолютним і відносним зсувом?
10. Запишіть формули відносного подовження, зсуву та кута закручування.
11. Основні гіпотези та припущення опору матеріалів.

2. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Міцність та жорсткість елементів конструкції визначаються розмірами поперечних перерізів і суттєво залежать від їх форми. Площа поперечного перерізу стержня визначає затрати матеріалу, але не є мірою надійності.

Ці особливості враховуються у формулах опору матеріалів спеціальними характеристиками поперечних перерізів (геометричними характеристиками), що будуть вивчені в цьому розділі. Поперечні перерізи стержнів можна представити як плоскі фігури, та розглядати геометричні характеристики плоских фігур.

2.1 Статичні моменти площі. Центр ваги перерізу

Розглянемо довільну фігуру (поперечний переріз стержня), з координатними осями x, y (Рис. 2.1). Виділимо з цієї фігури площадку з елементарною площею dF з координатами x, y . За аналогією з виразом для моменту сили відносно якої-небудь осі (з курсу теоретичної механіки) можна записати вираз і для моменту площі, який називають **статичним моментом**.

Так добуток елементарної площі на відстань y від осі Ox $dS_x = ydF$ називається **статичним моментом елементарної площі відносно осі Ox** .

Аналогічно $dS_y = x dF$.

Склавши такі добутки по площі F довільної фігури, отримаємо відповідно статичні моменти відносно осей x і y :

$$S_x = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F x dF. \quad (2.1)$$

Позначимо x_C, y_C **координати центра ваги фігури**.

Формули інтегрування

- | | |
|--------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\int dx = x + C$ | 9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$ |
| 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ | 10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$ |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ | 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \mp a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \mp a^2} + C$ |
| 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ | 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ |
| 5. $\int e^x dx = e^x + C$ | 13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ |
| 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | 14. $\int tgx dx = -\ln \cos x + C$ |
| 7. $\int \cos x dx = \sin x + C$ | 15. $\int ctgx dx = \ln \sin x + C$ |
| 8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ | |

ВІДОМОСТІ З МАТЕМАТИКИ

Деякі фізичні сталі (константи)

Швидкість світла у вакуумі	$c=2.998 \cdot 10^8$ м/с
Гравітаційна стала	$G=6.67 \cdot 10^{-11}$ м ³ /(кг·с ²)
Прискорення вільного падіння (середнє)	$g=9.807$ м/с ²
Маса Землі	$M_3=5.98 \cdot 10^{24}$ кг
Середній радіус Землі	$R_3=6.37 \cdot 10^6$ м
Швидкість звука в повітрі при $t^\circ \text{C}=0$	331 м/с
1 рад	57.3° (57.29578°)
e	2.72 (2.7182818)

Формули диференціювання

$c' = 0, c - const$	$(\sin x)' = \cos x$
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \alpha \in R$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(ax+b)' = a$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(x^2)' = 2x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(x^3)' = 3x^2$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	

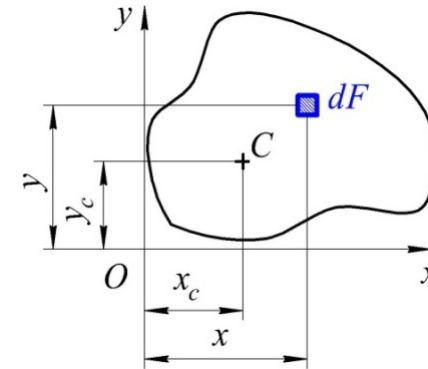


Рисунок 2.1 – Довільна фігура (переріз)

Продовжуючи аналогію з моментами сил, на підставі теореми про момент рівнодійної можна записати: $S_x = F y_C$, $S_y = F x_C$, звідси визначити **координати центра ваги**.

$$x_C = \frac{S_y}{F}, \quad y_C = \frac{S_x}{F} \quad (2.2)$$

де $F = \sum F_i$ – площа всієї фігури.

При **паралельному переносі осей** $x_1 = x - a$, $y_1 = y - b$ (Рис. 2.2).

Тоді

$$S_{x_1} = \int_F (y - b) dF, \quad S_{y_1} = \int_F (x - a) dF \quad (2.3)$$

або

$$S_{x_1} = S_x - bF, \quad S_{y_1} = S_y - aF.$$

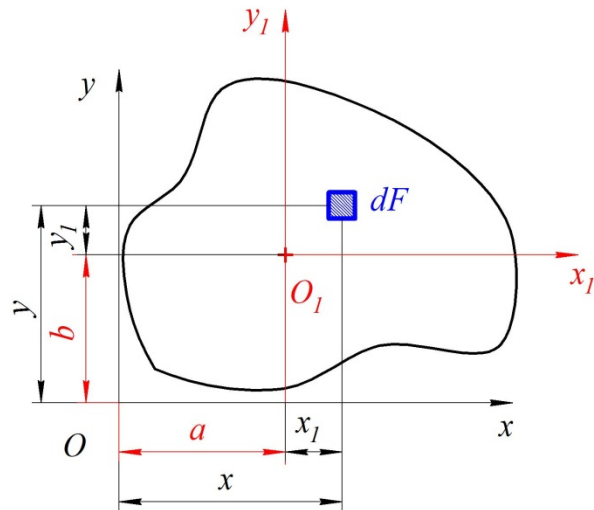


Рисунок 2.2 – Довільна фігура при паралельному переносі осей

Для визначення статичних моментів складної фігури її розбивають на прості частини, для кожної з яких відома площа F_i , та відоме положення центру ваги x_{Ci} , y_{Ci} . Статичний момент площі всієї фігури відносно даної осі визначається як сума статичних моментів кожної частини:

$$S_x = F_1 \cdot y_{C1} + F_2 \cdot y_{C2} + \dots + F_n \cdot y_{Cn} = \sum_{i=1}^n (F_i \cdot y_{Ci});$$

$$S_y = F_1 \cdot x_{C1} + F_2 \cdot x_{C2} + \dots + F_n \cdot x_{Cn} = \sum_{i=1}^n (F_i \cdot x_{Ci}).$$

За формулами (2.2) легко знайти координати центра ваги фігури:

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Опір матеріалів: Підручник / Г.С. Пісаренко, О.Л. Квітка, Л.С. Уманський; За редакцією Г.С. Пісаренка.-2-ге вид., допов. і перероб. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.
2. Сопроотивление материалов: Учебник / Н.М. Беляев. – М.: Гос.изд. технико-теоретич. лит, 1958. – 856 с.
3. Геометрические характеристики плоских сечений: [Текст]: учеб. Пособие / М.Н. Гребенников, Н.И. Пекельный. – Х.: «Нац. аэрокосм. ин-т», 2015. – 92 с.
4. Феодосьев В.И. Сопроотивление материалов: Учеб. для вузов / Феодосьев В.И. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.
5. Варданян Г.С. Сопроотивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков. – М.: ИНФРА-М, 2014. – 512 с.
6. Пісаренко Г.С. Справочник по сопроотивленію матеріалів / Г.С. Пісаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с.
7. Мельніков О.В. Опір матеріалів / Мельніков О.В. Тернопіль, видавництво „ТДТУ ім. Пулюя” – 2003. – 212 с.
8. Посацький С.Л. Опір матеріалів / Посацький С.Л. Львів, видавництво Львівського університету - 1972. – 403 с.
9. Державний стандарт України документація. Звіти у сфері науки і техніки структура і правила оформлення ДСТУ 300895

23.4 Контрольні запитання

1. Що називається контактними деформаціями та напруженнями? Наведіть приклади.
2. Умова міцності при контактних напруженнях.

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{1}{\sum F_i} \cdot \sum_1^n (F_i \cdot y_{Ci}); \quad (2.4)$$

$$y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{1}{\sum F_i} \cdot \sum_1^n (F_i \cdot x_{Ci}).$$

У відповідності до таблиць сортаменту, статичний момент виражається у см³. Визначення статичного моменту важливо для несиметричних фігур тому, що з наведених визначень витікають важливі висновки:

– якщо центр маси фігури збігається з віссю, то статичний момент відносно цієї осі дорівнює нулю; такі осі називають **центральною**;

– якщо фігура має ось симетрії, і ця ось проходить через центр маси, то статичний момент такої фігури дорівнює нулю.

Значення статичних моментів деяких простих фігур наведені в таблиці 2.1.

Для визначення положення центру ваги фігур і тіл складної геометричної форми, їх розкладають на такі частини простої форми (якщо, звичайно, це можливо), для яких положення центрів ваги відомі. Потім визначають положення центру ваги усієї фігури або тіла по формулах (2.4), розуміючи в цих формулах під F_i площі частин, на які розкладено це тіло, а під x_{Ci} , y_{Ci} – координати центрів ваги цих частин. Потрібно враховувати знаки при додаванні або відніманні статичних моментів та площин.

Приклад 2.1

Визначити координати центра ваги фігури, що наведена на рис. 2.3.

Розбиваємо складну фігуру на прості частини, у яких легко визначити площі та центри ваги. Можливо розбити на два прямокутника:

- великий з розмірами a, b , з котрого вирізано менший прямокутник;
- два прямокутника, з яких складена фігура.

Розглянемо приклад, у якому переріз складається з двох прямокутників I та II (Рис.2.3)

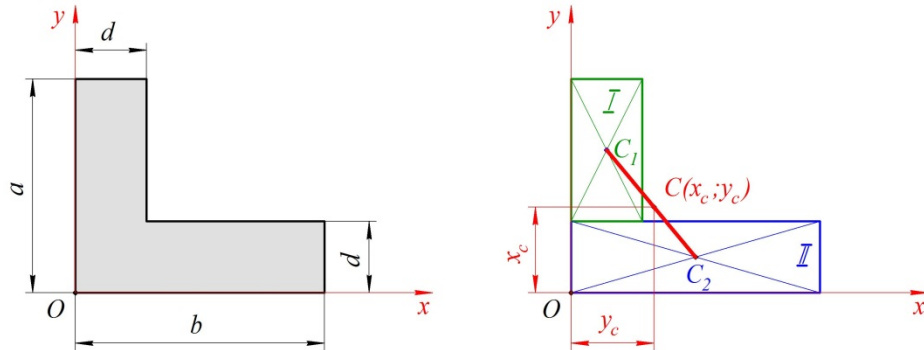


Рисунок 2.3 – Визначення центра ваги для несиметричного перерізу

Визначаємо площі: для I $F_1 = d \cdot (a - d)$;
для II $F_2 = b \cdot d$.

Загальна площа $F = F_1 + F_2 = d \cdot (a - d) + b \cdot d$.

Визначаємо положення та координати центрів ваги кожної частини. Необхідно обрати координатні осі, відносно яких будемо визначати координати центрів ваги. Осі обираємо так, щоб весь переріз був у першому квадранті.

Для фігури I :

$$x_{c_1} = \frac{d}{2}; \quad y_{c_1} = d + \frac{a - d}{2} = \frac{a - d + 2d}{2} = \frac{a + d}{2};$$

для фігури II :

$$x_{c_2} = \frac{b}{2}; \quad y_{c_2} = \frac{d}{2}.$$

За формулами (2.4) обчислюємо координати загального центру ваги.

Матеріал кульок і кілець – хромиста сталь; допустиме значення найбільшого напруження в місці контакту $[\sigma]_{\text{конт}} = 3500$ МПа, модуль пружності $E = 2,12 \cdot 10^5$ МПа.

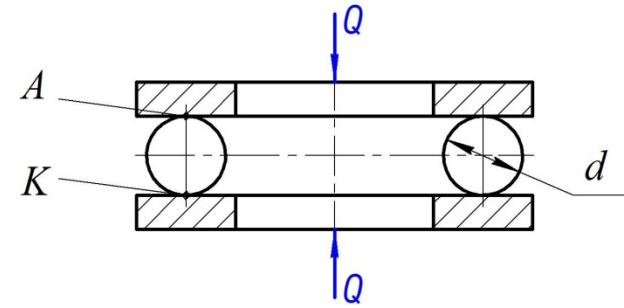


Рисунок 23.8 – До прикладу 23.1

Визначаємо найбільше стискаюче зусилля:

$$P = \frac{Q}{0,8i} = \frac{64}{0,8 \cdot 20} = 0,4 \text{ кН.}$$

У точках зіткнення кілець та кульок (точка К) утворюється кругла площадка, радіус якої, згідно з формулою (23.1)

$$a = 0,88 \sqrt[3]{\frac{2PR}{E}} = 0,88 \sqrt[3]{\frac{0,4 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}}{2,12 \cdot 10^5}} = 0,0268 \text{ см.}$$

При цьому $R_1 = \frac{d}{2} = 0,75$ см; $R_2 = \infty$; $E_1 = E_2 = E$.

Найбільше напруження на цій площадці на підставі формули (23.2):

$$\sigma_{\text{max}} = 1,5 \frac{P}{\pi a^3} = \frac{1,5 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (0,0268 \cdot 10^{-2})^2} = 2657 \text{ МПа.}$$

Отже

$$\sigma_{\text{max}} < [\sigma]_{\text{конт}}.$$

Таблиця 23.4 – Допустимий найбільший тиск на площадці контакту

Марка металу	Тимчасовий опір, σ_B , МПа	Твердість по Бринеллю, НВ	Допустимий найбільший тиск на площадці контакту $[\sigma]_{\text{конт}}$, МПа
Сталь:			
30	480-600	180	850-1050
40	570-700	200	1000-1350
50	630-800	300	1050-1400
50Г	650-850	240	1100-1450
15Х	620-750	240	1050-1600
20Х	700-850	240	1200-1450
15ХФ	1600-1800	240	1350-1600
ШХ15	–	–	
Чавун:			
СЧ 21		180-207	800-900
СЧ 24		187-217	900-1000
СЧ 28		170-241	1000-1100
СЧ 32		170-241	1100-1200
СЧ 35		197-255	1200-1300
СЧ 38		197-255	1300-1400

Приклад 23.1. Упорний кульковий підшипник із плоскими кільцями без жолобів (Рис. 23.8) статично стиснутий силами $Q = 6,4$ кН.

Визначити розміри площадки контакту між кулькою й кільцем і величину найбільшого напруження на цій площадці; перевірити міцність. Діаметр кульки $d = 15$ мм, кількість кульок $i = 20$, коефіцієнт нерівномірності розподілу навантаження між окремими кульками підшипника – 0,8.

$$X_c = \frac{F_1 x_{c_1} + F_2 x_{c_2}}{F_1 + F_2} = \frac{d \cdot (a - d) \cdot \frac{d}{2} + b \cdot d \cdot \frac{b}{2}}{d \cdot (a - d) + b \cdot d};$$

$$y_c = \frac{F_1 y_{c_1} + F_2 y_{c_2}}{F_1 + F_2} = \frac{d \cdot (a - d) \cdot \frac{a + d}{2} + b \cdot d \cdot \frac{d}{2}}{d \cdot (a - d) + b \cdot d}.$$

В якості перевірки можна зазначити, що загальний центр ваги несиметричного перерізу повинен лежати на відрізку, який з'єднує центри ваги частин перерізу.

Приклад 2.2

Визначити координати центра ваги симетричного перерізу (Рис. 2.4).

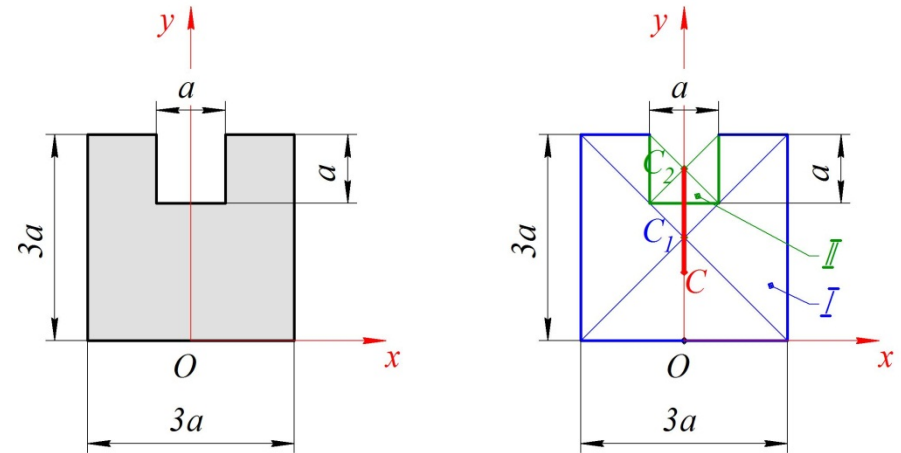


Рисунок 2.4 – Визначення центра ваги для симетричного перерізу

Розбиваємо фігуру на два квадрата (великий з розмірами $3a \times 3a$, з якого вирізано менший квадрат $a \times a$) (Рис. 2.4).

Для кожного з них визначаємо площі: для I $F_1 = (3a)^2$;

для II $F_2 = a^2$.

Осі координат обираємо таким чином, щоб одна ось (ось y) співпала з віссю симетрії. Ось x обирається в довільній точці. Координати центрів ваги кожної фігури:

$$x_{C1} = 0; \quad y_{C1} = \frac{3a}{2} = 1,5a;$$

$$x_{C2} = 0; \quad y_{C2} = 3a - \frac{a}{2} = 2,5a.$$

Координати центра ваги всієї фігури:

$$x_C = \frac{F_1 x_{C1} - F_2 x_{C2}}{F_1 - F_2} = 0;$$

$$y_C = \frac{F_1 y_{C1} - F_2 y_{C2}}{F_1 - F_2} = \frac{9a^2 \cdot 1,5a - a^2 \cdot 2,5a}{9a^2 - a^2} = \frac{11a^3}{8a^2} = 1,37a.$$

В якості перевірки можна зазначити, що загальний центр ваги симетричного перерізу повинен лежати на осі симетрії.

2.2 Моменти інерції плоских фігур

Осьові моменти інерції входять в формулу для напружень та прогинів при згинанні балок. Від моменту інерції перерізу залежить стійкість стиснутого стержня.

Осьовим моментом інерції фігури називають інтеграл добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстані від осі, що лежать у площині фігури (Рис. 2.5).

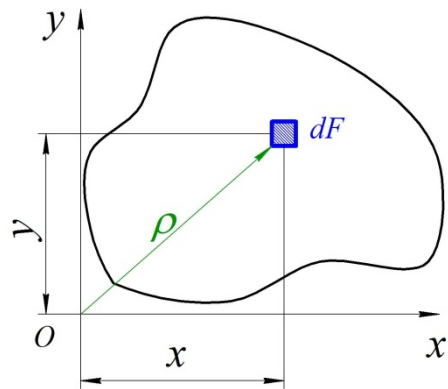


Рисунок 2.5 – Довільна фігура

$$J_x = \int_F y^2 dF;$$

$$J_y = \int_F x^2 dF; \quad (2.5)$$

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF.$$

Таблиця 23.3 – Значення коефіцієнту m залежно від відносин півосей еліптичної площадки контакту й обраної теорії міцності

$\frac{b}{a}$	$m = \frac{\sigma_{\text{екв III}}}{\sigma_{\text{max}}}$	$m = \frac{\sigma_{\text{екв IV}}}{\sigma_{\text{max}}}$
1 (коло)	0,620	0,620
0,75	0,625	0,617
0,50	0,649	0,611
0,25	0,646	0,587
0 (смуга)	0,600	0,557

Можна рекомендувати наступний порядок розрахунку на міцність елементів конструкції в місцях контакту:

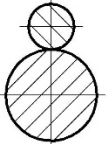

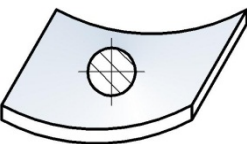
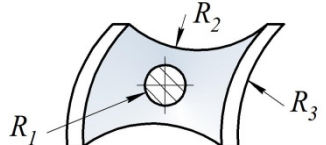
– визначити головні радіуси кривизни контактуючих тіл і кут φ між головними площинами кривизни одного й іншого тіла;

– обчислити по формулах (23.12) і (23.13) з урахуванням формули (23.14) розміри півосей еліптичної площадки контакту;

– визначити по формулі (23.15) найбільше напруження стиску в центрі площадки контакту. У випадку круглої й прямокутної площадки контакту знаходять безпосередньо з формул (23.2) або (23.8), не визначаючи розмірів площадки;

– розрахунок на міцність роблять по формулі (23.18). Значення коефіцієнта m беруть із табл. 23.3. При цьому рекомендується виходити із четвертої теорії міцності.

Таблиця 23.2 – Максимальне напруження стискання для різних випадків контакту

Форма тіл		σ_{max}
схема	параметри	
	дві кулі радіусів R_1, R_2	$0,388 \sqrt[3]{PE^2 \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}$
	куля радіусу R_1 у напівсфері радіусу R_2	$0,388 \sqrt[3]{PE^2 \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_1^2 R_2^2}}$
	куля радіусу R_1 у циліндричному жолобі радіусу R_2	$\alpha \sqrt[3]{PE^2 \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_1^2 R_2^2}}$
	підшипник	$\alpha \sqrt[3]{PE^2 \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_1^2 R_2^2}}$

23.3 Умови міцності при контактних напруженнях

Значення коефіцієнту m залежно від відношення півосей еліптичної площадки контакту й обраної теорії міцності наведені в табл. 23.3. Значення найбільшого допустимого тиску на площадці контакту наведено у табл. 23.4.

Полярний момент інерції J_ρ використовують в формулах для напружень та деформацій при крученні.

Полярним моментом інерції площі фігури відносно полюса O називають інтеграл добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від полюса.

Якщо через полюс проведено систему прямокутних осей, то $\rho^2 = x^2 + y^2$, тоді

$$J_\rho = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF = J_y + J_x. \quad (2.6)$$

Зазначимо, що осьові та полярні моменти інерції можуть набувати лише додатних значень.

Відцентровим моментом інерції називають інтеграл добутків площ елементарних площадок на відстані їх від осей x та y :

$$J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (2.7)$$

Відцентровий момент інерції в залежності від положення осей може бути **додатним** чи **від'ємним** або **дорівнювати нулю**. Очевидно, що при поступовому повороті осей можна знайти таке їх положення, при якому відцентровий момент інерції буде дорівнювати нулю. Такі осі називаються **головними осями інерції**.

Дві взаємно перпендикулярні осі, з яких хоча б одна є віссю симетрії фігури, завжди будуть головними осями інерції, оскільки в цьому разі кожній додатній величині $xy dF$ відповідає така сама від'ємна по іншій бік від осі симетрії і сума їх по всій площі фігури дорівнює нулю. Головні осі, що проходять через центр ваги перерізу називають **головними центральними осями**.

При визначенні моментів інерції складних перерізів останні можна розкласти на прості частини, моменти інерції яких відомі.

З основної властивості інтеграла суми випливає, що момент інерції складної фігури дорівнює сумі моментів інерції її складових частин.

Одиниці вимірювання моментів інерції – см^4 .

2.3 Моменти інерції відносно паралельних осей

Якщо відомі моменти інерції фігури відносно центральних осей x , y і треба визначити моменти інерції відносно осей паралельних центральним (Рис. 2.6), то враховуючи, що $x_1 = x + b$ та $y_1 = y + a$ можемо підставити ці значення та інтегрувати почленно:

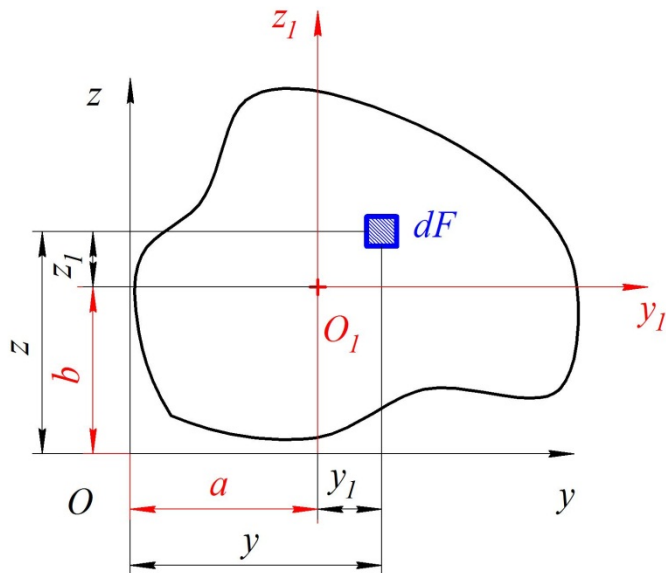


Рисунок 2.6 – Довільна фігура в паралельних осях

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y - b)^2 dF = \int_F y^2 dF + b^2 \int_F dF - 2b \int_F y dF;$$

Найбільше напруження стискання в центрі площадки контакту

$$\sigma_{max} = 1,5 \frac{P}{\pi ab}. \quad (23.15)$$

Найбільше дотичне напруження в небезпечній точці майже не залежить від відношення розмірів площадки:

$$\tau_{max} \approx 0,32 \sigma_{max}. \quad (23.16)$$

Контактні напруження не залежать від пружних властивостей матеріалів. Зі збільшенням навантаження швидкість наростання напружень зменшується, що обумовлено збільшенням розмірів площадки контакту.

Наведемо також значення максимального напруження стискання для найбільш часто зустрічаються випадків контакту двох тіл (табл. 23.2).

З огляду на «м'якість» напруженого стану в небезпечних точках (всі три головних напруження – стискаючі), перевірку міцності при контактних напруженнях варто робити по третій або четвертій теоріях міцності:

$$\sigma_{екв} = m \sigma_{max} \leq [\sigma],$$

звідки

$$\sigma_{max} \leq \frac{1}{m} [\sigma] = [\sigma]_{конт}, \quad (23.18)$$

де m – коефіцієнт запасу міцності.

Тут $[\sigma]_{конт} = \frac{[\sigma]}{m}$ – допустимі значення, що, для найбільшого напруження в місці контакту.

У загальному випадку площадка контакту становить еліпс з півосями:

$$a = \alpha \cdot \sqrt[3]{\frac{3P(1 - \mu^2)}{E \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'} \right)}}; \quad (23.12)$$

$$b = \beta \cdot \sqrt[3]{\frac{3P(1 - \mu^2)}{E \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'} \right)}}; \quad (23.13)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона.

Значення коефіцієнтів α і β наведено в таблиці 23.1 як функції допоміжного кута ψ , який визначається за формулою:

$$\cos \psi = \frac{\pm \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1'}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'}\right)\cos 2\varphi}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}}. \quad (23.14)$$

Таблиця 23.1 – Значення коефіцієнтів α і β

$\psi, ^\circ$	α	β	$\psi, ^\circ$	α	β
20	3,778	0,408	60	1,486	0,717
30	2,731	0,493	65	1,378	0,759
35	2,397	0,530	70	1,284	0,802
40	2,136	0,567	75	1,202	0,846
45	1,926	0,604	80	1,128	0,893
50	1,754	0,641	85	1,061	0,944
55	1,611	0,678	90	1,000	1,000

Знак чисельника у формулі (23.14) обирають так, щоб $\cos \psi$ був додатним.

$$J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF = \int_F (x - a)^2 dF = \int_F x^2 dF + a^2 \int_F dF - 2a \int_F x dF;$$

$$J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF = \int_F (x - a)(y - b) dF =$$

$$= \int_F x y dF + ab \int_F dF + a \int_F x dF - b \int_F y dF.$$

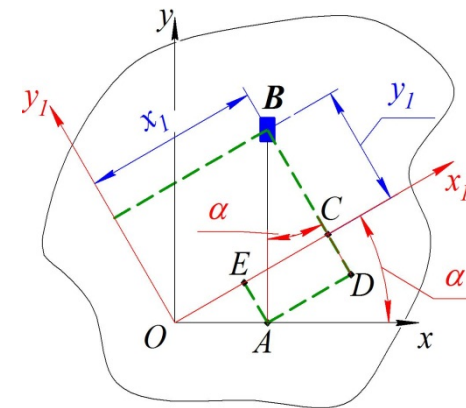
Інтеграли $\int_F x dF = S_y$ та $\int_F y dF = S_x$ дорівнюють нулю як статичні моменти площі відносно центральних осей. Тому отримуємо:

$$J_{x_1} = J_x + b^2 F; \quad J_{y_1} = J_y + a^2 F; \quad J_{x_1 y_1} = J_{xy} + ab F. \quad (2.8)$$

2.4 Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей

Нехай відомі моменти інерції довільної фігури відносно координатних осей x, y (2.5).

Якщо повернути осі x, y на кут α проти годинникової



стрілки, вважаючи кут повороту осей в цьому напрямі додатним, можна знайти моменти інерції перерізу відносно повернутих осей x_1, y_1 , виразивши координати довільної елементарної площадки за допомогою тригонометричних функцій (Рис.2.7):

Рисунок 2.7 – Довільна фігура при повороті осей

$$\begin{aligned} x_1 &= OC = OE + AD = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha; \\ y_1 &= BC = BD - EA = y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Момент інерції перерізу відносно повернутих осей x_1y_1 :

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF; \quad J_{x_1y_1} = \int_F x_1y_1 dF. \quad (2.10)$$

Підставив (2.9) у формулу (2.10), отримаємо:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \int_F (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dF = \cos^2\alpha \int_F y^2 dF + \\ &\quad + \sin^2\alpha \int_F x^2 dF - \sin 2\alpha \int_F xy dF; \\ J_{y_1} &= \int_F (x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 dF = \sin^2\alpha \int_F y^2 dF + \\ &\quad + \cos^2\alpha \int_F x^2 dF + \sin 2\alpha \int_F xy dF; \\ J_{x_1y_1} &= \int_F (x\cos\alpha + y\sin\alpha)(y\cos\alpha - x\sin\alpha) dF = \\ &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \int_F xy dF + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\int_F y^2 dF - \int_F x^2 dF \right). \end{aligned}$$

Враховуючи формули (2.5), остаточно отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{y_1} &= J_x \sin^2\alpha + J_y \cos^2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

$$J_{x_1y_1} = J_{xy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (J_y - J_x) \sin 2\alpha. \quad (2.12)$$

При взаємному тиску циліндра і площини, взявши у формулі $R_2 = \infty$, знаходимо

$$\sigma_{max} = 0,418 \sqrt{\frac{2q}{R} \cdot \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}}. \quad (23.11)$$

Наведені вище формули здобуті при $\mu = 0,3$. Однак для практичних розрахунків ними можна користуватись і при інших значеннях коефіцієнта Пуассона.

Загальний випадок контакту двох тіл. Наведемо формули для загального випадку контакту двох тіл з однакового матеріалу.

Припускається, що обидва тіла в точці дотику мають загальну дотичну площину AB і загальну нормаль z , уздовж якої напрямлено силу P (Рис. 23.8). Нагадаємо, що головними кривинами називають найбільшу і найменшу кривини, розміщені в двох взаємно перпендикулярних площинах, що проходять через центр кривини. Радіуси кривини вважають додатними, якщо центри кривини розміщені усередині тіла. Позначимо через φ кут між головними площинами кривини тіл, в яких лежать менші радіуси.

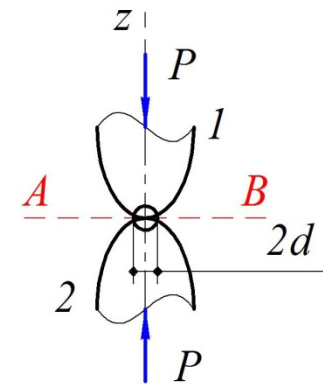


Рисунок 23.8 – Випадок контакту двох тіл з однакового матеріалу

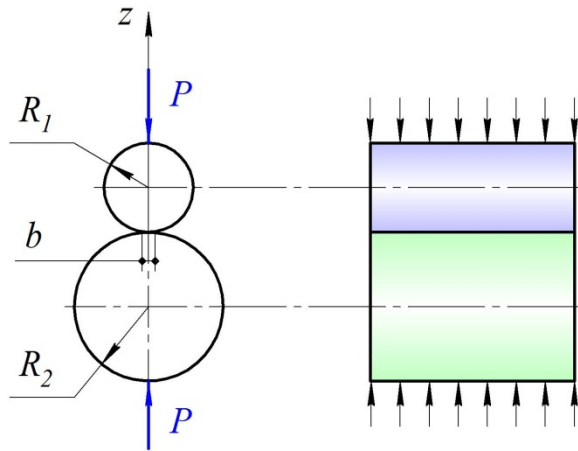


Рисунок 23.6 – Взаємне натискання двох циліндрів з паралельними твірними рівномірно розподіленим навантаженням

Найбільше дотичне напруження в небезпечній точці

$$\tau_{max} = 0,3\sigma_{max} \quad (23.10)$$

Змінюючи у формулі (23.8) знак при R_2 на протилежний, знайдемо напруження у випадку тиску циліндра на деталь з вогнутою циліндричною поверхнею. Такі напруження діють у місцях контакту циліндричного шарніра та балансирів (Рис. 23.7).

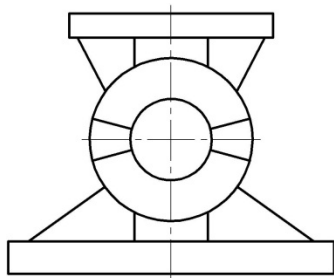


Рисунок 23.7 – Місця контакту циліндричного шарніра та балансирів

Зазначимо, що ці формули, здобуті при повороті довільної системи прямокутних осей, справедливі й для центральних осей.

Додаючи почленно вирази (2.11), знаходимо:

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = J_p. \quad (2.13)$$

Отже, при повороті прямокутних осей сума осевих моментів інерції не змінюється і дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат.

При повороті осей на кут $\alpha = 90^\circ$

$$J_{x_1} = J_y; \quad J_{y_1} = J_x; \quad J_{x_1y_1} = -J_{xy}.$$

2.5 Визначення напрямку головних осей інерції. Головні моменти інерції

Нагадаємо, що **головні осі** – це такі, відносно яких відцентровий момент дорівнює нулю, а осеві набувають екстремальних значень. Головні центральні осі мають найбільше практичне значення. Позначимо їх літерами u і v . Отже, $J_{uv} = 0$.

Для визначення положення головних центральних осей плоскої фігури, повернемо початкову систему центральних осей xu (Рис. 2.8) на деякий кут α_0 , при якому відцентровий момент інерції дорівнює нулю ($J_{uv} = 0$).

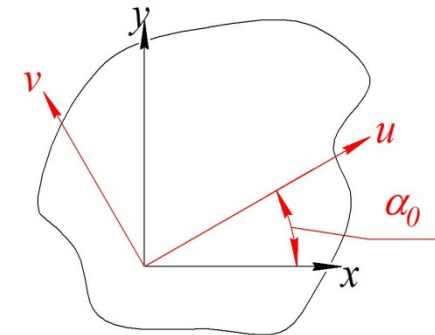


Рисунок 2.8 – Довільна фігура з головними осями

Тоді з формули (2.12) отримаємо:

$$J_{uv} = J_{x_1y_1} = J_{xy} \cos 2\alpha_0 - \frac{J_y - J_x}{2} \sin 2\alpha_0, \quad (2.14)$$

звідки

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (2.15)$$

Отримані з формули (2.15) значення кута α_0 різняться між собою на 90° і дають положення головних осей. Менший з цих кутів не перевершує $\pi/4$. Далі користуємось тільки меншим кутом. Проведену під таким кутом (додатним чи від'ємним) головну вісь будемо позначати літерою **u**.

Головні моменти інерції можна знайти із загальних формул переходу до повернутих осей (2.11), взявши $\alpha = \alpha_0$. Шляхом підставлень та перетворень знаходимо вирази для головних моментів інерції, що не містять тригонометричних функцій:

$$J_u = \frac{1}{2}(J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}; \quad (2.16)$$

$$J_v = \frac{1}{2}(J_x + J_y) \mp \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}. \quad (2.17)$$

Причому верхні знаки беремо при $J_x > J_y$, а нижні при $J_x < J_y$.

Отже, формули (2.15), (2.16) і (2.17) дають змогу визначити положення головних осей та головні центральні моменти інерції.

Важливо зазначити, що головні моменти інерції, розраховані по формулам (2.16) і (2.17), мають властивість екстремальності.

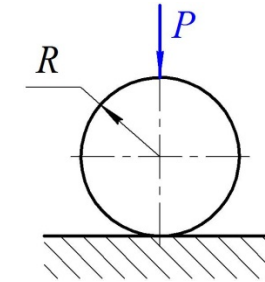


Рисунок 23.5 – Випадок взаємного стиснення кулі і площини

Стиснення циліндрів. При взаємному натисканні двох циліндрів з паралельними твірними рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q , Н/м (Рис. 23.6), площадка контакту має вигляд вузького прямокутника, ширина якого визначається за формулою:

$$b = 2,15 \sqrt{q \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}. \quad (23.7)$$

Найбільше напруження стиснення, що діє в точках осі площадки контакту,

$$\sigma_{max} = 1,27 \frac{q}{b} = 0,418 \sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \quad (23.8)$$

Аналіз напруженого стану свідчить, що небезпечна точка лежить на осі z на глибині, що дорівнює $0,4$ ширини площадки контакту. Головні напруження в цій точці мають такі значення:

$$\sigma_1 = -0,18\sigma_{max}; \quad \sigma_2 = -0,288\sigma_{max}; \quad \sigma_3 = -0,78\sigma_{max}. \quad (23.9)$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,31\sigma_{max}. \quad (23.4)$$

Змінивши у формулі (23.2) знак при R_2 на протилежний, дістанемо значення σ_{max} у випадку тиску кулі на вогнуту сферичну поверхню (Рис. 23.4):

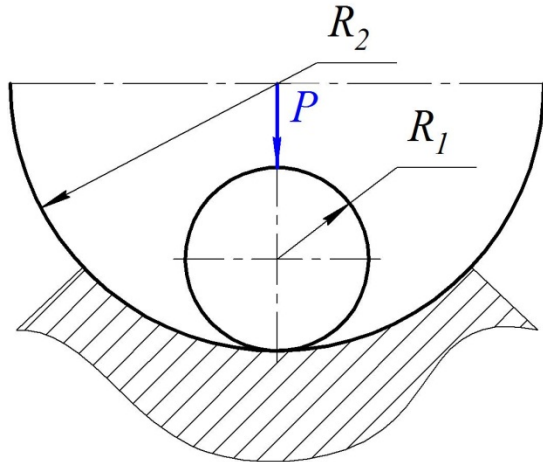


Рисунок 23.4 – Тиск кулі на вогнуту сферичну поверхню

$$\sigma_{max} = 0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{(R_1 - R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}. \quad (23.5)$$

При взаємному натисканні кулі й площини (Рис.23.5), взявши $R_2 = \infty$, знаходимо

$$\sigma_{max} = 0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{1}{R^2}}. \quad (23.6)$$

2.6 Радіус інерції. Еліпс інерції

Момент інерції фігури відносно будь-якої осі можна подати у вигляді добутку площі фігури на квадрат деякої величини, що називають **радіусом інерції**:

$$J_z = \int_F y^2 dF = F i_z^2, \quad (2.18)$$

де i_z — радіус інерції відносно осі z . Із виразу (2.18) випливає, що

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}, \quad i_z^2 = \frac{J_z}{F}. \quad (2.19)$$

Аналогічно **радіус інерції площі перерізу відносно осі y** :

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}; \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F}. \quad (2.20)$$

Головним центральним осям інерції відповідають головні радіуси інерції:

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}}; \quad i_u^2 = \frac{J_u}{F}. \quad (2.20')$$

Поняття еліпса інерції має істотне значення в механіці.

По еліпсу інерції може бути визначений радіус інерції площі щодо будь-яких осей, що проходять через центр еліпса. За допомогою еліпса інерції можна графічно знайти радіус інерції для будь-якої осі.

Побудуємо на головних центральних осях інерції фігури еліпс з півосями, що дорівнюють головним радіусам інерції, причому вздовж осі u відкладаємо відрізки i_v , а вздовж осі v відрізки i_u (Рис. 2.9).

Цей еліпс, називають **еліпсом інерції**. Радіус інерції відносно довільної осі u визначається перпендикуляром OA ,

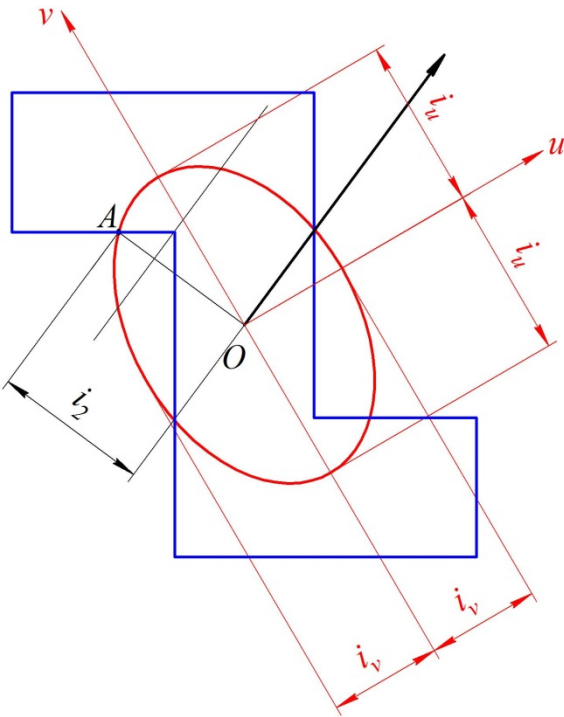


Рисунок 2.9 – Еліпс інерції

Еліпс інерції для центра ваги називається центральним еліпсом.

2.7 Моменти опору плоских перерізів

Момент опору – геометрична величина, що характеризує опір тіла (стрижня, балки, вала) напруженням залежно від

поставленим із центра еліпса на дотичну до еліпса, паралельну цій осі.

Для визначення точки дотику досить провести паралельно даній осі z будь-яку хорду. Точка перетину еліпса з прямою, що сполучає центр O із серединою хорди, i є точкою дотику. Вимірявши потім відрізок OA , знаходимо момент інерції.

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_\tau.$$

Підставивши значення головних напружень, знайдемо

$$0,2\sigma_{max} = \sigma_\tau \text{ або } \sigma_{max} = 5\sigma_\tau.$$

Для загартованої хромистої сталі, з якої виготовляють шарикові підшипники, замість границі текучості візьмемо границю пропорційності $\sigma_{пц} = 1000$ МПа. Отже, $\sigma_{max} = 5000$ МПа.

Найбільш небезпечна точка лежить на осі z на глибині, що приблизно дорівнює половині радіуса площадки контакту. Головні напруження в цій точці

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0,18\sigma_{max}; \quad \sigma_3 = -0,8\sigma_{max}, \quad (23.3)$$

де σ_{max} – найбільше напруження в центрі площадки контакту, що визначається за формулою (23.2).

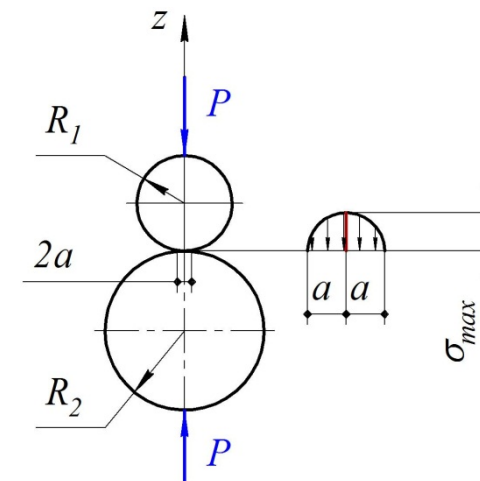


Рисунок 23.3 – Стискання куль

Найбільше дотичне напруження в небезпечній точці

23.2 Формули для визначення контактних напружень

Стискання куль. При взаємному стисканні двох куль, радіуси яких R_1 і R_2 (Рис. 23.3) силами P , утворюється кругла площадка контакту, радіус якої визначається за формулою

$$a = 0,88 \sqrt[3]{P \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}, \quad (23.1)$$

де E_1 , і E_2 – модулі пружності матеріалів куль.

Нормальні (стискаючі) напруження на площадці контакту розподілені по півсфері. Найбільше напруження діє в центрі площадки контакту:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= -|\sigma_{max}| = -1,5 \frac{P}{\pi a^2} = \\ &= -0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}; \end{aligned} \quad (23.2)$$

два інших головних напруження в центрі площадки

$$\sigma_1 = \sigma_2 \approx -0,8 |\sigma_{max}|.$$

Отже, в найбільш напруженій точці площадки контакту матеріал знає напруженого стану, близького до рівномірного стискання. Завдяки цьому в зоні контакту матеріал може витримати без появи залишкових деформацій вельми великий тиск.

Обчислимо, наприклад, напруження в центрі площадки контакту, при якому вперше виникають залишкові деформації. Скористаємося для цього IV теорією міцності:

форми і розмірів його поперечного перерізу. Одиниці вимірювання – см^3 .

Моменти опору характеризують собою міцність поперечного перерізу. Момент опору складного поперечного перерізу визначається для всієї фігури в цілому, як відношення головного моменту інерції до відстані від головної осі до найбільш віддаленої точки перерізу.

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}}; \quad W_y = \frac{J_y}{x_{max}}; \quad W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{max}}. \quad (2.21)$$

Моменти опору деяких простих фігур.

Прямокутник

$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6}, \text{ см}^3.$$

Трикутник

$$W_{xc} = \frac{bh^2}{24}, \quad \left(y_{max} = \frac{2}{3}h \right), \text{ см}^3.$$

Коло

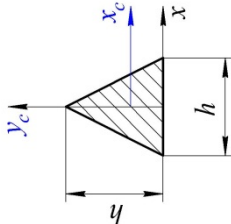
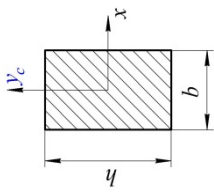
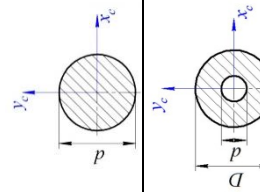
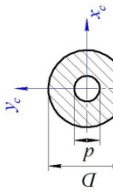
$$W_x = \frac{\pi d^2}{32}, \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}, \quad \left(\rho_{max} = \frac{d}{2} \right), \text{ см}^3.$$

Кільце

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} (1 - a^4), \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} (1 - a^4), \quad \text{см}^3 \left(a = \frac{d}{D} \right).$$

Геометричні характеристики простих фігур наведено в таблиці 2.1

Таблиця 2.1 – Геометричні характеристики простих фігур

Фігура	S_x	S_y	J_x	J_y	J_p	W_x	W_y	W_p
	$\frac{bh^2}{6}$		$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$		$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{hb^2}{6}$	
			$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$		$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{hb^2}{6}$	
			$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$
			$\frac{\pi d^4}{64}(1-a)$	$\frac{\pi d^4}{64}(1-a)$	$\frac{\pi d^4}{32}(1-a)$	$\frac{\pi d^3}{32}(1-a^4)$	$\frac{\pi d^3}{32}(1-a^4)$	$\frac{\pi d^3}{16}(1-a^4)$

контуром тиску. По поверхні тиску діє стискаюче напруження. Розрахунок загальної міцності тіл в перерізах, віддалених від місця контакту, ведеться відповідно до принципу Сен-Венана без урахування особливостей розподілу напружень в зоні контакту. Для визначення ж місцевої міцності тіла поблизу від точки зіткнення первинну роль грають закон розподілу напружень в зоні контакту і значення максимального контактного напруження. Матеріал, розташований безпосередньо під зоною контакту, знаходиться в об'ємному напруженому стані, оскільки стискання відбувається у напрямі нормальному до площадки.

Вперше правильний розв'язок основних випадків стискання пружних тіл дано методами теорії пружності в працях німецького фізика Г. Герца¹⁶.

Нижче наведено деякі результати, здобуті методами теорії пружності при таких припущеннях:



Рисунок 23.2 – Портрет Генріха Герца

- навантаження спричинюють в зоні контакту тільки пружні деформації, що відповідають закону Гука;
- площадки контакту малі порівняно з поверхнями стичних тіл;
- сили тиску, розподілені по поверхнях контакту, нормальні до цих поверхонь.

¹⁶ (1857-1894) — німецький вчений. Перший отримав електромагнітні хвилі, існування яких теоретично передбачено Максвеллом.

23. КОНТАКТНІ НАПРУЖЕННЯ

23.1 Основні поняття

Деформації і напруження, що виникають при взаємному натисканні двох стичних тіл, обмежених криволінійними поверхнями, називають контактними. Внаслідок деформацій у місцях зіткнення елементів конструкцій передача тиску відбувається по дуже малим площадкам. Матеріал поблизу такої площадки, не маючи змоги вільно деформуватися, зазнає об'ємного напруженого стану (Рис. 23.1).

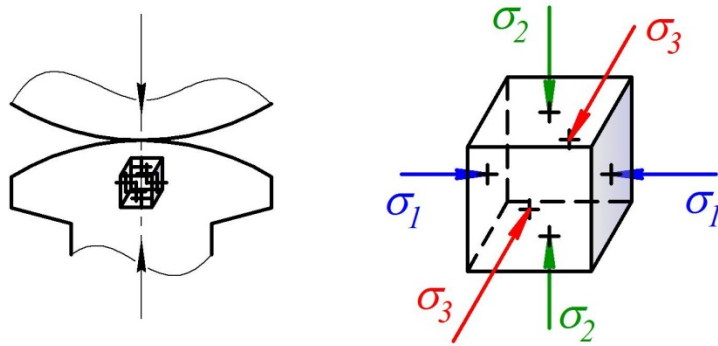


Рисунок 23.1 – Об'ємний напружений стан в зоні контактної навантаження

Досліджувати контактні напруження і деформації потрібно для вирішення питань міцності багатьох важливих деталей. До таких деталей належать, наприклад, шарики й ролики підшипники, зубчасті колеса, елементи кулачкових механізмів, колеса рухомого складу, рейки, кульові й циліндричні катки тощо.

При стисканні двох тіл, що мають гладку криволінійну поверхню, в зоні контакту відбувається з'єднання точок поверхонь цих тел. В результаті утворюється поверхня, що називається поверхнею тиску (прямою контакту), а її контур –

2.8 Контрольні запитання

1. Як визначається статичний момент фігури? Яка розмірність статичного моменту?
2. Формули визначення координати центра ваги фігури.
3. Як визначити координати центру ваги складної фігури?
4. Що називається осьовим, полярним і відцентровим моментами інерції? Яка їхня розмірність?
5. Які з моментів інерції - величини завжди плюсові?
6. Як змінюється відцентровий момент інерції при повороті осей координат на 90° ?
7. Які осі називаються головними центральними осями інерції?
8. Чому вісь симетрії фігури завжди є однією з головних осей інерції?
9. Що таке радіус та еліпс інерції?
10. Що таке момент опору перерізу?
11. Моменти інерції відносно паралельних осей.

3. ВНУТРІШНІ СИЛИ. МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ. НАПРУЖЕННЯ І ВНУТРІШНІ СИЛОВІ ФАКТОРИ

3.1 Внутрішні сили. Метод перерізів

Між сусідніми частинами тіла (кристалами, молекулами, атомами) завжди є певні сили взаємодії, тобто **внутрішні сили**. В опорі матеріалів не розглядають і не беруть до уваги внутрішні сили, що діють в тілі, яке перебуває в своєму природному (ненавантаженому) стані, а вивчають й визначають тільки ті внутрішні сили, які з'являються внаслідок навантаження тіла. Внутрішні сили часто називають **зусиллями**. Для виявлення, а потім і визначення внутрішніх сил в опорі матеріалів широко застосовують **метод перерізів** (Рис. 3.1).

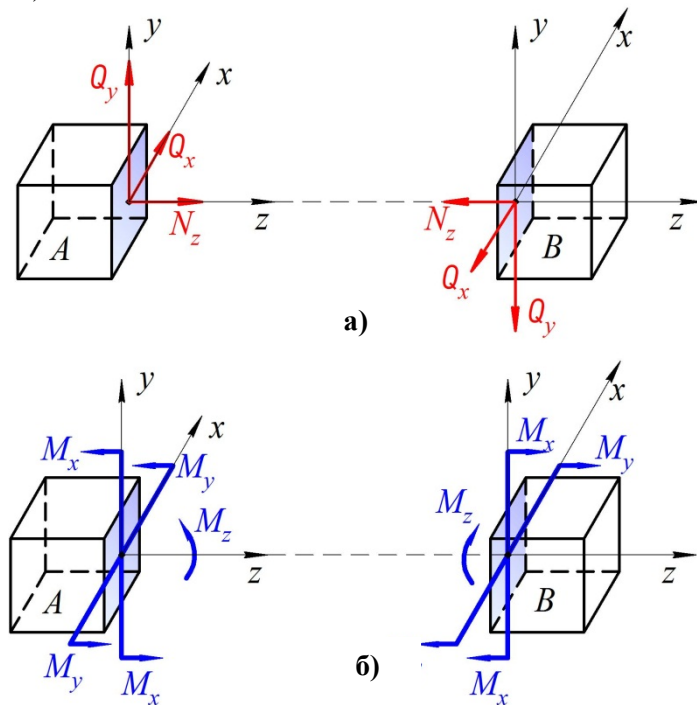


Рисунок 3.1 – Метод перерізів

Такими заходами можна підвищити границю витривалості матеріалу і конструкції.

22.6 Контрольні запитання

1. Що називається втомленістю матеріалів?
2. Що називається опором втомленості матеріалів?
3. Що називається границею витривалості (границею втомленості)?
4. Методі підвищення границі втомленості матеріалів.

$n = 1, 3-1, 4$ – для високооднорідних матеріалів;
 $n = 1, 4-1, 7$ – для середньооднорідних матеріалів;
 $n = 1, 7-3, 0$ – якщо низька однорідність матеріалу.

Коефіцієнтом n в формулі (22.15) можна користуватись, якщо нормальні і дотичні напруження в деталі з'являються одночасно (синхронно). Якщо ж при складному навантаженні нормальні і дотичні напруження з'являються не одночасно, то коефіцієнт запасу міцності визначають окремо по: нормальним напруженням, (з урахуванням основних факторів, що впливають на границю витривалості):

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{\sigma_a K_{\sigma}}{\varepsilon_{\Pi} \varepsilon_{\mu}} + \sigma_m \psi_{\sigma}}, \quad (22.16)$$

по дотичним напруженням

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{\tau_a K_{\tau}}{\varepsilon_{\Pi} \varepsilon_{\mu}} + \tau_m \psi_{\sigma}}. \quad (22.17)$$

В формулах 22.16 і 22.17 не враховується вплив температури, агресивності середовища, радіоактивного випромінювання, фактор часу дії напруження та інше.

Заходи по підвищенню границі витривалості матеріалу

Деталі, що працюють при повторно-змінних навантаженнях повинні бути виготовлені з високоякісної дрібнозеренної сталі.

Конструктивно деталь не повинна мати концентраторів напружень.

Для підвищення границі витривалості можна використовувати різні методи механічного та термохімічного зміцнення поверхні деталі. Це – азотування або борування поверхні. Це і обкатка роликми і дробеструймова обробка поверхні.

Деталі, що працюють при повторно-змінних навантаженнях повинні мати чистову обробку поверхні аж до електрополірування.

Розглянемо довільне тіло навантажене самоврівноваженою системою сил. Поділимо його на дві частини A і B (див. рис. 3.1 а, б).

Відповідно до третього закону Ньютона, внутрішні сили, що діють у перерізі частини A дорівнюють за модулем та протилежні за напрямом внутрішнім силам частини B . Їх можна звести до **головного вектора і головного моменту**.

Якщо головний вектор і головний момент спроеціювати на вісь стержня z , та головні центральні осі перерізу y і x , то на кожному боці перерізу матимемо шість внутрішніх силових факторів: три сили (N_z, Q_y, Q_z) і три моменти (M_x, M_y, M_z) (Рис. 3.1 б).

Ці величини називають **внутрішніми силовими факторами** в перерізі стержня. Зусилля моментів у перерізі мають такі означення:

N_z – поздовжня сила; яка дорівнює сумі проєкцій усіх внутрішніх сил, що діють у перерізі на нормаль до перерізу;

Q_x та Q_y – поперечні сили, які дорівнюють сумі проєкцій всіх внутрішніх сил у перерізі на головні центральні вісі перерізу x та y ;

M_x та M_y – згинальні моменти, визначаються як суми моментів усіх внутрішніх сил у перерізі відносно головних центральних осей перерізу x та y ;

$M_z = M_{кр}$ – крутильний момент, який дорівнює сумі моментів усіх внутрішніх сил у перерізі відносно осі стержня z :

де

$$N_z = \sum P_{iz}; Q_x = \sum Q_{ix}; Q_y = \sum Q_{iy};$$

$$M_x = \sum_1^n M_{ix}; M_y = \sum_1^n M_{iy}; M_{кр} = \sum_1^n M_{iz}.$$

Для практичного обчислення зусиль та моментів у перерізі використовують рівняння рівноваги довільної просторової системи сил:

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{1}{n}}^n M_x(\bar{P}_i) + M_x &= 0; & \sum_{\frac{1}{n}}^n P_{ix} + Q_x &= 0; \\ \sum_{\frac{1}{n}}^n M_y(\bar{P}_i) + M_y &= 0; & \sum_{\frac{1}{n}}^n P_{iy} + Q_y &= 0; \\ \sum_1^1 m_z(\bar{P}_i) + M_z &= 0; & \sum_1^1 P_{iz} + N_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Метод перерізів дає можливість знайти внутрішні зусилля та моменти в будь-якому перерізі стержня по всій довжині стержня під дією будь-якого навантаження.

Зусилля та моменти в різних перерізах одного і того ж самого стержня різні. **Графічні зображення, що показують, як змінюються внутрішні зусилля при переході від перерізу до перерізу, називають епюрами.** Кількість перерізів визначається кількістю силових ділянок. **Силовою ділянкою** називається частина стержня між точками прикладання зосереджених сил, або де розподілене навантаження змінюється за одним і тим же законом. Кількість силових ділянок найпростіше визначається кількістю розмірів, показаних на схемі. В практичних задачах побудова епюр потрібна для визначення положення найбільш навантаженого (небезпечного) перерізу стержня.

Правила побудови епюр:

1. Вісь (базу), на якій будується епюра, завжди вибирають так, щоб вона була паралельна або просто збігалася з віссю стержня.

2. Ординати епюри відкладають із урахуванням знаку перпендикулярно осі епюри.

3. Штрихують епюри лініями, які перпендикулярні базі.

4. Для зусиль і моментів вибирають певний масштаб. В полі епюри ставлять знак зусилля.

5. В точці, де прикладена сила, або момент на епюрі виникає стрибок (сходінка) на величину цієї сили або момента.

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad \text{де } \frac{\sigma_T}{\tau_T} = 2, \quad \tau_T = 0,5\sigma_T.$$

Згідно з четвертою теорією міцності:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma], \quad \text{де } \frac{\sigma_T}{\tau_T} = \sqrt{3}.$$

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{\sigma_T}{\tau_T}\right)^2} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{\tau_T}. \quad (22.11)$$

При повторно-змінному складному навантаженні:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \cdot \tau_a^2} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{-1}}{n}. \quad (22.12)$$

Візьмемо в квадрат праву і ліву частину рівняння (22.12)

$$\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \cdot \tau_a^2 = \frac{\sigma_{-1}^2}{n^2}.$$

Поділимо на σ_{-1}^2

$$\frac{\sigma_a^2}{\sigma_{-1}^2} + \frac{\tau_a^2}{\tau_{-1}^2} = \frac{1}{n^2}. \quad (22.13)$$

З урахуванням (22.9) і (22.10), (22.13) перепишеться

$$\frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2} = \frac{1}{n^2}. \quad (22.14)$$

Тоді

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}, \quad (22.15)$$

де n – загальний коефіцієнт запасу міцності, який залежить від матеріалу;

22.5 Розрахунки на міцність при повторно-змінних навантаженнях

Розміри поперечного перерізу деталі, які визначили при статичних розрахунках:

$$d = d_0 \sqrt{\frac{|n|}{n}}, \quad (22.7)$$

де d_0 – діаметр, обчислений при статичних розрахунках;
 $|n|$ – нормативний запас міцності $=1,4 \dots 3,0$;
 n – дійсний запас міцності, що одержали при статичних розрахунках;
 d – уточнений діаметр деталі.

Визначення коефіцієнтів запасу міцності.

При статичному розтяганні:

$$\sigma = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}. \quad (22.8)$$

При повторно-змінному розтяганні:

$$\sigma_a = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{-1}}{n_\sigma}. \quad (22.9)$$

де n_σ – коефіцієнт запасу міцності по нормальним напруженням при повторно-змінному навантаженні.

Аналогічно для дотичних напружень:

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a}. \quad (22.10)$$

При статичному складному навантаженні.

Згідно з третьою теорією міцності:

6. Поздовжня сила вважається додатною, якщо вона спричиняє розтягання, та від'ємною – при стисканні.

Приклад 3.1

Побудувати епюри поздовжніх сил для стержня навантаженого у точках A, B, C зосередженими силами, направленими вздовж осі: $P_1 = 2\text{кН}$, $P_2 = 5\text{кН}$, $P_3 = 3\text{кН}$ (Рис. 3.2).

Розпочинаючи будувати епюру, розділимо стержень на дві силові ділянки AB та BC .

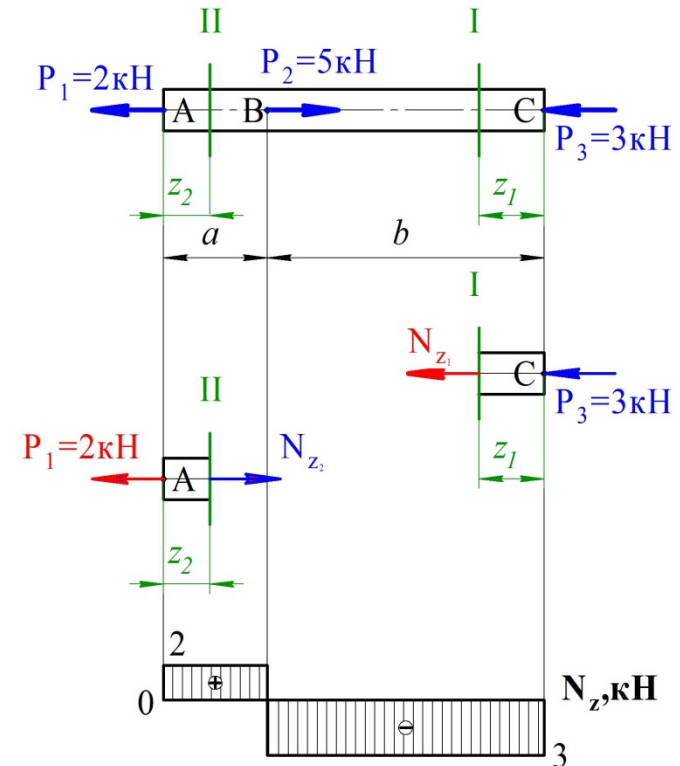
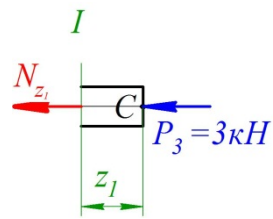


Рисунок 3.2 – Епюра поздовжніх сил

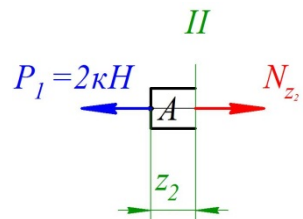
Використовуючи метод перерізів, виділимо силові ділянки стержня і складемо рівняння рівноваги для кожної з них (Рис. 3.3, 3.4).



Ділянка I- I $0 \leq z_1 \leq b$

$$\begin{aligned} \sum P_{iz} &= 0; \\ -N_{z_1} - P_3 &= 0; \\ N_{z_1} &= -P_3 = -3 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Рисунок 3.3 – Ділянка I-I



Ділянка II- II $0 \leq z_2 \leq a$

$$\begin{aligned} \sum P_{iz} &= 0; \\ N_{z_2} - P_1 &= 0; \\ N_{z_2} &= P_1 = 2 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Рисунок 3.4 – Ділянка II- II

Отримані величини не залежать від координати перерізу, тобто вони не змінюються в межах перерізу. Будуємо епюру та перевіряємо її згідно **правилам побудови епюру** на розтягання (стискання).

Правила побудови епюру на розтягання (стискання).

1. Зовнішні навантаження, які розтягують стержень спричиняють додатні внутрішні напруження; ті, які стискають - спричиняють від'ємні напруження. Додатні значення відкладаємо уверх від базової лінії, від'ємні - вниз.

2. В точці прикладання повздовжньої сили на епюрі виникає стрибок («сходінка») на величину цієї сили.

3. На ділянці з розподіленим навантаженням – епюра обмежена прямою нахиленою лінією. Якщо на ділянці не діє розподілене навантаження, то епюра обмежена прямою, паралельною базовій лінії.

тим, що при збільшенні розмірів вилівки або поковки зростає неоднорідність металу, зменшується ступінь уковування, утруднюється якісна термічна обробка і т.д. Це призводить до зниження характеристик механічних властивостей, таких, як σ_{-1} , визначених на стандартних лабораторних зразках, вирізаних з заготовок різних розмірів. Наприклад, збільшення розмірів сталевих заготовок від 20 – 30 мм до 200 мм призводить до зниження меж міцності на 10 – 15%.

2) вплив термічної і механічної обробки при виготовленні деталей різних розмірів – **технологічний фактор**.

Вплив другого, технологічного, фактора пов'язаний з тим, що при механічній обробці в поверхневому шарі зразків утворюється наклеп, що підвищує межу витривалості. Але вплив цього фактора незначний і може бути усунутий спеціальною технологією виготовлення зразків, що складається в послідовному знятті все більш тонких шарів металу на остаточних проходах при виготовленні або проведенням відпалу в вакуумі.

3) збільшення ймовірності появи небезпечних дефектів і перенапружених зерен, що в зв'язку зі статистичною природою процесу втомного руйнування призводить до збільшення ймовірності руйнування – **статистичний фактор**. Третій, статистичний, фактор пов'язаний зі статистичною природою процесу втомного руйнування. Через різну орієнтацію і обриси зерен, наявності різних фаз, включень, дефектів і т.п. зерна металу напружені неоднаково. Зі збільшенням напруженого об'єму кількість дефектів і небезпечно напружених зерен збільшується, що призводить до збільшення ймовірності руйнування, а, отже, і до фактичного зниження міцності, що впливає з статистичної теорії втомної міцності.

виявляється доцільним. Чутливість методу до концентрації у крупнозернистих сталей менша, ніж у дрібнозернистих

$$g_{\text{стали}} = 0,6 \div 0,8; \quad g_{\text{чавуна}} = 0.$$

Вплив масштабного фактора на границю витривалості

Чим більше розмір деталі (зразку), тим менше її міцність. Ця обставина роз'яснюється тим, що в більшому об'ємі накопичується більше недосконалостей (газові пари, дислокації та інше). Тому із збільшенням абсолютних розмірів зразка границя витривалості знижується. Відношення границі витривалості деталі розміром $\frac{d}{\sigma_{-1}}$ до границі витривалості лабораторного зразка подібної конфігурації, що має малі розміри ($d_0=7...10$ мм) σ_{-1d_0} називають коефіцієнтом впливу абсолютних розмірів перерізу ϵ_M .

$$\epsilon_{\text{ср}} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1d_0}}. \quad (22.6)$$

Таблиця 22.1 – Залежності $\epsilon_{\text{ср}}$ від діаметру зразку

d, мм	10	20	30	40	50	60	80	100	150	200
$\epsilon_{\text{ср}}$	1	0,93	0,87	0,82	0,78	0,75	0,7	0,65	0,58	0,55

На опір втоми впливає також довжина зразків. Однак цей вплив другорядне у порівнянні з впливом абсолютних розмірів поперечного перерізу. Крім того, при наявності концентрації напруг відбувається локалізація місця руйнування по довжині деталі, тому вплив довжини на опір втоми в практичних розрахунках не враховують.

Основні причини, які призводять до зниження меж витривалості зі збільшенням розмірів деталі, такі:

1) погіршення якості металу виливки або поковки – металургійний фактор. Металургійний фактор пов'язаний з

3.2 Напруження в перерізі

Як уже зазначалося в перерізі внутрішні зусилля можна привести до головного вектора \bar{R} і головного моменту \bar{M} , проекції яких на головні центральні осі дають величини $N_z; Q_y; Q_x; M_x; M_y; M_z$ – які називаються зусиллями та моментами в перерізі, або внутрішніми силовими факторами.

Розглянемо нескінченно малий елемент площі dF (Рис.3.5).

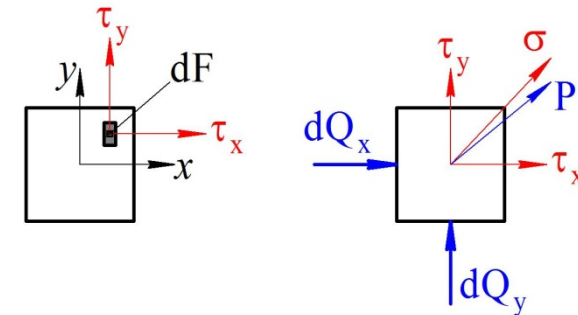


Рисунок 3.5 – Напруження в перерізі

Внаслідок малості елемента dF зусилля на цій площі будуть однакові за модулем і напрямком. Їх рівнодійна dR буде проходити через центр ваги площі dF . Проекціями dR по осям x, y, z будуть елементарні сили dN_z, dQ_x, dQ_y . Тоді відношення

$$\sigma = \frac{dN_z}{dF}, \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dF}, \quad \tau_x = \frac{dQ_x}{dF} \quad (3.2)$$

називають напруженням в точці з координатою x та y , де σ – нормальне напруження; τ – дотичне напруження. Їх виражають в $\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ або кПа ; МПа ($\text{кПа} = 10^3 \text{Па}$;

МПа= 10⁶Па).

Отже, **напруженням називається внутрішня сила, віднесена до одиниці площі в точці перерізу, що розглядається.** Іноді, крім нормальних σ та дотичних τ_x, τ_y розглядають ще й **повне напруження** $p = \frac{dR}{dF}$, яке припадає на одиницю площі

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_x^2}. \quad (3.3)$$

Отже, виходячи з визначення зусиль та моментів (див. п. 3.1) і враховуючи формули (3.2) маємо:

$$N_z = \int_F dN_z = \int_F \sigma dF; \quad M_y = \int_F x dN = \int_F \sigma x dF;$$

$$Q_y = \int_F dQ_y = \int_F \tau_y dF; \quad M_x = \int_F y dN = \int_F \sigma y dF; \quad (3.4)$$

$$Q_x = \int_F dQ_x = \int_F \tau_x dF;$$

$$M_{кр} = \int_F (y dQ_y - x dQ_x) = \int_F (y \tau_x - x \tau_y) = \int_F \rho \tau dF, \quad (3.5)$$

де τ – **повне дотичне напруження**:

ρ – відстань від центра ваги перерізу до лінії дії dQ .

$$\tau = \frac{dQ}{dF} = \frac{\sqrt{dQ_y^2 + dQ_x^2}}{dF} = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_x^2}, \quad (3.6)$$

Формули (3.5, 3.6), встановлюють зв'язок між напруженнями та внутрішніми зусиллями, називають **статичними рівняннями, або інтегральними рівняннями рівноваги.**

діаметром 7-10 мм. Тоді вплив різних факторів на опір втомленості можна оцінити відхиленням границі витривалості σ_{-1} еталонних зразків.

Вплив концентрації напружень.

Найбільш важливим фактором, що знижує границю витривалості, є концентрація напружень, що враховується через коефіцієнт концентрації напружень. Розрізняють **теоретичний коефіцієнт концентрації напружень α_T** і **ефективний, або дійсний коефіцієнт концентрації напружень**, який визначають як відношення границі витривалості гладенького зразка без концентратора σ_{-1} до границі витривалості зразка з концентрацією напружень.

Для нормальних напружень

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}}. \quad (22.2)$$

Для дотичних напружень

$$K_\sigma = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1K}}.$$

$$g_\sigma = \frac{K_\sigma - 1}{\alpha_T - 1}, \quad (22.3)$$

де g_σ – коефіцієнт чутливості матеріалу до концентрації напружень.

Знаючи g_σ можна обчислити K_σ .

$$K_\sigma = 1 + g_\sigma(\sigma_T - 1).$$

Значення g_σ є в додатковій літературі і залежить від міцності сталі σ_B

$$g = \frac{\sigma_B - 400}{1100} (1 - \beta) + \beta, \quad (22.5)$$

де $\beta = f(\alpha_T)$ – тобто чим вища міцність сталі, тим вище її чутливість до концентрації напружень. Тому застосування високоміцних сталей при змінних напруженнях не завжди

відповідає, так званій **базі випробувань** N_6 .

Напруження, при якому зразок витримає, не руйнуючись базове число циклів, називають **границею втомленості**, або **границею витривалості**, і позначається σ_{-1} , σ_0 , τ_r .

За базу випробувань, для чорних металів, беруть 10 млн циклів, а для кольорових (міді, алюмінію і т.п.) $N_6 = 5 \cdot 10^8$ циклів.

Згідно з численними експериментальними даними, для деяких матеріалів можна помітити певні співвідношення між границею витривалості σ_B при різних видах деформації, тобто емпіричні залежності:

$$\begin{aligned} \text{для розтягання – стискання } \sigma_{-1} &= 0,28\sigma_B; \\ \text{для згинання } \sigma_{-1} &= 0,40\sigma_B; \\ \text{для кручення } \sigma_{-1} &= 0,22\sigma_B. \end{aligned} \quad (22.1)$$

Якщо матеріал працює при циклах відмінних від стандартних, то границю витривалості визначають по діаграмам граничних напружень.

Найбільш повною є **діаграма Смита-Хейя**. Однак для їх побудови потрібно багато початкових даних.

22.4 Вплив конструктивно-технологічних факторів

На значення границі витривалості зразків або деталей, виготовлених з того чи іншого матеріалу, крім характеристики циклу, впливає ціла низка різних факторів. До них належать форма зразка, розміри, стан поверхні, середовище в якому відбувається випробування, температура випробування, режим циклічного силового впливу (тренування, паузи, перевантаження, частота навантаження, тощо), попередня внутрішня напруженість матеріалу, тощо. Для з'ясування впливу того чи іншого фактора як еталон беруть границю витривалості σ_{-1} , здобуту випробуванням на повітрі при симетричному циклі партії гладеньких полірованих зразків

При виведенні формул для досліджування напруженого стану (стержнів) завжди дотримуються такої схеми:

1. Розглядають статичний аспект задачі, тобто записують ті з рівнянь статики, котрі потрібні для вирішення задачі.

2. Розглядають **геометричний аспект задачі**: на базі експериментального вивчення деформації стержня та певних гіпотез (зокрема гіпотези плоских перерізів) встановлюють залежності між переміщенням точок стержня та їх положенням у перерізі відносно вибраної системи координат. Ці залежності називають **геометричними рівняннями**.

3. Розглядають **фізичний аспект задачі**: на підставі експериментальних досліджень фізичних властивостей матеріалу визначають залежності між напруженнями та деформаціями (або переміщеннями). Ці залежності називають **фізичними рівняннями**.

4. Виконують **синтез**, тобто разом розв'язують всі рівняння, здобуті у попередніх пунктах. Шляхом виключення деформацій (або переміщень) визначаємо формули, що виражають напруження через зусилля або моменти в перерізі.

3.3 Принцип Сен-Венана

Визначаючи напруження при різних видах деформування, в опорі матеріалів широко користуються принципом Сен-Венана⁴, який полягає в наступному: якщо тіло навантажується статично еквівалентними системами сил, тобто такими, в яких головний вектор та головний момент однакові, й при цьому **розміри зони прикладених навантажень невеликі порівняно з розмірами тіла, в перерізах, які достатньо віддалені від місць прикладання сил, напруження мало залежать від способу**

⁴ Барре де Сен-Венан (1797 – 1886 рр.), французький вчений в області механіки (теорія пружності, опір матеріалів та ін.). Заклав основи теорії пружності.

навантаження. Пояснимо дію принципу на наступному прикладі.



Рисунок 3.7 – Портрет Барре де Сен-Венана

Якщо взяти стержень і прикласти до нього навантаження за різними схемами (Рис. 3.8), то напруження в поперечному перерізі на відстані b будуть практично однаковими.

Загального теоретичного обґрунтування принципу Сен-Венана не існує, але його справедливість підтверджується численними теоретичними та експериментальними дослідженнями.

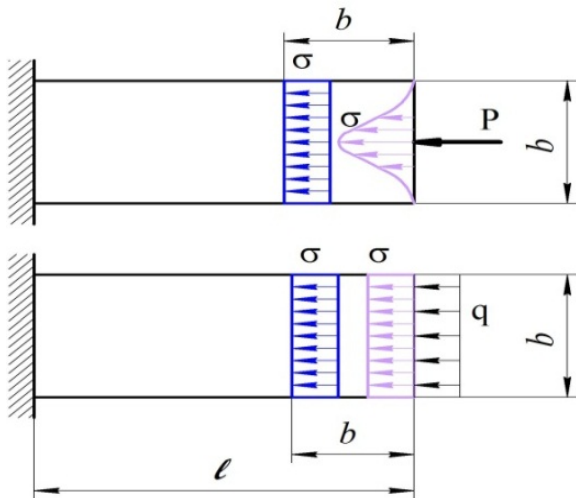


Рисунок 3.7 – Схеми прикладення навантажень до стержня

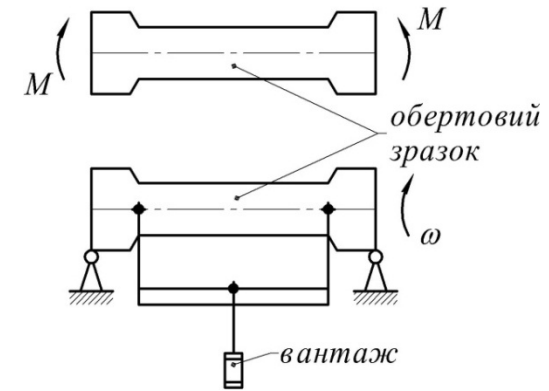


Рисунок 22.5 – Схема випробувальної машини

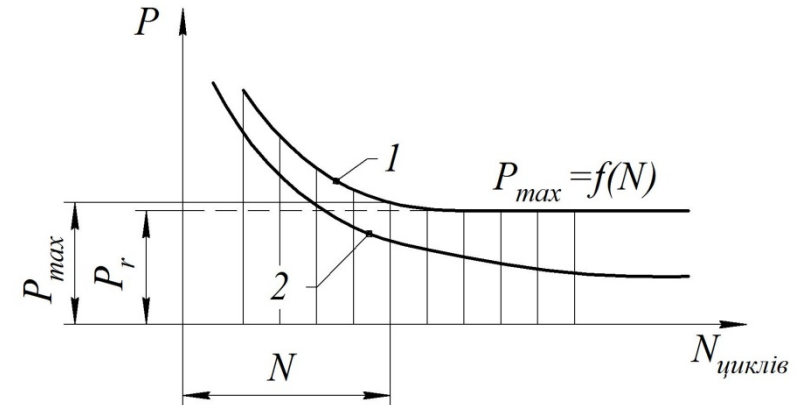


Рисунок 22.6 – Криві втомленості (криві Веллера)

Наприклад для сталі, при високому рівні напружень крива втомленості різко падає (верхня крива, рис. 22.6). Із зниженням напружень, нахил зменшується і крива асиметрично наближається до деякої горизонтальної прямої. Ця пряма відсікає на осі ординат (σ) відрізок. Цей відрізок ілюструє величину границі витривалості. Ордината точки на якій крива починає збігатися з асимптотою (границею витривалості), відповідає напруженню, при якому зразок не зруйнується. Але при цьому зразок пройде наперед задану кількість циклів, що

$$\sigma_m = \sigma_{cp} = \frac{\sigma_{max}}{2} \quad \sigma_{min} = 0 \quad r = \frac{0}{\sigma_{max}} = 0 = const.$$

Максимальне напруження, при якому матеріал здатний чинити опір, не руйнуючись, при будь-якій кількості поворотно-змінних навантажень, називають **границею витривалості (границею втомленості)**. **Коефіцієнт асиметрії циклу показує при якому циклі навантажень одержали це значення.**

Наприклад:

σ_{-1} – границя витривалості за нормальними напруженнями при симетричному циклі навантаження.

τ_0 – границя витривалості за дотичними напруженнями при пульсуючому циклі.

$\sigma_{0,3}$ – границя витривалості за нормальними напруженнями для даного матеріалу що одержали при асиметричному циклі з коефіцієнтом асиметрії рівним 0,3, тобто

$$\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = 0,3 = r.$$

22.3 Методи визначення границі втомленості

Границю втомленості того, чи іншого матеріалу, при різних циклах навантажень визначають на випробувальній машині. Відповідно до поставлених вимог обирають потрібну випробувальну машину (Рис. 22.5).

Обробка здобутих експериментальних даних, як правило, супроводжується побудовою кривої втомленості, яку в літературі часто називають **кривою Веллера** (Рис.22.6). Криву втомленості будують по точках у координатах кількості циклів N та напруження σ_{max} . На кожную точку беруть 6...12 зразків. Найчастіше це гладенькі циліндричні зразки діаметром 7...10 мм.

3.4 Контрольні запитання

1. Поняття внутрішніх силових факторів.
2. Що таке епюри та для чого вони призначаються ?
3. Правила побудови епюр.
4. Напруження нормальні та дотичні (формули).
5. Принцип Сен Венана.
6. Внаслідок чого з'являються внутрішні зусилля?
7. Для виявлення чого застосовують метод перерізів?
8. Третій закон Ньютона.
9. Скільки та які внутрішні силові фактори матимемо на кожному боці перерізу?
10. Напишіть статичні або інтегральні формули зусиль та моментів.
11. В чому полягає статичний, геометричний та фізичний аспекти виведення формул для досліджування напруженого стану (стержнів)?

4. РОЗТЯГАННЯ І СТИСКАННЯ

4.1 Напруження і деформації при розтяганні і стисканні

Просте розтягання або стискання стержня спричинюється силами, що діють уздовж його осі. У цьому разі в поперечних перерізах стержня з шести внутрішніх силових факторів виникає лише один – поздовжня (осьова) сила N_z (Рис. 4.1). Приклад побудови епюри поздовжніх сил показано у п.3.1.

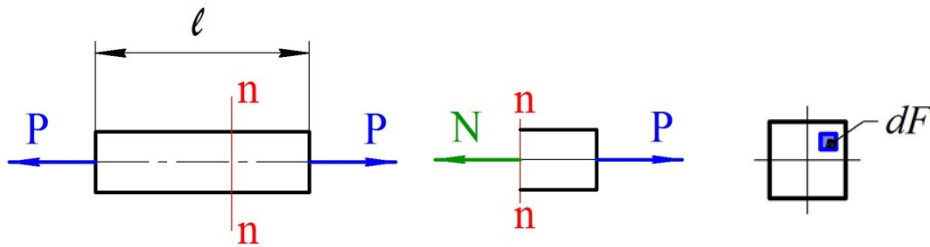


Рисунок 4.1 – Розтягання стержня

Для отримання формули нормальних напружень необхідно дотримуватись наведеної послідовності (п. 3.1).

Розріжемо стержень довільним поперечним перерізом $n - n$.

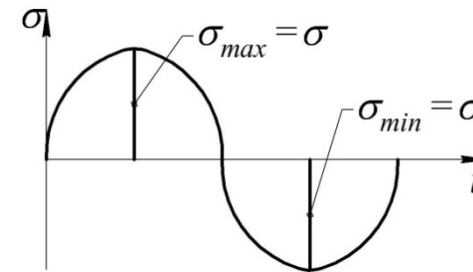
Статичний аспект задачі виражається рівнянням (3.4)

$$N = \int_F \sigma dF. \quad (4.1)$$

Із цього рівняння не можна визначити напруження σ , оскільки невідомий закон його розподілу в точках поперечного перерізу.

З усіх можливих випадків навантаження матеріалу, що зустрічаються в інженерній практиці розглянемо три випадки навантажень, що називаються циклом напружень.

Симетричний цикл (найнебезпечніший цикл).



$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= -\sigma_{min} = \sigma_a \\ r &= -\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = -1 = const \\ \sigma_{cp} &= 0 \end{aligned}$$

Рисунок 22.3 – Симетричний цикл напружень

Асиметричний цикл.

Якщо зміна напружень відбувається несиметрично відносно осі часу t , то такий цикл називають асиметричним.

Пульсуючий цикл.

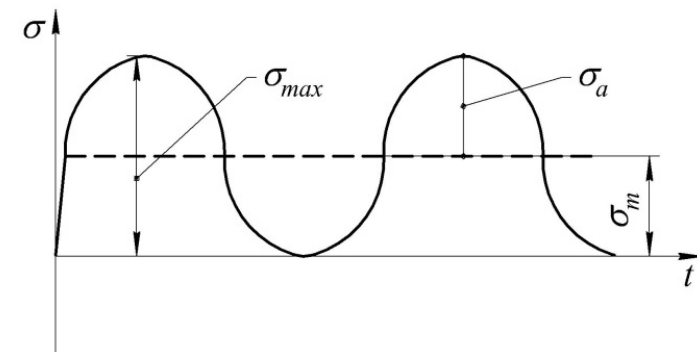
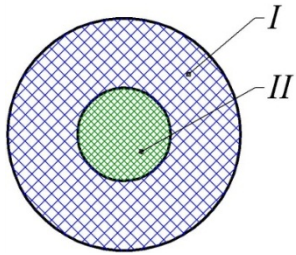


Рисунок 22.4 – Пульсуючий цикл напружень

Максимальне напруження, при якому матеріал здатний чинити опір, не руйнуючись, при будь-якій довільно великій кількості повторень змінних напружень, називається границею витривалості (границею втомленості).



Злам деталі від втомленості має характерний вигляд (Рис. 22.2). На ньому майже завжди є дві зони. Одна з них (I) гладенька, притерта, утворена внаслідок поступового розвитку тріщини;

Рисунок 22.2 – Зони зламу деталі від втомленості

Друга (II) – крупнозерниста, що утворилася при остаточному зломі перерізу деталі, ослабленого під час розвивання тріщини. Зона її у крихких матеріалів має крупнокристалічну будову, а у в'язких – волокнисту.

22.2 Параметри циклу повторно-змінних напружень

В інженерній практиці припускаються, що напруження в матеріалі при дії повторно-змінних навантажень є періодичними функціями часу $\sigma = f(t)$ з періодом T . В цей період напруження характеризуються наступними параметрами,

σ_{max} – найбільші напруження циклу;

σ_{min} – найменші напруження циклу;

$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$ – середнє напруження циклу;

$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$ – амплітудне напруження циклу;

$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ – коефіцієнт асиметрії циклу.

В геометричному аспекті задачі приходимо до гіпотези плоских перерізів: поперечні перерізи стержня, плоскі до деформації, залишаються плоскими і після неї, переміщуючись поступово вздовж осі стержня.

На підставі гіпотези плоских перерізів можна зробити висновок, що всі волокна подовжуються на одну і ту саму величину і їх відносні подовження є однакові.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = const \quad (4.2)$$

– це аналітичний вираз геометричного аспекту задачі.

Фізичний аспект задачі полягає у встановленні залежності деформацій від напружень. При пружних деформаціях ця залежність лінійна, і як відомо називається **законом Гука** (1.1)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ або } \sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (4.3)$$

де E – коефіцієнт пропорційності, що називається **модулем поздовжньої пружності, модулем першого роду або модулем Юнга**.

Модуль пружності – це одна з фізичних констант матеріалу. Виражається в одиницях напруження, (Па, МПа). Враховуючи сталість модуля пружності E для однорідного і ізотропного матеріалу, а також сталість ε , знаходимо що

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = const. \quad (4.4)$$

Підставляючи це у вихідний вираз (4.1), маємо

$$N = \int_F E \cdot \varepsilon dF = E\varepsilon \int_F dF = E\varepsilon F = \sigma F, \quad (4.5)$$

звідки

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (4.6)$$

Знак напруження залежить від знака поздовжньої сили в досліджуваному перерізі. У разі стискання напруження вважають від'ємним.

Визначення деформацій стержня. Із попереднього виразу (4.5) можна знайти відносне подовження

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}. \quad (4.7)$$

У межах призматичної ділянки стержня завдовжки ℓ , виготовленого з однорідного ($E = \text{const}$) матеріалу і у перерізах якого діють однакові сили N , подовження кожної одиниці довжини однакові, отже абсолютне подовження

$$\Delta\ell = \varepsilon\ell = \frac{N\ell}{EF} \quad (4.8)$$

Формула (4.8) – це **закон Гука для абсолютних подовжень**.

Добуток EF у знаменнику називається **жорсткістю поперечно перерізу стержня при розтяганні та стисканні**, має розмірність сили (Н). Чим жорсткість стержня буде більше, тим при одній і тій же довжині він отримає меншу деформацію. Жорсткість характеризує одночасно фізичні властивості матеріалу і геометричні розміри перерізу. Іноді зручно користуватися поняттям відносної жорсткості, яка дорівнює $\frac{EF}{\ell}$.

Якщо на розглядуваній ділянці поздовжня сила та поперечний переріз змінні, то для елемента нескінченно малої довжини dz на підставі формули (4.8) можна записати

закономірності розсіяння даних експериментального визначення границі витривалості та кількості циклів до зруйнування матеріалів і створено методи їх урахування при проектуванні машин і конструкцій, сформульовано основні уявлення про зруйнування при малоцикловому навантаженні, розвинуто нові підходи щодо оцінки довговічності матеріалів і конструкцій, коли за основу прогнозу руйнування брали не напруження, а деформацію, зокрема її пластичну складову.

Прикладами **аварій від втоми матеріалу** можуть бути Версальська аварія потягу, що повертався до Парижа в травні 1842 року (ведучий локомотив зламав вісь) та аварія напівзанурювальної бурової установки яка перекинулася під час роботи у водах Норвегії у березні 1980 р., загинуло 123 людини.

Отже, механізм утворення тріщини при дії повторно-змінних навантажень дуже складний і на даний час не може вважатись повністю вивченим.

Руйнування від втоми відбувається в залежності від особливості прикладання навантаження:

1) багаторазове прикладання навантаження одного знака, наприклад, періодично змінюваного від нуля до максимуму (Рис. 22.1, а);

2) багаторазове повторення навантаження, що змінюється не тільки за модулем, а й за знаком (знакозмінні навантаження). При цьому розрізняють зміну навантаження за симетричним циклом (22.1, б) та за несиметричним (Рис. 22.1, в).

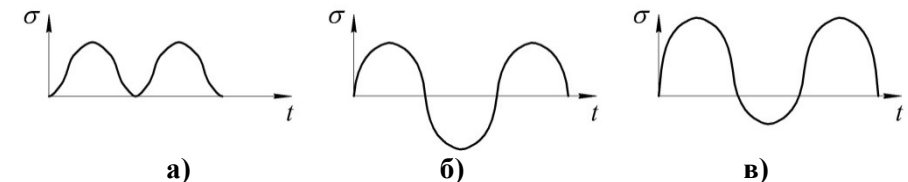


Рисунок 22.1 – Види навантаження

Для руйнування від втоми треба щоб навантаження були не тільки змінні, але й мали певні значення.

22. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ПОВІЛЬНО-ЗМІННИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

22.1 Явище втомленості матеріалів. Означення

При змінних навантаженнях деталі руйнуються від напружень, що не перевищують границю текучості σ_T матеріалу, не давши, при цьому, помітних залишкових деформацій, навіть тоді, коли матеріал високопластичний. При цьому під дією змінних навантажень елементи конструкцій руйнуються при значно менших навантаженнях, ніж під дією статичних навантажень.

Практикою встановлено: якщо елемент конструкції багаторазово піддавати змінному навантаженню, то після деякої кількості змін (циклів) напружень у ньому з'явиться тріщина, яка поступово буде розвиватися до руйнування деталі.

Руйнування матеріалу під дією повторно-змінних напружень носить назву руйнування від втомленості.

Взагалі ж втомленістю називають явище руйнування внаслідок поступового накопичення в них пошкоджень, що призводять до виникнення тріщини при багаторазовому повторенні навантажень.

Здатність металів чинити опір руйнуванню при дії повторно-змінних напружень називається **опором втомленості матеріалу**.

Крім зазначеної гіпотези існує й дещо інший підхід до пояснення фізичної природи явища втомленості. Зокрема, виникнення тріщин від втомленості можна пояснити вичерпанням здатності кристалічних зерен чинити опір зсуву.

Інтенсивного розвитку дослідження втоми матеріалів набули у 1945–1960-х роках у зв'язку з втомними поломками авіаційних конструкцій, насамперед які мали катастрофічні наслідки (катастрофи перших реактивних цивільних літаків «Комета», 1954). Тоді ж було детально досліджено

$$\Delta(dz) = \frac{N(z)dx}{EF(z)}.$$

Повним подовженням ділянки завдовжки ℓ буде сума подовжень всіх нескінченно малих відрізків

$$\Delta\ell = \int_0^{\ell} \frac{N(z)dz}{EF(z)}. \quad (4.9)$$

Розтягання та стискання супроводжуються зміною поперечних розмірів стержня (Рис. 4.2).

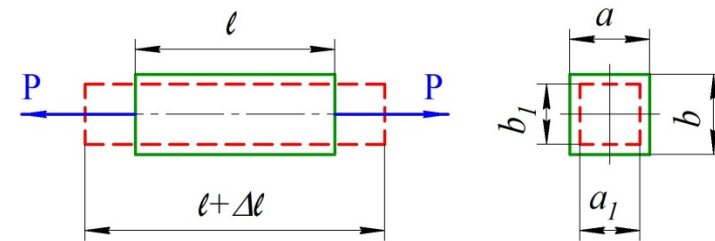


Рисунок 4.2. – Поперечна деформація стержня при розтяганні

За аналогією з подовжньою деформацією різницю відповідних розмірів після і до неї називають **абсолютною поперечною деформацією**.

$$\Delta a = a_1 - a; \quad \Delta b = b_1 - b. \quad (4.10)$$

При розтяганні абсолютні поперечні деформації від'ємні, при стисканні – додатні.

Поділивши абсолютну поперечну деформацію на відповідний початковий розмір, дістанемо **відносну поперечну деформацію**

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}. \quad (4.11)$$

Між поперечною ε і поздовжньою ε' відносними деформаціями при простих розтяганні та стисканні в межах застосування закону Гука існує постійне співвідношення. Абсолютне значення цього відношення має назву **коефіцієнта Пуассона** (Рис. 4.3)



Рисунок 4.3 – Портрет Сімеона Дені Пуассона⁵

або, враховуючи попереднє

$$\varepsilon' = -\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (4.14)$$

Значення μ перебувають у межах 0 – 0,5 і разом з E наведені у довідкових таблицях.

⁵ Сімеон-Дені Пуассон (1781 – 1840) – французький фізик, механік і математик. Розв'язав ряд задач теорії пружності, ввів коефіцієнт Пуассона і узагальнив рівняння теорії пружності на анізотропні тіла.

По сортаменту обираємо двотавр №50, у якого осьовий момент $J_x=39290 \text{ см}^4$.

21.6 Контрольні запитання

1. Що називається числом ступенів вільності системи?
2. Що називається власними (вільними) коливаннями системи?
3. Що називається вимушеними коливаннями системи?
4. Як визначається частота вимушених коливань?
5. Що називається періодом власних та вимушених коливань?
6. Що називається частотою коливань і чому вона дорівнює?
7. Чому дорівнює кругова частота коливань?
8. Що називається амплітудою коливань?
9. Явище резонансу (навести приклади)?
10. Умови резонансу.
11. Параметричні коливання.
12. Що називається жорсткістю пружини і як вона визначається?
13. Запишіть диференціальні рівняння вільних та вимушених коливань.
14. Як визначається амплітуда вимушених коливань?
15. Умови міцності при коливаннях.
16. Динамічні напруження в елементах коливальної системи.

Приклад 21.1

На двотаврову балку довжиною $\ell = 4$ м посередині прольоту встановили електродвигун вагою $Q = 3,2$ тони, який робить $n=970$ обертів за хвилину. Потрібно підібрати номер двотаврової балки із умови, що частота власних коливань балки буде на 30% більша ніж вимушених коливань. Модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Рішення:

Прийmemo, що $\omega_0 = 1,3\omega$

Із формули (21.4)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta\ell_{ct}}} = \frac{1,3\pi \cdot n}{30},$$

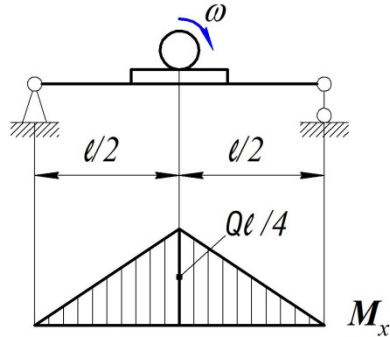


Рисунок 21.6 – Схема до прикладу

а $\Delta\ell_{cm}$ для даної схеми навантаження дорівнює:

$$\Delta\ell_{ct} = \frac{Q\ell^3}{48EJ_x}.$$

Запишемо

$$\frac{g}{\Delta\ell_{ct}} = \frac{1,3^2 \cdot \pi^2 \cdot n^2}{900};$$

$$\frac{48EJ_x g}{Q\ell^3} = \frac{1,3^2 \cdot \pi^2 \cdot n^2}{900};$$

$$J_x = \frac{1,3^2 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot Q\ell^3}{900 \cdot 48Eg} = 38400 \text{ см}^4.$$

4.2 Умова міцності і жорсткості. Допустимі напруження і деформації

Основна задача опору матеріалу – забезпечити надійні розміри деталі, щоб вона не зруйнувалась.

Небезпека початку руйнування характеризується не стільки значенням внутрішніх зусиль та моментів, скільки значенням нормальних та дотичних напружень, а також їх комбінаціями. Тому **найбільші напруження з умови надійної роботи деталі потрібно обмежувати деякими допустимими значеннями. Їх називають допустимими напруженнями.**

$[\sigma]_p$ – при розтяганні;

$[\sigma]_{ct}$ – при стисканні;

$[\tau]$ – при зсуві.

Таким чином знаходять небезпечні перерізи, в яких напруження досягають найбільших за модулем значень і для цих перерізів записують **умову міцності**:

$$\sigma_{max} = \left| \frac{N_{max}}{F} \right| \leq [\sigma]. \quad (4.15)$$

Використовуючи умову міцності можна розв'язувати три типи задач:

1. За відомим навантаженням знайти надійні розміри стержня (проектувальний розрахунок);

2. За відомими розмірами та матеріалом деталі перевірити, чи зможе вона витримати задане навантаження (перевірочний розрахунок);

3. За відомими розмірами деталі, матеріалом та схемою навантажень визначити допустимі навантаження.

Також необхідно забезпечити **умову жорсткості**:

$$\Delta \ell = \int_{\ell} \frac{N(z) dx}{EF(z)} \leq [\Delta \ell], \quad (4.16)$$

де $\Delta \ell$ – зміна довжини деталі;

$[\Delta \ell]$ – допустимі значення цієї зміни (допустима деформація).

Таким чином, для того, щоб знайти небезпечний переріз, потрібно побудувати епюру внутрішніх зусиль, тобто зміну N_z за довжиною стержня та визначити точку з максимальним значенням N_z яка вказує на небезпечний переріз.

4.3 Урахування власної ваги при розтяганні та стисканні

В машинобудуванні, як правило, вплив власної ваги не враховують, тому що деталі мають невеликі розміри, і зовнішнє навантаження значно більше впливає на напруження ніж власна вага. Але при розрахунках канатів шахтних підйомників, штанг бурильних пристроїв, опор мостів, стін будівель, гребель вплив власної ваги слід враховувати.

Припустімо, що прямий стержень великої довжини ℓ із сталим поперечним перерізом закріплено верхнім кінцем і навантажено силою P (Рис. 4.4). Визначимо, як змінюються поздовжні сили та напруження в поперечних перерізах стержня з урахуванням і без урахування власної ваги.

Використовуючи метод перерізів, будуємо епюри N_z , σ , $\Delta \ell$:

$$\sum P_{iz} = 0; \quad N_z - P - Fz\gamma = 0;$$

$$\text{звідки} \quad N_z = P + Fz\gamma, \quad (4.17)$$

де γ – питома вага матеріалу (для сталі $78 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$); F – площа перерізу. При $z = 0$ $N_z = P$; при $z = \ell$ $N_z = P + F\ell\gamma$.

Епюра повздовжніх зусиль зображена на рис. 4.3, б.

в) в разі, якщо динамічні напруження порівняні зі статичними, система перевіряється на опір втоми.

Якщо коефіцієнт β знайдений, легко визначити напруження в пружних елементах коливальної системи:

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot \beta, \quad (21.15)$$

де $\sigma_{ст}$ – напруження, які виникали б в системі при статичному прикладанні максимального значення збуджуючої сили P_{max} .

Позначимо $1 + \frac{P_{max}\beta}{Q} = K_d$ – коефіцієнт динамічності, тоді динамічна деформація

$$\delta_d = \delta_{ст} \cdot K_d, \quad (21.16)$$

де $\delta_{ст}$ – деформація системи при статичному прикладанні сили P_{max} .

По аналогії (умова міцності при коливаннях):

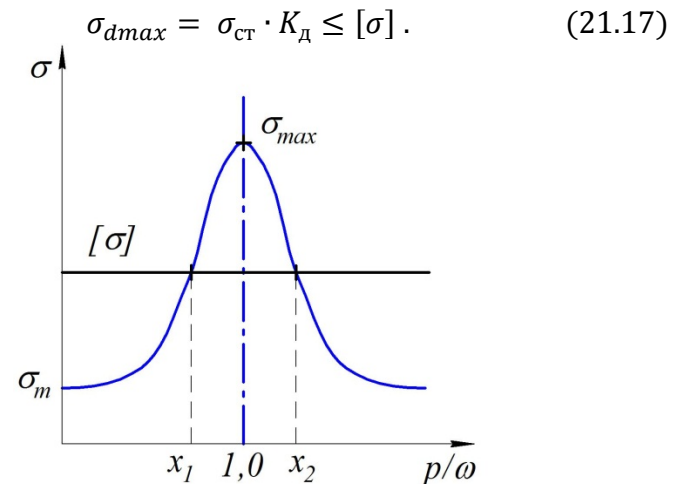


Рисунок 21.5 – Умова міцності при коливаннях

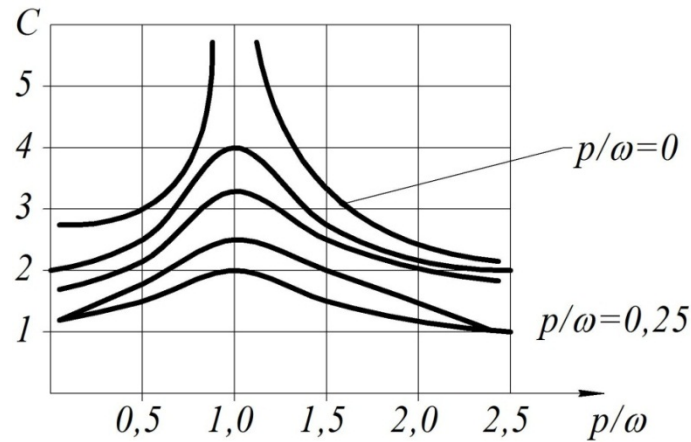


Рисунок 21.4 – Умови резонансу

Із рисунка 21.4 видно, що резонанс настає тоді, коли співпадає частота збуджуючої сили p і власних коливань ω і. при цьому система чинить малий опір коливанням.

Якщо конструкція за розрахунками працює в навіколорезонансній зоні і маємо наступні відношення

$$\frac{p}{\omega} \leq 0,7 \text{ або } \frac{p}{\omega} \geq 1,3,$$

то від резонансу йдуть шляхом зміни жорсткості конструкції. Так, наприклад, жорсткість вала можна змінити шляхом збільшення його діаметра або постановки проміжних опор.

21.5 Визначення напружень і розрахунки на міцність при коливаннях

Розрахунки на міцність при коливаннях проводять в наступній послідовності:

а) перевіряється відсутність можливого резонансу при роботі конструкції;

б) перевіряється міцність в небезпечних перетинах:

Нормальні напруження в перерізі

$$\sigma = \frac{N_z}{F} = \frac{P}{F} + \gamma z. \quad (4.18)$$

Максимального значення нормальне напруження набуває у верхньому перерізі (в закріпленні стержня) при $z = \ell$:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \gamma \ell, \quad (4.19)$$

тут перший доданок – це напруження від сили P , другий – від власної ваги. Епюру нормальних напружень наведено на рис. 4.4, в).

Приклад 4.1

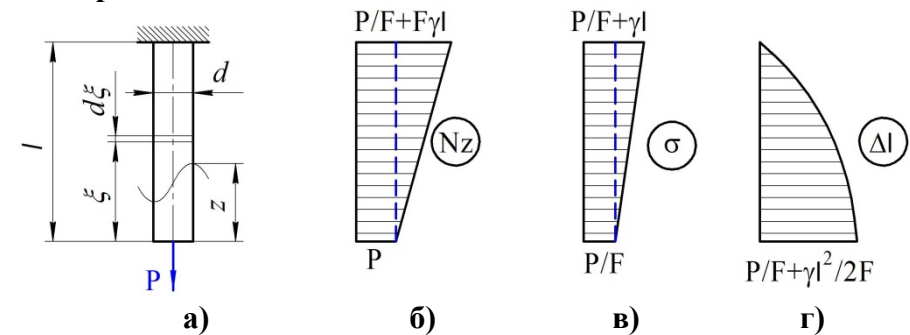


Рисунок 4.4 – Епюри повздовжніх сил, напружень і переміщень по довжині стержня прямого стержня

Визначення переміщень перерізів стержня. Мінімальне подовження стержня буде у закріпленні $\Delta \ell = 0$. У перерізі стержня на найбільшій відстані ξ від вільного кінця (Рис. 4.4, а) маємо $N_z = P + \gamma F \xi$. За формулою (4.9) $\Delta \ell = \int_0^\ell \frac{N_z dz}{EF}$ при $F = const$, знаходимо:

$$\Delta \ell = \int_z^\ell \frac{N_z(\xi) d\xi}{EF} = \int_z^\ell \frac{(P + \gamma F \xi) d\xi}{EF}. \quad (4.20)$$

Подовження $\Delta\ell$ стержня визначаємо з (4.20), взявши $z = 0$:

$$\Delta\ell = \frac{P\ell}{EF} + \frac{\gamma\ell^2}{2EF}. \quad (4.21)$$

Перший доданок – це подовження стержня від сили P , другий – від **власної ваги**. Епюру переміщень перерізів зображено на рис. 4.4, г).

Урахувавши, що повна вага стержня $Q = \gamma F\ell$ (маса циліндра), замість формули (4.21) матимо:

$$\Delta\ell = \frac{P\ell}{EF} + \frac{Q\ell}{2EF}. \quad (4.22)$$

Отже, **абсолютне подовження стержня** від власної ваги таке саме, як подовження від зосередженої сили Q , що дорівнює вазі стержня и прикладена в центрі ваги.

Умова міцності для небезпечного перерізу, в якому σ найбільше

$$\sigma = \frac{P}{F} + \gamma\ell \leq [\sigma]. \quad (4.23)$$

Звідки

$$F = \frac{P}{[\sigma] - \gamma\ell}. \quad (4.24)$$

Якщо зосередженого навантаження немає то **умова міцності**

$$\sigma = \gamma\ell \leq [\sigma]. \quad (4.25)$$

Звідси можна знайти довжину стержня, при якій напруження тільки від своєї власної ваги досягає допустимого і стержень не може нести корисне навантаження.

21.4 Явище резонансу і заходи по його запобіганню

Явище підвищення амплітуди при збігу частот власних коливань і збуджуючої сили носить назву резонансу, а сам збіг частот називається умовою резонансу.

У практиці інженерних розрахунків на динамічну міцність питання резонансу за своєю значимістю займають одно з перших місць. Річ у тому, що у більшості випадків закони зміни збуджуючих сил носять періодичний характер. Так, наприклад, незбалансовані рухливі частини працюючого двигуна створюють сили, що періодично змінюються. Потяг, що йде шляхом з постійною швидкістю, отримує періодичні поштовхи на стиках рейок. Деталі приладів, встановлених на віброуючій основі (на літаку, автомашині), отримують в процесі роботи поштовхи з частотою основи, яка коливається. У усіх цих випадках виникає питання про те, наскільки небезпечні збудження сили для роботи пружної системи і чи не приведуть вони до її надмірного розгойдування і передчасного руйнування.

Таке завдання вирішується, передусім, шляхом зіставлення частот власних коливань і збуджуючої сили. У разі, якщо ці частоти сильно відрізняються один від одного, можна бути упевненим в тому, що явище резонансу не виникає і умови роботи для пружних елементів є сприятливими. При цьому надається можливість визначити амплітуду вимушених коливань і максимальне значення діючого напруження циклу.

Явище резонансу пов'язане з необмеженим зростанням деформації, котра може призвести до руйнування системи.

Тоді загальний розв'язок **рівняння вимушених коливань** (21.9) прийме вигляд

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2 - p^2} \cos p t. \quad (21.12)$$

Перші два доданки в (21.12) характеризують власні коливання, які звичайно швидко затухають, останній доданок характеризує вимушені коливання системи, які відбуваються з частотою збуджувальної сили $P(t)$.

Амплітуда C вимушених коливань залежить від частоти цих коливань p . Відношення амплітуди C до амплітуди статичної деформації (21.10) визначає **коефіцієнт збільшення коливань β** :

$$\beta = \frac{C}{g/\omega^2} = \frac{g}{\omega^2 - p^2} : \frac{g}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} \quad (21.13)$$

або

$$\beta = \frac{1}{1 - T_1^2/T^2}, \quad (21.14)$$

де

$$T_1 = \frac{2\pi}{p}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

З формули (21.13) випливає, що при малому відношенні $\frac{p}{\omega}$ коефіцієнт β близький до одиниці й амплітуди вимушених та статичної деформації відрізняються небагато. Якщо ж частота p вимушених коливань наближається до частоти ω власних коливань системи, амплітуда C прямує до нескінченності, тобто при $p/\omega \rightarrow 1$ амплітуда $C \rightarrow \infty$. При $C = \infty$ має місце **стан резонансу**. Відповідна частота збуджувальної сили називається **критичною**.

$$\ell_{\text{гр}} = \frac{[\sigma]}{\gamma}. \quad (4.26)$$

Правила побудови епюр поздовжніх сил:

Для епюр поздовжніх сил характерні певні закономірності, знання яких дозволяє оцінити правильність виконаних побудов:

- 1) епюри N **завжди прямолінійні**;
- 2) на ділянці, де немає розподіленого навантаження, епюра N – пряма, паралельна осі; а на ділянці під розподіленим навантаженням – нахилена пряма;
- 3) під точкою прикладення зовнішньої зосередженої сили на епюрі обов'язково має бути стрибок (сходінка) на величину цієї сили;
- 4) позитивні значення відкладаються (у вибраному масштабі) над віссю епюри, негативні, – під віссю.

4.4 Контрольні запитання

1. Сформулюйте закон Гука; як він виражається математично?
2. Що характеризує модуль пружності першого роду E ?
3. Яка розмірність модуля пружності?
4. Закон Гука для абсолютних подовжень.
5. Що називається жорсткістю стержня при розтяганні і стисканні?
6. Що таке коефіцієнт Пуассона?
7. Дайте визначення допустимого напруження.
8. Правила побудови епюр поздовжніх сил.
9. Умови міцності та жорсткості при розтяганні (стисканні).
10. Умови міцності та жорсткості при розтяганні (стисканні) з урахуванням власної ваги.
11. Напруження та деформації при розтяганні (стисканні).
12. Напруження та деформації при розтяганні (стисканні) з урахуванням власної ваги.

5. МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ

Основні характеристики металів. При розрахунках на міцність деталей механізмів необхідно знати механічні характеристики матеріалів: міцність, пружність, які характеризуються модулем пружності першого роду E і коефіцієнтом Пуассона μ , твердість (здатність даного тіла протистояти проникненню в нього другого тіла шляхом пружного або пластичного деформування або шляхом руйнування частини поверхні тіла), пластичність (яка характеризує здатність матеріалу давати залишкову деформацію). Тому матеріали випробовують на розтягання, стискання, зсув, кручення, згинання та твердість. Докладні описи всіх видів механічних випробувань, а також машин та приладів, що при цьому застосовуються, наведено в спеціальних курсах і посібниках з лабораторних робіт з опору матеріалів.

5.1 Випробування матеріалів на розтягання. Види зразків

Більшість механічних характеристик прямо або побічно можна визначити за випробуваннями на розтягання, які проводяться для металів у відповідності зі ГОСТ 1497-84.

Випробування на розтягання. На розтягання випробовуються зразки (Рис. 5.1), які мають робочу частину довжиною ℓ , і голівки, які призначені для закріплення у захватах випробувальної машини.

Подовження визначається на початковій розрахунковій довжині ℓ_0 зразка. Частіше всього використовуються циліндричні зразки. Відношення розрахункової довжини до початкового діаметру ℓ_0/d_0 у «довгих» зразків прийнято рівним

10, у «коротких» $\ell_0/d_0 = 5$. Застосовуються також зразки

$$v_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{p}{2\pi}.$$

Позначивши

$$\frac{P(t)g}{Q} = \frac{g}{Q} P_1 \cos pt = g \cos pt,$$

перепишемо рівняння (21.8) у вигляді

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g \cos pt. \quad (21.9)$$

При повільній зміні зовнішньої сили $P(t)$, тобто при p малому порівняно з ω , можна знехтувати інерційним членом \ddot{x} і на підставі (21.9) знайти **статичну деформацію**

$$x_c = \frac{g \cos pt}{\omega^2} \quad (21.10)$$

з амплітудою $\frac{g}{\omega^2}$.

Для визначення динамічної деформації треба розв'язати диференціальне рівняння (21.9). Цей розв'язок складається з розв'язку однорідного рівняння (21.1) і розв'язку рівняння (21.9) в формі правої частини:

$$x = x_{од} + x_{част} = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C \cos pt.$$

Підставляючи частинний розв'язок в (21.1), знайдемо

$$-p^2 C \cos pt + \omega^2 C \cos pt = g \cos pt.$$

Звідси **амплітуда вимушених коливань**

$$C = \frac{g}{\omega^2 - p^2}. \quad (21.11)$$

$$x = a \sin(\omega t + \alpha),$$

де

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \text{ - амплітуда коливань;}$$

$$\omega t + \alpha \text{ - фаза коливань; } \alpha \text{ - зсув фази } \left(\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \omega}{v_0} \right).$$

Знаючи кругову частоту коливань, можна знайти період коливань T (час одного повного коливання)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta \ell_{\text{ст}}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (21.6)$$

21.3 Вимушені коливання систем з одним ступенем вільності

Вимушеними називають коливання пружної системи, які відбуваються при дії на систему (упродовж усього періоду коливань) заданих зовнішніх збуджувальних сил.

Рівняння цих коливань дістанемо з формули (21.1), додавши до його правої частини збуджувальну силу $P(t)$:

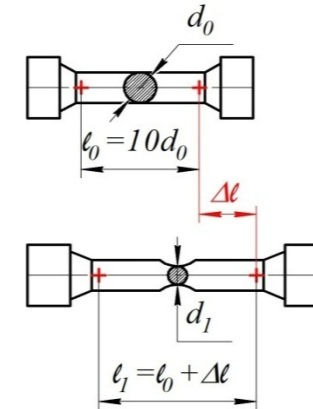
$$\frac{Q}{g} \ddot{x} + cx = P(t). \quad (21.7)$$

Поділивши всі члени (21.7) на $\frac{Q}{g}$, знаходимо

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{P(t)}{Q}. \quad (21.8)$$

Розглянемо окремий випадок, коли $P(t) = P_1 \cos pt$, тобто коли період сили $T_1 = \frac{2\pi}{p}$, частота вимушених коливань

прямокутного перерізу. Розрахункова довжина їх ℓ_0 пов'язана з початковою площиною поперечного перерізу F_0 такими ж залежностями, як і у циліндричних зразків: $\ell_0 = 11,3\sqrt{F_0}$ – довгі зразки і $\ell_0 = 5,65\sqrt{F_0}$ – короткі зразки.



а) до випробування; б) після розриву

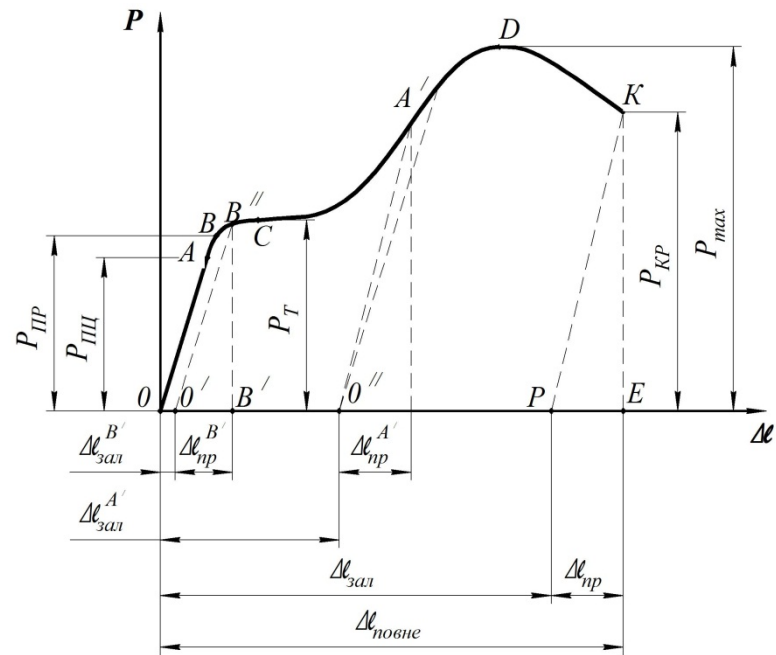
Рисунок 5.1 – Зразок для випробування на розтягання:

Як основні використовують циліндричні зразки з діаметром $d_0 = 10$ мм; при цьому робоча довжина $\ell_0 = 100$ мм.

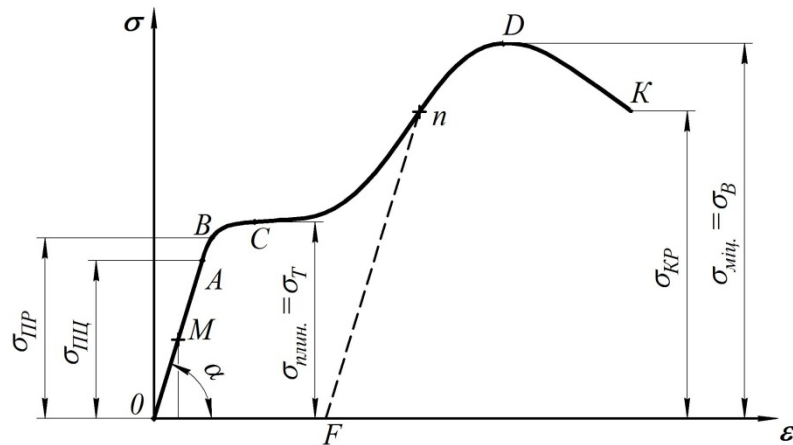
Дослідження зварних з'єднань проводять за ГОСТ 6996-66.

5.2 Діаграми розтягання ($P - \Delta \ell, \sigma - \epsilon$)

Для випробувань на розтягання застосовують розривні машини (ІМАШ-22-71 Р-10, Р-20, Р100), що дають змогу в процесі випробування визначити зусилля та відповідні до них деформації зразків. За цими даними будують **діаграму розтягання**, в якій по осі ординат відкладають зусилля, а по осі абсцис – відповідні до них подовження $\Delta \ell$. Характер діаграми розтягання залежить від властивостей матеріалу. Типовий вигляд такої діаграми для маловуглецевої сталі зображено на рис. 5.2, а).



а)



б)

Рисунок 5.2 – Діаграми розтягання для маловуглецевої сталі:

а) залежність подовження від сили;

б) залежність відносної деформації від напруження.

Остаточне диференціальне рівняння вільних коливань вантажу вагою Q буде мати вигляд:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (21.3)$$

де

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{cg}{Q}, \text{ або}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{EF}{\ell m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}}, \quad (21.4)$$

$\Delta_{\text{ст}} = \frac{Q}{c}$ – статична деформація пружини.

Диференціальне рівняння вільних коливань (21.4) має такий загальний розв'язок, який визначає залежність між вертикальними переміщеннями x вантажу Q та часом t :

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (21.5)$$

а проекція швидкості вантажу

$$v_x = \dot{x} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t, \quad (21.5')$$

де ω – кругова частота власних коливань;

A та B – сталі інтегрування, що залежать від початкових умов.

Якщо задані початкова координата вантажу x_0 та початкова швидкість $v_0 = \dot{x}$ при $t = 0$, то з рівнянь (21.5) і (21.5') визначаються сталі інтегрування:

$$A = x_0; \quad B = \frac{v_0}{\omega}.$$

Поклавши

$$x_0 = a \sin \alpha; \quad \text{та} \quad \frac{v_0}{\omega} = a \cos \alpha,$$

рівняння (21.5) можна переписати також у вигляді

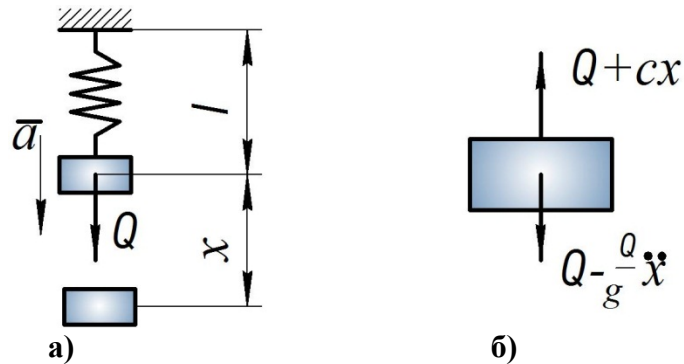


Рисунок 21.3 – Навантаження при вільних коливаннях

$$\sum P_{kx} = 0, \text{ або } Q + cx - \left(Q - \frac{Q}{g} \ddot{x}\right) = 0,$$

звідки

$$\frac{Q}{g} \ddot{x} + cx = 0 \text{ або } m\ddot{x} + cx = 0, \quad (21.1)$$

де

$$\frac{Q}{g} \ddot{x} = m \frac{d^2x}{dt^2} - \text{сила інерції};$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = a - \text{прискорення вантажу};$$

$$m = \frac{Q}{g} - \text{маса вантажу};$$

cx – відновлююча сила;

c – жорсткість пружини (чисельно дорівнює силі, яка спричиняє розтягання пружини на одиницю довжини);

$$c = \frac{EF}{l};$$

t – час.

Вигляд діаграми розтягання в координатах $P - \Delta l$ залежить не тільки від властивостей матеріалу, а й від розмірів випробуваного зразка.

Щоб добути діаграму, яка характеризує тільки механічні властивості матеріалу, початкову діаграму розтягання перебудовують у координатах $\sigma - \varepsilon$. Ординати такої діаграми отримують поділивши силу, що розтягує зразок, на початкову площу поперечного перерізу зразка ($\sigma = P/F_0$), а абсциси – діленням абсолютних подовжень зразка на його початкову довжину ($\varepsilon = \Delta l/l_0$). Діаграму в координатах $\sigma - \varepsilon$, яка відповідає початковій діаграмі (Рис. 5.2, а), зображено на рис. 5.2, б). точкам O, A, B, C, D, F початкової діаграми відповідають точки O, a, b, c, d, e, f діаграми $\sigma - \varepsilon$.

Діаграми мають ряд характерних точок. На ділянці OA між подовженням зразка та силою має місце прямопропорційна залежність. На цій стадії розтягання відбувається у відповідності до закону Гука.

Позначимо силу, за якою закон пропорційності припиняє свою дію, через $P_{\text{пц}}$. Цьому значенню сили на діаграмі відповідає точка A . Напруження, спричинене силою $P_{\text{пц}}$, називається границею пропорційності, його обчислюють за формулою:

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{P_{\text{пц}}}{F_0}. \quad (5.1)$$

Отже границею пропорційності називається напруження, після якого порушується закон Гука.

Деформація, що досягається, називається пружною. Вона повністю зникає після розвантаження.

Доки сила P не досягне певного значення, доти спричинені нею деформації будуть зникати при розвантаженні. Процес розвантажування на діаграмі при цьому зображується тією самою лінією, що й навантажування.

Позначимо через $P_{пр}$ найбільше значення сили, при якому зразок при розвантаженні ще не дає залишкової деформації. На діаграмі цьому значенні відповідає точка B , а пружній стадії розтягання зразка – ділянка OB .

Найбільше напруження, до якого залишкова деформація при розвантаженні не виявляється, називається **границею пружності**. Це напруження спричиняється силою $P_{пр}$ і визначається за формулою

$$\sigma_{пр} = P_{пр} / F_0. \quad (5.2)$$

Точки A і B , а отже, і значення напружень $\sigma_{пц}$ та $\sigma_{пр}$ близько одна до одної, і, як правило, різницею між ними нехтують.

Після точки A при подальшому розтяганні зразка крива розтягання стає криволінійною і плавно піднімається до точки C , де спостерігається перехід до горизонтальної ділянки CD яка називається **площадкою текучості**.

На цій стадії розтягання подовження зразка зростає при сталому значенні сили, яку позначають P_T . Такий процес називають текучістю матеріалу. Вона супроводжується залишковим (пластичним) подовженням, що не зникає після розвантаження.

Отже, **границею текучості σ_T зветься найменше напруження, при якому деформація зразка відбувається при постійному розтягувальному зусиллю**. Границя текучості відзначається за формулою

$$\sigma_T = P_T / F_0. \quad (5.3)$$

Після стадії текучості матеріал знову набирає здатності збільшувати опір подальшому деформуванню і сприймає зусилля, що зростає до деякої гранці. Цьому явищу відповідає ділянка DE (Рис. 5.2, а) кривої розтягання, що зветься **ділянкою**

в резонанс входили навіть кораблі. А на зорі розвитку авіації деякі авіаційні двигуни спричинювали настільки сильні резонансні коливання елементів літака, що він повністю руйнувався в повітрі.

Причиною резонансу елементів літальних апаратів та їх руйнування може стати й флатер – поєднання самозбудних незгасаючих згинальних і крутильних автоколивань елементів конструкції (головним чином крила літака або несучого гвинта вертольота). Одним зі шляхів боротьби з цим явищем є використання так званих протифлатерних вантажів.

Цікаво, що кріплення двигунів на пілонах крил літаків – це не примха конструкторів і дизайнерів, а нагальна потреба, оскільки двигуни демпфують коливання крила в польоті повітряного судна, будучи при цьому своєрідним протифлатерним вантажем.

Параметричними називають коливання пружної системи, в процесі яких періодично міняються її фізичні параметри (маса, жорсткість, довжина і т.д.).

За виглядом пружних коливань розрізняють **подовжні, поперечні та крутильні** коливання систем, а також їх поєднання.

21.2 Вільні (гармонійні) коливання пружної системи з одним ступенем вільності

Розглянемо вільні коливання пружної системи, що складається з маси і пружини (Рис. 21.3). Користуючись принципом Д'Аламбера, прирівняємо нулю суму проекцій усіх сил, що діють на вантаж (Рис.21.3, б):

На відміну від власних коливань вимушені коливання не затухають, а за умови збігу їх частот амплітуда коливань може значно збільшитися і призвести до руйнування конструкції. Це явище носить назву **резонансу**.

...Відомо, що військовим підрозділам під час проходження мостів приписується "збивати ногу" і йти не стройовим, а вільним кроком. Так, 12 квітня 1831 року зруйнувався Бротонський підвісний міст через ріку Ірвелл в Англії, коли по ньому йшов військовий загін. Частота кроків воїнів, що крокували в ногу, збіглася з частотою власних коливань мосту, через що їх амплітуда стрімко зросла, ланцюги обірвалися, і міст завалився в ріку. Саме цей випадок, у результаті якого два десятки людей було травмовано, сприяв прийняттю в британській армії правила "іти не в ногу" під час проходження військами мостів. З тієї ж причини в 1850 році неподалік від французького міста Анже було зруйновано підвісний ланцюговий міст над рікою Мін довжиною понад сто метрів, що призвело до численних жертв.

Причиною руйнування мостів через резонанс можуть стати не лише пішоходи, але й залізничні потяги. Для виключення резонансу мосту потяг має рухатися або повільно, або на максимальній швидкості (згадайте, як сповільнюють хід потяги метрополітену під час їх руху через міст Метро в Києві). Це зазвичай робиться для виключення збігу частоти ударів коліс по стиках рейок із власною частотою коливань мосту (з цієї ж причини ділянку рейок на мосту часто виконують суцільною, тобто без стиків).

Катастрофічні наслідки для мостів можуть настати також і від впливом вітру. Так, 7 листопада 1940 року через ігнорування дії вітрового навантаження на міст під час його проектування і внаслідок виникнення резонансу зруйнувався Такомський підвісний міст загальною довжиною 1800 м і довжиною центрального прольоту 850 м (США).

З резонансом можна стикнутися не тільки на суші, але й на морі та в повітрі. Так, за деяких частот обертання гребного вала

зміцнення. Точка E відповідає найбільшому зусиллю P_{max} , яке може сприймати зразок.

Напруження, що відповідає максимальній силі P_{max} , називається тимчасовим опором, або границею міцності, і позначається σ_B . Його визначають за формулою

$$\sigma_B = P_{max}/F_0. \quad (5.4)$$

До цього моменту подовження розподілялися рівномірно по всій довжині l_0 зразка. Площі поперечних перерізів зразка змінювалися неістотно і рівномірно по всій довжині. Тому для обчислення $\sigma_{пц}$, $\sigma_{пр}$, σ_T і σ_B у формулах вводилися початкові значення площі F_0 .

Після досягнення зусилля P_{max} при розтяганні зразка деформація відбувається на невеликій довжині. Це послідовно призводить до утворення місцевого звуження у вигляді шийки (Рис. 5.2, б), до зменшення сили P , до зростаючої швидкості деформації і до розриву зразка.

Позначивши через $P_{кр}$ силу в момент розриву, будемо мати:

$$\sigma_{кр} = P_{кр}/F. \quad (5.5)$$

Визначене таким чином напруження при розриві надто умовне і не може бути використано, як характеристика механічних властивостей сталі. Умовність полягає в тому, що його здобуто діленням $P_{кр}$ на площу поперечного перерізу зразка, яка значно менша, ніж початкова внаслідок утворення шийки.

Основними характеристиками пружності та міцності матеріалів, що використовується у розрахунках є: $\sigma_{пр}$ – границя

пружності; σ_T – границя текучості; σ_B – границя міцності (тимчасовий опір).

5.3 Поняття про запас міцності

Визначення величини **допустимого напруження** являється однією з важливих задач розрахунків на міцність. Як витікає із визначення $[\sigma] = \sigma_B/n$ (n – **коефіцієнт запасу міцності**), допустиме напруження отримують як частину величини напруження $\sigma_{неб}$, яке відповідає небезпечному стану матеріалу, σ_B визначається під час механічних випробувань. Для того, щоб уникнути залишкових деформацій, за величину σ_B для пластичних матеріалів приймають границю текучості σ_T . у цьому випадку коефіцієнт запасу називають **коефіцієнтом запасу по границі текучості** n_T . Тому формула набуває вигляд

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}.$$

Вибір коефіцієнта запасу міцності залежить від стану пластичності матеріалу, характеру прикладання навантаження (статичне, динамічне, змінне) і загальних факторів:

- неоднорідність матеріалу (різні механічні властивості у малих зразках та в деталях, скриті дефекти виготовлення і т.п.);
- неточність задавання зовнішніх навантажень (направлення зусиль, невраховано дрібні силові фактори);
- наближеність розрахункових схем та певна наближеність розрахункових формул (абсолютно гладкі поверхні та шарніри без тертя, зосереджена сила ваги, імперичні формули);
- область експлуатації конструкцій (мости, транспорт, будівництво, літальні апарати,...);

Зазначені фактори необхідно враховувати при виборі коефіцієнта запасу міцності n , який іноді називають основним.

$$\Omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{2\pi n}{60} \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \text{ або } \text{с}^{-1} \right),$$

де n – кількість обертів двигуна.

Проміжок часу між двома подальшими максимальними відхиленнями пружної системи від положення рівноваги, називають періодом (власних або вимушених) коливань (Рис.21.2). Період коливань позначається через T (с).

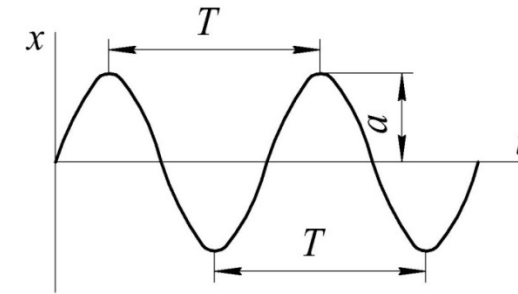


Рисунок 21.2 – Параметри коливань

Величина, зворотна періоду, називається частотою коливань і дорівнює кількості коливань за одиницю часу:

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{1}{\text{с}} \right).$$

У техніці замість частоти ν використовується в більшості випадків **кругова частота** ω , що є числом коливань за 2π секунди:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}, \quad \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

Найбільше відхилення системи від положення рівноваги називається амплітудою a (див. рис. 21.2).

Ці системи мають одну, дві (див. рис. 21.1, б) або три степені вільності. Переміщення вантажу m (див. рис. 21.1, а) може бути описане однією координатою x , отже, система має одну степінь вільності – горизонтальне переміщення.

Обертання вала (див. рис. 21.1, б) і поворот одного шківця щодо іншого можуть бути описані двома координатами – кутами φ_1 і φ_2 , тобто система має два степеня вільності.

Положення вантажу m (див. рис. 21.1, в), що коливається, задається трьома координатами: переміщеннями центра маси x і y і кутом повороту φ маси щодо її центра ваги. У разі малого моменту інерції масу m можна розглядати як точкову, тоді система має всього два степеня вільності.

Число степенів вільності визначається вибором розрахункової схеми, тобто залежить від міри наближення, з яким ми вважаємо необхідними досліджувати реальний об'єкт.

При дослідженні пружних **коливальних систем** розрізняють **власні та вимушені коливання, параметричні та автоколивання.**

Власними (вільними) називаються коливання, що виникають в ізольованій системі унаслідок зовнішнього збудження («поштовху»), що викликає в точок системи початкові відхилення від положення рівноваги або початкові швидкості, і що продовжуються потім завдяки наявності внутрішніх пружних сил.

Під вимушеними коливаннями розуміється рух пружної системи, що відбувається під впливом змінних в часі зовнішніх сил.

Прикладом вимушених коливань є рух, який здійснює пружна система, якщо на ній встановлений не повністю збалансований двигун.

Сила, що діє на пружну систему з боку двигуна, є **збуджуючою силою.** При цьому **частота вимушених коливань** визначається за формулою:

Для крихких матеріалів (чавун, високовуглецеві загартовані сталі і др.), у яких на діаграмі розтягання відсутня зона пластичних деформацій (площадка), за $\sigma_{неб}$ приймають границю міцності σ_B , а під n розуміють коефіцієнт запасу за границею міцності, тому $[\sigma] = \sigma_B/n_B$.

5.4 Визначення твердості матеріалів

Іноді для оцінки тимчасового опору можна скористатися непрямим методом, зокрема вимірюванням твердості.

Твердістю матеріала називається здатність чинити опір механічному проникненню в його поверхню іншого більш твердого тіла, яке зветься індентор. Індентор, після його вдавнення, залишає відбиток певного обрису. На підставі розмірів здобутого відбитка роблять висновок про твердість випробуваного матеріалу.

Метод Брінелля. Сталева загартована кулька діаметром D (Рис. 5.3) вдавлюється в зразок (виріб) під дією навантаження P , прикладеного протягом певного часу (10 – 0 с). Мінімальна товщина зразка для випробувань повинна бути не менша за десятикратну глибину відбитку. Після навантаження вимірюється діаметр відбитка, що залишився на зразку. Число твердості за Брінеллем виражається відношенням навантаження до площі поверхні сферичного відбитка F (мм²) (ДСТУ ISO 6506-1:2007).

$$HB = \frac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}, \quad (4.32)$$

де P – прикладене навантаження (кПа);
 D – діаметр кульки, мм;
 d – діаметр відбитку, мм.

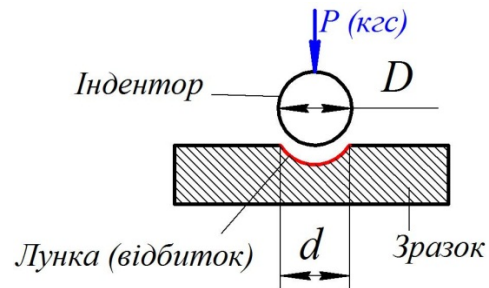


Рисунок 5.3 – Метод Брінелля.

Таблиця 5.1 – Значення твердості різних матеріалів

Матеріал	Твердість
М'яке дерево, сосна	1,6 HBS 10/100
Тверде дерево	від 2,6 до 7,0 HBS 10/100
Алюміній	15 НВ
Мідь	35 НВ
Дуралюміній	70 НВ
М'яка сталь	120 НВ
Нержавіюча сталь	250 НВ
Скло	500 НВ
Інструментальна сталь	650-700 НВ

Згідно ДСТУ, діаметри кульки – 10, 5, 2,5 і 1 мм, величина навантаження – 187,5 кгс, 250 кгс, 500 кгс, 1000 кгс і 3000 кгс.

Метод Роквелла. За методом Роквелла твердість визначають вдавлюванням твердого сплаву або накінецьника з алмазним конусом із кутом при вершині 120° або зі сталеву кулькою діаметром 1,85 мм. Кулькою користуються при випробуванні м'яких сталей (до 220 НВ) при навантаженні 981 Н (100 кгс). (ДСТУ ISO 6508-1:2013). Твердість потрібно вимірювати не менш ніж у трьох точках. Для обчислення беруть середнє значення результатів другого і третього вимірювань.

21. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ КОЛИВАННЯХ

21.1 Коливання: основні поняття

Теорія коливань є обширним розділом сучасної механіки, який охоплює вельми широкий діапазон питань з механіки, електростатики, радіотехніки, оптики та ін. Особливе значення має теорія коливань для прикладних завдань, що зустрічаються в інженерній практиці, зокрема, в питаннях міцності машин і споруд. Відомі випадки, коли будівельна споруда, розрахована з великим запасом міцності на статичне навантаження, руйнувалася під дією порівняно невеликих періодично діючих сил, тоді як така ж легша і на перший погляд менш міцна конструкція сприймає ці зусилля абсолютно спокійно. Тому питання коливань і, взагалі, поведінки пружних систем під дією змінних навантажень вимагають від конструктора особливої уваги.

При вивченні коливань пружні системи заведено розрізняти, перш за все, за **числом ступенів вільності**.

Під числом ступенів вільності розуміється число незалежних координат, що визначають положення системи.

Розглянемо декілька систем (Рис. 21.1), які можуть здійснювати коливальні рухи.

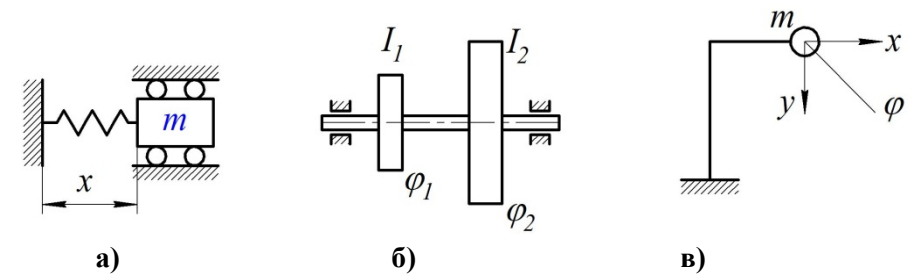


Рисунок 21.1 – Ступені вільності конструкцій

Напруження при ударі

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot K_d = \frac{Q}{F} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H \cdot EF}{Q\ell}} \right).$$

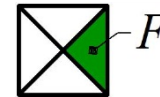
20.4 Контрольні запитання

1. У чому полягає явище удару?
2. Види ударного навантаження
3. Які припущення враховуються при розрахунку конструкцій при ударі?
4. Поняття коефіцієнту динамічності?
5. Яким чином обирають коефіцієнт запасу міцності при ударі?
6. Які відрізняють види ударної в'язкості в залежності від виду надрізу?
7. Що називається ударною в'язкістю матеріала?
8. Для яких металів при ударних випробовуваннях визначається критична температура крихкості?

Стандартами нормовано 11 шкал визначення твердості за методом Роквелла (А; В; С; D; E; F; G; H; K; N; T); ці шкали відрізняються типом індентора, випробувальним навантаженням та константами у формулі для обчислення твердості за результатами вимірювання. З них найчастіше використовують дві шкали В і С. Шкала В використовує в якості індентора сталеву кульку. Шкала С використовується для більш твердих матеріалів (індентор – алмазний конус). Для позначення твердості, визначеної за методом Роквелла, використовують символ HR, до якого додають букву, що вказує на шкалу, за якою проводили випробування (HRB, HRC тощо).

За випробування алмазним конусом гранична глибина проникнення становить 0,2 мм, під час випробування кулькою — 0,26 мм.

Метод Віккерса. Метод полягає у визначенні твердості за величиною відбитка, залишеного алмазним індентором у формі чотирикутної піраміди, яку вдавлюють у поверхню під дією навантаження, прикладеного протягом певного часу. Твердість обчислюється як відношення зусилля P , прикладеного до наконечника, до площі похилої поверхні відбитка F ; одиницею твердості служить МПа.



$$HV = \frac{P}{F}.$$

Твердість, визначена за цим методом, позначається HV (ДСТУ ISO 6507-1:2007).

5.5 Поняття про концентрацію напруження

Якщо по довжині деталі або зразка поперечний переріз змінюється плавно, то напруження по довжині при розтягуванні будуть функцією площі поперечного перерізу.

Номінальними називають напруження, визначені на підставі припущення про те, що концентрації напружень немає.

Концентрація напружень – це збільшення напружень у твердому тілі у місцях зміни форми або порушень суцільності матеріалу.

Розглянемо різкі зміни площі поперечного перерізу, які призводять до нерівномірного розподілу напружень та спричиняють концентрацію напружень (Рис. 5.4).

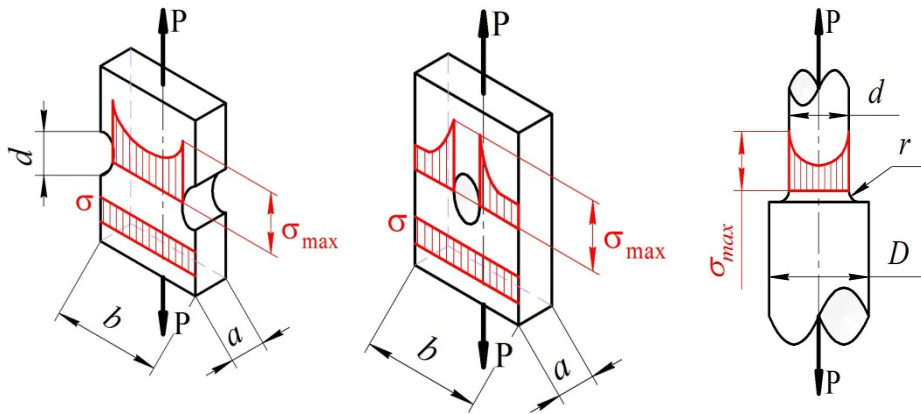
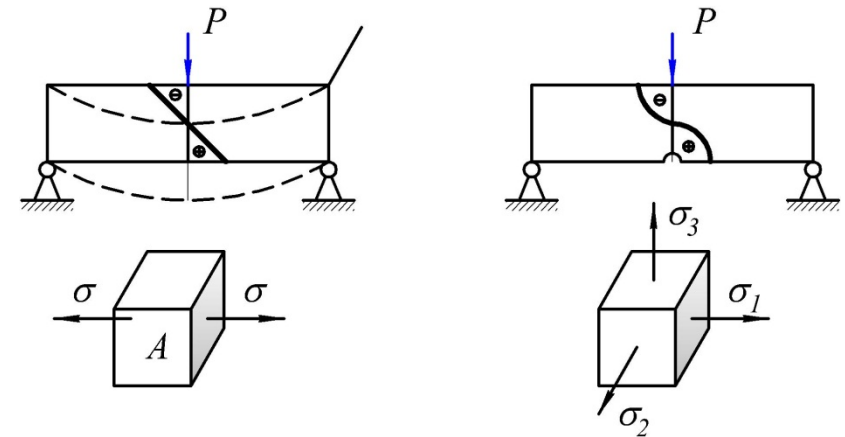


Рисунок 5.4 – Розподіл нормальних напружень в поперечному перерізі в залежності від форми концентратора

Кількісною характеристикою концентрації напружень є теоретичний коефіцієнт концентрації $\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$.

Коефіцієнт α залежить як від форми концентратора так і від властивостей матеріалу. Тому розрізняють теоретичний коефіцієнт концентрації α , який визначають методами теорії пружності і який залежить від виду концентратора та дійсний (ефективний) коефіцієнт концентрації k , що враховує сумісний вплив геометрії і властивостей матеріалу. На



Лінійний напружений стан

Об'ємний напружений стан

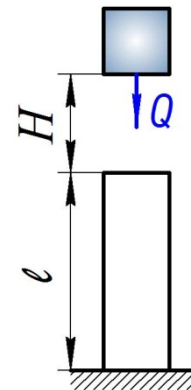
Рисунок 20.6 – Лінійний і об'ємний напружені стани

Приклад 20.1. Вантаж Q падає з висоти H на стійку завдовжки ℓ (Рис. 20.7). Визначити напруження і деформації в момент удару.

Визначимо статичні деформації і напруження

$$\Delta_{ст} = \Delta \ell_{ст} = \frac{Q \cdot \ell}{EF};$$

$$\sigma_{ст} = \frac{Q}{F}.$$



Коефіцієнт динамічності і деформація при ударі:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H \cdot EF}{Q \ell}};$$

Рисунок 20.7 – До прикладу 20.1

$$\Delta_d = \Delta_{ст} \cdot K_d = \frac{Q \ell}{EF} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H \cdot EF}{Q \ell}} \right).$$

$$KC = \frac{A}{F} = \frac{G(h_1 - h_2)}{F}, \quad \text{Дж} \cdot \text{м}^2.$$

Низька ударна в'язкість є підставою для бракування матеріалу, або не застосування його в особливо важливих елементах і спорудах. Ударна в'язкість однієї і тієї сталі залежить від її структури, причому цю залежність при статичних випробуваннях виявити не можливо. При низьких температурах більшість чорних металів стають крихкими, їхня ударна в'язкість також знижується. Для таких металів встановлюють, так звану **критичну температуру, при якій раптово зменшується ударна в'язкість**.

На відміну від інших видів випробування механічних властивостей матеріалу, при випробуванні ударної в'язкості закони подібності не виконуються. Тому випробування повинно проводитися тільки на стандартних зразках, (Рис. 20.5).

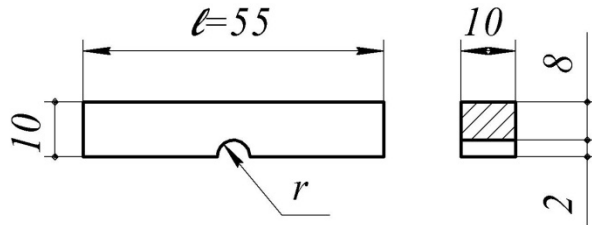


Рисунок 20.5 – Стандартний зразок для випробувань на удар із U-концентратором

В залежності від виду надрізу розрізняють ударну в'язкість матеріалу:

KCU – з U-образним надрізом радіусом 1 мм;

KCV – з V-образним надрізом;

KCT – з розвинутою тріщиною.

Надрізи роблять для того, щоб на початку розвитку тріщини в матеріалі був об'ємний напружений стан.

ефективний коефіцієнт концентрації впливає характер навантаження.

Так при статичному навантаженні:

$$k = \frac{P_I}{P_{II}},$$

де P_I – руйнівне навантаження зразка без концентратора напружень;

P_{II} – руйнівне навантаження зразка з концентратором напружень.

Також до факторів, що обумовлюють концентрацію напружень (концентраторів напружень), відносяться отвори, порожнини, тріщини, проточки, надрізи, кути, виступи, гострі краї, нарізь, а також нерівності та дефекти поверхні (риски, подряпини, мітки, зварні шви тощо). Напруження поблизу концентраторів напружень визначаються методами теорії пружності, чисельними методами (метод кінцевих елементів) або експериментально методами тензометрії (методи: фотопружності, голографічної інтерферометрії, з використанням тензометрів).

5.6 Контрольні запитання

1. Розміри довгих та коротких зразків.
2. Діаграми розтягання, основні принципи побудови.
3. Як визначити напруження в межах пропорційності, пружності, плинності, міцності?
4. Як може бути визначена величина модуля пружності E з діаграми розтягування?
5. Чому на діаграмі розтягування напруження, при якому відбувається руйнування зразка, лежить нижче межі міцності?
6. Яке напруження береться за основу при виборі допустимого напруження для крихкого матеріалу?
7. Яке напруження береться за основу при виборі допустимого напруження для пластичного матеріалу?

8. В яких випадках нехтують концентрацією напружень при виборі допустимого напруження?
9. Коефіцієнт запасу міцності.
10. Коефіцієнт запасу міцності при контактних напруженнях.
11. Основні методи визначення твердості матеріалів.
12. Поняття концентрації напружень, види концентраторів.
13. Теоретичний та дійсний коефіцієнти концентрації.
14. Як визначити число твердості за Брінеллем, Роквеллом та Віккерсом?

Умова міцності при ударі має вигляд:

$$\sigma_{dmax} = \sigma_{ст} \cdot K_d \leq [\sigma_d] = \frac{\sigma_T}{n_T}. \quad (20.8)$$

Коефіцієнт запасу міцності n_T можна вибрати таким, як і при статичному навантаженні (1,4...1,6), оскільки динамічність вже відображена у розрахунковій формулі коефіцієнта K_d . Однак, враховуючи наближеність розглянутого методу розрахунку, цей коефіцієнт приймають дещо більшим $n_T = 2$.

20.3 Механічні властивості матеріалу при ударі

Для перевірки здатності матеріалу чинити опір ударним навантаженням застосовують особливий вид випробувань ударним згинанням – визначення ударної в'язкості надрізаних зразків. Це випробування здійснюють на маятникових копрах (Рис. 20.4) на зразках матеріалу стандартної форми з надрізом з одного боку.

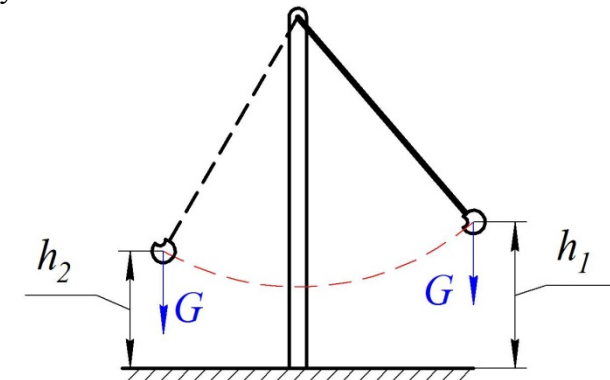


Рисунок 20.4 – Схема копра

Таким чином ударною в'язкістю матеріалу КС називають роботу, затрачену на руйнування зразку, віднесену до площі його поперечного перерізу в місці надрізу.

$$U = \frac{1}{2} P_d \cdot \Delta_d = \frac{1}{2} C \Delta_d^2. \quad (20.5)$$



Втрачена кінетична енергія падаючого вантажу і деформування стержня дорівнює:

$$\begin{aligned} T &= mg(H + \Delta_d) = \\ &= P(H + \Delta_d). \end{aligned} \quad (20.6)$$

Запишемо закон збереження енергії $U = T$, прирівнюючи (20.5) і (20.6)

Рисунок 20.3– Портрет Б. Клапейрона

$$\frac{1}{2} P_d \Delta_d = P(H + \Delta_d),$$

$$\frac{1}{2} C \Delta_d \Delta_d - C \Delta H - C \Delta \Delta_d = 0,$$

$$\Delta_d^2 - 2\Delta \Delta_d - 2\Delta H = 0.$$

Одержали квадратне рівняння відносно Δ_d , розв'язок якого:

$$\Delta_d = \Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 2\Delta H} \quad \text{або} \quad \Delta_d = \Delta \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta}} \right).$$

Оскільки з (20.3) $\Delta_d = \Delta \cdot K_d$, то

$$K_d = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta}}. \quad (20.7)$$

6. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ КОНСТРУКЦІЇ

6.1 Статично невизначувані задачі

Статично невизначуваними називають конструкції, зусилля в елементах яких не можна визначити тільки з рівнянь статки. Крім рівнянь статки для розрахунку таких систем треба використовувати рівняння, що містять деформації елементів конструкції.

Різниця між кількістю невідомих та кількістю рівнянь статки називається ступенем статичної невизначуваності конструкції.

Наприклад:

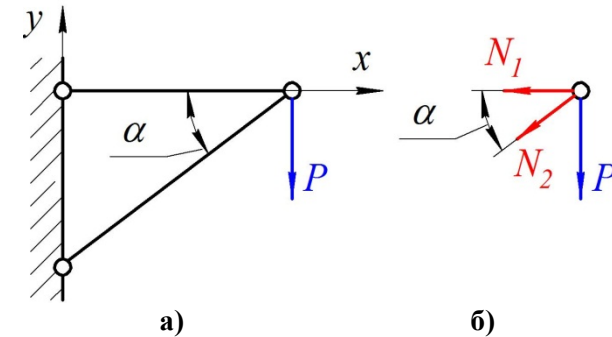


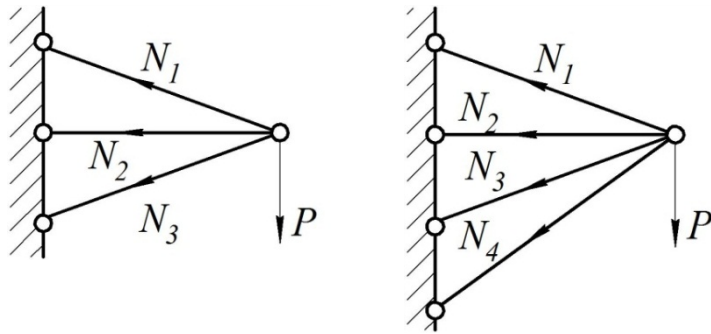
Рисунок 6.1 – Приклад статично визначуваного елемента конструкції

Конструкція статично визначувана, так як можна скласти два рівняння статки і визначити дві невідомі (N_1, N_2).

$$\sum_1^n P_{ix} = -N_1 - N_2 \cos \alpha = 0; \quad \sum_1^n P_{iy} = -P - N_2 \sin \alpha = 0;$$

$$N_2 = -\frac{P}{\sin \alpha}; \quad -N_1 + \frac{P}{\sin \alpha} \cos \alpha = 0; \quad N_1 = P \operatorname{ctg} \alpha.$$

У випадку навантаження, показаному на рис. 6.2, а), система є один раз статично невизначувана, так як можемо скласти два рівняння статички $\sum P_{ix} = 0$ і $\sum P_{iy} = 0$ і маємо три невідомих $N_1; N_2; N_3$ а конструкція зображена на рис. 6.2, б) є двічі статично невизначувана (маємо чотири невідомих $N_1; N_2; N_3; N_4$).



а)

б)

Рисунок 6.2 – Статично невизначувані системи

6.2 Розв'язання статично невизначуваних задач. Приклади

Для розв'язання задач статично невизначуваних систем, які працюють на розтягання або стискання розглядають сумісно рівняння, здобуті в результаті розгляду статичного, геометричного і фізичного аспектів задачі. Розглядати їх потрібно в такій послідовності:

– **статичний аспект задачі.** Складаємо рівняння рівноваги відокремлених елементів конструкції, що мають невідомі зусилля.

– **геометричний аспект задачі.** Розглядаємо систему в деформованому стані, що дає змогу встановити зв'язки між деформаціями або переміщеннями окремих елементів

E – модуль Юнга; F – площа поперечного перерізу.

Якщо вантаж просто покласти на конструкцію, тобто при статичному навантаженні, то переміщення визначається так:

$$\Delta = \frac{P\ell}{E} = \frac{P}{c}, \quad (20.2)$$

Отже, $P = \Delta \cdot c$, $P_d = \Delta_d \cdot c$.

Відношення

$$\frac{\Delta_d}{\Delta} = \frac{P_d}{P} = K_d$$

називається **коефіцієнтом динамічності.**

Звідси переміщення при ударі визначається по формулі

$$\Delta_d = \Delta \cdot K_d. \quad (20.3)$$

Коефіцієнт динамічності показує, в скільки разів максимальне напруження і деформації при ударі більше відповідного напруження і деформації при статичному навантаженні.

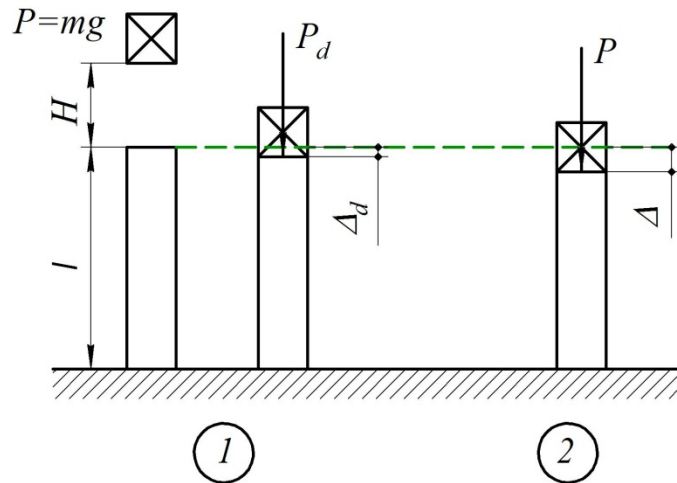
Оскільки в межах закону Гука напруження прямо пропорційно силі, то

$$\frac{\Delta_d}{\sigma} = K_d \rightarrow \sigma_d = K_d \cdot \sigma. \quad (20.4)$$

Потенціальна енергія деформації при ударі дорівнює роботі динамічної сили P_d на динамічному переміщенні Δ_d (за формулою Клапейрона¹⁵):

¹⁵ Бенуа Поль Еміль Клапейрон (1799—1864, Париж) — французський фізик та інженер.

(стисканні) $c = EF/\ell$, на торець якого з висоти H вільно падає вантаж P .



1 – вантаж масою m падає на конструкцію з висоти H :
 P – вага вантажу; P_d – динамічна сила; Δ_d – динамічне переміщення.

2 – статичне навантаження силою P :

P – вага вантажу; Δ – статичне переміщення.

Рисунок 20.2– Динамічне і статичне навантаження вертикально розташованого стержня

В момент взаємного удару (вірніше, за дуже короткий час) сила P_d , яка викликана падінням вантажу $P = mg$ з висоти H , викликає динамічне скорочення стержня на величину Δ_d .

Переміщення при поздовжньому динамічному навантаженні визначається за формулою:

$$\Delta_d = \frac{P_d \ell}{EF} = \frac{P_d}{c}, \quad (20.1)$$

де $\frac{EF}{\ell}$ – жорсткість стержня при розтяганні-стисканні;

ℓ – початкова довжина стержня;

конструкції. Здобуті рівняння називають рівняннями сумісності (нерозривності) деформації.

– **фізичний аспект задачі.** На підставі закону Гука виражаємо переміщення або деформації елементів конструкції через невідомі зусилля, що діють у них. У разі дії на конструкцію температурних навантажень, їх треба враховувати у фізичному аспекті.

– **синтез.** Розв'язуючи сумісно статичні, геометричні та фізичні рівняння, знаходимо невідомі зусилля.

Розглянемо приклади розрахунку деяких простих статично невизначуваних конструкцій.

Приклад 6.1

Розглянемо стержень, який навантажено силою P і затиснений опорами з двох кінців. Визначити зусилля, які виникають у нижній та верхній частинах стержня (Рис. 6.3). Користуючись методом перерізів та з урахуванням правил, побудуємо епюру зміни внутрішніх зусиль N_z по довжині стержня.

Статичний аспект задачі.

Тому що сила P діє вздовж осі стержня, в місцях його закріплення виникають тільки вертикальні реакції R_A , R_B (Рис. 6.3, а).

Для такої системи сил можна скласти лише одно рівняння рівноваги:

$$\sum_1^n P_{ix} = 0; \quad R_A + R_B - P = 0. \quad (6.1)$$

Задача один раз статично невизначувана, так як можемо скласти тільки одне рівняння, а невідомих реакцій дві: R_A та R_B .

Геометричний аспект задачі.

Оскільки кінці стержня жорстко закріплені, то його загальна довжина не змінюється. Отже

$$\Delta l = 0. \quad (6.2)$$

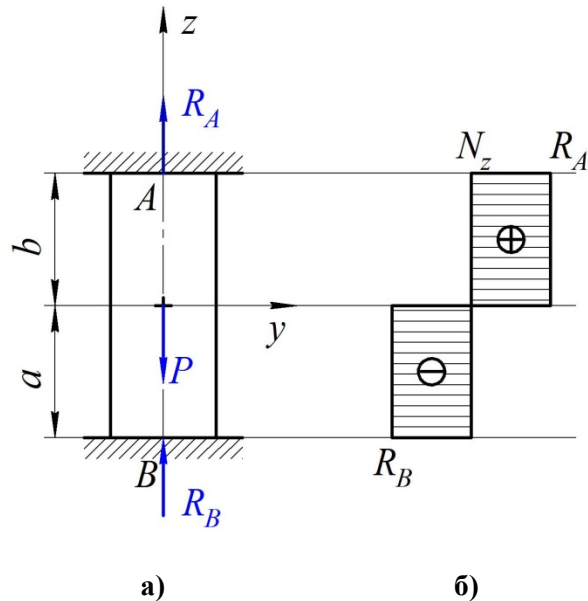


Рисунок 6.3 – Стержень з жорсткими в'язями

Фізичний аспект задачі

Умовно відкидаємо опору \$B\$. Тоді переріз \$(b)\$ отримає переміщення від сили \$P\$ (Рис.6.4)

$$\Delta l_p = \frac{Pb}{EF}.$$

Потім додаємо реакцію \$R_B\$ і цей переріз переміститься

$$\Delta l_{R_B} = \frac{R_B \cdot (a + b)}{EF}.$$

Синтез. Враховуючи, що \$\Delta l_p = \Delta l_{R_B}\$, маємо

Теорія удару дуже складна, оскільки швидкість елементів конструкцій у продовж малого проміжку часу змінюється від максимальної до нульової. При цьому виникають значні сили інерції, спричинені великими прискореннями (сповільненнями). Час удару невідомий, крім того, виникають пластичні деформації в точці удару, місцеве збільшення температури та інші фактори, врахування яких ускладнює розрахунок.

Таким чином, у зв'язку зі складністю процесів, які відбуваються при ударі, для розрахунку конструкцій користуються так званою **технічною** або **інженерною теорією удару** (запропонованою Т. Юнгом), яка ґрунтується на таких **припущеннях**.

1. При ударі тіла **не відокремлюються одне від іншого**, до розвитку найбільших деформацій. При цьому немає пружних хвиль і пов'язаних з ними відскоків тіла, що ударяє. **Удар вважається непружним.**

2. За проміжок часу взаємного удару деформації поширюються по всьому об'єму тіла, що зазнає удару, а залежність між силами та деформаціями, що виникають відповідає закону Гука.

3. При взаємному ударі рухомих тіл **зменшення кінетичної енергії системи дорівнює збільшенню потенціальної енергії деформації тіл**. При цьому нехтують втратами теплової енергії та енергії на місцеві пластичні деформації, а також інерцією маси тіла, що зазнає удару.

4. Вважається, що система тіл при ударі має один ступінь вільності, тобто **положення системи визначається одною координатою.**

20.2 Напруження при ударі. Умова міцності

Формули для визначення динамічних напружень та деформацій при осьовому ударі будемо виводити на прикладі системи (Рис. 20.2), що складається з вертикально розміщеного пружного призматичного стержня з жорсткістю при розтяганні

20. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕННЯ І РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ УДАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

20.1 Допущення при ударі

Явище удару має місце тоді, коли швидкість розгляданого елемента конструкції або стичних з ним частин протягом дуже малого проміжку часу змінюється на скінчену величину. Великі прискорення, які виникають при цьому, призводять до появи значних сил інерції, які діють у напрямі, протилежному напрямку прискорень, тобто у напрямі руху тіла.

На рисунках (Рис. 20.1) наведені різні види ударного навантаження з точки зору деформації: а) – вертикальний або горизонтальний (осьовий), ударне навантаження спричинює деформацію стискання; б) – деформація розтягання від удару; в) – згинальний удар; г) – крутильний удар для ділянки стержня з круговим перерізом і згинальний для стержня з квадратним перерізом.

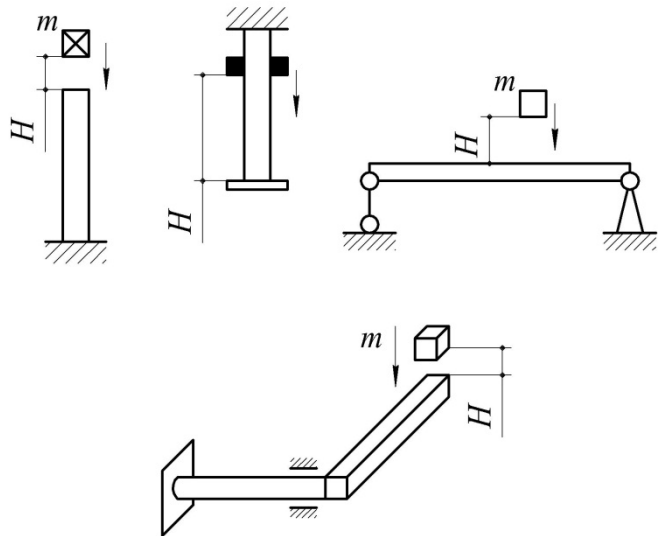


Рисунок 20.1 – Види ударного навантаження

$$\frac{P \cdot b}{EF} = \Delta l_B = \frac{R_B \cdot (a + b)}{EF}. \quad (6.3)$$

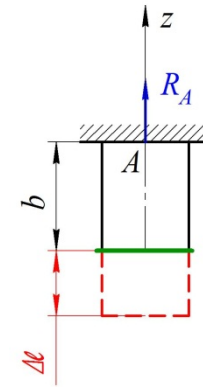


Рисунок 6.4 – Переміщення перерізу під дією сили P

Розв'язуючі сумісно рівняння (6.1) і (6.3), визначимо

$$R_B = \frac{P \cdot b}{a + b}; \quad R_A = -\frac{P \cdot b}{a + b} + P = \frac{P \cdot a}{a + b}. \quad (6.4)$$

Епюру повздовжніх зусиль показано на рис. 6.3, б).

Приклад 6.2

Розглянемо трьох стержневу підвіску, звантажену силою P в вузлі A (Рис.6.5). Визначити зусилля в стержнях.

Статичний аспект задачі.

Використовуючи метод перерізів умовно відрізаємо стержні 1, 2, 3 від закріплення і замінюємо на невідомі зусилля N_1, N_2, N_3 .

Розглянемо рівновагу вузла A :

$$\sum P_{iz} = -N_2 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0; \quad N_2 = N_3; \quad (6.5)$$

$$\sum P_{iy} = -P + N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha = 0; \quad (6.6)$$

$$-P + N_1 + N_2 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha = 0; \quad N_1 + 2N_2 \cos \alpha = P. \quad (6.6)^*$$

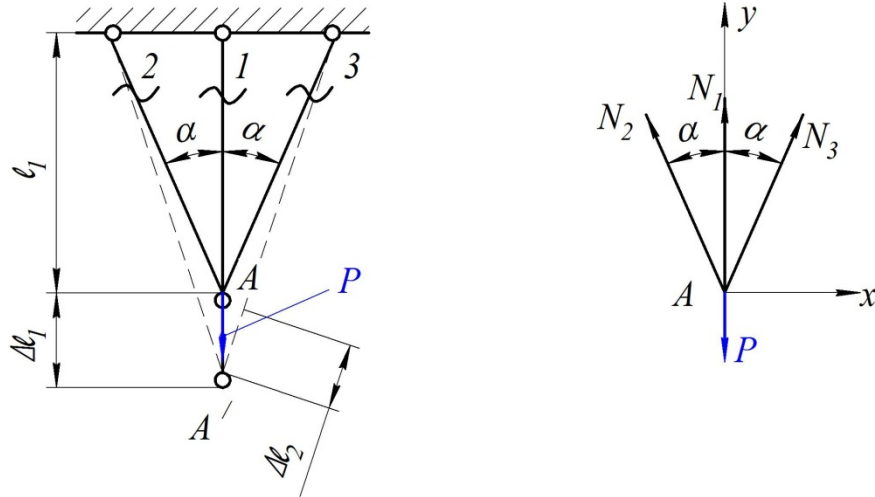


Рисунок 6.5 – Трьохстержнева підвіска

Отже, маємо два рівняння статички і три невідомих зусилля N_2 і N_1, N_3 .

Система один раз статично невизначена.

Геометричний аспект задачі.

Під дією сили P вузол A переміститься в положення A'

$$AA' = \Delta l_1; \quad \Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l_1 \cdot \cos \alpha. \quad (6.7)$$

Фізичний аспект задачі. Виходячи з закону Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1 \cos \alpha}{EF_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}, \quad (6.8)$$

де EF_1 та EF_2 – жорсткість стержнів 1 і 2.

19.4 Контрольні запитання

1. На якому принципі базується метод розрахунку при динамічних навантаженнях?
2. Чому дорівнює коефіцієнт динамічності?
3. Як розраховуються динамічні напруження?
4. Як розраховуються динамічні деформації?
5. Умова міцності при динамічному навантаженні?
6. Умова жорсткості при динамічному навантаженні?
7. Умова міцності кільця, що обертається.
8. Відносно подовження кільця в коловому та радіальному напрямках.
9. Зміна розмірів кільця в радіальному напрямі.

З урахуванням (19.10 і 19.11), замінивши R на z маємо:

$$N_z = \int_z^{\ell/2} \frac{\gamma F \omega^2}{g} z dz = \frac{\gamma F \omega^2 z^2}{2g} \Big|_z^{\ell/2} = \frac{\gamma F \omega^2}{2g} \left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - z^2 \right].$$

При $z = 0$

$$N_z = \frac{\gamma F \omega^2 \ell^2}{8g}$$

(на осі обертання).

При $z = \ell/2$ $N_z = 0$ (на кінці стержня).

Як видно із епюри N_z подовжні сили розподіляються по закону параболи (z^2). Найбільші напруження будуть на осі обертання і дорівнюють:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{zmax}}{F} = \frac{\gamma \omega^2 \ell^2}{8g} \leq [\sigma]. \quad (19.21)$$

Приклад. Потрібно, із умови міцності, визначити допустиму довжину сталюого стержня ($\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$, $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$), якщо стержень робить 1200 об/хв.

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 1200}{30} = 125,6 \text{ сек}^{-1}.$$

Із умови міцності

$$\sigma = \frac{\gamma \omega^2 \ell^2}{8g} \leq [\sigma].$$

Маємо

$$[\ell] = \sqrt{\frac{8g[\sigma]}{\gamma \cdot \omega^2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 9,8 \cdot 100 \cdot 10^6}{78 \cdot 10^3 \cdot 125,6^2}} = 2,52 \text{ м.}$$

Тобто при довжині стержня 2,52 м і 1200 об/хв в центрі стержня напруження будуть 100 МПа.

Синтез.

Підставляючи (6.8) в (6.7), маємо

$$\frac{N_2 \ell_2 \cos \alpha}{EF_2} = \frac{N_1 \ell_1}{EF_1}. \quad (6.9)$$

Звідси

$$N_1 = \frac{N_2 \ell_2 EF_1 \cos \alpha}{EF_2 \ell_1}.$$

Якщо $F_1 = F_2$, а $\ell_2 = \ell_1 \cdot \cos \alpha$ маємо

$$N_1 = \frac{N_2 \cdot \cos^2 \alpha \cos \alpha EF \cos \alpha}{EF \ell_1} = N_2 \cdot \cos^2 \alpha. \quad (6.10)$$

Підставляючи (6.10) в (6.6)*, маємо в цих стержнях

$$P = N_2 \cdot \cos^2 \alpha + 2N_2 \cdot \cos \alpha.$$

$$N_2 = \frac{P}{\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha}.$$

Напруження в стержнях 1 і 2 мають вид:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} \quad \text{і} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2}.$$

Приклад 6.3

Визначити температурні напруження в стержні AB (Рис. 6.6) завдовжки ℓ і площею поперечного перерізу F . Модуль пружності матеріалу E , коефіцієнт лінійного температурного розширення α . Стержень закріплено кінцями в непіддатливих стінах.

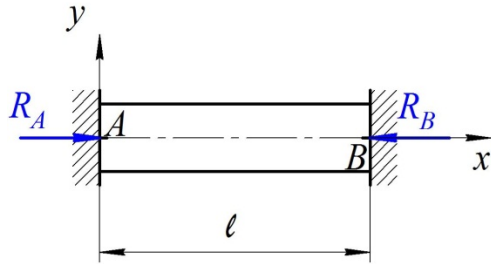


Рисунок 6.6 – Температурні напруження

Якщо стержень початкової довжини l мав би можливість вільно розширитися і його температура змінюється від t_1 до t_2 , то температурне подовження Δl_t можна підрахувати за формулою:

$$\Delta l_t = \alpha \cdot l(t_2 - t_1). \quad (6.11)$$

Статичний аспект задачі.

При підвищенні температури в опорах A і B стержня виникають реакції R_A , R_B , які перешкоджають подовженню стержня. Для такої системи можливо скласти лише одне рівняння рівноваги:

$$\sum_1^T P_{ix} = 0; \quad R_A - R_B = 0.$$

Отже $R_A = R_B$.

Задача один раз статично невизначувана.

Геометричний аспект задачі.

Оскільки кінці стержня жорстко закріплені, то його загальна довжина не змінюється. Отже $\Delta l = 0$.

напрямку:

$$\varepsilon_r = \frac{r_1 - r}{r} = \frac{\Delta r}{r}. \quad (19.19)$$

Отже $\varepsilon_\theta = \varepsilon_r$.

19.3 Розрахунки на міцність прямого обертового стержня

Прямий стержень прямокутного перерізу обертається навколо осі перпендикулярної до осі стержня з постійною кутовою швидкістю ω . Потрібно побудувати епюру поздовжніх сил від дії сил інерції.

Сили інерції при обертанні стержня визивають деформацію розтягання. Розглянемо рівновагу елемента dz , який знаходиться на відстані z від осі обертання.

$$dN_z = q_{in} dz \quad (19.20)$$

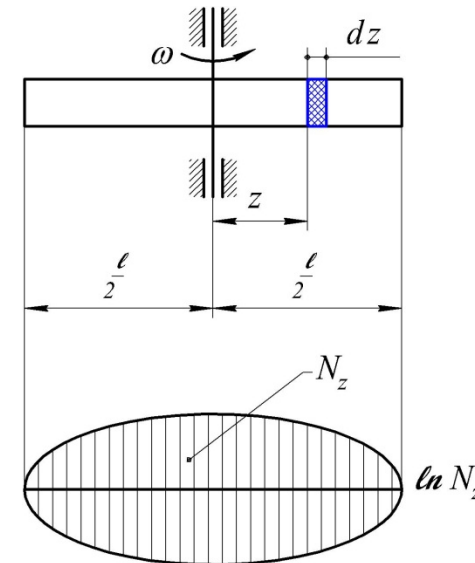


Рисунок 19.3 – Розрахунок на міцність прямого обертового стержня

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \left(\frac{\pi \cdot n}{30} \right)^2 r^2. \quad (19.14)$$

Напруження можна виразити через його лінійну швидкість v . Враховуючи рівняння (19.13), матимемо $v = \omega \cdot r$:

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} v^2. \quad (19.15)$$

Як видно з формули (19.15), напруження не залежить від площі поперечного перерізу кільця.

Умова міцності кільця, що обертається

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} v^2 \leq [\sigma]. \quad (19.16)$$

Визначаємо величину допустимої лінійної швидкості (критичної)

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{[\sigma]g}{\gamma}}. \quad (19.17)$$

Як видно з формули (19.17), критична швидкість, при якій кільце може руйнуватися, залежить тільки від матеріалу, і не залежить від розмірів кільця.

Відносне подовження кільця в коловому напрямку рівне

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E} = \frac{\gamma}{g \cdot E} \omega^2 r^2$$

або

$$\varepsilon_0 = \frac{2\pi r_1 - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{r_1 - r}{r} = \frac{\Delta_r}{r}, \quad (19.18)$$

де $\Delta_r = r_1 - r$ – зміна розміру кільця в радіальному напрямку.

Таким же є відносне подовження кільця в радіальному

Фізичний аспект задачі.

Рівняння спільності деформацій складаємо із наступних міркувань. Якби опори A не було, то під дією підвищення температури стержень подовжився б на величину $\Delta \ell_t$. Але реакція R_A стискає стержень на величину $\Delta \ell_A$. Очевидно,

$$\Delta \ell_t - \Delta \ell_A = 0. \quad (6.12)$$

За законом Гука

$$\Delta \ell_A = \frac{R_A \cdot \ell}{EF}.$$

Отже з урахуванням (5.11) і (5.12), маємо

$$\alpha \cdot \ell (t_2 - t_1) = \frac{R_A \cdot \ell}{EF} \quad \text{і} \quad R_A = \alpha \cdot EF (t_2 - t_1),$$

звідки температурне напруження:

$$\sigma = \frac{R_A}{F} = \alpha E (t_2 - t_1). \quad (6.13)$$

6.3 Особливості статично невизначуваних систем

На підставі розглянутих прикладів можна зазначити такі особливості статично невизначуваних систем:

– розподіл зусиль між елементами залежить від жорсткостей цих елементів. Якщо збільшити жорсткість одного із них, то він сприйме більше зусилля. Змінюючи співвідношення жорсткостей елементів конструкції, можна як завгодно змінювати розподіл зусиль в них.

– у статично невизначуваних конструкціях при зміні температури їх елементів порівняно з температурою, при якій конструкція складалась, виникають зусилля і напруження.

– у елементах статично невизначуваних конструкцій можуть існувати зусилля і напруження. Коли немає зовнішнього навантаження їх називають початковими (або монтажними). Зусилля виникають або при неточності виготовлення, або з явною метою (наприклад затягування болтів, пресова посадка тощо).

– у статично невизначуваних конструкціях у загальному випадку в усіх елементах одночасно не можна досягти напруження, які дорівнюють допустимим. Це треба мати на увазі при проектуванні таких конструкцій.

6.4 Контрольні запитання

1. Які конструкції називаються статично невизначуваними?
2. Ступінь статичної невизначуваності.
3. Особливості статично невизначуваних систем.
4. Сформулювати статичний, геометричний і фізичний аспекти задачі.
5. Показати приклади один раз і двічі статично невизначуваних задач.
6. Як визначити подовження стержня $\Delta \ell_t$ при зміні температури від t_1 до t_2 градусів?
7. Як визначаються напруження в елементах статично невизначуваних конструкцій?

інерції у вигляді відцентрової сили, величина якої (інтенсивність) дорівнює

$$q = \frac{\gamma \cdot F}{g} \cdot \omega^2 \cdot r = m a_n. \quad (19.10)$$

Відцентрові сили направлені вздовж радіуса. Їх дія на кільце аналогічна дії рівномірного внутрішнього тиску інтенсивністю q . Внаслідок осової симетрії системи і навантаження в поперечних перерізах згинальні моменти і поперечні сили дорівнюють нулю. Для визначення нормальних зусиль, що діють в поперечних (радіальних) перерізах кільця, розглянемо рівновагу його половини (див. рис. 19.2, б).

Рівнодіюча розподіленого навантаження інтенсивністю q рівна добутку q на діаметр, перпендикулярна до діаметра і діє за віссю, що проходить через його середину, тобто вздовж y . Умова рівноваги півкільця набуде вигляду:

$$\sum P_{iy} = 0, \quad 2N - g2r = 0.$$

Звідки

$$N = g \cdot r. \quad (19.11)$$

Нормальні напруження в поперечному перерізі кільця

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{g \cdot r}{F}. \quad (19.12)$$

Підставляючи значення q з формули (19.10), одержимо:

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2, \quad (19.13)$$

або

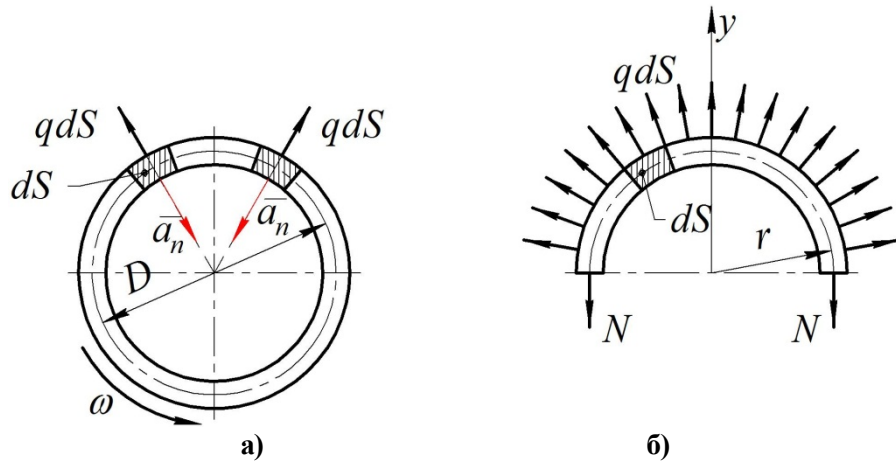


Рисунок 19.2 – Розрахунок кільця при рівномірному обертанні

Позначимо через F площу поперечного перерізу кільця, γ – об'ємна вага матеріалу, n – кількість обертів за одиницю часу

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}, \left(\frac{1}{\text{сек}}\right) - \text{кутова швидкість обертання.}$$

Виділимо елемент кільця довжиною ds . При обертанні цей елемент рухається по колу з постійною кутовою швидкістю ω . Кутове прискорення ε дорівнює нулю. Тому тангенціальне прискорення елемента дорівнює нулю:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot \frac{D}{2} = 0,$$

нормальне (доцентрове) прискорення елемента

$$a_n = \frac{\omega^2 \cdot D}{2} = \omega^2 r$$

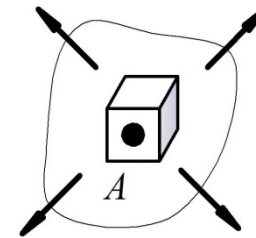
і напрямлено до центра кільця (Рис. 19.2, а).

На кожний елемент кільця одиничної довжини, діє сила

7. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО І ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

Внаслідок взаємодії частинок тіла при його навантаженні виникають **напруження**. Зовнішні сили намагаються змінити взаємне розташування частинок, а напруження перешкоджають цьому зміщенню.

7.1 Напруження в точці



Досліджуючи напружений стан тіла в точці A , як правило виділяють елемент об'єму в вигляді нескінченно малого паралелепіпеда (Рис. 7.1), який у збільшеному масштабі показано на рис. 7.2, де початок координат суміщено з точкою A .

Рисунок 7.1 – Напружений стан в точці A

Внаслідок малості виділеного елемента можна вважати, що напруження на його гранях розподілено рівномірно. Повні напруження на гранях зображають у вигляді нормальних та дотичних складових (проекцій повних напружень на осі координат (Рис. 7.2).

Нормальні напруження $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (напрявлені по нормалям до перерізу), показані на рисунку, **додатні так як вони розтягують паралелепіпед. Вони спричинюють лінійні деформації.**

Дотичні напруження позначають τ з двома індексами: **перший** відповідає напрямку нормалі до площини, а **другий** напрямку самого напруження. Іншими словами: **перший** індекс показує перпендикулярно якій осі напрямлено напруження,

другий паралельно якій осі напрямлено напруження (Рис. 7.2, в).

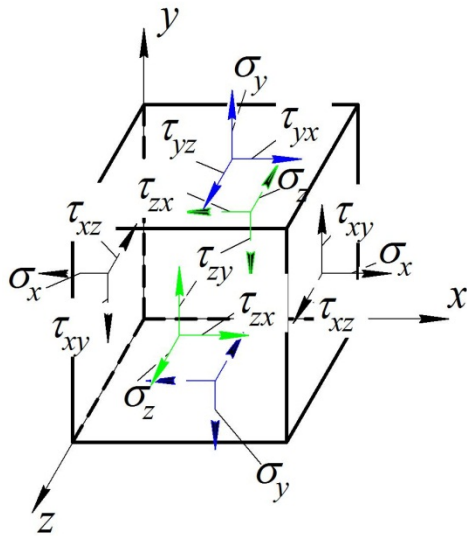


Рисунок 7.2 – Повні напруження на гранях елемента

Отже, на гранях елементарного паралелепіпеда діють дев'ять компонентів напружень. Цю сукупність можна записати у вигляді квадратної матриці або **тензора напружень** T_σ .

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix},$$

де у кожному рядку наведено складові напружень відповідно площадкам перпендикулярним до осей x, y, z . Далі буде показано, що коли відомий тензор напружень, то можна визначити напруження на будь-яких площадках елемента.

- **коефіцієнт динамічності.**

Тоді 19.5 переписеться:

$$\sigma_{\text{дин}} = \sigma_{\text{ст}} \cdot K_d. \quad (19.6)$$

Аналогічно можна записати, що

$$\Delta \ell_{\text{дин}} = \Delta \ell_{\text{ст}} \cdot K_d. \quad (19.7)$$

Із формул 19.6, 19.7 можна сказати, що будь-яка шукана динамічна величина рівна статичній величині помноженій на коефіцієнт динамічності.

Під статичною розуміють величину, яку одержують шляхом статичного прикладання навантаження.

Із формули (19.6) можна записати умову міцності,

$$\sigma_{\text{дин}} = \sigma_{\text{ст}} \cdot K_d \leq [\sigma], \quad (19.8)$$

а із формули (19.7) умову жорсткості відповідно:

$$\Delta \ell_{\text{дин}} = \Delta \ell_{\text{ст}} \cdot K_d \leq [\Delta \ell]. \quad (19.9)$$

19.2 Визначення напружень в кільцях, що обертаються

Розглянемо обчислення напружень в кільці постійного перерізу, що швидко обертається (Рис. 19.2,а). В подібних умовах знаходиться колесо велосипеда або обід маховика, якщо нехтувати впливом спиць.

Кільце вважатимемо тонким, якщо товщина його невелика в порівнянні з радіусом r . У цьому випадку можна вважати, що всі точки кільця знаходяться на однаковій відстані від осі обертання, яка дорівнює $D/2$.

Зафіксуємо в якусь мить тіло і складемо умову рівноваги (Рис.19.1, б):

$$\sum P_{iz} = 0, \quad N_{\text{дин}} - Q - \frac{Q}{g}a = 0, \quad (19.1)$$

де g – прискорення вільного падіння; $g=9,81 \text{ м/с}^2$; $N_{\text{дин}}$ – динамічна реакція в канаті

$$N_{\text{дин}} = Q \left(1 + \frac{a}{g}\right). \quad (19.2)$$

Але при розтяганні:

$$\sigma_{\text{дин}} = \frac{N_{\text{дин}}}{F}, \quad N_{\text{дин}} = \sigma_{\text{дин}}F. \quad (19.3)$$

Прирівнюємо праві частини 19.2 і 19.3, одержимо

$$\sigma_{\text{дин}}F = Q \left(1 + \frac{a}{g}\right); \quad (19.4)$$

$$\sigma_{\text{дин}} = \frac{Q \left(1 + \frac{a}{g}\right)}{F} = \frac{Q}{F} \left(1 + \frac{a}{g}\right). \quad (19.5)$$

При розтяганні

$$\frac{Q}{F} = \sigma_{\text{статичне}} = \sigma_{\text{ст.}}$$

Приймаємо

$$1 + \frac{a}{g} = K_{\text{д.}}$$

7.2 Закон парності дотичних напружень. Головні площадки і головні напруження

Не всі дев'ять компонентів напружень незалежні. В цьому легко переконатися, склавши умови рівноваги елемента щодо його обертання (Рис. 7.2). Для цього прирівнюємо до нуля суми моментів усіх сил відносно осей x, y, z :

$$\sum M_{kx} = 0; \quad \sum M_{ky} = 0; \quad \sum M_{kz} = 0.$$

Напишемо суму моментів відносно осі O_z .

Сили, які паралельні цій осі і перетинають її, у рівняння не увійдуть. Моменти сил σ_y на двох гранях, перпендикулярних осі z , урівноважуються, так само як і моменти сил σ_y на верхній та нижній гранях елемента.

Отже маємо $\tau_{xy}dydzdx - \tau_{yx}dxdzdy = 0$

Звідси знаходимо $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Аналогічно з двох інших рівнянь знаходимо: $\tau_{yz} = \tau_{zy}$;

$\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

Отже маємо рівності:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad (7.1)$$

які виражають закон парності дотичних напружень: дотичні напруження на двох будь-яких, але взаємно перпендикулярних площадках, які спрямовані перпендикулярно до лінії перетину площадок, однакові за модулем. При цьому вони намагаються повернути елемент у різні боки.

При зміні орієнтації площадок змінюються також напруження, що діють на них. При цьому можна знайти таке положення площадок, при якому дотичні напруження будуть дорівнювати нулю.

Площинки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю, називають **головними площадками**, а нормальні напруження, що діють на них – **головними напруженнями**.

Головні напруження позначають $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. При цьому індекси слід розставляти так, щоб виконувалась нерівність

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (7.2)$$

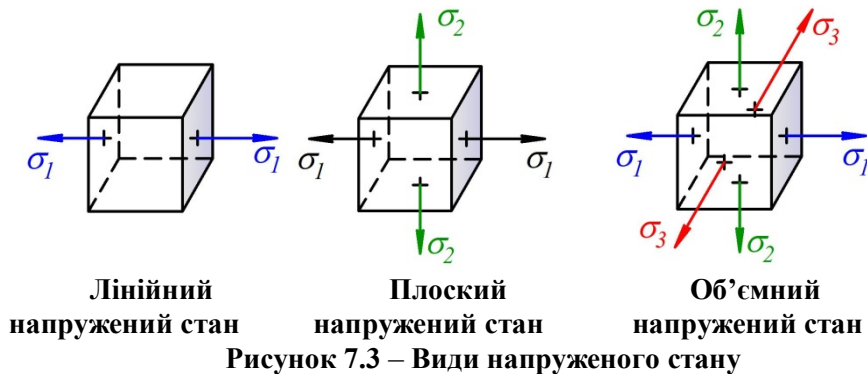
Цю нерівність записують з урахуванням знаків напружень.

У залежності від кількості діючих головних напружень розрізняють **три види напруженого стану**.

1 – **одновісний або лінійний**. Напружений стан, в якому діє одне головне напруження. Два інших дорівнюють нулю.

2 – **двовісний або плоский**. Стан, в якому два головних напруження не нульові, а одне дорівнює нулю.

3 – **тривісний або об'ємний** напружений стан. Стан, в якому всі три головних напруження не дорівнюють нулю.



Крім того, напружений стан буває однорідним і неоднорідним. При однорідному напруженому стані напруження однакові в кожній точці будь-якого перерізу і всіх паралельних перерізах. У неоднорідному стані елемент слід вважати нескінченно малим. Тоді припущення про рівномірність

19. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Розрахунок на міцність з урахуванням сил інерції доводиться виконувати тоді, коли елементи конструкцій в процесі експлуатації набувають великих прискорень, які спричиняють значні інерційні зусилля.

Загальний метод розрахунку при динамічних навантаженнях базується на **принципі Д'Аламбера**. Згідно цього принципу любе рухоме тіло може бути розглянуто в умові миттєвої рівноваги. Для цього потрібно до діючого зовнішнього навантаження прикласти сили інерції, які рівні добутку маси тіла на його прискорення і направлені в сторону протилежну цього прискорення.

Якщо ж сили інерції невідомі і їх визначення утруднені, то задачі динаміки в цьому випадку вирішуються на основі закону збереження енергії.

19.1 Розрахунок на міцність з урахуваннями сил інерції

Нехай будь яке тіло вагою Q піднімається з прискоренням \bar{a} , (Рис.19.1 а). Визначити динамічні напруження $\sigma_{дин}$ в канаті без урахування вантажу самого каната.

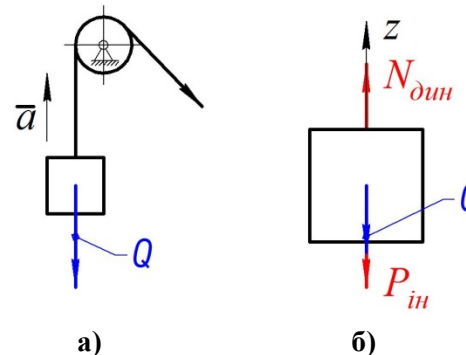


Рисунок 19.1 – Розрахункова схема динамічного навантаження

На тіло, крім сили ваги Q діє ще сила інерції $P_{ин}$, яка дорівнює добутку маси тіла на прискорення, тобто $P_{ин} = ma = \frac{Q}{g} a$ і направлена в сторону протилежну прискоренню \bar{a} .

Знайдемо проекції всіх сил, що прикладені до балки, і реакції на вертикальну вісь. Виконаємо перевірку.

$$R_0 + R_1 + R_2 + R_3 - P - 4q - P - P = 0.$$

Підставимо значення, отримаємо:

$$21 + 109,5 + 164,8 + 44,7 - 60 - 4 \cdot 40 - 60 - 60 = 0 \\ 340 - 340 = 0$$

Перевірка вірна.

18.5 Контрольні запитання

1. Що називається нерозрізною багатопрольотною балкою?
2. Чому дорівнює статична невизначуваність нерозрізної балки:
 - а) коли крайня опора – нерухомий шарнір;
 - б) коли крайня опора – жорстке закріплення?
3. Нумерація опор та прольотів в нерозрізній балці.
4. Теорема о фіктивних реакціях.
5. Запишіть рівняння трьох моментів в загальному вигляді.
6. Правило знаків в рівнянні трьох моментів для кута повороту φ .
7. Послідовність розрахунку нерозрізної балки.
8. Формула для визначення статичної невизначуваності балки.

розподілу напружень на його гранях виконується з точністю до малих другого порядку.

7.3 Лінійний напружений стан

Розглянемо призматичний стержень (Рис. 7.4), який зазнає простого розтягання силою P . В перерізах стержня, досить віддалених від точок прикладання зовнішніх зосереджених сил, напруження розподіляються рівномірно.

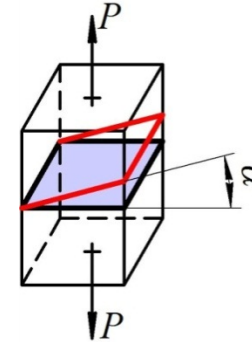


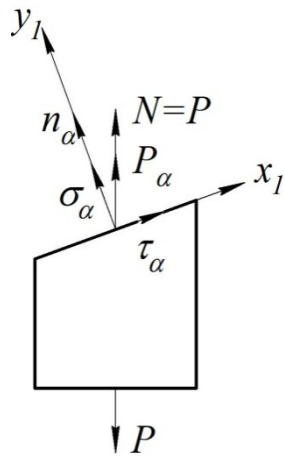
Рисунок 7.4 – Просте розтягання стержня

В поперечних перерізах перпендикулярних силі P нормальне напруження дорівнює:

$$\sigma_x = \frac{N}{F_0} = \frac{P}{F_0}.$$

Дотичні напруження тут дорівнюють нулю. Отже, ці перерізи є головними площадками.

Розглянемо тепер напруження на неголовній площадці, повернутій проти ходу годинникової стрілки на кут α (Рис. 7.5). Таку площадку назвемо α -площадкою, а напруження на ній:



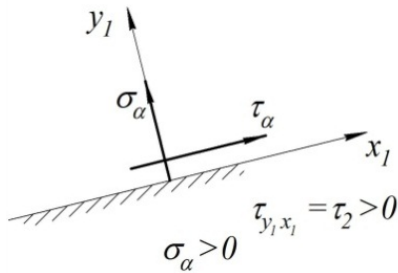
P_α – повне напруження, що діє на цій площадці;
 σ_α – нормальне напруження;
 τ_α – дотичне напруження;
 F_0 – площа головної площадці;
 F_α – площа нахиленої площадці.
 Осьова сила в перерізі $N = P$ є рівнодійною повних напружень P_α , що діють на площадці F_α , площа якій дорівнює

$$F_\alpha = \frac{F_0}{\cos \alpha}$$

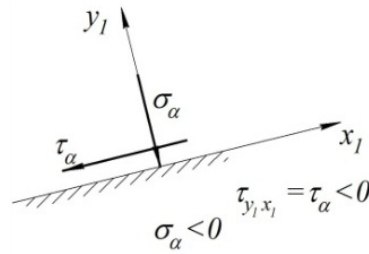
Рисунок 7.5 – Напруження на нахиленій площадці

Отже, $P_\alpha \cdot F_\alpha = N$. Звідки

$$P_\alpha = \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N}{F_0} \cos \alpha = \sigma_0 \cos \alpha. \quad (7.3)$$



а)



б)

Рисунок 7.6 – Напруження на площадці, повернутій на кут α

Проекціюючи P_α на нормаль n_α і на площину перерізу F_α , дістанемо формули для визначення нормальних і дотичних напружень, які діють на похилій площадці (Рис. 7.6, а):

Визначимо M нерозрізної балці в другому прольоті в точці екстремуму:

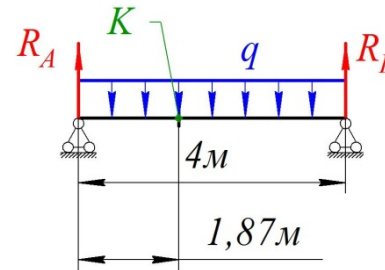
$$M_{2x} = +x \left(\frac{M_2 - M_1}{\ell_2} \right) + M_1;$$

$$M_{2(1,87\text{м})} = M_{2x}^0 + 1,87 \left(\frac{-92 - (-54)}{4} \right) + (-54) =$$

$$= M_{2x}^0 + (-17,7) - 54 = M_{2x}^0 - 71,7.$$

Наступним кроком потрібно визначити в точці К згинальний момент M в **простій** балці (Рис. 18.18):

$$M_{2k}^0 = R_1 \cdot 1,87 - q \cdot 1,87 \cdot 1,87 = 149,6 - 69,9 = 79,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



Таким чином, момент в точці К для нерозрізної балки:
 $M_{2k} = 79,6 - 71,7 = 7,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

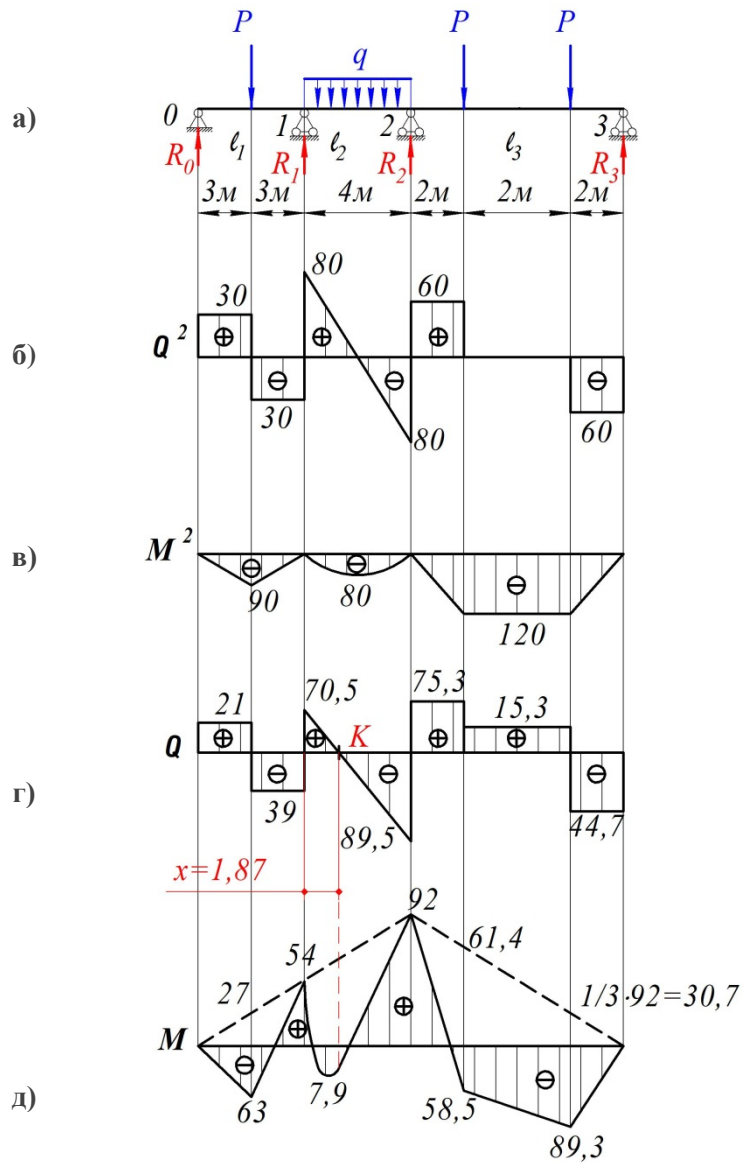
Будуємо **епюру M** (Рис. 18.17, д).

Рисунок 18.18 – Визначення в точці К згинального моменту

7. Перевірка опорних реакцій. Покажемо реакції R_0, R_1, R_2, R_3 на схемі балці на опорах (Рис.18.17, а), напрямляємо їх уверх. Значення цих реакцій визначаємо **по стрибкам епюри Q**. Таким чином отримаємо:

$$R_0 = 21 \text{ кН}; \quad R_1 = 70,5 + 39 = 109,5 \text{ кН};$$

$$R_2 = 75,3 + 89,5 = 164,8 \text{ кН}; \quad R_3 = 44,7 \text{ кН};$$



$$\sigma_\alpha = P_\alpha \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha; \quad (7.4)$$

$$\tau_\alpha = P_\alpha \sin \alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha, \quad (7.5)$$

де $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$.

Правило для визначення знаків напружень стосовно до нахилених осей x_1, y_1 : напруження вважаються додатними, якщо на правій грані вони намагаються повернути елемент проти годинникової стрілки.

Як видно, із формул, при повороті площадки напруження змінюються так (враховуючі, що $\cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin(2 \cdot 45^\circ) = \sin 90^\circ = 1$):



α	σ_α	τ_α
0°	σ_0	0
45°	$\frac{\sigma_0}{2}$	$\frac{\sigma_0}{2}$
90°	0	0

Отже:

– при простому розтяганні

$$\sigma_1 = \sigma_0 = \frac{N}{F_0}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0;$$

– при стисканні

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\sigma_0.$$

Дотичні напруження досягають свого найбільшого значення при $\alpha = \pm 45^\circ$, причому

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}.$$

Рисунок 18.17 – Епюри Q і M для заданої трьох прольотної балці

7.4 Плоский напружений стан

Досліджуючи напружений стан елементів конструкцій, доводиться частіше мати справу з плоским (двовісним) напруженим станом. Він буває при крученні, згинанні та складному опорі. Усі означення та правила, які були введені в попередньому підрозділі залишаються в силі й для плоского напруженого стану.

Розглянемо прямокутний паралелепіпед (Рис. 7.7), грані якого є головними площадками. На них діють головні напруження σ_1, σ_2 , що розтягують, а третє головне напруження $\sigma_3 = 0$ (головний напрям, що відповідає σ_3 , перпендикулярний до площини креслення).

Виберемо такий переріз, нормаль до якого складе з напрямом I кут α_1 (Рис. 7.7). З напрямом II та же нормаль складає кут α_2 . В тому ж перерізі діють нормальні σ_α та дотичні τ_α напруження, які залежать від σ_1 , та σ_2 .

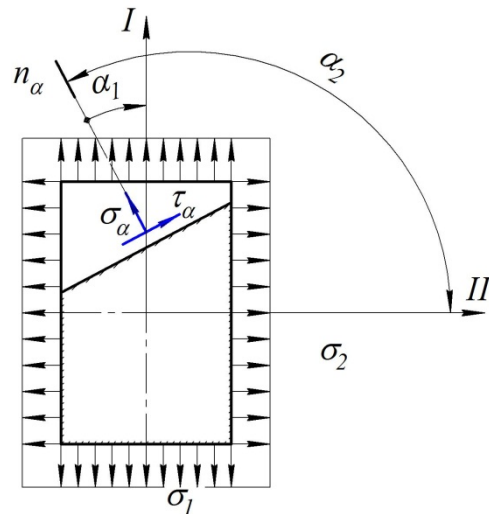


Рисунок 7.7 – Плоский напружений стан

Епюру M для нерозрізної балки (Рис. 18.13) можливо побудувати (Рис. 18.17, д):

1 варіант – методом «підвішування».

До епюри опорних моментів "підвішуємо" епюру M_0 по різницям ординат. Наприклад, в середині першого прольоту на епюрі M_0 ордината дорівнює 90, а на епюрі опорних моментів -27 . Отримаємо $90 - 27 = 63$. Це значення відкладаємо на епюрі.

2 варіант – формула для визначення згинального M в будь-якому перерізі нерозрізної балки:

$$M_{nx} = M_{nx}^0 + x \left(\frac{M_n - M_{n-1}}{\ell_n} \right) + M_{n-1},$$

де n – прольот, x – відстань.

Для тієї ж точки першого прольоту, яку досліджували методом «підвішування»:

$$M_{1x} = M_{1x}^0 + x \left(\frac{M_1 - M_0}{\ell_1} \right) + M_0;$$

$$M_{1(3\text{м})} = 90 + 3 \left(\frac{-54 - 0}{6} \right) + 0 = 90 - 27 = 63 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Побудова епюри M в другому прольоті, який навантажено рівномірно розподіленим навантаженням.

Визначимо положення т. К. по епюрі Q – це точка екстремуму за допомогою складання пропорцій (Рис. 18.17,г).

$$\frac{x}{4 - x} = \frac{70,5}{89,5}; \quad 89,5 \cdot x = 70,5(4 - x); \quad x = 1,87 \text{ м}.$$

$$= Q_1^0 + \frac{-54 - 0}{6} = Q_1^0 - 9.$$

Цей запис означає, що поперечна сила в нерозрізній балці в першому прольоті буде така ж, як в простій балці з різницею ординат на -9 . **На епюрах повинні простежуватися скачки на величину сил.**

2) Побудова епюри Q в другому прольоті.

$$\begin{aligned} n = 2; \quad Q_2 &= Q_2^0 + \frac{M_2 - M_1}{\ell_2} = \\ &= Q_2^0 + \frac{-92 - (-54)}{4} = Q_2^0 - 9,5. \end{aligned}$$

Поперечна сила в нерозрізній балці в другому прольоті буде така ж, як в простій балці з різницею ординат на $-9,5$.

3) Побудова епюри Q в третьому прольоті:

$$\begin{aligned} n = 3; \quad Q_3 &= Q_3^0 + \frac{M_3 - M_2}{\ell_3} = \\ &= Q_3^0 + \frac{0 - (-92)}{6} = Q_3^0 + 15,3. \end{aligned}$$

Поперечна сила в нерозрізній балці в третьому прольоті буде така ж, як в простій балці з різницею ординат на $+15,3$.

Будуємо епюру поперечних сил для нерозрізної балці (Рис.18.17,б).

6. Побудова епюри згинального моменту для нерозрізної балці. Спочатку відкладаємо на опорах значення опорних моментів, з'єднуємо їх лінією опорних моментів. Це епюра опорних моментів.

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_1 = -54 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2 = -92 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_3 &= 0 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Їх величину отримаємо, розглядаючи дії σ_1 , та σ_2 окремо та додаючи результати (застосовуючи принцип суперпозиції). Дія нормальних напружень, які визивають σ_1 , виражається за формулою (7.4) та дорівнює $\sigma_1 \cos^2 \alpha_1$; друга частина напружень σ_α , яка викликана σ_2 , дорівнює $\sigma_2 \cos^2 \alpha_2$, де $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$. Повне нормальне напруження:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 (\alpha_1 + 90^\circ)$$

або

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1. \quad (7.6)$$

За допомогою таких же міркувань визначені величини дотичних напружень за формулою (7.5) по обраній площадці:

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \frac{1}{2} [\sigma_1 \sin 2\alpha_1 + \sigma_2 \sin 2\alpha_2] = \\ &= \frac{1}{2} [\sigma_1 \sin 2\alpha_1 + \sigma_2 \sin 2(\alpha_1 + 90^\circ)] \end{aligned}$$

або

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} 2 \sin \alpha_1. \quad (7.7)$$

У подальшому в формулах для σ_α і τ_α кут α_1 будемо визначати через α і відраховувати його завжди від напрямку найбільшого головного напруження проти ходу годинникової стрілки.

Користуючись формулами (7.6) і (7.7) для напружень на площадці $a - a$ (Рис. 7.8), легко знаходити напруження на площадці $b - b$, їй перпендикулярній, яка має нормаль n_β , яка складає з напрямом найбільшого головного напруження кут $\beta = \alpha + 90^\circ$:

$$\begin{aligned}\sigma_\beta &= \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta = \\ &= \sigma_1 \cos^2(\alpha + 90^\circ) + \sigma_2 \sin^2(\alpha + 90^\circ);\end{aligned}$$

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha; \quad (7.6')$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin^2 \beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\alpha + 180^\circ),$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin^2 \alpha. \quad (7.7)$$

Додаючи формули (7.6) та (7.6'), отримаємо

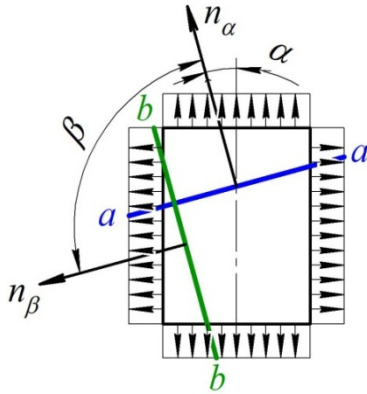


Рисунок 7.8 – Плоский напружений стан (поворот на 90°)

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}. \quad (7.8)$$

Властивість нормальних напружень (інваріантність): **сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках інваріантна щодо нахилу цих площадок.**

Для дотичних напружень, порівнюючи формули (7.7) і (7.7'), отримаємо:

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha. \quad (7.9)$$

Для точки (опори) 2 (n=2):

$$M_1 \ell_2 + 2M_2(\ell_2 + \ell_3) + M_3 \ell_3 = -6(\varphi_2 + \varphi_3).$$

Підставляємо усі відомі величини, враховуємо, що момент на нульовій опорі і на третій опорі дорівнюють нулю,

$$\begin{cases} M_0 = M_3 = 0; \\ 20M_1 + 4M_2 = -1449,6 \\ 4M_1 + 20M_2 = -2079,6. \end{cases}$$

Тоді отримаємо: Поділимо перше рівняння на співмножник 4 при M_2 . Друге рівняння поділимо на співмножник 20 при M_2 .

$$\begin{cases} 5M_1 + M_2 = -362,4 \\ 0,2M_1 + M_2 = -103,98. \end{cases}$$

Вирішимо цю систему рівнянь:

$$\begin{aligned} 4,8M_1 &= -258,42 \\ M_1 &= -54 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Підставляємо це значення у будь-яке з рівнянь і знаходимо M_2 .

$$M_2 = -92 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отже, знайшли опорні моменти:

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_1 = -54 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2 = -92 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_3 &= 0 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

5. Побудова епюри поперечної сили Q для нерозрізної балки (Рис. 18.17).

1) Побудова епюри Q в першому прольоті:

$$n = 0; \quad Q_1 = Q_1^0 + \frac{M_1 - M_0}{\ell_1} =$$

$$\begin{aligned}
 R_A = R_B = P &= 60 \text{ кН}; \\
 M_3^0 &= M_{D=P} \cdot a = \\
 &= 60 \cdot 2 = 120 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 \varphi_{\text{лів}} = \varphi_{\text{прав}} &= \frac{1}{2} \cdot P \cdot a \cdot (\ell - a) = \\
 &= \frac{60 \cdot 2 \cdot (6 - 2)}{2} = 240 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.
 \end{aligned}$$

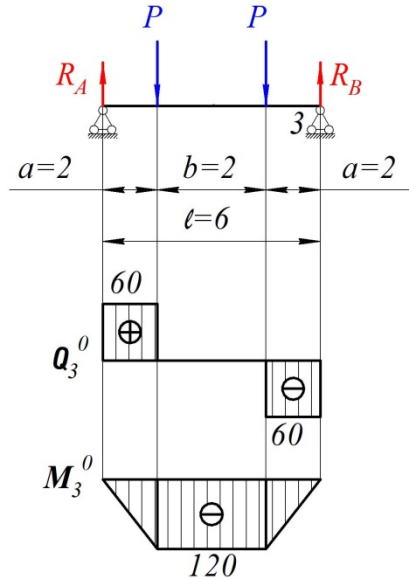


Рисунок 18.16 – Третій прольот балки

4. Складаємо рівняння трьох моментів для двох точок – проміжних опор: – опора 1 і опора 2. Це і будуть два рівняння, яких не вистачає для вирішення завдання. Рівняння 3х моментів в загальному вигляді:

$$M_{n-1} \ell_n + 2M_1(\ell_n + \ell_{n+1}) + M_{n+1} \ell_{n+1} = -6(\varphi_{n-1} + \varphi_n).$$

Для точки (опори) 1 (n=1):

$$M_0 \ell_1 + 2M_1(\ell_1 + \ell_2) + M_2 \ell_2 = -6(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Отже, дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках рівні за величиною і протилежні за знаком (закон парності дотичних напружень).

Щоб знайти найбільше значення нормального напруження, необхідно дослідити вираз (7.6) на максимум. Прирівняємо похідну по α від σ_α та отримаємо:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\sigma_1 \cos\alpha + 2\sigma_2 \sin\alpha \cos\alpha$$

або

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin\alpha = 0. \quad (7.10)$$

Співставляючи (7.10) та (7.7) бачимо, що умова максимуму для σ_α співпадає з умовою рівності нулю дотичних напружень на відповідних площадках.

Отже σ_α отримає найбільше значення або при $\alpha = 0^\circ$, або при $\alpha = 90^\circ$. Так як $\sigma_1 > \sigma_2$, то

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha \max} &= \sigma_1 \text{ (при } \alpha = 0^\circ), \\
 \sigma_{\alpha \min} &= \sigma_2 \text{ (при } \alpha = 90^\circ),
 \end{aligned}$$

тобто найбільше і найменше нормальні напруження в даній точці – це головні напруження σ_1 і σ_2 , які діють по взаємно перпендикулярним площадкам, вільним від дотичних напружень.

Найбільше значення дотичних напружень як видно з формули (7.7), буде:

$$\tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \text{ (при } \sin 2\alpha = 1, \alpha = 45^\circ). \quad (7.11)$$

По площадкам, паралельним σ_2 , найбільше дотичне напруження буде:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}. \quad (7.11')$$

7.5 Пряма задача в плоскому напруженому стані. Круг напружень (круг Мора)

В теорії напруженого стану можна відокремити дві основні задачі: пряму і зворотну.

Пряма задача. В точці відомі положення головних площадок і відповідні до них головні напруження: треба знайти нормальні і дотичні напруження, що діють по площадках, які нахилені під заданим кутом α до головних.

Зворотна задача. В точці відомі нормальні і дотичні напруження, які діють у двох взаємно перпендикулярних площадках, що проходять через дану точку, треба знайти головні площадки і головні напруження. Аналітичне розв'язання прямої задачі дається формулами (7.4) – (7.7').



Рисунок 7.9 – Портрет Христіана Отто Мора

Залежність напруження від кута нахилу площадки, на якій вони діють, має просту геометричну інтерпретацію у вигляді діаграми, яка називається **кругом напружень Мора**⁶. Першим створив графічне представлення напруження для подовжнього і поперечного напруження горизонтальної балки, що згиналася, був Карл Кульман.

⁶ Христіан Отто Мор (1835 – 1918) – німецький механік та інженер, відомий своїми роботами в галузі опору матеріалів та теоретичної механіки. Автор однієї із теорій міцності (теорія міцності Мора), графічних методів визначення напружень при складному напруженому стані (круг Мора).

Розглянемо балку на другому прольоті (Рис. 18.15).

$$R_A = R_B = \frac{q\ell}{2} = 80 \text{ кН};$$

$$M_2^0 = \frac{q\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{4} = \frac{q\ell^2}{8} = 80 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\varphi_{\text{лів}} = \varphi_{\text{прав}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{q\ell^2}{8EJ_x} \cdot \frac{\ell}{2} =$$

$$= \frac{q\ell^3}{24EJ_x} = \frac{40 \cdot 4^3}{24EJ_x} = \frac{106,6}{EJ_x} \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

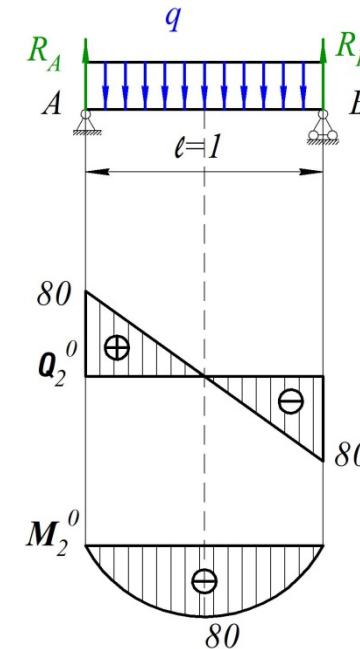


Рисунок 18.15 – Другий прольот балки

Розглянемо балку на третьому прольоті (Рис. 18.16).

3. Позначимо **номера прольотів з першого** по порядку (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3).

4. Кожний прольот розглядуємо як просту балку з опорами А, В і будуємо для кожної простої балки епюри Q і M . То, що відноситься до **простої балки**, позначимо **індексом «0»**, то, що відноситься до **нерозрізної** балки, позначимо **без цього індексу**.

Таким чином, Q_i^0, M_i^0 — це поперечна сила та згинальний момент **для простої балки** на i -му прольоті.

Розглянемо **балку на першому прольоті** (Рис. 18.14).

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} = 30 \text{ кН};$$

$$M_1^0 = \frac{P}{2} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{P\ell}{4} = 90 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\varphi_{\text{лів}} = \varphi_{\text{прав}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P\ell}{4EJ_x} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{P\ell^2}{16EJ_x} = \frac{135}{EJ_x} \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

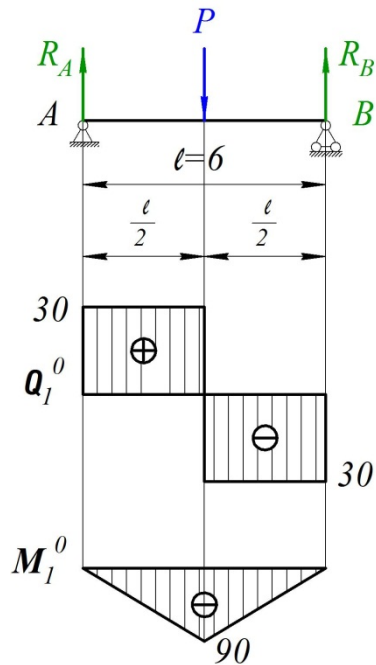


Рисунок 18.14 – Перший прольот балки

Вклад Мора полягає у використанні цього підходу для плоского і об'ємного напружених станів і визначення критерію міцності, ґрунтованого на круговій діаграмі напруження.

Позначимо:

$$\alpha = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (7.12)$$

Тоді напруження на похилих площадках можна представити у вигляді:

$$\sigma_\alpha = \alpha + R \cos 2\alpha; \quad \tau_\alpha = R \sin 2\alpha.$$

Ці рівняння представляють коло в параметричній формі. Вони еквівалентні рівнянню:

$$(\sigma_\alpha - \alpha)^2 + \tau_\alpha^2 = R^2.$$

Даний спосіб дозволяє визначити дотичні і нормальні напруження в будь-якій точці конструкції.

Проаналізуємо напружений стан за допомогою простої графічної побудови. Візьмемо прямокутну систему координат σ – τ , тобто по осі абсцис будемо відкладати значення головних σ_1, σ_2 , а також нормальних $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ напружень, а по осі ординат – значення τ_α, τ_β (Рис. 7.10). Вісь σ зручно напрямляти паралельно найбільшому головному напруженню σ . Порядок графічного розв'язання задачі покажемо на конкретному прикладі напруженого стану, зображеного на рис. 7.10

Вибравши для напружень новий масштаб відкладаємо по осі σ відрізки: $OA = \sigma_1$; $OB = \sigma_2$. На відрізку AB як на діаметрі будемо коло з центром в точці C . Таким чином ми побудували **коло напружень або круг Мора**. Радіус круга Мора:

$$R = AC = BC = CD = \frac{AB}{2} = \frac{OA - OB}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (7.13)$$

Точка D круга Мора буде відповідати вибраній площадці; її координати OK і DK дорівнюють відповідно σ_α і τ_α . Дійсно, із трикутника KCD , маємо:

$$KD = R \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \tau_\alpha;$$

$$OK = OB + BC + KC = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos^2 \alpha =$$

$$= \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} (1 + \cos^2 \alpha) = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos^2 \alpha =$$

$$= \sigma_2 + \sigma_1 \cos^2 \alpha - \sigma_2 \cos^2 \alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \sigma_\alpha.$$

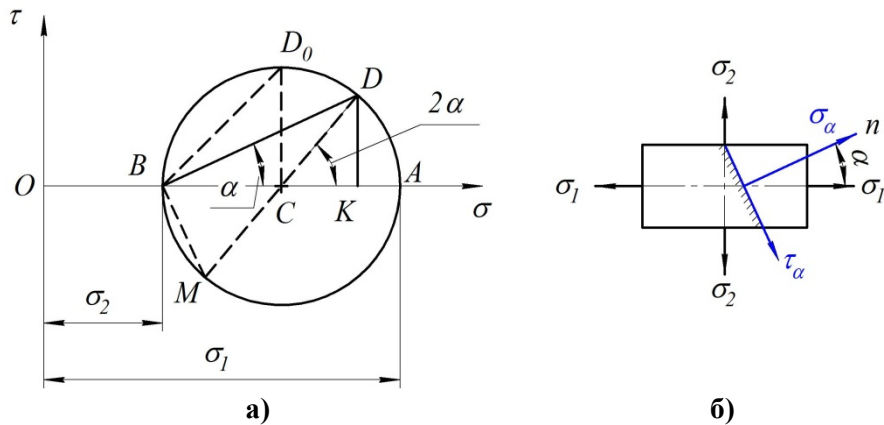


Рисунок 7.10 – Круг Мора

Визначивши побудовою круга Мора $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$, зобразимо їх на рисунку виділеного елемента, враховуючи знаки цих напружень (Рис. 7.10). Поєднаємо лінію дії найбільшого головного напруження σ_1 з віссю σ на крузі; тоді лінія BD нахилена до осі під кутом α , буде паралельна нормалі до розглянутої площадці, а значить, паралельна σ_α ; лінія BM буде паралельна τ_α .

Як видно з рис. 7.10 найбільше значення дотичних напружень дорівнює CD_0 , тобто радіусу круга :

$$\max \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad (7.13)$$

5. З урахуванням обчислених згинальних моментів визначають реакції опор і будують епюри Q_y і M_x на прольоті, а потім для всієї балки, як суму епюр на прольотах.

18.4 Приклад розрахунку нерозрізної трьохпрольотної балки

Дано:

Нерозрізна балка навантажена в трьох прольотах. Навантажена трьома зосередженими силами $P = 60 \text{ кН}$ та розподіленим навантаженням $q = 40 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$, довжина прольотів $l_1 = 6 \text{ м}$, $l_2 = 4 \text{ м}$, $l_3 = 6 \text{ м}$, $a = 2 \text{ м}$.

Побудувати епюри Q і M для нерозрізної балки та визначити реакції.

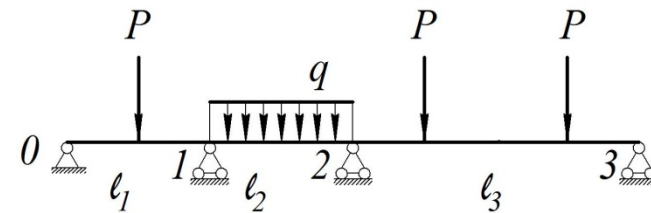


Рисунок 18.13 – Вихідна схема балки

1. Визначаємо міру статичної невизначуваності балки по формулі:

$$n = S_{\text{оп}} - 3 = 5 - 3 = 2,$$

де $S_{\text{оп}}$ – кількість невідомих реакцій,

3 – кількість рівнянь статки.

Для рішення даної балки необхідно два додаткових рівняння.

2. Позначимо номери опор з нульової по порядку (0, 1, 2, 3)

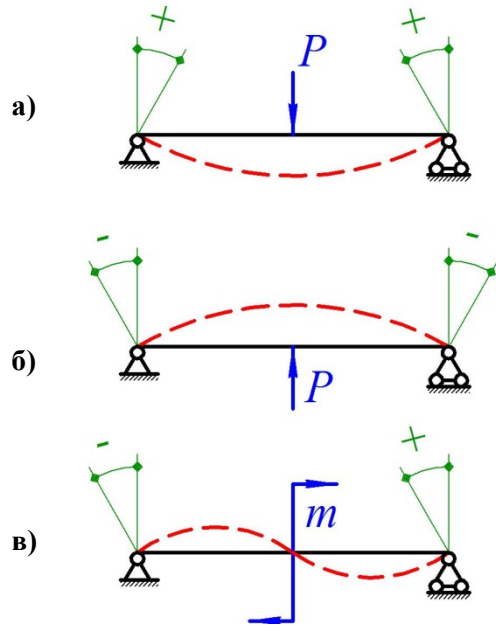


Рисунок 18.12 – Правило знаків для кута нахилу

Таким чином можна рекомендувати такий **порядок розрахунку нерозрізної балки:**

1. Пронумерувавши опори і прольоти, під заданою балкою зображають еквівалентну систему з урахуванням зауважень в окремих випадках.
2. Складають рівняння трьох моментів для кожних двох суміжних прольотів.
3. Визначають кути нахилу перерізів від зовнішнього навантаження в кожному прольоті і підставляють їх в рівняння трьох моментів.
4. Розв'язуючи рівняння визначають невідомі згинальні моменти на проміжних опорах, де встановлені шарніри, і їх напрямлення.

відповідно кут $2\alpha = 90^\circ$ і кут $\alpha = 45^\circ$. В крузі величина $\tau_{\alpha \max}$ зображена ординатою CD_0 , абсцисою для котрій служить

$$OC = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

на тієї ж площадці, де $\tau_\alpha = \tau_{\max}$ нормальне напруження являється середнім.

Приклад 7.1

Визначити максимальні головні та дотичні напруження у виділеному елементі деформованого тіла аналітично та графічним методом (Рис. 7.11). Вихідні данні:

$$\sigma_x = 20 \text{ МПа}; \sigma_y = 60 \text{ МПа}; \tau_{xy} = 40 \text{ МПа}$$

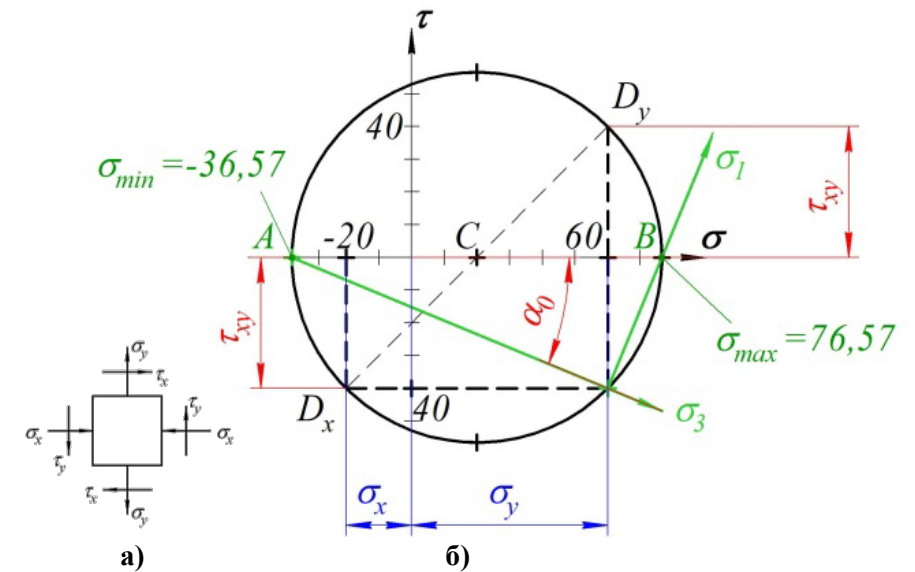


Рисунок 7.11 – Приклад побудови круга Мора

1. Аналітичний спосіб

Положення головних площадок визначаємо за формулою:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y},$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \alpha_0.$$

Якщо кут α_0 від'ємний, то виділений елемент необхідно повернути (орієнтувати) на даний кут за годинниковою стрілкою (Рис. 7.11, б). На головних площадках дотичні напруження дорівнюють нулю, а нормальні напруження – екстремальні, значення їх обчислюємо за формулою

$$\sigma_{n_{max/min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Індекси екстремальним (головним) напруженням слід розставляти так, щоб виконувалась нерівність $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Так як у нашому прикладі є додатне і від'ємне екстремальне напруження, то між ними є число нуль.

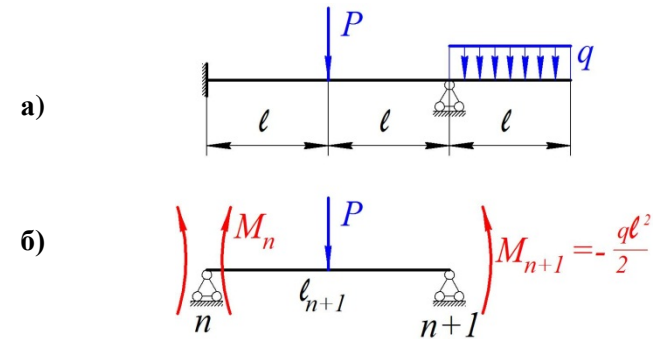
Тому $\sigma_{max} = \sigma_1 = 76,57$ МПа; $\sigma_2 = 0$;
 $\sigma_{min} = \sigma_3 = -36,57$ МПа.

Максимальне головне напруження (σ_1) діє на площадці, нормаль до якої відхиляється на кут α_0 від напрямку алгебраїчно більшого нормального напруження, тобто σ_y (Рис. 7.11, б).

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Максимальні дотичні напруження діють на площадках, які завжди орієнтовані під кутом 45° до напрямку головних напружень (Рис. 7.11, б).

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = 76,57 \text{ МПа}; \sigma_2 = 0; \sigma_{min} = \sigma_3 = -35,57 \text{ МПа}.$$



а) задана система;
 б) еквівалентна система
 Рисунок 18.11 – Балка з затисненим кінцем

Рівняння трьох моментів для таких балок має вигляд

$$\bar{0}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) - \frac{Pl}{2}l_{n+1} = -6EJ_x(\varphi_{\text{лів}} + \varphi_{\text{прав}}), \quad (18.15)$$

де l_n – фіктивний прольот, на якому $M_{n-1} = 0$, $M_n = 0$.

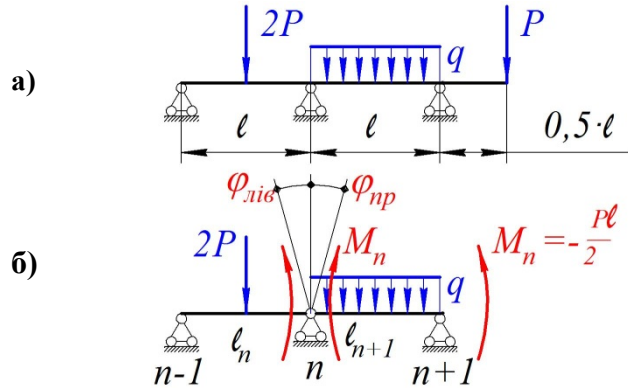
Правило знаків в рівнянні трьох моментів для кута нахилу (Рис. 18.12).

Якщо кут нахилу іде в середину прольоту, то в рівнянні трьох моментів він додатний (Рис. 18.12, а). Якщо кут нахилу іде за прольот – в рівнянні трьох моментів він від'ємний (Рис. 18.12, б).

Якщо обчислений згинальний момент стискає верхні волокна балок прольоту, то він додатний. Якщо обчислений момент від'ємний, то його потрібно направити так, щоб він стискав нижні волокна балки на прольоті.

Кут нахилу на прольоті визначають будь-яким відомим методом (Мора або Верещагіна).

2. Якщо балка має **консоль з навантаженням**, то в еквівалентній системі згинальний момент на цій опорі дорівнює моменту від навантаження, прикладеного на консолі відносно цієї опори.



а) задана система;

б) еквівалентна система

Рисунок 18.10 – Балка має консоль з навантаженням

Рівняння трьох моментів для такої системи має вигляд

$$\bar{0}\ell_n + 2M_n(\ell_n + \ell_{n+1}) - \frac{Pl}{2}\ell_{n+1} = -6EJ_x(\varphi_{\text{лів}} + \varphi_{\text{прав}}). \quad (18.14)$$

3. Якщо **кінець балки затиснутий**, то затиснення потрібно змінити додатковим прольотом нескінченно малої довжини, або нескінченно великої жорсткості (Рис. 18.11).

2. Графічний спосіб.

Для даних цієї задачі знайдемо рішення з використанням графічного способу. По відомим напруженням σ_x , σ_y , τ_{xy} на довільних площадках потрібно знайти головні напруження σ_1 , σ_3 та положення головних площадок. По вісі σ відкладемо відрізки, рівні за величиною σ_x і σ_y .

З отриманих точок в напрямку вісі τ відкладаємо відрізки відповідні τ_{xy} . Аналогічно побудуємо точки D_x і D_y , рівні напруженням τ_{xy} , $-\tau_{xy}$. Поєднавши точки D_x і D_y , отримаємо точку C перетину відрізка D_xD_y з віссю σ . Навколо точки C опишемо круг діаметром D_xD_y . Це і є круг напружень Мора.

Точки A і B перетину круга з віссю σ відповідають головним напруженням σ_1 і σ_3 . Для визначення напрямку головних площадок з точки D_x проведемо пряму паралельно вісі σ до перетину з кругом в точці M , яка називається **полюсом**. Поліус може займати різні положення на крузі в залежності від величин та знаків напружень σ і τ . Якщо з полюса провести пряму паралельну нормалі до площадці, яку визначає кут α , то координати точки на колі будуть відповідно дорівнювати σ_α і τ_α . Прямі, проведені з полюса в точки A і B , відповідають напрямку головних напружень σ_1 і σ_3 відповідно.

7.6 Зворотна задача в плоскому напруженому стані

Іноді потрібно вирішувати задачу зворотну розглянутої у попередньому підрозділі, тобто по відомим напруженням σ_α , τ_α , σ_β , τ_β потрібно знайти головні напруження.

Вирішимо цю задачу, користуючись кругом напружень. Припустимо, що відомі напруження σ_α , τ_α , σ_β , τ_β на взаємно перпендикулярних площадках виділеного елемента (Рис. 7.12, а) і $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$, а $\tau_\alpha > 0$. В системі прямокутних координат $\sigma \sim \tau$ виберемо точку D_α з координатами σ_α , τ_α та точку D_β з координатами σ_β , τ_β (Рис. 7.12, б).

Як значиться при розгляді прямої задачі, точки D_α та D_β лежать на кінцях одного діаметра круга Мора. Далі знаходимо центра круга – точку C і радіус $CD_\alpha = CD_\beta$. Будуємо круг з таким радіусом. Абсиси точок перетину круга з віссю σ – відрізки OA та OB – дають значення головних напружень σ_1 і σ_2 .

Для визначення положення головних площадок знайдемо полюс та скористаємось його властивостями.

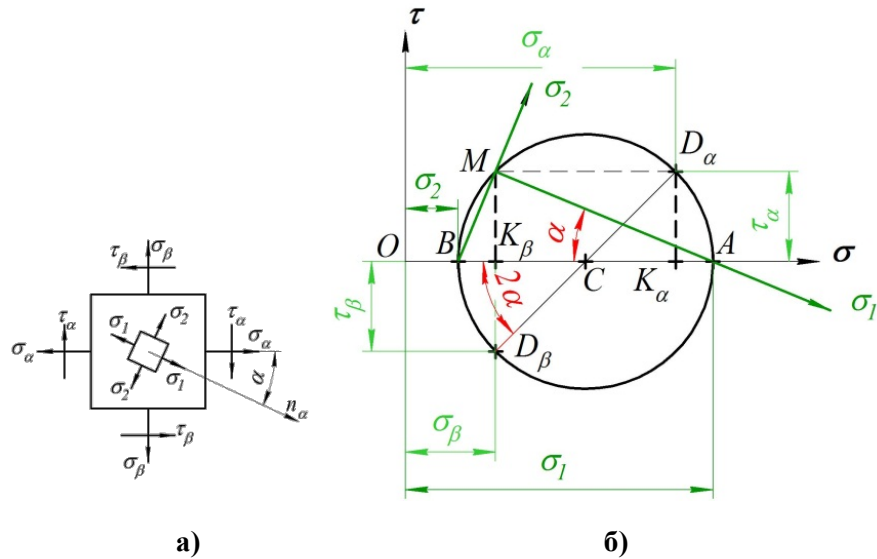


Рисунок 7.12 – Зворотна задача

З цією метою з точки D_α проведемо лінію паралельну лінії дії σ_α . Точка M перетину цієї лінії з кругом і буде полюсом. Поєднаємо полюс M з точками A та B , і отримаємо напрям головних напружень σ_1 і σ_2 .

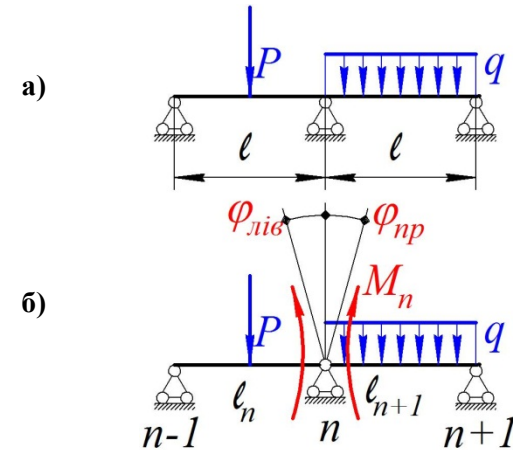
Головні площадки перпендикулярні до знайдених напрямів головних напружень. На рис. 7.12, а) всередині вихідного елемента видалимо елемент, обмежений головними площадками і покажемо головні напруження σ_1 і σ_2 .

За допомогою круга Мора визначимо аналітичні вирази головних напружень σ_1 і σ_2 .

Теорема о фiктивних реакцiях: сума фiктивних реакцiй на кожнiй промiжнiй опорi повинна дорiвнювати нулю.

18.3 Окремi випадки застосування рiвняння трьох моментiв

1. Якщо на крайнiх опорах балки вiдсутнi зосередженi моменти, то в рiвняннi трьох моментiв, моменти на цих опорах будуть нульовими.



а) задана система;
б) еквiвалентна система

Рисунок 18.9 – На крайнiх опорах балки вiдсутнi зосередженi моменти

Для такої системи рiвняння трьох моментiв має вигляд:

$$\bar{0}\ell_n + 2M_n(\ell_n + \ell_{n+1}) + 0\ell_{n+1} = -6EJ_x(\varphi_{\text{лiв}} + \varphi_{\text{прав}}), \quad (18.13)$$

де $\varphi_{\text{лiв}}$ – кут нахилу правого торця балки на прольотi ℓ_n вiд дiї сили P ;

$\varphi_{\text{прав}}$ – кут нахилу лiвого торця балки на прольотi ℓ_{n+1} вiд дiї розподiленого навантаження.

Таким чином ми отримали **рівняння трьох моментів**.

Для вирішення задачі з використанням трьох моментів потрібно скласти стільки рівнянь, скільки маємо проміжних опор заданої балки. При цьому один і той же прольот повинен ввійти в рівняння два рази. Розв'язують систему рівнянь методом послідовного виключення невідомих.

Кут повороту опорного перерізу n лівого прольоту дорівнює поперечній силі, поділеній на жорсткість, для відповідної фіктивної балці:

$$\varphi_n^{\text{лів}} = \frac{Q_n^{\text{лів}}}{EJ_x} = \frac{R_n^{\text{лів}}}{EJ_x}, \quad (18.10)$$

так як поперечна сила $Q_n^{\text{лів}}$ в опорному перерізі дорівнює опорній реакції фіктивної балки $R_n^{\text{лів}}$.

Для правого прольота кут повороту:

$$\varphi_n^{\text{прав}} = \frac{Q_n^{\text{прав}}}{EJ_x} = \frac{R_n^{\text{прав}}}{EJ_x}. \quad (18.11)$$

Підставимо в рівняння (18.1) замість кутів φ їх вирази з (18.10) і (18.11) та отримаємо

$$\varphi_n^{\text{лів}} + \varphi_n^{\text{прав}} = \frac{Q_n^{\text{лів}}}{EJ_x} + \frac{Q_n^{\text{прав}}}{EJ_x} = \frac{R_n^{\text{лів}}}{EJ_x} + \frac{R_n^{\text{прав}}}{EJ_x} = 0, \quad (18.12)$$

або

$$R_n^{\text{лів}} + R_n^{\text{прав}} = 0. \quad (18.12')$$

Величини $R_n^{\text{лів}}$ та $R_n^{\text{прав}}$ представляють собою реакції на опори n лівого і правого прольотів фіктивної балки (Рис. 18.7 і 18.8). таким чином теорема о трьох моментах може бути сформульована так:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= OA = OC + CA; \\ \sigma_2 &= OB = OC - CB. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Отже,

$$OC = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2}; \quad (7.15)$$

$$AC = CB = CD_\alpha = \sqrt{CK_\alpha^2 + D_\alpha K_\alpha^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}. \quad (7.16)$$

Підставивши (7.16) та (7.15) в (7.14), отримаємо:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \left(\frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}; \\ \sigma_1 &= \left(\frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}; \end{aligned} \quad (7.17)$$

або

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right]; \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Враховуючи прийняте правило знаків, знайдемо формулу для тангенса кута нахилу головного напруження відносно осі σ . З рис. 7.12, б) видно, що

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{MK_\beta}{AK_\beta} = -\frac{MK_\beta}{OA - OK_\beta} = \frac{-\tau_\beta}{\sigma_1 - \sigma_\beta}.$$

Отже,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\tau_{\beta}}{\sigma_1 - \sigma_{\beta}}. \quad (7.18)$$

Ця формула і визначає єдине значення кута α , на який треба повернути нормаль n_{α} , щоб знайти напрям алгебраїчно більшого головного напруження.

7.7 Об'ємний напружений стан (о.н.с.)

У розрахунковій практиці о.н.с. зустрічається рідко, тому що завжди можна знехтувати меншим напруженням і звести до плоского або навіть лінійного напруженого стану. Однак, якщо всі три головних напруження величини одного порядку, то

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3, \\ \tau_{\alpha} &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_{\alpha}^2}, \\ \tau_{max} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \end{aligned}$$

Площинки, рівнонахильні до головних осей, називаються «октаедричними», а напруження, що діють на даних площадках, — **октаедричними** (Рис.7.13).

Характеристики цих площадок:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha \quad ; \quad \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 &= 1; \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{3}; \quad \sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \\ \tau_{\text{окт}} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \end{aligned}$$

\bar{Y}_1 — ордината під центром ваги вантажної епюри на епюрі одиничного моменту \bar{M}_{n+1}

$$\bar{Y}_1 = \frac{\bar{M}_{n+1}}{2}.$$

$$\varphi_{Mn} = \frac{\omega_2 \cdot \bar{Y}_2}{EJ_x} = \frac{1}{EJ_x} \frac{q \ell_{n+1}^3 \bar{M}_n}{6 \cdot 2} = \frac{q \ell_{n+1}^3 \bar{M}_n}{12EJ_x}, \quad (18.8)$$

ω_2 — площа вантажної епюри моментів від розподіленого навантаження q :

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{2}{3} h_2 \ell_{n+1} = \frac{2}{3} \frac{q \ell_{n+1}^2 (\ell_{n+1})}{4} = \frac{q \ell_{n+1}^3}{6}; \\ h_2 &= \frac{q \ell_{n+1}}{2} \cdot \frac{\ell_{n+1}}{2} = \frac{q \ell_{n+1}^2}{4}. \end{aligned}$$

\bar{Y}_2 — ордината під центром ваги вантажної епюри на епюрі одиничного моменту \bar{M}_n

$$\bar{Y}_2 = \frac{\bar{M}_n}{2}.$$

Підставляючи значення кутів повороту перерізів (18.5-18.8) в рівняння (18.4), маємо

$$\begin{aligned} \frac{P \ell_n^2 \bar{M}_{n-1}}{8EJ_x} + \frac{P \ell_n^2 \bar{M}_n}{8EJ_x} + \frac{q \ell_{n+1}^3 \bar{M}_{n+1}}{12EJ_x} + \frac{q \ell_{n+1}^3 \bar{M}_n}{12EJ_x} &= -(\varphi_P^{\text{лів}} + \varphi_q^{\text{прав}}), \\ \frac{P \ell_n^2 \bar{M}_{n-1}}{8EJ_x} + \frac{q \ell_{n+1}^3 \bar{M}_{n+1}}{12EJ_x} + \frac{\bar{M}_n (3P \ell_n^2 + 2q \ell_{n+1}^3)}{24EJ_x} &= -(\varphi_P^{\text{лів}} + \varphi_q^{\text{прав}}) \\ 3\bar{M}_{n-1} P \ell_n^2 + 2\bar{M}_{n+1} q \ell_{n+1}^3 + \bar{M}_n (3P \ell_n^2 + 2q \ell_{n+1}^3) &= \\ &= -24EJ_x (\varphi_P^{\text{лів}} + \varphi_q^{\text{прав}}). \end{aligned} \quad (18.9)$$

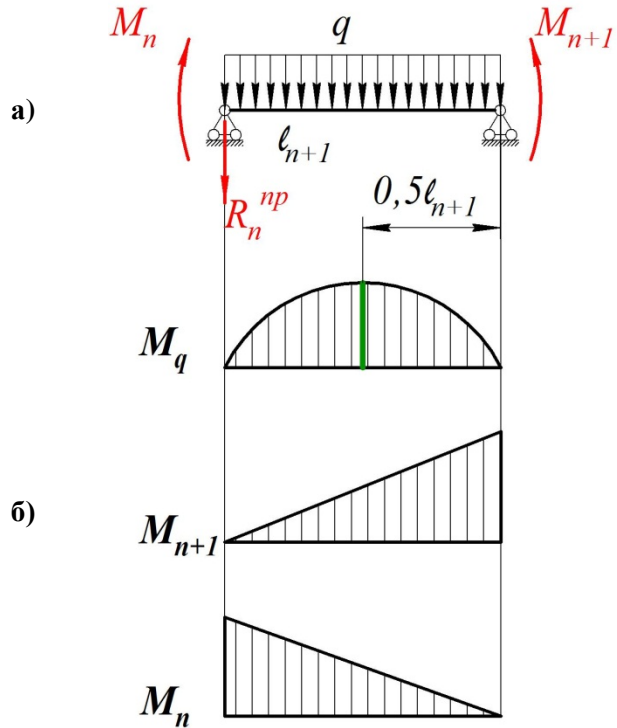


Рисунок 18.8 – Правий прольот балки з епорами

$$\varphi_{M_{n+1}} = \frac{\omega_2 \cdot \bar{Y}_1}{EJ_x} = \frac{1}{EJ_x} \frac{q \ell_{n+1}^3 \bar{M}_{n+1}}{6 \cdot 2} = \frac{q \ell_{n+1}^3 \bar{M}_{n+1}}{12EJ_x}, \quad (18.7)$$

де ω_2 – площа вантажної епюри моментів від розподіленого навантаження q :

$$\omega_2 = \frac{2}{3} h_2 \ell_{n+1} = \frac{2}{3} \frac{q \ell_{n+1}^2 (\ell_{n+1})}{4} = \frac{P \ell_{n+1}^3}{6};$$

$$h_2 = \frac{q \ell_{n+1}}{2} \cdot \frac{\ell_{n+1}}{2} = \frac{q \ell_{n+1}^2}{4}.$$

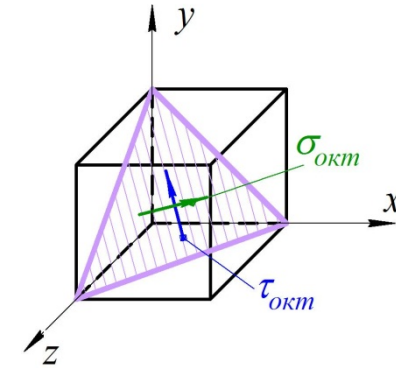


Рисунок 7.13 – Октаедричні напруження

7.8 Деформації при об’ємному напруженому стані. Узагальнений закон Гука

Досліджуючи деформації й розглядаючи питання при об’ємному та плоскому станах, будемо крім основних гіпотез та припущень вважати, що матеріал відповідає закону Гука, а деформації малі.

Дослідженнями простого розтягання–стискання, встановлено, що **відносна повздовжня деформація**

$$\varepsilon = \sigma / E, \quad (7.19)$$

а відносна поперечна деформація

$$\varepsilon' = -\mu \sigma / E, \quad (7.20)$$

де $\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ – **безрозмірний коефіцієнт Пуассона**.

Для абсолютно крихкого матеріалу коефіцієнт Пуассона дорівнює 0, для абсолютно пружного – 0,5. Для більшості сталей цей коефіцієнт дорівнює приблизно 0,3, для гуми він приблизно дорівнює 0,49. Коефіцієнт Пуассона може бути від’ємним, хоча

така ситуація екзотична. Це значить, що при розтяганні поперечні розміри тіла збільшуються. Матеріали з такими властивостями отримали назву «ауксетики», це полімери.

Встановимо залежності між деформацією та напруженнями в загальному випадку об'ємного напруженого стану.

Розглядаючи деформування елемента з розмірами $a \times b \times c$ у загальному випадку о.н.с. від головних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, (Рис. 7.14), застосовуючи закон Гука і принцип суперпозиції, дістанемо вирази для **головних відносних подовжень**.

Внаслідок деформації ребра елемента змінюють свою довжину і дорівнюють $(a + \Delta a)$; $(b + \Delta b)$; $(c + \Delta c)$.

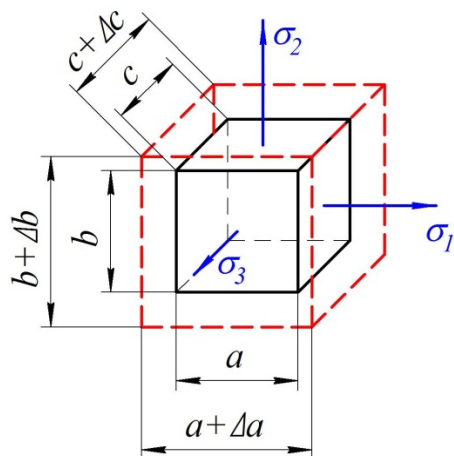


Рисунок 7.14 – Головні напруження і головні подовження

Величини

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}; \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}; \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}$$

називаються **головними подовженнями** і є **відносними подовженнями в головних напрямках**.

Застосовуючи принцип суперпозиції, можна записати

\bar{y}_2 – ордината під центром ваги вантажної епюри на епюрі одиничного моменту \bar{M}_n

$$\bar{y}_2 = \frac{\bar{M}_n}{2}$$

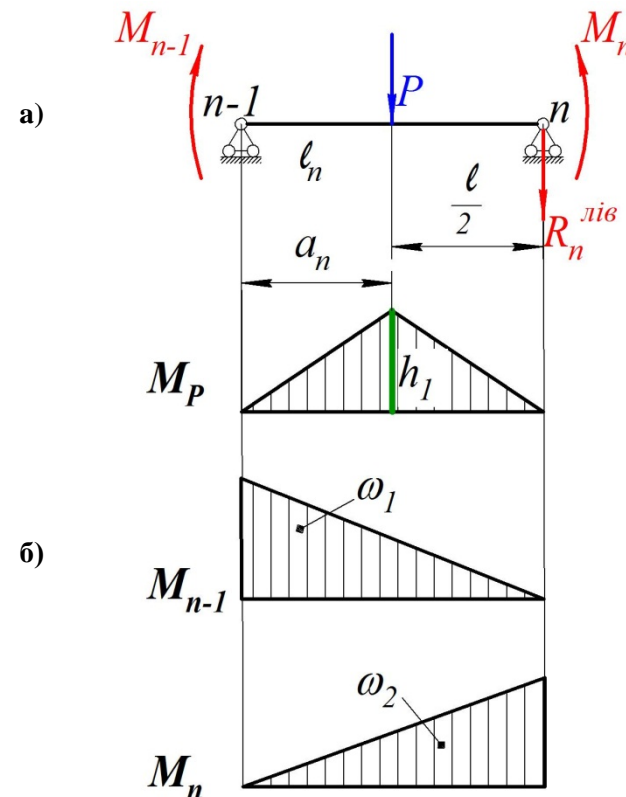


Рисунок 18.7 – Лівий прольот балки з епюрами

Розглянемо правий прольот довжиною ℓ_{n+1} .

Використовуючи спосіб Верещагіна знаходимо кути повороту перерізу n від згинальних моментів \bar{M}_{n+1} , \bar{M}_n і розподіленого навантаження q .

а) епюра згинального моменту від зовнішніх сил (q) з вантажною площею ω_{n+1} та відстанню від центру ваги цієї площі до правої опори b_{n+1} .

б) трикутна епюра згинального моменту від додатного опорного моменту $\bar{M}_{n+1} = 1$;

в) трикутна епюра згинального моменту від додатного опорного моменту $\bar{M}_n = 1$.

Розглянемо лівий прольот довжиною ℓ_n .

Використовуючи спосіб Верещагіна знаходимо кути повороту перерізу n від згинальних моментів \bar{M}_{n-1}, \bar{M}_n і навантаження P .

$$\varphi_{M_{n-1}} = \frac{\omega_1 \cdot \bar{Y}_1}{EJ_x} = \frac{1}{EJ_x} \frac{P\ell_n^2}{4} \frac{\bar{M}_{n-1}}{2} = \frac{P\ell_n^2 \bar{M}_{n-1}}{8EJ_x}, \quad (18.5)$$

де ω_1 – площа вантажної епюри моментів від сили P :

$$\omega_1 = h_1 \ell_n = \frac{P\ell_n}{4} \ell_n = \frac{P\ell_n^2}{4};$$

$$h_1 = \frac{P}{2} \cdot \frac{\ell_n}{2} = \frac{P\ell_n}{4}.$$

\bar{Y}_1 – ордината під центром ваги вантажної епюри на епюрі одиничного моменту \bar{M}_{n-1}

$$\varphi_{M_n} = \frac{\omega_1 \cdot \bar{Y}_2}{EJ_x} = \frac{1}{EJ_x} \frac{P\ell_n^2}{4} \frac{\bar{M}_n}{2} = \frac{P\ell_n^2 \bar{M}_n}{8EJ_x}, \quad (18.6)$$

де ω_1 – площа вантажної епюри моментів від сили P :

$$\omega_1 = h_1 \ell_n = \frac{P\ell_n}{4} \ell_n = \frac{P\ell_n^2}{4};$$

$$h_1 = \frac{P}{2} \cdot \frac{\ell_n}{2} = \frac{P\ell_n}{4}.$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''',$$

де ε_1' – відносне подовження в напрямі σ_1 спричинене тільки напруженням σ_1 ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$); ε_1'' – відносне подовження в тому самому напрямі, спричинене дією тільки σ_2 ; ε_1''' – подовження, спричинене дією σ_3 .

Оскільки напрям σ_2 для самого напруження σ_1 є поздовжнім (він розтягує грань a), а σ_2 і σ_3 є поперечними (вони звужують грань a), то, застосовуючи формули (7.19) та (7.20), знаходимо, що:

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_1'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_1''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Склавши ці величини, матимемо:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Аналогічно дістанемо формули й для двох інших подовжень σ_2 і σ_3 . Тоді

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

Ці формули представляють собою **узагальнений закон Гука** для ізотропного тіла, тобто залежність між деформаціями та головними напруженнями в випадку тривісного напруженого стану.

Зауважимо, що стискаючи напруження підставляються у ці формули із знаком «мінус». З формул (7.21) легко дістати формули Гука для плоского напруженого стану. Наприклад, при $\sigma_2 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu\sigma_3]; \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\mu}{E} [\sigma_1 + \sigma_3]; \\ \varepsilon_3 &= -\frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu\sigma_1]. \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Об'ємна деформація

Встановимо залежність зміни об'єму ε_V від дії головних напружень. До деформації елемент займав об'єм $V_0 = abc$. У деформованого стані його об'єм:

$$\begin{aligned} V &= (a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b) \cdot (c + \Delta c) = \\ &= abc \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) = \\ &= V_0 (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) = \\ &= V_0 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3). \end{aligned}$$

Враховуючи малість відносних лінійних деформацій, останніми чотирма членами можна знехтувати. Тоді відносна зміна об'єму буде:

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{V_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Виразивши головні подовження через головні напруження згідно з (7.21), дістанемо

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2\mu}{E} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \quad (7.23)$$

де $\varphi_{M_{n-1}}$ – кут повороту перерізу n від згинального моменту M_{n-1} на прольоті ℓ_n .

φ_{M_n} – кут повороту перерізу n від згинального моменту M_n на прольоті ℓ_n .

$\varphi_P^{лів}$ – кут повороту перерізу n від сили P на прольоті ℓ_{n+1} .

Використовуючи умову 18.1 запишемо:

$$\varphi_{M_{n-1}} + 2\varphi_{M_n} + \varphi_{M_{n+1}} = -(\varphi_P^{лів} + \varphi_q^{прав}). \quad (18.4)$$

Для визначення кутів повороту, які входять в рівняння 18.4 розглянемо дві самостійні балки на прольотах ℓ_n і ℓ_{n+1} .

Кути повороту перерізів в основній системі на опорі n залежать від деформацій тільки двох суміжних прольотів ℓ_n і ℓ_{n+1} . Розглянемо ці два прольоти. На прольот ℓ_n діють зовнішня сила P та опорні моменти M_n та M_{n-1} ; на прольот ℓ_{n+1} діє зовнішнє розподілене навантаження інтенсивністю q та опорні моменти M_n та M_{n+1} .

Для наочності схеми обидва суміжних прольоти показано окремо.

Щоб обчислити кути повороту скористаємося **графо-аналітичним методом**. Фіктивні балки представляють собою теж шарнірно-оперті балки (Рис. 18.7, а, та Рис.18.8,а).

Вантажна епюра – це епюра моментів від загального навантаження.

Фіктивні навантаження лівого прольоту ℓ_n :

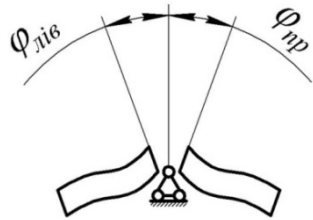
а) вантажна епюра згинального моменту від зовнішнього навантаження P з площею ω_n та відстанню від центру ваги цієї площі до лівої опори a_n ;

б) трикутна епюра згинального моменту від додаткового опорного моменту $\bar{M}_{n-1} = 1$;

в) трикутна епюра згинального моменту від додатного опорного моменту $\bar{M}_n = 1$.

На праву фіктивну балку прольоту ℓ_{n+1} діє розподілене навантаження. Будуємо епюри (Рис. 18.8, б):

Кут повороту перерізу на опорі n лівого прольоту від опори перерізу позначимо $\varphi_{n \text{ лів}}$, а кут повороту для правого прольоту позначимо $\varphi_{n \text{ прав}}$.



В нерозрізній балці обидва прольотні перерізи співпадають, це лише різні сторони одного і того ж опорного перерізу, тому умовою сумісності деформацій буде

Рисунок 18.5 – Кути повороту перерізів балки на опорі

$$\varphi_{\text{лів}} + \varphi_{\text{прав}} = 0. \quad (18.1)$$

Таку умову ми можемо скласти для кожної з проміжних опор, і написати стільки додаткових рівнянь, скільки ми маємо невідомих моментів.

Пояснимо як складаються умови (18.1) на прикладі (Рис. 18.6). Виділимо з балки, (рис 18.4, в) два суміжних прольота і запишемо умову (18.1):

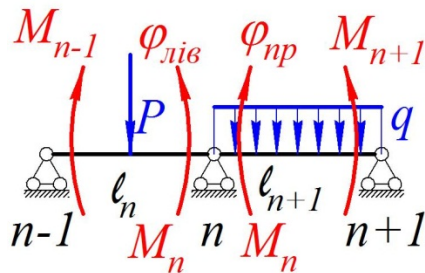


Рисунок 18.6 – Два суміжних прольоти

$$\varphi_{\text{лів}} = \varphi_{M_{n-1}} + \varphi_{M_n} + \varphi_P^{\text{лів}}; \quad (18.2)$$

$$\varphi_{\text{прав}} = \varphi_{M_{n+1}} + \varphi_{M_n} + \varphi_q^{\text{прав}}, \quad (18.3)$$

Зокрема, при рівномірному всебічному стисканні, коли

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -P,$$

$$\varepsilon_V = \frac{-P}{K},$$

де

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \quad (7.24)$$

Величина K називається **модулем об'ємної деформації**.

Із формули (7.23) видно, що коли коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,5$ (наприклад, гума), об'єм тіла не змінюється.

7.9 Потенціальна енергія деформації

Потенціальною енергією деформації називають енергію, що накопичується в тілі при його пружному деформуванні і позначають U . Значення потенціальної енергії деформації, яке припадає на одиницю об'єму (1 см^3) тіла, називають питомою потенціальною енергією деформації і позначають u .

Потенціальна енергія деформації чисельно дорівнює роботі зовнішніх сил, яка витрачається при пружному деформуванні, тобто

$$U = A_p. \quad (7.25)$$

У межах пружності повна робота деформації визначається площею трикутника OAK (Рис.7.15):

$$A_p = \frac{P \cdot \Delta \ell}{2}. \quad (7.25')$$

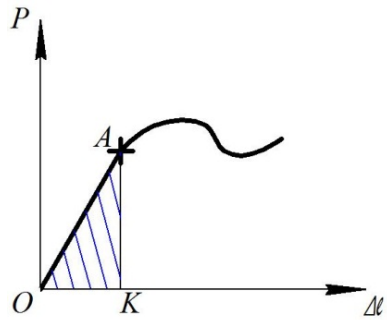


Рисунок 7.15 – Діаграма розтягання

При простому розтяганні (стисканні):

$$U = \frac{P \cdot \Delta \ell}{2}. \tag{7.26}$$

Питома потенціальна енергія:

$$u = \frac{P \cdot \Delta \ell}{2F \ell} = \frac{\sigma \varepsilon}{2}. \tag{7.27}$$

Враховуючи, що

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

матимо

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}. \tag{7.28}$$

якщо взяти кубик з довжиною ребер, що дорівнює 1, на яких діють головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, то ці зусилля здійснюють переміщення $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ оскільки ребра мають одиничну довжину. На підставі формули (7.27) будемо мати:

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}. \tag{7.29}$$

еквівалентній системі в точках введення шарніру прикладаємо фіктивні згинальні моменти і добираємо їх значення і напрямлення таким чином, щоб розрізана балка працювала як ціла. Момент має назву таку ж як і опора, біля котрої він прикладений.

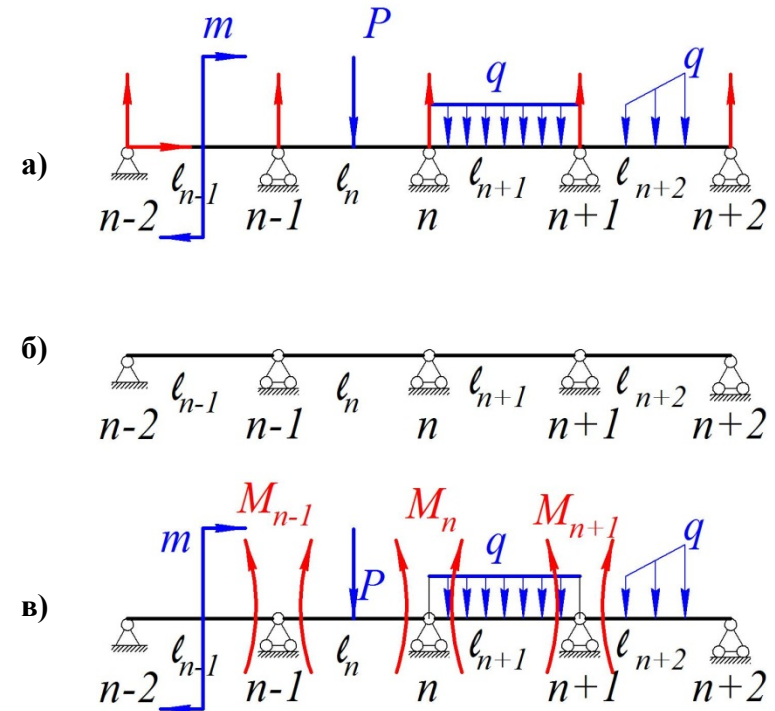


Рисунок 18.4 – Багатопрольотна балка:

- а) задана система;
- б) основна система;
- в) еквівалентна система.

В основній системі обидві сторони n -го опорного перерізу можуть повертатися під навантаженням незалежно одна від іншої (Рис. 18.5).

зовнішню силу – одну з опорних реакцій, а величину згинального моменту в цьому перерізі.

Положення перерізу D може бути взяте довільно; обчислення виходять найбільш простими, якщо поєднати точку D з опорним перерізом над проміжною опорою – точкою B , взяти за «зайву» невідому **опорний момент** в перерізі B . Тоді основна система буде двома простими балками, на шарнірних опорах в точках A, B і C , які мають загальну опору в точці B . Саме так і вибирають основну систему при розрахунку нерозрізних балок. За «зайві» невідомі вибирають величини згинальних опорних моментів $M_1, M_3, \dots, M_{n-1}, M_n, M_{n+1}$ над усіма проміжними опорами. При такому виборі «зайвих» невідомих рівняння для їх визначення спрощуються і можуть бути складені в загальному вигляді за допомогою теореми про три моменти.

18.2. Рівняння трьох моментів

Для виводу **теореми о трьох моментах** розглянемо нерозрізну балку с рядом прольотів різної довжини l_1, l_2 і т.д. з різноманітними навантаженнями (Рис. 18.4, а). **Опори нумеруються зліва направо, позначаючи крайню ліву номером 0, номер прольоту визначають за номером правої опори.** Спочатку покажемо всі реакції, які виникають в даному випадку; із умов статички горизонтальна реакція $H = 0$.

Для того, щоб отримати основну систему (Рис. 18.4, б) додамо в опорних перерізах шарніри. Додатковими невідомими будуть опорні моменти на проміжних опорах M_{n-1}, M_n, M_{n+1} . **Моменти на крайніх опорах дорівнюють нулю.**

Навантажимо основну систему зовнішніми навантаженнями та опорними моментами (еквівалентна система) (див. рис. 18.4, в).

Вставлені шарніри в основній системі дозволяють балці деформуватися від зовнішнього навантаження в межах одного прольоту. Для того, щоб основна система працювала як задана, в

Підставивши в ці формули значення $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ із загального закону Гука (7.21), знайдемо:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \quad (7.30)$$

При деформуванні елемента змінюється як його об'єм, так і форма (з кубика він перетворюється на паралелепіпед). Тоді повна питома потенціальна енергія деформації:

$$u = u_V + u_\Phi, \quad (7.31)$$

де u_V – питома потенціальна енергія зміни об'єму, u_Φ – енергія, яка накопичується внаслідок зміни форми елемента:

$$u_V = \frac{1 - 2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad (7.32)$$

$$\begin{aligned} u_\Phi &= \frac{1 + \mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) = \\ &= \frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \end{aligned} \quad (7.33)$$

7.10 Контрольні запитання

1. Внаслідок чого в тілі виникають напруження?
2. Значення індексів при позначенні напружень.
3. Які напруження називаються головними?
4. Як позначаються головні напруження?
5. У чому полягає закон парності дотичних напружень?
6. Три види напруженого стану.
7. Правило знаків для визначення напружень.

8. В якому перетині бруса при розтягуванні виникають максимальні нормальні напруження і в якому перетині - максимальні дотичні напруження?
9. Який стан матеріалу називається лінійним, плоским і об'ємним напруженим станом?
10. Круг Мора. Принцип побудови та можливості використання.
11. Які площадки в тілі називають головними?
12. Узагальнений закон Гука.
13. Потенціальна енергія деформації.
14. Коефіцієнт Пуасона.
15. Пряма задача в плоскому напруженому стані.
16. Зворотна задача в плоскому напруженому стані.
17. Написати тензор напружень.

статично визначувану, а потім подивитися, які зусилля або реакції довелося б при цьому відкинути. Ці величини і будуть «зайвими» невідомими в нашій статично невизначуваній системі.

Так, в нерозрізній балці (Рис. 18.3, а) можна прийняти за зайву невідому реакцію середньої опори B ; тоді основною системою буде балка на двох опорах A і C ; але можна перетворити дану балку на статично визначувану шляхом додання додаткового шарніра в точці D (Рис. 18.3, б). Тоді вийде основна система, що складається з консольної балки CBD і підвісний AD . Постановка шарніра в перерізі D вимагає, щоб згинальний момент M_D , тобто і нормальне напруження, яке викликається ним, в цьому перерізі дорівнювали нулю.

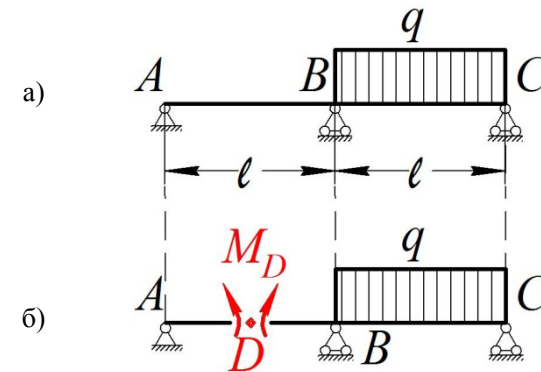


Рисунок 18.3 – Двухпрольотна нерозрізна балка

Таким чином, при переході до основної системи ми відкинули нормальне напруження в перерізі D , що передається від лівої частини на праву, і навпаки; підсумували в парі сил, рівні згинальному моменту в перерізі D ; ці пари, знову прикладені до основної системи, показані на рис. 18.3. Перетворюючи нашу балку на статично визначувану шляхом введення шарніра D , ми за «зайву» невідому обираємо не

Спочатку ми розберемо **випадок шарнірних опор**. Одна з опор нерозрізної балки робиться зазвичай шарнірно-нерухомою, інші – шарнірно-рухомими. Нумерацію опор і прольотів вестимемо з ліва направо, позначаючи крайню ліву опору номером 0 і крайній лівий прольот номером 1. Довжини прольотів позначатимемо буквою l з номером, що відповідає номеру прольоту. Перерізи балки в усіх прольотах вважатимемо однаковими і, отже, жорсткість балки EJ – постійною. На рис. 18.2 зображена нерозрізна балка, вказані прийняті позначення і зображені можливі реакції опор. Як легко бачити, число зайвих опорних реакцій дорівнює числу проміжних опор.

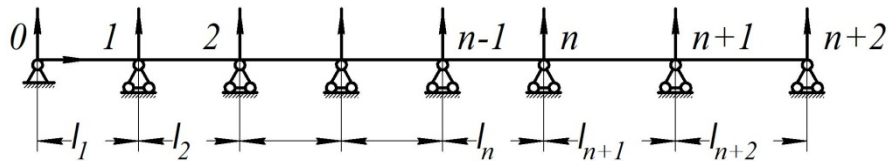


Рисунок 18.2 – Статично невизначувана нерозрізна балка на шарнірних опорах

Застосовуючи описаний вище прийом рішення задачі, слід було б взяти за додаткові невідомі реакції проміжних опор, а за основну систему – балку на шарнірних опорах в точках 0 і $n + 2$. Додатковими рівняннями служили б умови рівності нулю прогинів в точках основної системи, що відповідають проміжним опорам; в цьому випадку всі невідомі входили б в усі рівняння. Проте простішим і поширенішим є інший спосіб, пов'язаний з іншим видом основної системи і додаткових невідомих; при цьому способі в кожне з рівнянь входить не більше трьох невідомих.

Операції вибору зайвої невідомої і основної системи нерозривно пов'язані один з одною; основна статично визначувана система виходить із статично невизначуваної шляхом відкидання опорних закріплень, що викликають опорні реакції, прийняті за «зайві». Можна поступити інакше: перетворити яким-небудь чином невизначувану конструкцію на

8. КРИТЕРІЇ МІЦНОСТІ

8.1 Критерії міцності

Найважливішим завданням інженерного розрахунку є оцінка міцності елементів машин і споруд за відомим напруженим станом.

Небезпечними вважаються напруження, при яких з'являються **залишкові деформації** (наступає пластична деформація), тобто починається руйнування.

Із небезпечних напружень (при відомому коефіцієнті запасу міцності), визначають допустимі напруження при розтяганні $[\sigma_p]$ або стисканні $[\sigma_{ст}]$ при лінійному напруженому стані. Складніше вирішується це питання при плоскому і об'ємному напруженому стані (див. розділ. 7).

У цих випадках, як показують дослідження, для одного і того самого матеріалу небезпечний стан може настати при різних граничних значеннях головних напружень $\sigma_{1н}$, $\sigma_{2н}$, $\sigma_{3н}$ залежно від співвідношення їх.

Тому, на підставі теоретичних і практичних досліджень поведінки різних матеріалів, вводять гіпотезу про переважний вплив на міцність деякого фактора. Вважають, що порушення міцності матеріалу при будь-якому напруженому стані відбудеться тільки тоді, коли цей фактор досягне певного граничного значення. Граничне значення фактора знаходять з випробувань на просте розтягання або стискання, а іноді – на кручення. Отже, для вирішення задач плоского і об'ємного напруженого стану, вводять поняття **критерію міцності**. Він дає можливість складний напружений стан привести до простого і знайти таке еквівалентне (розрахункове) напруження, яке в обох випадках даватиме однаковий коефіцієнт запасу. Під **коефіцієнтом запасу міцності** розуміють число n , що показує, в скільки разів треба одночасно збільшити всі компоненти напруженого стану σ_1 , σ_2 , σ_3 , щоб він став граничним:

$$\sigma_{1H} = n\sigma_1; \quad \sigma_{2H} = n\sigma_2; \quad \sigma_{3H} = n\sigma_3. \quad (8.1)$$

Вибрану таким способом гіпотезу називають **механічною теорією міцності**, або просто **теорією міцності**.

Існують чотири класичні теорії міцності.

I теорія міцності – теорія найбільших нормальних напружень. Згідно з цією теорією руйнування матеріалу буде тоді, коли найбільше нормальне напруження досягає небезпечного значення для даного матеріалу. Умова міцності з коефіцієнтом запасу n має вигляд

$$\sigma_1 = \sigma_{max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_H}{n}, \quad (8.2)$$

де n – коефіцієнт запасу;

σ_H – визначається при простому розтяганні (стисканні).

Дослідна перевірка показує, що ця теорія дає задовільні результати лише для дуже крихких матеріалів (наприклад, для каменя, цегли, кераміки, інструментальної сталі).

II теорія – теорія найбільших лінійних деформацій.

Згідно з цією теорією, критерієм міцності вважають найбільшу за абсолютним значенням лінійну деформацію. Тобто руйнування виникає тоді, коли найбільше лінійне відносне подовження ε_{max} досягає небезпечного значення ε_H . Останнє визначають при простому розтяганні (стисканні) зразків з даного матеріалу. Отже **умова руйнування** має вигляд

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_H, \quad (8.3)$$

а умова міцності:

$$\varepsilon_{max} \leq [\varepsilon] = \frac{\varepsilon_H}{n}. \quad (8.4)$$

Використовуючи узагальнений закон Гука, умову міцності виразимо через напруження $[\sigma] = [\varepsilon] \cdot E$, або $[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$. Якщо

18. БАГАТОПРОЛЬОТНІ НЕРОЗРІЗНІ БАЛКИ

18.1 Розрахунок нерозрізних балок. Основні поняття

Нерозрізною називається статично невизначувана балка, що перекидає декілька прольотів (не менше 2) і проходить над усіма проміжними опорами, з якими вона **сполучена шарнірно**. Крайні опори можуть бути або шарнірними, або жорстко закріпленими (Рис. 18.1). У першому випадку (Рис. 18.1,а) при дії вертикального навантаження горизонтальна реакція в нерухомій опорі дорівнює нулю, і тому число зайвих вертикальних реакцій (і ступінь статичної невизначуваності) **дорівнюватиме числу проміжних опор**. У другому випадку (Рис. 18.1,б) **ступінь статичної невизначуваності дорівнює числу проміжних шарнірних опор**.

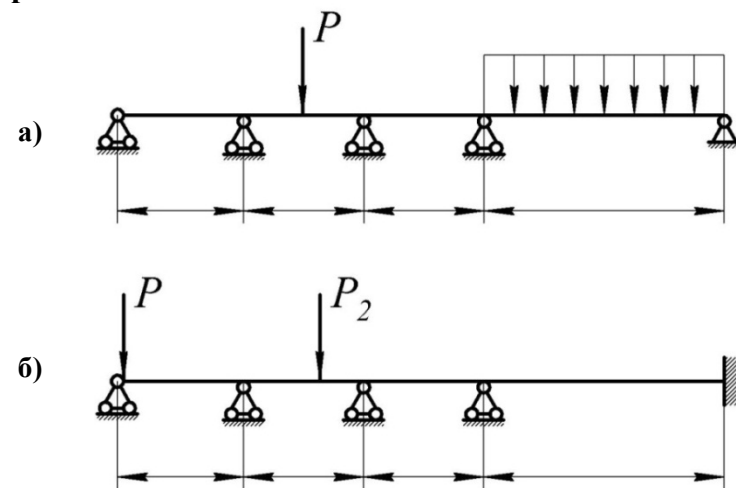


Рисунок 18.1 – Типи нерозрізних балок з крайніми шарнірними опорами (а) і жорстким затисканням (б)

Нерозрізні балки конструюють так, щоб була виключена вірогідність відриву балки від опор.

У таблиці через M_ℓ і Q_ℓ позначено зовнішні зосереджений момент і силу на правій опорі. Якщо на вільних кінцях балки зовнішніх сил і моментів немає, то треба покласти

$$M_0 = Q_0 = M_\ell = Q_\ell = 0.$$

Як видно з таблиці 17.2, при виборі початку координат на лівому кінці однопрогонової балки два початкових параметри завжди відомі. Для визначення двох інших параметрів треба розв'язати систему двох алгебраїчних рівнянь, які складають з умов закріплення правого кінця балки.

17.7 Контрольні запитання

1. Які системи називають статично невизначуваними?
2. Що розуміють під терміном «зайві невідомі»?
3. Послідовність розв'язання статично невизначуваних задач.
4. Наведіть приклад один раз статично невизначуваної балки.
5. Чим відрізняється рама від ферми?
6. Наведіть приклад статично невизначуваної рами.
7. Формула визначення ступенів статичної невизначуваності S плоских систем.
8. Що називається узагальненою силою?
9. Теорема про взаємність робіт і переміщень.
10. Наведіть приклади конструкцій на пружній основі.
11. Диференційні рівняння зогнутої осі балки на пружній основі.

найбільше відносно подовження буде ε_1 , а допустиме напруження дорівнює $[\sigma]$, то з (8.4) маємо:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

або

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (8.5)$$

Як видно з умови міцності (8.5), для II теорії, з допустимим напруженням треба порівнювати не одне з трьох головних напружень, а їх комбінацію. **Еквівалентне напруження** в цьому разі

$$\sigma_{екв}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (8.6)$$

Дослідна перевірка цієї теорії показала узгоджені результати тільки для крихкого стану матеріалу (наприклад: для легованого чавуну або високоміцних сталей низького відпускання).

III теорія - теорія найбільших дотичних напружень.

Згідно з цією теорією руйнування матеріалу буде тоді, коли найбільше дотичне напруження τ_{max} досягне небезпечного значення τ_H , яке визначають при досягненні граничного стану у випадку простого розтягання зразків з даного матеріалу.

Умова руйнування має вигляд

$$\tau_{max} = \tau_H, \quad (8.7)$$

а умова міцності

$$\tau_{max} \leq [\tau] = \frac{\tau_H}{n}. \quad (8.8)$$

Згідно формул (8.7, 8.8) $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$, а $\tau_H = \frac{1}{2}\sigma_H$, то умови (8.7) і (8.8) можна виразити через головні напруження.

Умова руйнування:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_n; \quad (8.9)$$

Умова міцності:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = [\sigma]. \quad (8.10)$$

Отже, еквівалентним напруженням за третьою теорією буде

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (8.11)$$

Третя теорія міцності добре підтверджується дослідженнями для пластичних матеріалів, у яких допустимі напруження на розтягання і стискання однакові. **Недоліком цієї теорії є те, що вона не враховує проміжного головного напруження σ_2 .**

IV теорія – критерій питомої потенціальної енергії деформації формозміни.

Згідно з цією теорією, небезпечний стан (текучість) у загальному випадку напруженого стану виникає тоді, коли. Останнє можна визначити при простому розтяганні в момент настання текучості.

Умова настання текучості:

$$U_\phi = U_{\phi.т.} \quad (8.12)$$

Умова міцності:

$$U_\phi \leq [U_\phi]. \quad (8.13)$$

Припускаючи, що закон Гука справедливий до настання граничного стану, можна питому потенціальну енергію формозміни записати у вигляді:

$$+ \alpha L^2 y_0 Y_3 \left(\frac{x}{L} \right) + \alpha L^3 \varphi_0 Y_4 \left(\frac{x}{L} \right) + \sum M_i Y_1 \left(\frac{x - a_i}{L} \right) - \\ - L \sum P_i Y_2 \left(\frac{x - b_i}{L} \right) + \\ + L^2 \sum q_i \left[Y_3 \left(\frac{x - c_i}{L} \right) - Y_3 \left(\frac{x - d_i}{L} \right) \right]; \quad (17.35)$$

$$Q(x) = Q_0 Y_1 \left(\frac{x}{L} \right) + \\ + \alpha L y_0 Y_2 \left(\frac{x}{L} \right) + \alpha L^2 \varphi_0 Y_3 \left(\frac{x}{L} \right) - \frac{4M_0}{L} Y_4 \left(\frac{x}{L} \right) - \\ - \frac{4}{L} \sum M_i Y_4 \left(\frac{x - a_i}{L} \right) - \sum P_i Y_1 \left(\frac{x - b_i}{L} \right) + \\ + L \sum q_i \left[Y_2 \left(\frac{x - c_i}{L} \right) - Y_2 \left(\frac{x - d_i}{L} \right) \right]. \quad (17.36)$$

Тепер обчислення $y(x), \varphi(x), M(x)$ і $Q(x)$ у будь-якому перерізі балки на пружній основі не спричинять утруднень, якщо відомі початкові параметри y_0, φ_0, Q_0, M_0 . У кожному конкретному випадку початкові параметри можна визначити з умов на кінцях балки. Ці умови для різних випадків закріплення балки наведено в таблиці 17.2 (припускається, що початок координат суміщено з лівим кінцем балки).

Таблиця 17.2 – Таблиця початкових параметрів

Умови закріплення		Переміщення та силові фактори для							
лівого кінця балки	правого кінця балки	лівого кінця ($x = 0$)				правого кінця ($x = \ell$)			
		y_0	φ_0	M_0	Q_0	y_ℓ	φ_ℓ	M_ℓ	Q_ℓ
вільний	вільний	–	–	M_0	Q_0	–	–	M_ℓ	Q_ℓ
--/--	обпертий	–	–	M_0	Q_0	0	–	M_ℓ	–
--/--	затиснутий	–	–	M_0	Q_0	0	0	–	–
обпертий	обпертий	0	–	M_0	–	0	–	M_ℓ	–
--/--	затиснутий	0	–	M_0	–	0	0	–	–
затиснутий	--/--	0	0	–	–	0	0	–	–

При розподілених навантаженнях суми перетворюються на інтеграли від елементарних силових факторів $q d\eta$ для кожної ділянки.

Розглянемо випадок дії рівномірно розподіленого навантаження. Тоді, інтегруючи з урахуванням залежностей (17.31), дістанемо просту формулу:

$$\begin{aligned} \int_c^d q Y_4(\xi - \eta) d\eta &= -\frac{qL}{4} Y_1(\xi - \eta) \Big|_c^d = \\ &= -\frac{qL}{4} [Y_1(\xi - d) - Y_1(\xi - c)]. \end{aligned} \quad (17.32)$$

Отже, при одночасній дії всіх силових факторів і початкових параметрів, повний інтеграл $u(x)$ буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} u(x) &= y_0 Y_1\left(\frac{x}{L}\right) + \varphi_0 L Y_2\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{EJ} \left\{ M_0 L^2 Y_3\left(\frac{x}{L}\right) + Q_0 L^3 Y_4\left(\frac{x}{L}\right) + \right. \\ &+ L^3 \sum M_i Y_3\left(\frac{x - a_i}{L}\right) - L^3 \sum P_i Y_4\left(\frac{x - b_i}{L}\right) + \\ &\left. + \frac{L_4}{4} \sum q_i \left[Y_1\left(\frac{x - c_i}{L}\right) - Y_1\left(\frac{x - d_i}{L}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17.33)$$

Узагальнивши аналогічно вирази для $\varphi(x)$, $M(x)$ і $Q(x)$, отримаємо універсальні рівняння методу початкових параметрів для балки на пружній основі:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_0 Y_1\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{EJ} \left\{ M_0 L Y_2\left(\frac{x}{L}\right) + Q_0 L^2 Y_3\left(\frac{x}{L}\right) + \right. \\ &+ \alpha L^3 y_0 Y_4\left(\frac{x}{L}\right) + L \sum M_i Y_2\left(\frac{x - a_i}{L}\right) - L^2 \sum P_i Y_3\left(\frac{x - b_i}{L}\right) + \\ &\left. + L^3 \sum q_i \left[Y_4\left(\frac{x - c_i}{L}\right) - Y_4\left(\frac{x - d_i}{L}\right) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (17.34)$$

$$M(x) = M_0 Y_1\left(\frac{x}{L}\right) + Q_0 L Y_2\left(\frac{x}{L}\right) +$$

$$U_\phi = \frac{1 + \mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]. \quad (8.14)$$

При простому розтяганні в момент текучості ($\sigma_1 = \sigma_T$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) маємо

$$U_{\phi.T.} = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma_T^2. \quad (8.15)$$

Підставляючи (8.14) і (8.15) в умову (8.12), отримаємо

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_T. \quad (8.16)$$

Умова міцності при цьому має вигляд

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \frac{\sigma_T}{n} = [\sigma], \quad (8.17)$$

а еквівалентне напруження за четвертою теорією

$$\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}.$$

Дослідження добре підтверджують четверту теорію для пластичних матеріалів при розтяганні та стискання. Для цих матеріалів розрахунки по четвертій теорії більш точні, ніж по третій теорії.

8.2 Поняття про теорію Мора

Критерій Мора ґрунтується на припущенні, що міцність матеріалів у загальному випадку напруженого стану залежить в

основному від значення і знаку найбільшого σ_1 і найменшим σ_3 головних напружень. Середнє за модулем головне напруження σ_2 лише неістотно впливає на міцність. Досліди з мідними, нікелевими і чавунними трубками показали, що похибка, яка пов'язана з тим, що не враховується σ_2 не вище 12-15%. Виходячи з цього припущення будь-який напружений стан можна зобразити кругом Мора, побудованим на напруженнях σ_1 і σ_3 .

Умова міцності по теорії Мора:

$$\sigma_{\text{розр}}^M = \sigma_1 - \alpha \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (8.19)$$

де

$$\alpha = \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{\text{ст}}}$$

Ця теорія добре узгоджується і для крихких і для пластичних матеріалів. Якщо $\alpha = 1$, то отримуємо формулу для III теорії.

Оскільки перша і друга теорії міцності мають істотні недоліки, то останнім часом панує думка про недоцільність застосування їх. Отже для практичних розрахунків слід рекомендувати четверту або третю теорію міцності для матеріалів з однаковим опором розтягання та стисканню і **теорію Мора – для матеріалів, опір яких розтягання та стисканню різний, тобто для крихких матеріалів.**

Недоліки розглянутих теорій, а також поява нових матеріалів (пластмас, композитів тощо) призвели до розробки нових теорій міцності (Ю.І. Ягна, Г.С. Писаренка, Я.Б. Фрідмана та ін.). Більшість з них ґрунтується на виборі такої форми граничної поверхні, яка дає змогу найповніше враховувати особливості опору даного класу матеріалів в умовах складного напруженого стану. Все це розглядається в спеціальних курсах.

Довідкові залежності для функцій Крилова:

$$LY'_1 = -4Y_4; \quad LY'_2 = Y_1; \quad LY'_3 = Y_2; \quad LY'_4 = Y_3. \quad (17.31)$$

Виведемо загальні рівняння для y, φ, Q, M при дії довільних розподілених або зосереджених зовнішніх навантажень.

Нехай на відрізку x балки в точках за абсцисами b_i та a_i діють зосереджена сила P_i та момент M_i , а на ділянці від $x = c$ до $x = d$ діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q (Рис. 17.23).

Для виведення користуємось принципом незалежності дії сил, а також вважаємо, що переміщення малі. Припустимо, що всі зовнішні навантаження на відрізку x дорівнюють нулю, тоді прогин $y(x)$ буде функцією початкових параметрів і абсцис x за формулою (17.26). Тепер нехай усі початкові параметри дорівнюють нулю, але діють навантаження P_i та M_i . Очевидно, їх можна взяти як нові початкові параметри і в (17.26) підставити $Q_0 = P_i$ та $M_0 = M_i$. При цьому за початок координат

треба вибрати точки з абсцисами a_i або b_i .

Тому аргументами функцій Крилова $Y_1 \dots Y_4$ будуть відстані від розглянутого перерізу до нових силових факторів P_i та M_i , тобто відрізки $(x - a_i)$, $(x - b_i)$ і т.і. Якщо сил і моментів декілька, то вводять їхні суми.

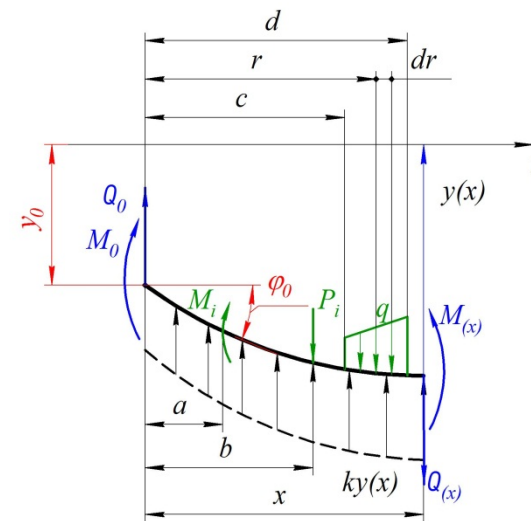


Рисунок 17.23 – Балка на пружній основі з зовнішнім навантаженням



$$\left. \begin{aligned} Y_1(\xi) &= ch\xi \cos\xi; \\ Y_2(\xi) &= \frac{1}{2}(e^\xi \sin\xi + sh\xi \cos\xi); \\ Y_3(\xi) &= \frac{1}{2}sh\xi \sin\xi; \\ Y_4(\xi) &= \frac{1}{4}(ch\xi \sin\xi - sh\xi \cos\xi), \end{aligned} \right\} \quad (17.30)$$

де $sh\xi$ та $ch\xi$ – гіперболічні функції

$$sh\xi = \frac{1}{2}(e^\xi - e^{-\xi}); \quad ch\xi = \frac{1}{2}(e^\xi + e^{-\xi}).$$

Рисунок 17.22 – Портрет О.М. Крилова

Таблиця 17.1 – Функції О.М. Крилова

$$A = \cos\beta z \cdot ch\beta z, \quad B = 1/2(ch\beta z \cdot \sin\beta z + sh\beta z \cdot \cos\beta z),$$

$$C = \frac{1}{2}\sin\beta z \cdot sh\beta z, \quad D = \frac{1}{4}(ch\beta z \cdot \sin\beta z - sh\beta z \cdot \cos\beta z)$$

βz	A	B	C	D	βz	A	B	C	D
0	1	0	0	0	3,10	-11,1119	-5,30225	0,02303	2,8823
0,10	1,0000	0,1000	0,0050	0,00017	3,20	-12,2656	-6,47105	-0,3574	2,8769
0,20	0,9997	0,2000	0,0200	0,00135	3,30	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,80675
0,30	0,9987	0,2999	0,0450	0,0045	3,40	-14,5008	-9,15065	-1,9121	2,6589
0,40	0,9957	0,39965	0,0800	0,0107	3,50	-15,5198	-10,65245	-2,9014	2,4195
0,50	0,9895	0,49895	0,1249	0,0208	3,60	-16,4218	-12,25075	-4,04585	2,0735
0,60	0,9784	0,59745	0,17975	0,0360	3,70	-17,1622	-13,9315	-5,35435	1,60485
0,70	0,9600	0,6944	0,24435	0,0571	3,80	-17,6875	-15,67605	-6,8343	0,9969
0,80	0,9318	0,7891	0,31855	0,08515	3,90	-17,9387	-17,45985	-8,4909	0,2321
0,90	0,8931	0,88035	0,40205	0,12113	4,00	-17,8498	-19,25235	-10,3265	-0,7073
1,00	0,8337	0,96675	0,49445	0,1659	4,10	-17,3472	-21,0160	-12,3404	-1,8392
1,10	0,7568	1,04645	0,59515	0,2203	4,20	-16,3506	-22,70545	-14,52735	-3,1812
1,20	0,6561	1,1173	0,70345	0,28515	4,30	-14,7722	-24,26685	-16,8773	-4,7501
1,30	0,5272	1,1767	0,81825	0,3612	4,40	-12,5180	-25,63725	-19,37425	-6,5615
1,40	0,3656	1,22165	0,9383	0,4490	4,50	-9,4890	-26,74465	-21,9959	-8,6290
1,50	0,1664	1,24855	1,06195	0,5490	4,60	-5,5791	-27,50565	-24,71165	-10,9638

8.3 Контрольні запитання

1. На яких припущеннях засновані перша, друга, третя і четверта теорії міцності?
2. Для чого служать теорії міцності?
3. Для яких матеріалів слід використовувати теорію Мора?
4. Що розуміють під коефіцієнтом запасу?
5. Умова міцності по I теорії.
6. Для яких матеріалів I теорія міцності дає задовільні результати?
7. Умова міцності і еквівалентне напруження по II теорії міцності.
8. Для яких матеріалів II теорія міцності дає задовільні результати?
9. Умова міцності і еквівалентне напруження по III теорії міцності.
10. Для яких матеріалів III теорія міцності дає задовільні результати?
11. Умова міцності і еквівалентне напруження по четвертій теорії міцно
12. Для яких матеріалів четверта теорія міцності дає задовільні результати?
13. З чим пов'язана похибка та якої величини вона досягає при використанні критерію Мора?

9. ЗСУВ

9.1 Розрахунки на зріз

Деформація зсуву можлива тоді, коли на елемент діє дві однакові протилежно направлені сили, які знаходяться на близькій відстані одна від одної і діють перпендикулярно осі стержня (Рис. 9.1, а). В умовах зсуву працюють деталі різних з'єднань (заклепкових, болтових, зварних).

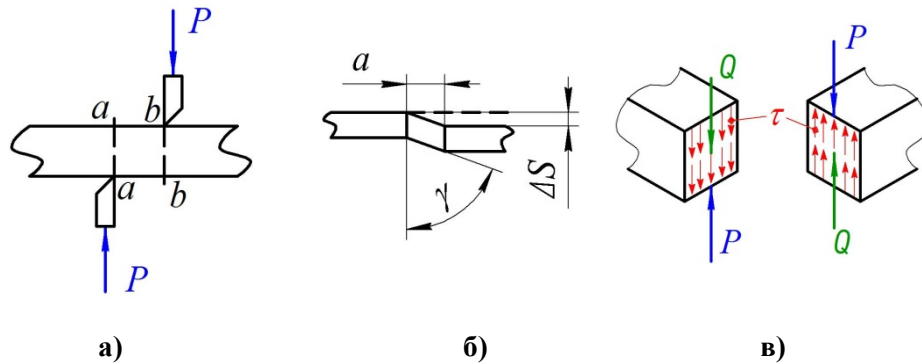


Рисунок 9.1 – Деформація зрізу

Абсолютне зміщення перерізів aa і bb позначають ΔS і називають **абсолютним зсувом** (Рис. 9.1, б). Кут γ називають **кутом зсува** або **відносним зсувом**. З рис. 9.1, б маємо $tg\gamma = \frac{\Delta S}{\alpha}$ і, враховуючи малість кута γ , можна вважати, що

$$\gamma = \frac{\Delta S}{\alpha}. \quad (9.1)$$

Визначення дотичних напружень при зсуві

Використовуючи метод перерізів, знаходимо, що на відрізку ab поперечна сила $Q = P$. Встановимо зв'язок між поперечною силою і напруженням. З формули (3.4) маємо $\int_F \tau dF = Q$.

Поклавши в рівняннях (17.20)-(17.23) $\xi = 0$, виразимо довільні сталі y_0, φ_0, Q_0, M_0 :

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= A + C; \\ L\varphi_0 &= A + B - C + D; \\ L^2 M_0 &= (-2B + 2D)EJ; \\ L^3 Q_0 &= (2A - 2B - 2C - 2D)EJ. \end{aligned} \right\} \quad (17.24)$$

Звідки:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{y_0}{2} + \frac{L\varphi_0}{4} - \frac{L^3 Q_0}{8EJ}; & B &= \frac{L\varphi_0}{4} - \frac{L^2 M_0}{4EJ} - \frac{L^3 Q_0}{8EJ}; \\ C &= \frac{y_0}{2} + \frac{L\varphi_0}{4} - \frac{L^3 Q_0}{8EJ}; & D &= \frac{L\varphi_0}{4} + \frac{L^2 M_0}{4EJ} - \frac{L^3 Q_0}{8EJ}. \end{aligned} \right\} \quad (17.25)$$

Підставивши (17.25) у формулу (17.20) – (17.23), знайдемо:

$$y(x) = y_0 Y_1(\xi) + L\varphi_0 Y_2(\xi) - \frac{L^2 M_0}{EJ} Y_3(\xi) - \frac{L^3 Q_0}{EJ} Y_4(\xi); \quad (17.26)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 Y_1(\xi) - \frac{LM_0}{EJ} Y_2(\xi) - \frac{L^2 M_0}{EJ} Y_3(\xi) - \frac{4Y_0}{L} Y_4(\xi); \quad (17.27)$$

$$M(x) = M_0 Y_1(\xi) + LQ_0 Y_2(\xi) + kL^2 y_0 Y_3(\xi) + kL^3 \varphi_0 Y_4(\xi) \quad (17.28)$$

$$Q(x) = Q_0 Y_1(\xi) + kLy_0 Y_2(\xi) + kL^2 \varphi_0 Y_3(\xi) - \frac{4}{L} M_0 Y_4(\xi); \quad (17.29)$$

Тут через Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 позначимо функції О.М. Крилова¹⁴ (табл. 17.1).

¹⁴ Олексій Миколайович Крилов (1863-1945) — математик, механік і суднобудівник. Автор класичних робіт з будівельної механіки корабля, теорії вібрації суден і їхньої непотоплюваності, з теорії гіроскопів, зовнішньої балістики, математичного аналізу і механіки в кораблебудуванні, з фізико-математичних і технічних наук.

$$\frac{d^4 y}{d\xi^4} + 4y = 0. \quad (17.19)$$

Загальний інтеграл цього рівняння

$$y = Ae^\xi \cos \xi + Be^\xi \sin \xi + Ce^{-\xi} \cos \xi + De^{-\xi} \sin \xi. \quad (17.20)$$

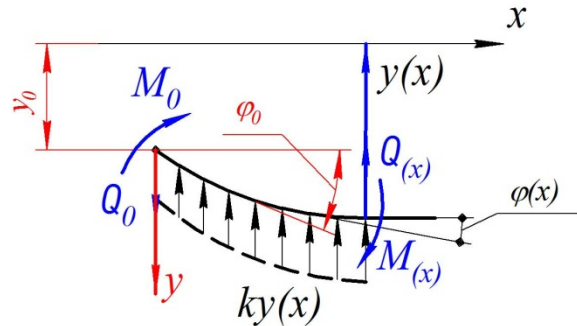


Рисунок 17.21 – Балка на пружній основі з розрахунковими параметрами без зовнішнього навантаження

Диференціюємо цей вираз по ξ , взявши до уваги диференціальні залежності між y, φ, Q, M та співвідношення (17.15), отримуємо:

$$y' = \varphi L = Ae^\xi (\cos \xi - \sin \xi) + Be^\xi (\cos \xi + \sin \xi) - Ce^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) + De^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi); \quad (17.21)$$

$$y'' = -\frac{M(x)L^2}{EJ} = -2(Ae^\xi \sin \xi - Be^\xi \cos \xi - Ce^{-\xi} \sin \xi + De^{-\xi} \cos \xi); \quad (17.22)$$

$$y''' = -\frac{Q(x)L^3}{EJ} = -2[Ae^\xi (\cos \xi + \sin \xi) - Be^\xi (\cos \xi - \sin \xi) - Ce^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) - De^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi)]. \quad (17.23)$$

Вважаючи, що дотичні напруження τ рівномірно розподілені по площі поперечного перерізу F (Рис. 9.1, в) ($\tau = const$), будемо мати $Q = P = \tau F$, звідки

$$\tau = \frac{Q}{F} = \frac{P}{F}. \quad (9.2)$$

Умова міцності при зсуві

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}}{F_{зсуву}} \leq [\tau]. \quad (9.3)$$

де $F_{зсуву}$ – вся площа, яка зсувається; Q_{max} – максимальна поперечна сила; $[\tau]$ – допустимі напруження при зсуві.

9.2 Чистий зсув

Напружений стан, коли на чотирьох гранях прямокутного елемента діють тільки дотичні напруження називається **ЧИСТИМ ЗСУВОМ** (Рис. 9.2).

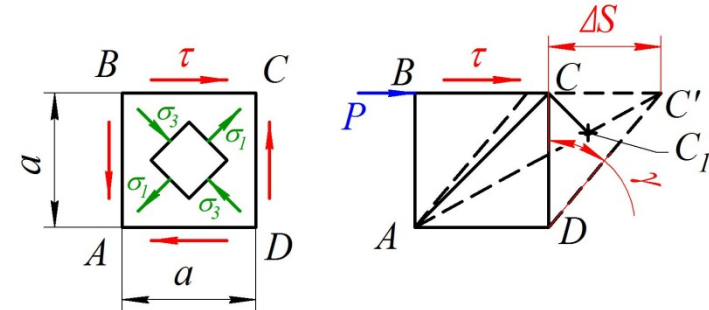


Рисунок 9.2 – Схема чистого зсуву

В цьому випадку головні площадки нахилені до граней елемента на кут 45° , а головні напруження $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$.

При чистому зсуві діагональ ac , яка збігається з напрямком σ_1 , подовжується, а діагональ bd , що збігається з напрямком стискаючого напруження σ_3 , укорочується. Внаслідок цього квадрат перетворюється на ромб. **Кут зсуву** (відносний зсув) буде визначатися за формулою (9.1).

Закон Гука при чистому зсуві

Залежність між навантаженням та деформацією при зсуві можна простежити за так званою діаграмою зсуву. Її можна отримати при скручуванні тонкостінної труби (Рис. 9.3). На діаграмі показано характеристики міцності: границю пропорційності $\tau_{пц}$, границю текучості τ_T та границю міцності τ_B . Виділений елемент стінки труби перебуває в умовах чистого зсуву.

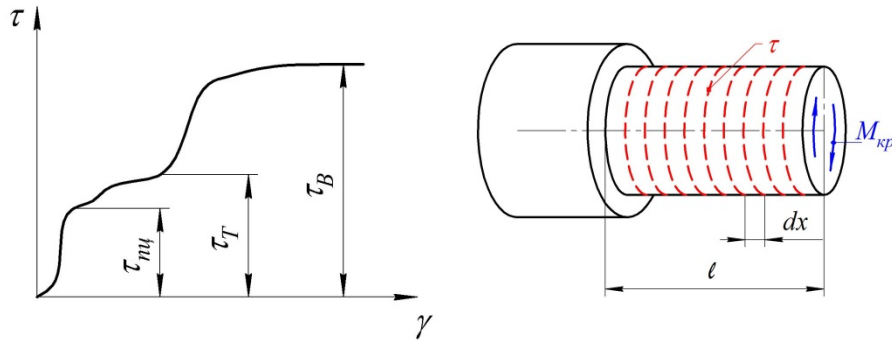


Рисунок 9.3 – Кручення тонкостінної труби

Розглядаючи деформацію цього елемента, визначимо, що між відносним зсувом γ та дотичним напруженням τ існує лінійна залежність, яку можна виразити формулою (закон Гука для чистого зсуву):

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \text{ або } \tau = G \cdot \gamma, \quad (9.4)$$

основи пов'язане з деформацією балки. Тому для розв'язання задачі спочатку знайдемо рівняння пружної осі балки.

Диференційне рівняння зігнутої осі для балки постійного поперечного перерізу на пружній основі, згідно з виразом (12.4) можна записати так:

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{1}{EJ} [q(x) - ky(x)]. \quad (17.15)$$

Спочатку розглянемо ділянку балки, на якій немає зовнішнього навантаження. Диференціальне рівняння для цього прикладу має вигляд:

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{-k}{EJ} y(x). \quad (17.16)$$

Розмістимо початок координат у крайній лівій точці ділянки, вісь у спрямуємо вниз та позначимо прогин, кут повороту, згинальний момент і поперечну силу в цьому перерізі через y_0 , φ_0 , M_0 і Q_0 відповідно. Ці величини будемо вважати початковими параметрами. Позначимо $EJ/k = L^4/4$, звідки

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{k}}. \quad (17.17)$$

Ця величина виражається в метрах. У рівнянні (17.16) незалежну змінну x замінимо безрозмірною абсцисою

$$\xi = \frac{x}{L}. \quad (17.18)$$

Тоді рівняння (17.16) з урахуванням (17.17) і (17.18) набуває вигляду

Основа діє на балку з реакціями, пропорційними y – прогину балці в цій точці.

Позначивши коефіцієнт пропорційності літерою k і припустивши, що пружна основа однорідна по всій довжині балки, знайдемо, що інтенсивність реакції основи дорівнює ky . Розмірність коефіцієнта $[k]$ дорівнює H/m^2 .



Рисунок 17.20 – Портрет М.І. Фусса

Пропозицію ввести до розрахунку коефіцієнт k , який називається «коефіцієнтом постелі», було зроблено академіком **М.І. Фуссом**¹³ у 1801 році.

На практиці задачі розрахунку балок на пружній основі зустрічаються на залізниці (розрахунки рельс, шпал), в будівництві – розрахунки фундаменту різноманітних будівель, які передають навантаження на ґрунт.

Повне розподілене навантаження $P(x)$, що діє на балку, складається із заданого навантаження $q(x)$ та невідомої реакції пружної основи $ky(x)$:

$$P(x) = q(x) - ky(x). \quad (17.14)$$

Розрахунок балки на пружній основі є статично невизначуваною задачею, оскільки лише рівняння рівноваги недостатньо для визначення **закону зміни інтенсивності реакцій основи по довжині балки**. Інтенсивність реакції

де G – **коефіцієнт пропорційності**, який називається **модулем пружності при зсуві**, або **модулем пружності другого роду**, і виражається в мегапаскалях (МПа).

Для ізотропних матеріалів між модулем пружності G при зсуві, та модулем пружності E при розтяганні існує певна залежність. Для визначення її розглянемо деформацію елемента в умовах чистого зсуву (див. рис. 9.2). Довжина діагоналі AC , до деформації, $\ell = a\sqrt{2}$.

Знайдемо подовження $\Delta\ell$ діагоналі AC .

Розглядаючи геометричну картину деформації, матимемо

$$\Delta\ell = C_1C \approx C'_1C_1 \cos 45^\circ = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{\Delta S}{a\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\gamma}{2},$$

де

$$\gamma = \frac{\Delta S}{a}; \Delta S = a\gamma.$$

Оскільки головне напруження σ_1 діє в напрямі діагоналі AC , то її відносне подовження

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] =$$

$$= \frac{1}{E}[\tau - \mu(0 - \tau)] = \frac{\tau(1 + \mu)}{E}. \quad (9.5)$$

За законом Гука для чистого зсуву:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\tau}{2\sigma} = \frac{\tau(1 + \mu)}{E},$$

звідки

¹³ М.І. Фусс (1755-1826) - академік, почесний член і член-кореспондент багатьох наукових товариств. Основні наукові дослідження відносяться до областей алгебри, аналізу, геометрії, механіки.

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (9.6)$$

При

$$\mu = \frac{1}{3} \dots \frac{1}{4}$$

буде $G = (0,375 \dots 0,4) E$, а для сталі $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Потенціальна енергія деформації

Запишемо вираз для зміщення однієї грані відносно іншої (тобто вираз абсолютного зсуву ΔS) при чистому зсуві. Позначаючи площу грані F , рівнодійну сили, яка зсуває $Q = F\tau$ та відстань між гранями, які зсуваються, через a (Рис. 9.2), матимемо:

$$\Delta S = \gamma \cdot a = \frac{\tau}{G} \cdot a = \frac{Q \cdot a}{GF}, \quad (9.7)$$

тобто

$$\Delta S = \frac{Qa}{GF}. \quad (9.8)$$

Формула (9.8) виражає закон Гука для абсолютного зсуву.

Питома потенціальна енергія деформації елемента при чистому зсуві:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{Q^2 a}{2GF \cdot aF} = \frac{Q^2}{2F^2 G}, \quad (9.9)$$

або

$$U = \frac{Q^2 a}{2GF}, \quad V = aF, \quad u = \frac{\tau^2}{2G}, \quad (9.10)$$

де U - повна потенціальна енергія деформації при чистому зсуві;

V - об'єм виділеного елемента.

$$\Theta_A = \frac{1}{EJ} \left[\frac{3}{6} (-2 \cdot 1,128 \cdot 1 - 1,128 \cdot 1) + \frac{2 \cdot 3^3}{24} (1 + 1) + \frac{4}{6} (-2 \cdot 1,128 \cdot 1) + 2 \cdot 0,56 \cdot 1 - 1,128 \cdot 1 + 0,56 \cdot 1 \right] = \frac{1,67}{EJ}$$

Остаточню

$$\Theta_A = \frac{1,67 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 26,6 \cdot 10^{-8}} = 0,03 \text{ рад.}$$

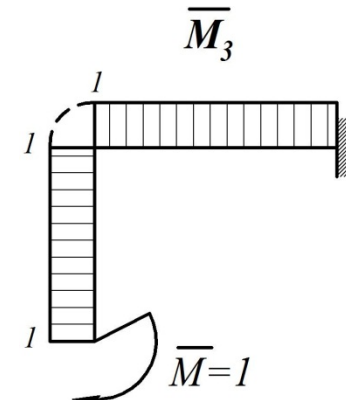


Рисунок 17.18 – Епюра від моменту \bar{M}_3

17.6 Розрахунок балок на пружній основі

До статично невизначуваних балок може бути віднесена **балка на пружній основі**. Так називається балка, яка опирається по усій довжині (Рис. 17.19) на пружну основу (наприклад, ґрунт).

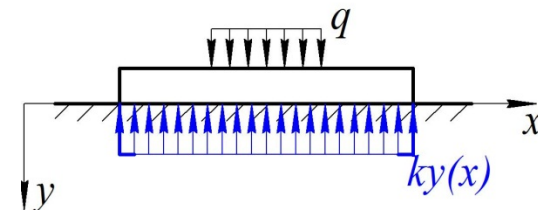


Рисунок 17.19 – Балка на пружній основі

$$\frac{10,11 - 10,152}{10,11} \cdot 100\% = 0,4\%.$$

14 Встановлюємо небезпечний переріз i , використовуючи умову міцності при згинанні, за величиною $M_{\text{небезп}} = M_{\text{max}} = 1,7 \text{ кН м}$ визначаємо розміри поперечного перерізу рами:

$$W_x \geq \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{1,7 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 10,6 \text{ см}^3.$$

Момент опору прямокутного перерізу дорівнює

$$W_x = \frac{bh^2}{12} = \frac{4}{6}b^3 = 10,6 \text{ см}^3.$$

Одержуємо

$$b = \sqrt[3]{\frac{3W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10,6}{2}} = 2,5 \text{ см},$$

звідки $h = 5 \text{ см}$.

15. Для визначення кута повороту θ A знаходимо момент інерції перерізу:

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{2,5 \cdot 5^3}{12} = 26,6 \text{ см}^4.$$

Будуємо одиничну епюру від моменту \bar{M}_3 , прикладеного в т. A (Рис. 17.11) "перемножуємо" одержану епюру M_3 з епюрою M_S (Рис. 17.18).

Кут повороту в перерізі A буде дорівнювати:

Допустимі напруження при зсуві

Перевіримо міцність елемента при деформації чистого зсуву. Дотичні напруження на гранях елемента дорівнюють τ , допустиме напруження для матеріалу при розтяганні $[\sigma]$.

Як вже зазначалося, головні напруження при чистому зсуві $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\tau$. Умова міцності залежить від вибору теорії міцності.

За другою теорією міцності:

$$\sigma_1 - \mu\sigma_3 \leq [\sigma].$$

Підставляючи значення головних напружень, знаходимо

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{1 + \mu}.$$

Тобто, допустиме напруження при чистому зсуві

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{1 + \mu}. \quad (9.11)$$

Для металів $\mu = 0,25 \dots 0,42$. Отже, за другою теорією міцності

$$[\tau] = (0,7 \dots 0,8)[\sigma]. \quad (9.12)$$

За третьою теорією міцності:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\tau] \text{ або } \tau - (-\tau) \leq [\sigma],$$

звідки

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{2} = [\tau],$$

тобто

$$[\tau] = 0,5[\sigma]. \quad (9.13)$$

За четвертою теорією міцності:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3} \leq [\sigma],$$

або

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$$

Отже,

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0,6[\sigma]. \quad (9.14)$$

Умова міцності при зсуві (зрізі) може бути записана у звичайному вигляді:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}}{F} \leq [\sigma]. \quad (9.15)$$

Слід мати на увазі, що значення допустимих напружень на зріз $[\tau]$ залежить від властивостей матеріалу, характеру навантаження та типу елементів конструкції. Конкретні значення $[\tau]$ для деяких матеріалів стосовно заклепкових та зварних з'єднань містяться в табл. 9.1.

Таблиця 9.1 – Допустимі напруження на зріз для заклепкових і зварних з'єднань

Тип з'єднання	Напруження на зріз, МПа
З'єднання заклепкою:	
основні елементи із сталі 20.....	100
заклепка в розсвердлених отворах (клас В)....	140
заклепка в продавлених отворах (клас С).....	100
Зварне з'єднання:	
зварювання ручне, електроди з тонкою обмазкою.....	80
--/--, електроди з товстою обмазкою.....	110
зварювання автоматичне.....	110

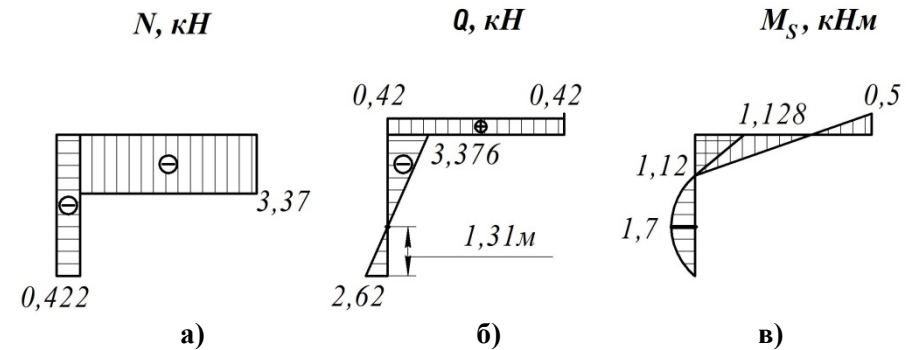


Рисунок 17.17 – Внутрішні силові фактори

Оскільки в заданій рамі це переміщення відсутнє (у цьому напрямку є зв'язок), то результат "перемноження" має бути нуль.

$$\Delta_{1S} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{4}{6} (2 \cdot 0,56 \cdot 4 - 4 \cdot 1,128) \right] = \frac{2,953 - 3,008}{EJ} = \frac{0,055}{EJ}.$$

Знайдемо погрішність розрахунку:

$$\frac{2,953 - 3,008}{2,953} = \frac{0,055}{2,953} \cdot 100\% \approx 2\%.$$

Аналогічно знаходимо переміщення Δ_{2S} , «перемножуючи» епюри M_S і M_2 (див. рис. 17.13, б):

$$\begin{aligned} \Delta_{2S} = & \frac{1}{EJ} \left[\frac{3}{6} (-2 \cdot 3 \cdot 1,128) + \frac{3 \cdot 2^3}{24} (0 + 3) + \right. \\ & \left. + \frac{4}{6} (-2 \cdot 3 \cdot 1,128 + 2 \cdot 0,56 \cdot 3 - \right. \\ & \left. - 3 \cdot 1,128 + 3 \cdot 0,56) \right] = \frac{10,11 - 10,152}{EJ} = -\frac{0,042}{EJ}. \end{aligned}$$

Погрішність розрахунку Δ_{2S} :

10. Перевіряємо правильність рішення системи рівнянь підстановкою знайдених невідомих в рівняння (17.1):

$$\begin{cases} 23,33 \cdot 0,422 + 24 \cdot 2,624 - 72,0 = 0; & X_1 = 0,422 \text{ кН}; \\ 24 \cdot X_1 + 45 \cdot X_2 - 128,25 = 0; & X_1 = 2,624 \text{ кН}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21,33 \cdot 0,422 + 24 \cdot 2,624 - 72,0 = 0; \\ 24 \cdot 0,422 + 45 \cdot 2,624 - 128,25 = 0. \end{cases}$$

11. У еквівалентну систему замість невідомих X_1 і X_2 підставляємо знайдені значення (Рис 17.16).

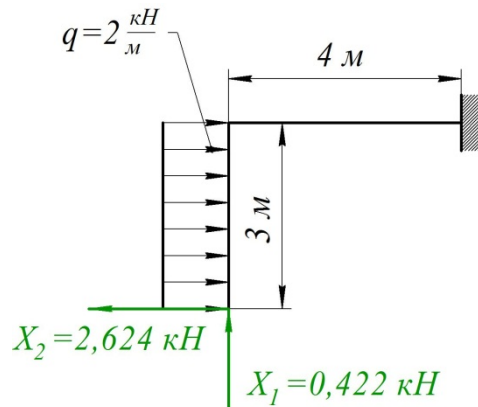


Рисунок 17.16 – Еквівалентна система

Якби зусилля одержали із знаком "мінус", то його початковий напрям слід було б замінити на протилежний.

12. Будемо остаточні епюри N (Рис. 17.16, а), Q (Рис. 17.17, б) і M_S (Рис. 17.17, в), відповідні заданій статично невизначуваній рамі і еквівалентній системі (див. рис. 17.15).

13. Робимо **деформаційну перевірку** вірності розкриття статичної невизначуваності. Вона полягає в наступному: "перемножуємо" епюри M_S і M_1 (див. Рис. 17.14, а), при цьому одержуємо переміщення Δ_{1S} , тобто переміщення у напрямку дії сили, X_1 викликане діючими зусиллями.

9.3 Приклади розрахунку на зріз (зсув)

Болтові з'єднання. Застосування наведеної вище у п. 9.2 теорії зсуву проілюструємо розрахунком болтового з'єднання (Рис. 9.4).

Сила P намагається зсунути листи один відносно другого. Цьому перешкоджає болт, на який з боку листів передаються розподілені по контактній поверхні сили (Рис. 9.4, а) та б)).

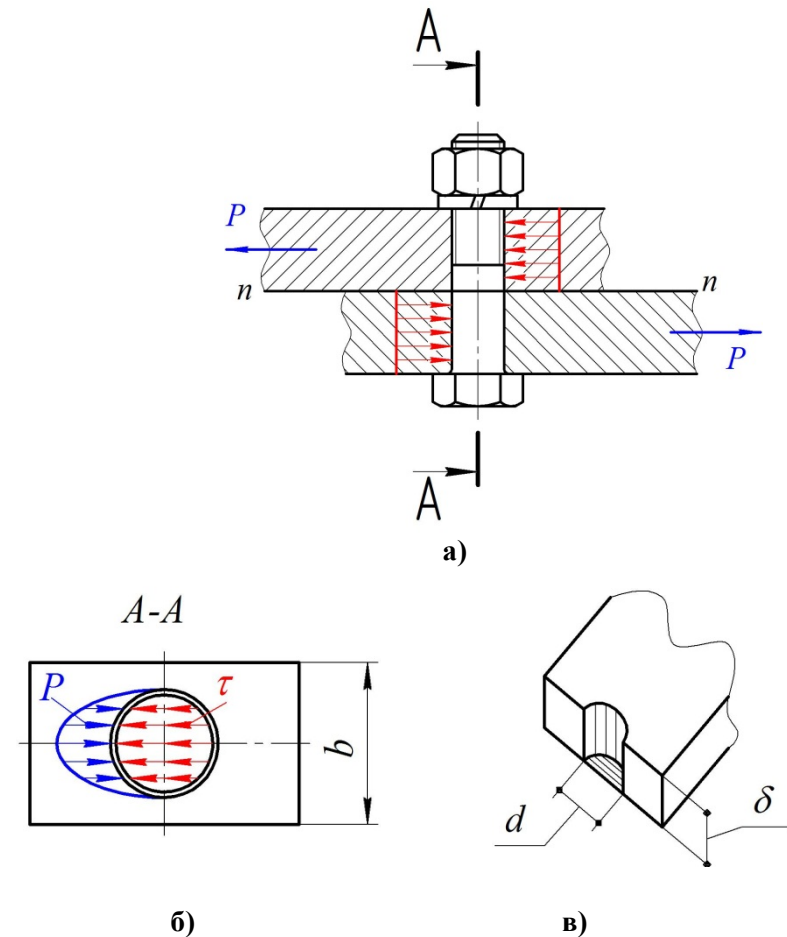


Рисунок 9.4 – Зсув болта

Зовнішні зусилля намагаються зрізати болт по площині контакту листів $n - n$, оскільки тут діє найбільша поперечна сила $Q = P$. Вважаючи, що дотичні напруження розподілені по перерізу болта рівномірно, матимемо

$$\tau = \frac{Q}{F} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

Отже, умова міцності болта на зріз має вид:

$$\tau_{max} = \frac{4P}{\pi d^2} \leq [\tau]. \quad (9.16)$$

Звідси можна знайти діаметр болта, який забезпечує міцність болтового з'єднання

$$d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi[\tau]}}. \quad (9.17)$$

Слід зауважити, що сила P , прикладена до болта, намагається також зігнути його. Проте згинальний момент невеликий, і спричиненими ним нормальними напруженнями можна знехтувати, тим більше що при збільшенні зовнішньої сили P руйнування з'єднання відбудеться від зрізу болта.

При розрахунку болтових, заклепочних та інших подібних з'єднань слід врахувати те, що навантаження, прикладені до елемента з'єднань, крім зрізу спричиняють **зминання поверхні** болта в місці контакту з листом. Під **зминанням** розуміють пластичну деформацію, яка виникає на поверхнях контакту. Розрахунок на зминання виконують наближено, оскільки закон розподілу тиску по поверхні контакту невідомий.

Максимальне напруження зминання на циліндричних поверхнях:

$$\begin{aligned} & (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) \times (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) = \\ & = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 + \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2 + \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_1 + \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2 = \\ & = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22}. \end{aligned}$$

"Перемноження" епюри \bar{M}_Σ самої на себе дає

$$\delta_{\Sigma 1} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{3}{6} (2 \cdot 3 \cdot 3) + (2 \cdot 7 \cdot 7) + (3 \cdot 7) + (7 \cdot 3) \right] = \frac{343}{3EJ}.$$

З іншого боку, сума одиничних коефіцієнтів дорівнює

$$\delta_{\Sigma 1} = \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{64}{3} + 2 \cdot 24 + 45 \right] = \frac{343}{3EJ}.$$

Отже, одиничні коефіцієнти знайдені вірно.

б) аналогічно перевіряємо правильність знаходження вантажних коефіцієнтів, для чого "перемножуємо" епюри $\bar{M}_{\Sigma 1}$, і M_P :

$$\begin{aligned} & (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) \times M_P = \Delta_{\Sigma P}. \\ \Delta_{\Sigma P} &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{3}{6} (-2 \cdot 3 \cdot 9) + \frac{2 \cdot 3^3}{24} (0 + 3) + \frac{4}{3} (-2 \cdot 3 \cdot 9 - 2 \cdot 7 \cdot 9 - 3 \cdot 9 - 7 \cdot 9) \right] = \frac{-200,25}{EJ}; \\ \Delta_{\Sigma P} &= \Delta_{1P} + \Delta_{2P} = -\frac{72}{EJ} - \frac{128,25}{EJ} = \frac{-200,25}{EJ}. \end{aligned}$$

Вантажні коефіцієнти також знайдені вірно.

9. Підставимо знайдені переміщення в канонічні рівняння (17.1) і знайдемо X_1 і X_2 :

$$\begin{cases} \frac{64}{3} \cdot X_1 + 24 \cdot X_2 - 72,0 = 0; & X_1 = 0,422 \text{ кН}; \\ 24 \cdot X_1 + 45 \cdot X_2 - 128,25 = 0; & X_2 = 2,624 \text{ кН}. \end{cases}$$

7. Шляхом "перемноження" відповідних епюр визначаємо коефіцієнти канонічних рівнянь:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{4}{6} (2 \cdot 4 \cdot 4) \right] = \frac{64}{3EJ}; \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{4}{6} (2 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3) \right] = \frac{24}{3EJ}; \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{3}{6} (2 \cdot 3 \cdot 3) + \frac{4}{6} (6 \cdot 3 \cdot 3) \right] = \frac{45}{EJ}; \\ \delta_{1P} &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{4}{6} (-2 \cdot 4 \cdot 9 - 4 \cdot 9) \right] = -\frac{72}{EJ}; \\ \delta_{2P} &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{3}{6} (-2 \cdot 9 \cdot 3) + \frac{2 \cdot 3^3}{24} (0 + 3) + \frac{4}{6} (-6 \cdot 3 \cdot 9) \right] = -\frac{128,25}{EJ}.\end{aligned}$$

8. Робимо перевірку правильності визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь. Для цього побудуємо допоміжну сумарну одиничну епюру $\bar{M}_{\Sigma 1}$, в якій відповідні ординати епюр \bar{M}_1 і \bar{M}_2 алгебраїчно підсумовуємо в кожному перерізі (Рис. 17.15):

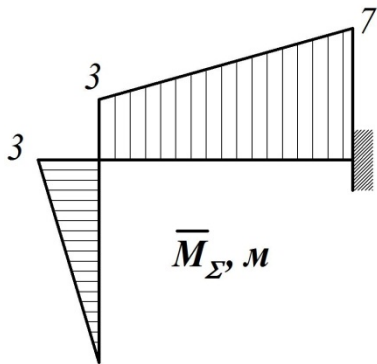


Рисунок 17.15 – Допоміжна епюра для перевірки вірності визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь

а) сума одиничних коефіцієнтів $\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22}$ має дорівнювати "перемноженню" епюри $\bar{M}_{\Sigma 1}$ самої на себе, оскільки

$$\sigma_{зм} = \frac{P}{F_{зм}},$$

де $F_{зм} = d\delta$ площа проекції поверхні контакту на діаметральну площину листа завтовшки δ (Рис. 9.4, в). **Умова міцності на зминання** має вигляд

$$\sigma_{зм} = \frac{P}{d\delta} \leq [\sigma_{зм}]. \quad (9.18)$$

Допустиме напруження на зминання визначають досвідним шляхом і вибирають таким, що дорівнює $\sigma_{зм} = (2 \dots 2,5)[\sigma_{зм}]$.

На підставі залежності (9.18) маємо

$$d \geq \frac{P}{\delta} [\sigma_{зм}]. \quad (9.19)$$

Для забезпечення умов міцності на зріз та на зминання треба з двох знайдених діаметрів (див. (9.17) і (9.19)) взяти більший, округливши його до стандартного значення.

Враховуючи, що отвори для болтів ослаблюють листи, їх перевіряють на розрив в найбільш ослабленому місці. **Умова міцності** буде мати вигляд:

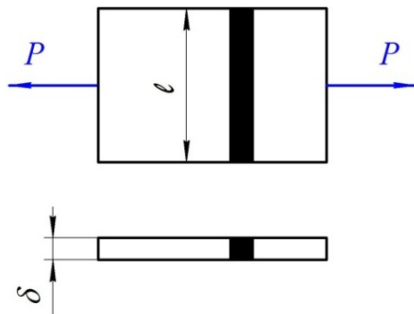
$$\sigma_{max} = \frac{P}{F_{min}} \leq [\sigma]_{розрив},$$

де F_{min} – площа ослабленого перерізу без урахування площі болтів (або отворів).

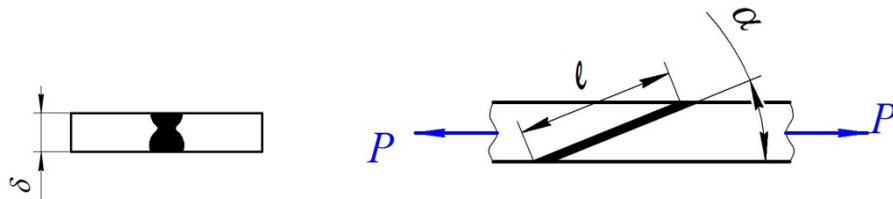
9.4 Розрахунки зварних з'єднань

Зварні з'єднання можуть бути виготовлені з такими **типами швів**: стикові; торцеві; флангові.

Стикові шви перевіряють на міцність з умови міцності на розтягання. В стикових швах при товщині деталей δ не більше 8 мм кромки не обробляють: а) при товщині 8...20 мм кромки скошують з одного боку (V-подібний шов); б) при товщині більше 20 мм кромки скошують з двох сторін (X-подібний шов); в) якщо напрям кутового шва перпендикулярний до напрямку дії зусилля, то шов називають лобовим або торцевим.



а)



б)

в)

Рисунок 9.5 – Розрахунки стикових швів

У з'єднаннях в стик (Рис. 9.5, а) умова міцності шва довжиною l при роботі на розтягання:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F_{шва}} = \frac{P}{l \cdot \delta} \leq [\sigma'_p], \quad (9.20)$$

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases} \quad (17.13)$$

5. Будуємо вантажну епюру згинальних моментів (Рис. 17.13, б), для чого до основної системи прикладаємо зовнішнє навантаження.

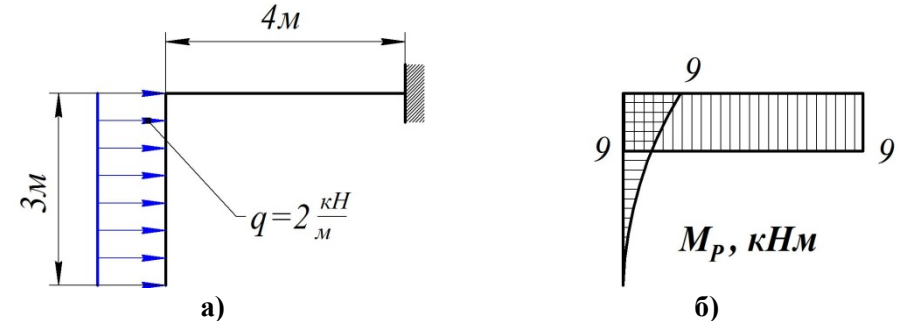


Рисунок 17.13 – Вантажна епюра згинальних моментів

6. По черзі до основної системи прикладаємо одиничні навантаження \bar{X}_1 і \bar{X}_2 напрямі "зайвих" зв'язків і будуємо епюри згинальних моментів (Рис. 17.14).

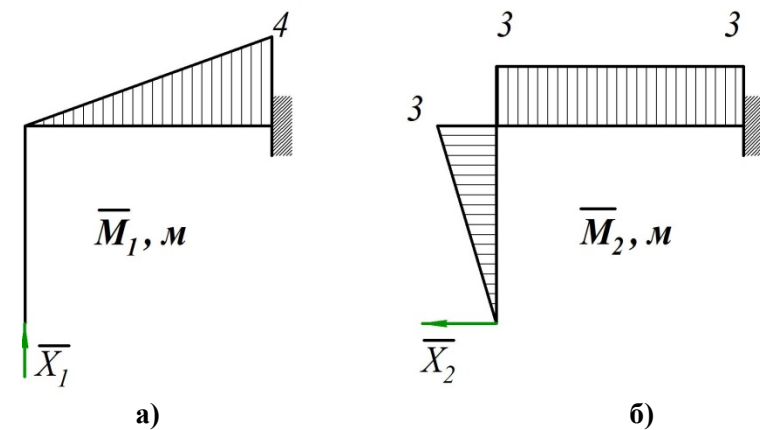


Рисунок 17.14 – Вантажна епюра згинальних моментів

1-й спосіб:

$$S = n_R - n_y = 5 - 3 = 2,$$

де $n_R = 5$ – кількість невідомих реакцій;

$n_y = 3$ – кількість рівнянь рівноваги.

2-й спосіб:

$$S = 3k - ш = 3 \cdot 2 - 4 = 2,$$

де $k = 2$ – кількість контурів;

$ш = 4$ – кількість шарнірів в перерахунку на одиничні.

2. Вибираємо основну систему, відкидаючи опору А (Рис. 17.12, а).

3. Переходимо до еквівалентної системи (див. рис.17.12, б), прикладаючи до основної задане навантаження q і реакції відкинутих зв'язків X_1, X_2 .

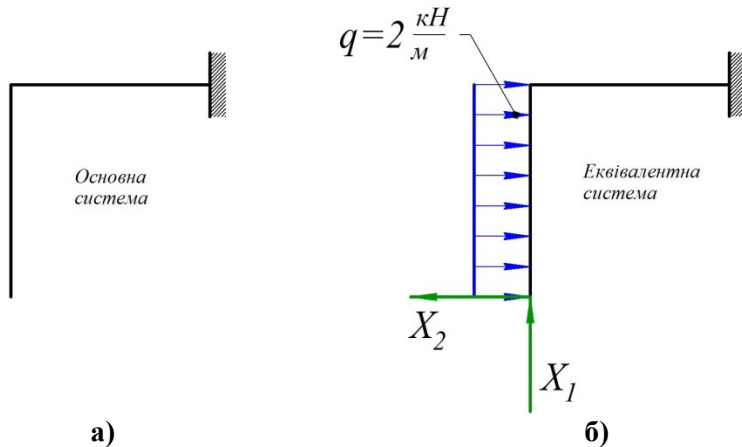


Рисунок 17.12 – Вибір основної системи

4. Складаємо систему канонічних рівнянь спільності деформації (їх кількість складає $S = 2$):

при роботі на стискання

$$\sigma_{max} = \frac{P}{\ell \cdot \delta} \leq [\sigma'_{ст}]. \quad (9.21)$$

Якщо шов зорієнтовано під кутом α (Рис. 9.5, в) (звичайно $\alpha = 45^\circ$) до напрямку зусилля P , то умова міцності визначається за формулою

$$\tau = \frac{P}{\ell \cdot \delta} \leq [\tau']. \quad (9.22)$$

У наведених залежностях: σ і τ – нормальні і дотичні напруження в матеріалах шва; P – діюче зусилля; δ – товщина з'єднаних елементів; $[\sigma'_p]$, $[\sigma'_{ст}]$ – допустимі нормальні напруження матеріалу шва; $[\tau']$ – допустиме дотичне напруження матеріалу шва.

Для з'єднання нахлестом в прямих (лобових) (Рис. 9.6) і флангових (Рис. 9.7) швах умова міцності:

$$\tau = \frac{P}{F_{еф}} \leq [\tau'] \quad \text{або} \quad \tau = \frac{P}{2 \cdot 0,7 \cdot k \cdot \ell_T} \leq [\tau'], \quad (9.23)$$

де $F_{еф} = 2 \cdot 0,7 \ell_T$ – площа шва;

k – довжина катета шва;

$\ell_T = \ell - 10$ мм розрахункова довжина шва (10 мм приймають на непровар по краю деталі);

$[\tau']$ – при електродуговому зварюванні вибирається в залежності від виду зварювання і типу електрода (ручне чи автоматичне, тип електрода і обмазки, тощо) і викладена в спеціальній літературі.

$F_{шва} = 0,7 \delta$ – це довжина катета шва.

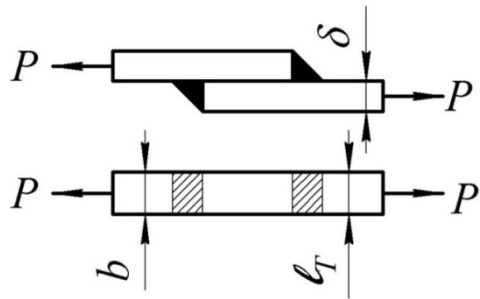


Рисунок 9.6 – Прямий (лобовий шов)

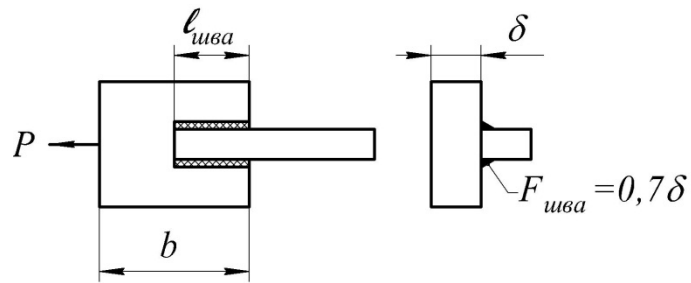


Рисунок 9.7 – Фланговий шов

9.5 Контрольні запитання

1. У чому полягає деформація зсуву?
2. Що називається абсолютним і відносним зсувом? Яку вони мають розмірність?
3. Який напружений стан називається чистим зсувом?
4. Як виражається закон Гука при чистому зсуві?
5. За яких умов відбувається зріз?
6. За якою формулою визначають дотичні напруження при зсуві?
7. Яка залежність між модулями пружності першого і другого роду?
8. Що називається зминанням?

єдиної сили дорівнює переміщенню другої єдиної сили в її напрямку під дією першої єдиної сили.

Цю теорему можна проілюструвати (Рис. 17.10).

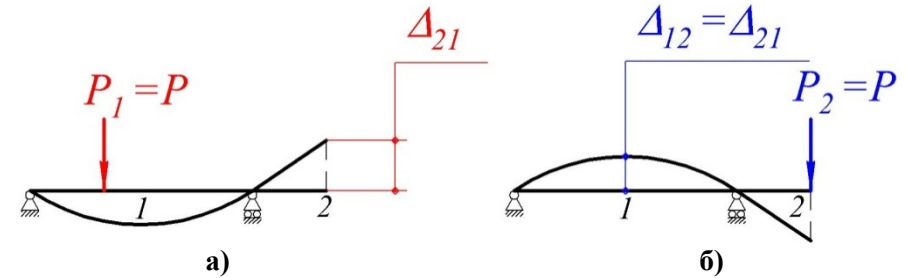


Рисунок 17.10 – До теореми про взаємність переміщень

17.5 Приклад розрахунку статично невизначуваної рами

Для заданої (Рис. 17.11) рами, з розподіленим навантаженням інтенсивністю q підібрати розміри прямокутного перерізу $\frac{h}{b} = 2$ і $[\sigma] = 120$ МПа, а також визначити кут повороту перерізу A .

Рішення.

1. Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності заданої системи:

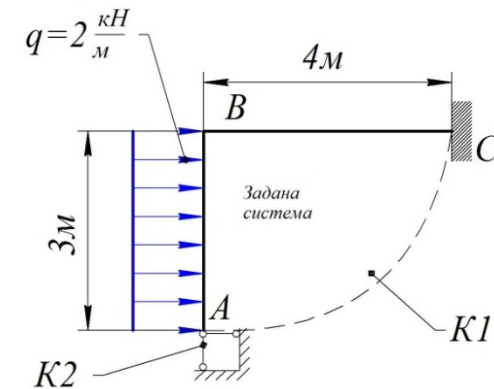


Рисунок 17.11 – Схема до прикладу

Далі в точці B прикладаємо силу P_2 . Вона виконає роботу, яка матиме аналогічний вираз: $\frac{1}{2}P_2 \cdot \Delta_{22}$.

Одночасно виконає роботу і сила P_1 , оскільки при прикладанні сили P_2 точка A теж переміститься. Сила P_1 на цьому переміщенні залишається постійною, і її робота буде дорівнювати $P_1\Delta_{12}$.

Отже, сумарна робота при прямому навантаженні балки (див. рис.17.9, а) буде дорівнювати

$$A_1 = \frac{1}{2}P_1 \cdot \Delta_{11} + \frac{1}{2}P_2 \cdot \Delta_{22} + P_2 \cdot \Delta_{21}. \quad (17.9)$$

Виконаємо зворотне навантаження (див. рис.17.9, б), тобто спочатку прикладемо силу P_2 в точці B , а потім силу P_1 в точці A . Тоді, відповідно, сумарна робота набуде вигляду

$$A_2 = \frac{1}{2}P_2 \cdot \Delta_{22} + \frac{1}{2}P_1 \cdot \Delta_{11} + P_2 \cdot \Delta_{21}. \quad (17.10)$$

Загальні (сумарні) роботи в обох випадках будуть однакові, тому прирівнявши роботи $A_1 = A_2$, знаходимо

$$P_1 \cdot \Delta_{12} = P_2 \cdot \Delta_{21}. \quad (17.11)$$

Це і є теорема про взаємність робіт: робота першої сили на переміщенні точки її прикладання під дією другої сили дорівнює роботі другої сили на переміщенні точки її прикладання під дією першої сили.

Якщо $P_1 = P_2 = P$, то

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}. \quad (17.12)$$

Теорема про взаємність переміщень: переміщення першої одиничної сили в її напрямку під дією другої

9. Які бувають типи зварних з'єднань?
10. Умова міцності для зсува.
11. Умова міцності для зварних з'єднань (для різних типів швів).
12. Повна потенціальна енергія деформації при чистому зсуві.
13. Допустиме напруження при чистому зсуві.
14. Умова міцності болта на зріз.
15. Умова міцності на зминання.

10 КРУЧЕННЯ

10.1 Епюри крутильних моментів

Кручення – це такий вид деформації, при якому в поперечних перерізах елемента конструкції має місце тільки одне із шести зусиль – **внутрішній крутильний момент** ($M_z = M_{кр} \neq 0$), а всі інші зусилля дорівнюють нулю.

В умовах кручення працюють трансмісійні вали.

Теорія **кручення** ґрунтується на таких **трьох гіпотезах** (припущеннях):

1. Поперечний переріз стержня, плоский до скручування, лишається плоским і в процесі скручування. Це припущення називається **гіпотезою плоских перерізів**.

2. Радіуси поперечних перерізів бруса при скручуванні лишаються прямими.

3. Відстань між поперечними перерізами не змінюється.

Ці гіпотези дають змогу визначити напруження, що виникають у брусі круглого перерізу.

В поперечних перерізах вала крутильні моменти змінюються. Епюри крутильних моментів будуються з використанням методу перерізів. За епюрою визначається положення небезпечного перерізу стержня. Небезпечним вважається той переріз, в якому діє найбільший за модулем крутильний момент.

Внутрішній крутильний момент дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх моментів відносно осі z , діючих по один бік від перерізу, що розглядається

$$M_{кр} + \sum m_{kz} = 0.$$

Правило знаків для крутильних моментів.

Якщо дивитись з боку напрямку осі, то додатній крутильний момент той, що діє проти годинникової стрілки (Рис. 10.1).

Можна показати, що визначення одиничних переміщень можна спростити, якщо встановити між переміщеннями δ_{ik} і δ_{ki} взаємозв'язок.

17.4 Теорема про взаємність робіт і переміщень

Теорема про взаємність робіт належить до загальних теорем опору матеріалів. Вона витікає з принципу незалежності дії сил і застосовна для всіх систем.

Розглянемо балку, до якої прикладені сили P_1 і P_2 (Рис. 17.9).

Виконаємо пряме навантаження, тобто навантажимо балку в точці A силою P_1 (див. рис.17.9, а). Вона виконає роботу (**формула Клапейрона**)

$$A = \frac{1}{2} P_1 \cdot \Delta_{11},$$

де Δ_{11} – переміщення т. A у напрямі сили P_1 , викликане силою P_1 .

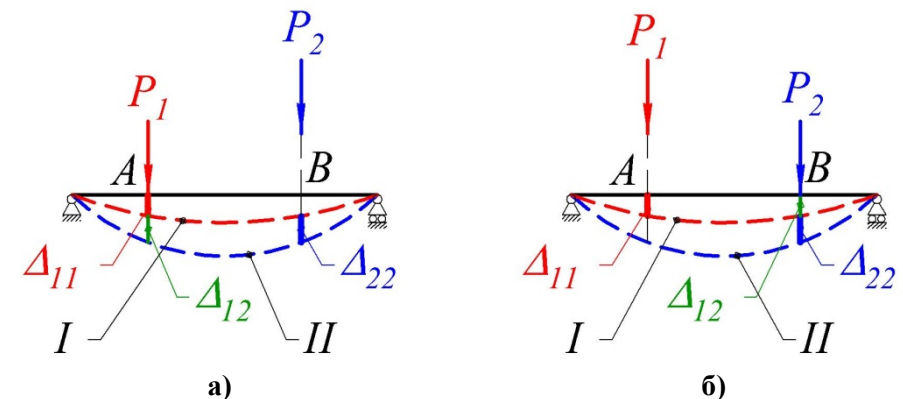


Рисунок 17.9 – До теореми про взаємність робіт

розподіленим моментом інтенсивністю $3m$ на довжині 2ℓ (Рис. 10.2, а). Побудувати епюри крутильних моментів та кутів закручування.

I ділянка $0 \leq z_1 \leq 2\ell$

$$\sum m_{kz} = 0;$$

$$-M_1 + 3mz_1 + M_{кр1} = 0.$$

$$M_{кр1} = M_1 - 3mz_1 = m\ell - 3mz_1$$

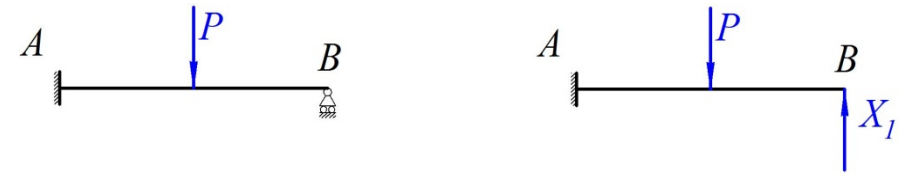
при $z_1 = 0$ $M_{кр1} = m\ell$; при $z_1 = 2\ell$ $M_{кр1} = -5m\ell$.

II ділянка $0 \leq z_2 \leq \ell$

$$\sum m_{kz} = 0;$$

$$-M_1 + 6m\ell - M_2 + M_{кр2} = 0.$$

$M_{кр2} = M_1 + M_2 - 6m\ell = m\ell + 4m\ell - 6m\ell = -m\ell$
(при будь-якому z_2).



а) б)
Рисунок 17.7 – Приклад простої статично невизначуваної системи

Виберемо як основну систему консоль, яку для отримання еквівалентної системи (Рис.17.7, б) навантажимо зовнішньою силою P і “зайвою” невідомою \bar{X}_1 . Додаткове рівняння переміщень, що виражає рівність нулю переміщення точки B від сил P і \bar{X}_1 , буде

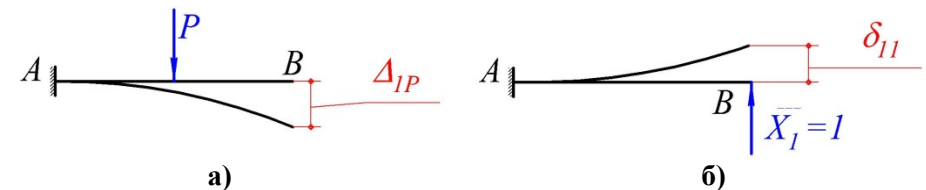
$$\Delta_1 = \Delta(P, \bar{X}_1) = 0. \quad (17.5)$$

На підставі принципу незалежності дії сил запишемо

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \delta_{11}, \quad (17.6)$$

де Δ_{1P} – переміщення точки B від заданого навантаження P (Рис. 17.8, а);

δ_{11} – переміщення точки B від сили \bar{X}_1 .



а) б)
Рисунок 17.8 – Переміщення точки B від заданого навантаження P і одиничної сили $\bar{X}_1 = 1$

Позначивши переміщення точки B від $\bar{X}_1 = 1$ за його напрямком через δ_{11} (Рис.17.8, б), одержимо $\Delta_{11} = \bar{X}_1 \cdot \delta_{11}$.

Прийнято позначати узагальнені переміщення (як лінійні, так і кутові) буквами Δ_{ik} або δ_{ik} з відповідними подвійними індексами. **Перший індекс** указує точку і напрям переміщення, другий – силовий чинник, що викликав це переміщення. Наприклад, Δ_{PP} означає переміщення точки прикладання сили P за напрямком її дії, викликане цією ж силою P (Рис.17.6, а).

Для позначення повного переміщення, викликаного декількома силовими чинниками, наприклад силою P , моментом M і “зайвою” невідомою силою X_1 (див. рис.17.6, б), при Δ зберігають тільки перший індекс:

$$\Delta_P = \Delta_{PP} + \Delta_{PM} + \Delta_{PX_1}, \quad (17.3)$$

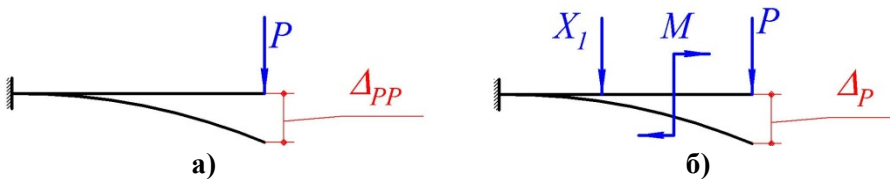


Рисунок 17.6 – Переміщення точки прикладання сили P

Переміщення, викликані **одиничною силою** ($\bar{X}_1 = 1$), прийнято позначати буквою δ і називати **питомим переміщенням**. Якщо одинична сила $\bar{X}_1 = 1$ викликала переміщення δ_{11} , то повне переміщення Δ_{11} може бути подане у вигляді:

$$\Delta_{11} = \bar{X}_1 \cdot \delta_{11}. \quad (17.4)$$

Додаткові рівняння переміщень, що виражають рівність нулю переміщень по напрямках “зайвих” невідомих, зручно складати в так званій **канонічній формі**, тобто по певній закономірності.

Покажемо це на **прикладі** рішення простої статично невизначуваної системи (Рис.17.7, а).

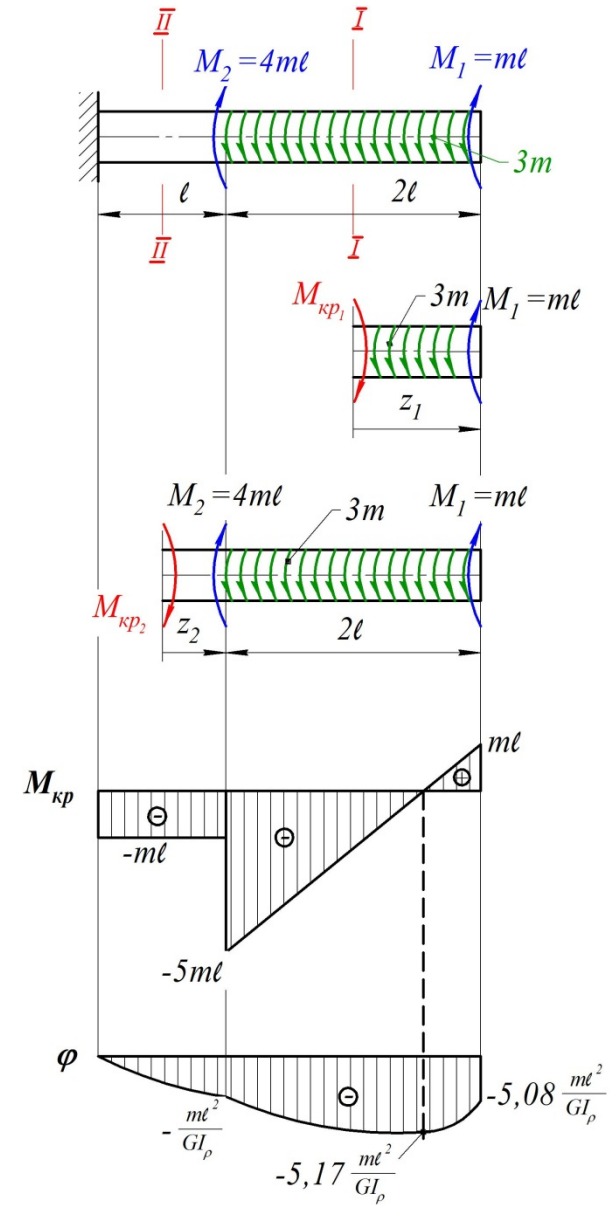


Рисунок 10.2 – Епюра крутильних моментів та кутів закручування

10.2 Напруження і деформації при крученні. Умова міцності і жорсткості

10.2.1 Напруження при крученні.

Для визначення напружень у поперечних перерізах розглянемо стержень, який скручується парою сил (Рис. 10.3).

d_0 – діаметр стержня;

ℓ – довжина стержня;

AB – твірна;

φ – кут закручування;

BB' – абсолютний зсув одного перерізу відносно іншого;

γ – кут відносного зсуву на поверхні, де $\gamma = \text{const}$.

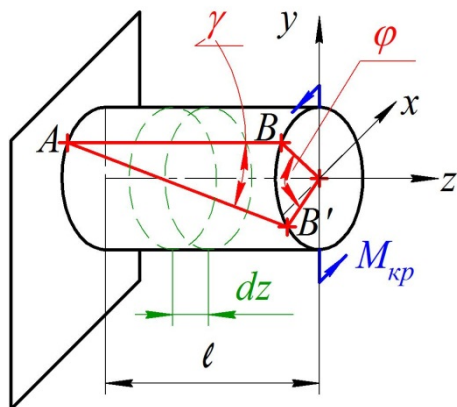


Рисунок 10.3 – Деформація кручення

Для вирішення задачі по визначенню напруження при крученні розглянемо три аспекти задачі.

Статичний аспект задачі:

Оскільки при крученні $M_{кр}$ – єдиний внутрішній силовий фактор, то є підстави вважати, що в перерізах діють тільки дотичні напруження. Тоді п'ять рівнянь (3.4) тотожно перетворюються на нуль, а (3.5) набуває вигляду

При $x = 0$

$$Q = -R_B = -\frac{3}{8}q\ell;$$

при $x = \ell$

$$Q = -R_B + q\ell = -\frac{3}{8}q\ell + q\ell = \frac{5}{8}q\ell.$$

$$\sum M_{Ok} = R_B x - q \frac{x^2}{2} - M_O = 0 \quad M_O = R_B x - q \frac{x^2}{2};$$

при $x = 0$

$$M_O = 0 ;$$

при $x = \ell$

$$M_O = \frac{3}{8}q\ell^2 - \frac{1}{2}q\ell^2 = -\frac{q\ell^2}{8}.$$

Визначаємо екстремум.

$$x_0 = \frac{R_B}{q}; \quad x_0 = \frac{\frac{3}{8}q\ell}{q} = \frac{3}{8}\ell.$$

При $x = x_0$

$$M_O = \frac{9q\ell^2}{128}.$$

17.3 Канонічні рівняння методу сил

Зовнішні навантаження, що зустрічаються в задачах опору матеріалів, є групою постійних сил. Роботу групи постійних сил можна подати у вигляді добутку двох величин $A = P \cdot \Delta_P$, у якому множник P залежить тільки від сил групи і називається **узагальненою силою**, а Δ_P залежить від переміщень і називається **узагальненим переміщенням**.

Таким чином, під **узагальненою силою** розуміємо **будь-яке навантаження (зосереджені сили, зосереджені моменти, розподілені навантаження і т.д.), яке здатне здійснювати роботу на відповідному узагальненому переміщенні**.

$$X_1 = \frac{3}{8}q\ell, \quad (X_1 = R_B).$$

З рівнянь статки визначаємо останні реакції опор:

$$\begin{aligned} \sum P_{kx} &= 0; \quad H_A = 0; \\ \sum P_{ky} &= 0; \quad R_A - q\ell + R_B = 0; \\ \sum M_{kA} &= 0; \quad M_A - \frac{q\ell^2}{2} + R_B\ell = 0; \\ H_A &= 0; \quad M_A = \frac{q\ell^2}{8}; \quad R_A = \frac{5}{8}q\ell; \quad R_B = \frac{3}{8}q\ell. \end{aligned}$$

На рис. 17.5 наведено епюри Q та M , а також значення реакцій опор.

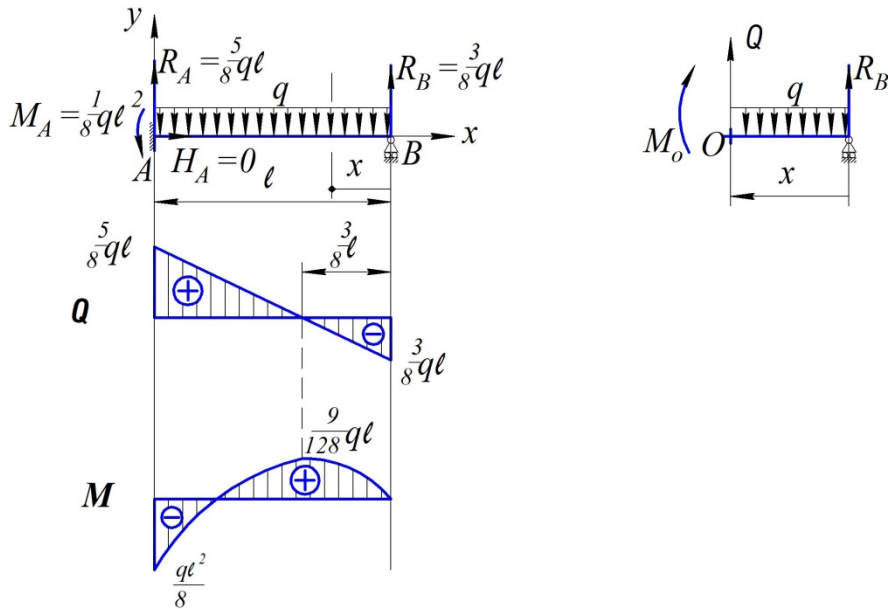


Рисунок 17.5 – Епюри Q та M

Визначимо внутрішні зусилля Q і M (Рис. 17.5,б).

$$\sum Y_k = Q + R_B - qx = 0 \quad Q = -R_B + qx.$$

$$M_{кр} = \int_F \rho \tau dF, \quad (10.1)$$

де ρ – змінний радіус,

$$0 \leq \rho \leq \frac{d_0}{2};$$

τ – дотичне напруження, що діє на елементарній площадці dF .

Характер розподілу напружень по перерізу з'ясуємо, розглянувши геометричну картину деформації вала при крученні.

Геометричний аспект задачі:

Розглянемо деякий елемент вала довжиною dz . Вал скручується зовнішнім моментом $M_{кр}$, який спричиняє в поперечних перерізах внутрішні крутильні моменти $M_{кр}$.

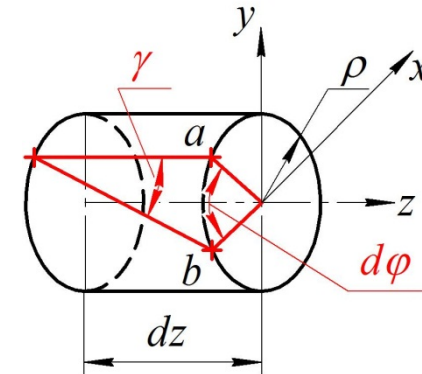


Рисунок 10.4 – Геометричний аспект задачі

Кут закручування відрізка вала завдовжки dz (Рис. 10.4) дорівнює $d\varphi$.

Абсолютний зсув одного перерізу відносно іншого

$$ab = \rho d\varphi = \gamma dz, \quad \text{де} \quad \gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz},$$

$$\gamma = \rho\theta, \quad (10.2)$$

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz'}$$

тут θ – відносний кут закручування, см^{-1} .

Фізичний аспект задачі. Оскільки елемент вала в будь-якій точці поперечного перерізу, на відстані ρ від центра перерізу, зазнає чистого зсуву, то матимемо:

$$\tau = \gamma G. \quad (10.3)$$

Формула (10.3) – **закон Гука при крученні.**

Синтез. Підставляючи (10.2) в (10.3), а потім в рівняння (10.1) визначимо напруження яке діє в поперечному перерізі вала при крученні:

$$M_{\text{кр}} = \int_F \rho \cdot \theta \cdot G \cdot \rho \cdot dF = \theta G \int_F \rho^2 dF = \theta G J_\rho.$$

Звідки виведемо **формулу для визначення відносного кута закручування круглого стержня:**

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{\text{кр}}}{G J_\rho}, \quad (10.4)$$

де $G J_\rho$ – **жорсткість поперечного перерізу стержня при крученні**, $\text{Н}\cdot\text{м}^2$; J_ρ – **полярний момент інерції круглого стержня.**

На підставі (10.4) можна записати формулу для визначення взаємного кута закручування двох перерізів, розташованих на відстані ℓ

(Рис. 17.4, в), та невідомої реакції (Рис. 17.4, г).

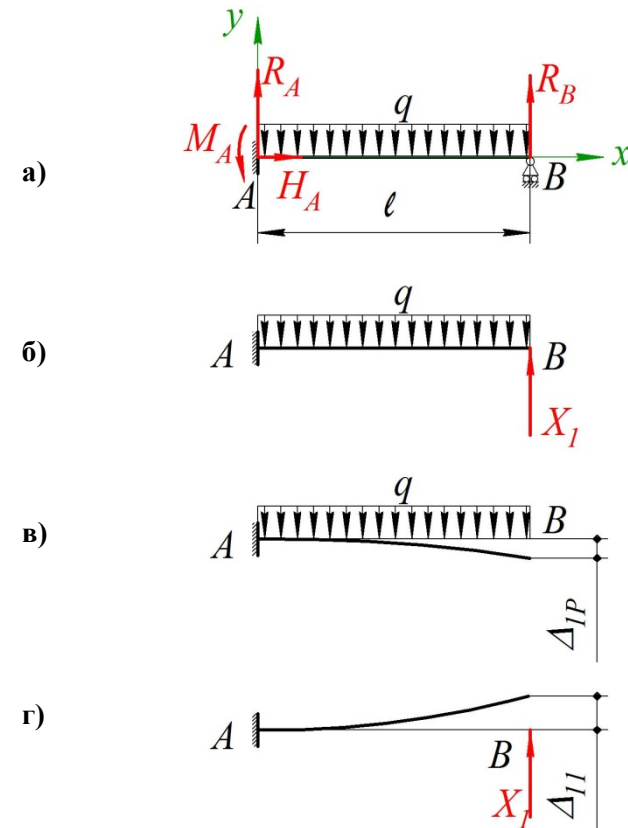


Рисунок 17.4 – Статично невизначувана балка

Методи визначення Δ_{1p} та Δ_{11} наведено в главі 11 «Згинання» і «Загальні методи визначення переміщень». Тоді рівняння (17.2) запишеться у вигляді

$$\Delta_1 = \Delta_{1p} + \Delta_{11} = 0$$

або

$$-\frac{q\ell^4}{8EJ} + \frac{X_1\ell^3}{3EJ} = 0.$$

Звідси шукана реакція

де k – кількість замкнених контурів (повна відсутність шарнірів);

m – кількість шарнірів у перерахунку на одиничні.

Основа (земля) розглядається як стержень. Рама (Рис. 17.3, б) має чотири замкнених контури; біля кожної опори рами вказано відповідні реакції одиничних шарнірів з відповідними індексами. При цьому стержні, жорстко зв'язані між собою, вважаються одним стержнем.

17.2 Розрахунок простої статично невизначуваної балки

Наведемо розрахунок балки, до якої прикладені навантаження. Один кінець балки закріплений, а інший опирається на шарнірно-рухома опору (Рис. 17.4, а). Затиснута опора A та шарнірно-рухома опора B дають чотири реакції (R_A, H_A, M_A, R_B). Отже балка один раз статично невизначувана. Для побудови основної системи слід усунути один зв'язок – шарнірно-рухома опору. Основна система становить консоль (Рис. 17.4, б).

До основної системи прикладемо задане розподілене навантаження q , а замість відкинutoї опори прикладемо невідому реакцію $R_B = X_1$ (Рис. 17.4, б). Надалі зайві зв'язки будемо позначати літерою X незалежно від того, сила це чи момент.

Повне переміщення точки B основної системи (від заданого q й зайвого зусилля) у напрямі X_1 повинно дорівнювати нулю (точка B нерухома). Додаткова рівняння переміщень запишеться так:

$$\Delta_1 = 0. \quad (17.2)$$

Повний прогин Δ_1 можна визначити як суму прогинів від зовнішнього навантаження

$$\Delta_{1p} = -\frac{q\ell^4}{8EJ}$$

$$\varphi = \int_0^{\ell} \frac{M_{кр}}{GJ_{\rho}} dz. \quad (10.5)$$

За цією формулою можемо побудувати епюру φ .

Якщо в межах відрізка стержня завдовжки ℓ крутильні моменти в перерізах не змінюються, то

$$\varphi = \theta \cdot \ell = \frac{M_{кр} \cdot \ell}{GJ_{\rho}}. \quad (10.6)$$

Ця формула і виражає **закон Гука при крученні**.

Дотичне напруження τ в будь-якій точці перерізу вала

$$\tau = \frac{M_{кр} \cdot \rho}{J_{\rho}}. \quad (10.7)$$

Максимальне дотичне напруження (на зовнішньому шарі матеріалу стержня при $\rho = r$ і $\frac{\rho}{J_{\rho}} = \frac{1}{W_{\rho}}$)

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр max} \cdot r}{J_{\rho}} = \frac{|M_{кр max}|}{W_{\rho}}, \quad (10.8)$$

де $W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{r} = \frac{J_{\rho}}{\rho}$ – **полярний момент опору при крученні**, см³.

Запишемо рівняння міцності та жорсткості при крученні. Згідно з (10.8) **умова міцності** запишеться так:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр max}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (10.9)$$

де $[\tau]$ – **допустиме дотичне напруження при крученні**,

$$[\tau] = 0,5 - 0,6[\sigma].$$

$[\sigma]$ – допустиме напруження, визначається при простому розтяганні.

Умова жорсткості, згідно з (10.4)

$$\theta_{max} = \frac{M_{кр}}{GJ_{\rho}} \leq [\theta], \quad (10.10)$$

де $[\theta]$ – допустимий відносний кут закручування.

На підставі формул (10.9) і (10.10), маємо:

$$W_{\rho} \geq \frac{M_{кр}}{[\tau]} \quad \text{і} \quad J_{\rho} \geq \frac{M_{кр}}{G[\theta]}. \quad (10.11)$$

Таким чином, для визначення небезпечного перерізу (для знаходження перерізу де діє $|M_{кр max}|$) необхідно побудувати епюру $M_{кр}$.

За допомогою умови міцності можна вирішувати три типи задач:

1. За відомими навантаженням та матеріалом знайти діаметр стержня, при якому буде виконуватись умова міцності

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр max}}{\frac{\pi d^3}{16}} \leq [\tau], \quad d = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр max}}{\pi[\tau]}}.$$

2. За відомими розмірами деталі і матеріалом визначити допустиме навантаження.

$$M_{кр max} = \frac{\pi d^3}{16} \cdot [\tau] - \text{проектувальний розрахунок.}$$

3) Коли відомі навантаження, розміри і матеріал деталі перевірити, чи виконується **умова міцності**

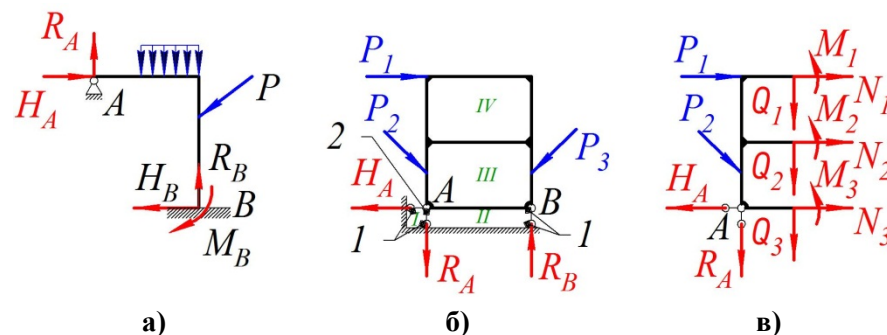


Рисунок 17.3 – Статично невизначувані рами

Статична невизначуваність може бути не тільки від зайвих зв'язків, а й від умов утворення системи. Для рами (Рис. 17.3, б) реакції R_A, H_A, R_B зовнішніх зв'язків легко визначити з рівнянь рівноваги. Але рівняння рівноваги не дають змоги визначити всі силові фактори в елементах рами.

Розріжемо раму на дві частини й розглянемо рівновагу однієї з частин (Рис. 17.3, в). Дію відкинутої частини в кожному перерізі замінимо трьома силовими факторами: осьюою силою N , поперечною силою Q та згинальним моментом P . Отже, з трьох рівнянь рівноваги треба визначити дев'ять невідомих зусиль. Система шість раз статично невизначувана. Вона складається з двох замкнених безшарнірних контурів, кожен з яких тричі статично невизначуваний. Встановлення шарніра на осі стержня, перетворює на нуль згинальний момент й знижує ступінь статичної невизначуваності на одиницю. Такий шарнір називають **одиначним**.

Шарнір, розміщений у вузлі, де збігаються n стержнів, знижує ступінь статичної невизначуваності на $n - 1$. Такий шарнір зветься **загальним**.

Ступінь статичної невизначуваності S плоских систем можна визначити за формулою

$$S = 3k - u, \quad (17.1),$$

реакції (R_A, H_A, R_B, R_C) неможливо. Отже, зображена на рис. 17.1, балка **одн раз статично невизначувана**.

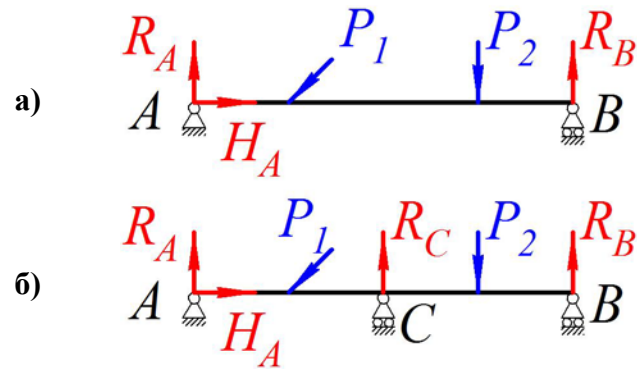


Рисунок 17.1 – Шарнирно-обперта балка

На рис. 17.2, а показано двічі статично невизначувана балка. Для визначення п'яти реакцій (R_A, H_A, M_A, R_B, R_C) є лише три рівняння рівноваги. Система має два «зайвих зв'язки».

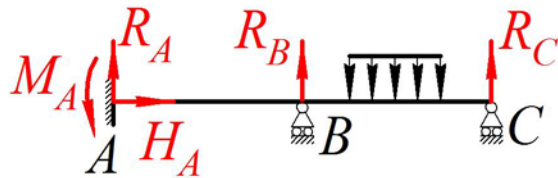


Рисунок 17.2 – Двічі статично невизначувана балка

У конструкціях часто застосовують **рами**, в яких на відміну від ферм, де стержні з'єднані шарнірами і навантажені силами, **стержні з'єднуються жорстко, не мають відносних переміщень та поворотів**.

На (рис. 17.3, а) показано двічі статично невизначувану плоску ферму. Тут для визначення п'яти реакцій зовнішніх зв'язків маємо тільки три рівняння рівноваги.

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр max}}{W_{\rho}} \leq [\tau].$$

10.2.2 Розрахунок трубчатого перерізу (порожнистого валу).

Вали, що передають велику потужність, виготовляють трубчатими. Як видно з епюри (Рис. 10.5) в середині матеріал валу мало навантажений. Наприклад, суцільний вал, який передає потужність повинен бути в діаметрі 300 мм. Якщо взяти трубчатий вал з зовнішнім діаметром $D = 350$ мм, та внутрішнім діаметром $d = 275$ мм, то він передасть таку ж потужність, але вага його буде в 2 рази менша.

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр max}}{W_{\rho}} = \frac{16M_{кр max}}{\pi D^3(1 - \alpha^4)} \leq [\tau],$$

де $W_{\rho} = \frac{\pi D^3(1 - \alpha^4)}{16}$, – полярний момент опору для трубчатого перерізу,

$\alpha = \frac{d}{D}$ – відношення внутрішнього d до зовнішнього діаметра D .

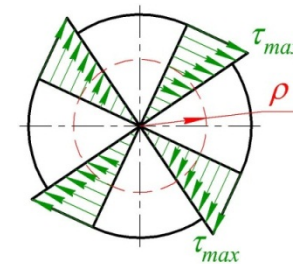


Рисунок 10.5 – Зміна напружень τ в перерізі валу

Якщо по довжині валу крутильні моменти прикладені нерівномірно, то щоб зекономити матеріал валу та зменшити

його вагу, вали роблять східчастими. Такий вал називається рівноміщним.

10.2.3 Визначення кута закручування валу круглого перерізу.

Як було показано раніше кут закручування дорівнює:

$$\varphi = \int_0^{\ell} \frac{M_{кр}}{GJ_{\rho}} dz .$$

Якщо в межах ділянки крутильний момент не змінюється і діаметр d - постійний, то

$$\varphi = \frac{M_z \cdot \ell}{GJ_{\rho}} . \quad (10.12)$$

Якщо вал має декілька силових ділянок або епюра крутильних моментів перетинає нульову лінію, то кут закручування одного перерізу відносно іншого дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування на кожній ділянці (тобто з урахуванням напрямлення цього закручування).

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{zi} \cdot \ell_i}{GJ_{\rho}} . \quad (10.12')$$

Приклад 10.2

В умовах прикладу 10.1 треба було побудувати епюру $M_{кр}$. Побудуємо епюру кутів закручування φ . Епюру φ починаємо будувати з закріплення, де $\varphi = 0$.

$$\varphi_1 = 0 .$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \int_0^{\ell} \frac{M_{1кр} dz}{GJ_{\rho}} = 0 - \frac{m\ell^2}{GJ_{\rho}} = -\frac{m\ell^2}{GJ_{\rho}} .$$

Отже, **основною системою називається статично визначуваний варіант розглядуваної системи, здобутий звільненням від «зайвих зв'язків».**

Етап 3. Завантажуємо основну систему заданим навантаженням і зайвими невідомими зусиллями, що замінюють дію усунених зв'язків. Така система зветься **еквівалентною системою.**

Етап 4. Для того, щоб основна система була еквівалентною вихідній системі, невідомі зусилля треба добирати таким чином, щоб деформація основної системи не відрізнялася від деформації вихідної статично невизначуваної системи. Тобто робота еквівалентної системи повинна бути ідентичною роботі заданої. Для цього складається рівняння сумісності деформацій точок прикладення зайвих зв'язків (тобто прирівнюється до нуля деформація точок прикладення зайвих зв'язків у напрямі їх дії) і із рішення цих рівнянь визначають величину і напрям реакцій зв'язків, тобто невідомі навантаження. Переміщення відповідних точок системи можна визначити будь-яким способом, але найкраще методом Мора або способом Верещагіна. Знайшовши зайві невідомі зусилля, визначають реакції опор, будують епюри внутрішніх зусиль, а також добирають розміри і форму перерізу та перевіряють елемент на міцність вже відомими способами.

Наведена система розрахунку статично невизначуваних систем має назву **метода сил**, оскільки як основні невідомі тут вибираються зусилля зайвих зв'язків.

Приклади визначення «зайвих зв'язків». На (рис. 17.1, а) показано балку, покладену на шарнірні опори, статично визначувану і геометрично незмінювану. Всі реакції (R_A, H_A, R_B) визначаються із умов рівноваги плоскої системи сил, а далі легко знайти силові фактори Q і M у будь-яких перерізах балки.

Додамо ще один зв'язок – шарнірно-рухомому опору в перерізі C (Рис. 17.1, б). З погляду геометричної незмінюваності цей зв'язок зайвий. З трьох рівнянь рівноваги визначити чотири

17. РОЗРАХУНКИ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

17.1 Основні поняття та визначення. Етапи розрахунку статично невизначуваних систем

Статично невизначуваними називають системи, в яких внутрішні зусилля неможливо визначити тільки за допомогою рівнянь статички. У таких системах зв'язків більше, ніж необхідно для рівноваги. Отже, деякі в'язи виявляються в цьому розумінні зайвими, а зусилля в них – зайвими невідомими. За числом зайвих зв'язків або зайвих невідомих зусиль встановлюють ступінь статичної невизначуваності системи як різницю між кількістю зайвих зв'язків та кількістю рівнянь.

Для розрахунку таких балок крім рівнянь статички необхідно скласти додаткові рівняння, яке називають рівнянням переміщень (або рівнянням деформації).

В розділі 6 були розглянуті найпростіші приклади статично невизначуваних систем, елементи яких зазнавали лише осьового розтягання або стискання. У цій главі розглянемо більш загальні випадки, а основну увагу приділимо статично невизначуваним балкам та рамам.

При розв'язуванні цих систем слід додержуватися наступній послідовності.

Етап 1. Визначається число «зайвих» невідомих зв'язків. Під терміном «зайвих невідомих» розуміють зв'язки, без яких система залишається «геометрично» незмінною, тобто в рівновазі.

Етап 2. Усуваючи «зайві зв'язки» замінюємо вихідну систему статично визначуваною, яка називається **основною системою**.

Для однієї статично невизначуваної вихідної системи можливі різні варіанти основних систем. Основним є те, що кожна з них була геометрично незмінною.

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \int_0^{2\ell} \frac{M_{2\text{кр}} dz}{GJ_\rho}$$

Тут діє розподілене навантаження, тому еюра кутів закручування є кривою другого порядку (парабола). Еюра крутильних моментів перетинає нульову лінію, тому парабола буде мати екстремум, який необхідно знайти. Для цього запишемо алгебраїчну суму кутів закручування з урахуванням їх напрямку:

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= -\frac{m\ell^2}{GJ_\rho} + \left(-\frac{1 \cdot 5m\ell \cdot \frac{5}{6} 2\ell}{2GJ_\rho} + \frac{1 \cdot m\ell \cdot \frac{1}{6} 2\ell}{2GJ_\rho} \right) = \\ &= -\frac{61m\ell^2}{12GJ_\rho} = -5,08 \frac{m\ell^2}{GJ_\rho}. \end{aligned}$$

Для визначення положення екстремуму можна скористатися двома методами.

За першим методом поділимо еюру крутильних моментів на два трикутника та розрахуємо кути повороту по стандартній методиці. Або рівняння крутильного моменту прирівнюємо до нуля (перетин нульової лінії). З отриманого рівняння знайдемо значення z та розрахуємо кут повороту для цього значення. Еюра φ показана на рис.10.2.

Еюри кутів закручування будують для того, щоб визначити найбільший абсолютний кут закручування φ або найбільший відносний кут закручування θ . Тоді умова жорсткості при крученні має вигляд:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр max}}}{GJ_\rho} \leq [\theta].$$

Якщо

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32},$$

то діаметр із умов жорсткості буде

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр\ max}}{\pi[\theta]\sigma}}.$$

Визначивши діаметр із умов міцності та із умов жорсткості призначають більший діаметр.

$[\theta]$ – допустимий кут закручування. Вибирається із умов навантаження:

- при статичному навантаженні $[\theta] = 0,3^\circ$ на кожний метр довжини вала;

- при змінних навантаженнях $[\theta] = 0,25^\circ/\text{м}$;

- при ударних навантаженнях $[\theta] = 0,15^\circ/\text{м}$.

В формулі

$$\theta_{max} = \frac{M_{кр\ max}}{GJ_p} \leq [\theta] \frac{\pi}{180}$$

відносний кут закручування θ виражається в радіанах. Щоб визначити $[\theta]$, який заданий в градусній величині, в радіанній, потрібно домножити на $\pi/180^\circ$.

10.3 Статично невизначувані задачі при крученні

Приклад 10.3. Розглянемо круглий вал, закріплений обома кінцями боків і навантажений крутильним моментом M в перерізі вала т.С (Рис. 10.6). Відомо: момент M , розміри a і b .

Побудувати епюру крутильних моментів по довжині вала.

При такому навантаженні в місцях закріплення валу виникнуть реактивні моменти M_A та M_B в площинах перпендикулярних до осі вала.

впав внаслідок втрати стійкості в одному з елементів опорного пристрою.

Таблиця 16.3 – Значення питомого радіуса інерції для різних форм перерізів

Переріз	ξ
Трубчастий	$(\alpha = d_2/d_3 = 0,95 - 0,8), 2,25-1,64$ $(\alpha = 0,7 - 0,8), 1,2-1,0$
Кутник	0,5 – 0,3
Двотавр	0,41 – 0,27
Швелер	0,41 – 0,29
Квадрат	0,289
Круг	0,283

16.7 Контрольні запитання

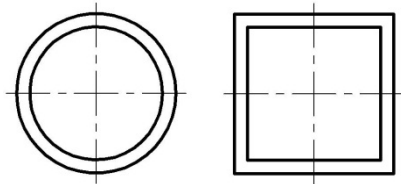
1. Поняття Ейлерової сили.
2. Формула Ейлера для визначення критичної сили.
3. Який коефіцієнт характеризує умови закріплення кінців стержня?
4. Що називається зведеною довжиною стержня?
5. Що характеризує гнучкість стержня?
6. Як використовують коефіцієнт зниження допустимого напруження?
7. У якому випадку користуються формулою Ясинського?
8. На які три категорії поділяють стержні в залежності від гнучкості?
9. Як оцінюється раціональний добір матеріалу та форми перерізу для стиснутих стержнів?

16.6 Добір матеріалу та раціональної форми перерізів для стиснутих стержнів

При розрахунку на стійкість модуль пружності E – єдина механічна характеристика матеріалів, що визначає опір матеріалу втраті стійкості. Оскільки E мало залежить від міцності, тому для стержнів, несуча здатність яких визначається втратою стійкості ($\lambda \geq \lambda_{\text{гр}}$ – висока гнучкість), недоцільно використовувати високоміцні матеріали.

Для стержнів малої гнучкості ($\lambda \leq \lambda_0$), граничний стан яких визначається міцністю, а не стійкістю, доцільно використовувати міцні сталі для підвищення σ_T .

Профіль поперечного перерізу тим кращий, чим більший момент інерції J при одній і тій же площі. Бажано, щоб гнучкість стержня в його головних площинах була однаковою. Цим вимогам найкраще відповідають порожнисті стержні круглого і квадратного перерізу з тонкою стіною. Слід



зауважити, що нижня межа товщини стінки визначається небезпекою місцевої втрати стійкості (випинання, викривлення). Щоб цього не відбувалось, ставлять діафрагми.

Для оцінки оптимальності перерізу використовують параметр $\xi = \frac{i_{\min}}{\sqrt{F}}$ – **питомий радіус інерції** (див. табл. 16.3).

Явище втрати стійкості елементів конструкції дуже небезпечне. Часто причиною руйнування конструкцій та споруд є не порушення міцності, а втрата стійкості рівноваги.

В історії техніки відомо багато випадків великих аварій і катастроф, коли причиною руйнування мостів, будівель, судів та інших споруд виступало явище втрати стійкості. Можна, наприклад, назвати руйнування великого газгольдера в Гамбурзі, який під час пробного заповнення 7 грудня 1909 р.

Розглянемо три аспекти задачі:

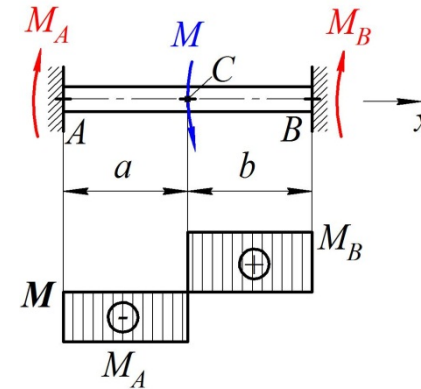


Рисунок 10.6 – Статично невизначувана система

Статичний аспект задачі.

$$\sum M_{kz} = 0 \quad -M_A - M_B + M = 0. \quad (10.13)$$

Геометричний аспект задачі. Оскільки обидва кінці вала закріплені, то кут повороту перерізів B відносно A дорівнює нулю:

$$\varphi_{B-A} = \varphi_{B-C} + \varphi_{C-A} = 0. \quad (10.14)$$

Фізичний аспект задачі. Використовуючи формулу (10.5), запишемо вирази для кутів закручування:

$$\varphi_{B-C} = -\frac{M_B \cdot b}{GJ_\rho}; \quad \varphi_{C-A} = \frac{(M - M_B) \cdot a}{GJ_\rho}. \quad (10.14')$$

Синтез. Підставимо (10.14') в (10.14), отримаємо

$$-\frac{M_B \cdot b}{GJ_\rho} + \frac{(M - M_B) \cdot a}{GJ_\rho} = 0.$$

Звідси з урахуванням (10.13) знайдемо, що

$$M_B = \frac{M \cdot a}{a + b}, \quad M_A = \frac{M \cdot b}{a + b}.$$

Епюра крутильних моментів показана на рис. 10.6.

10.4 Кручення стержнів некруглого поперечного перерізу

В інженерній практиці досить часто кручення зазнають стержні некруглого поперечного перерізу (прямокутні, трикутні, тощо). У цих випадках **гіпотеза плоских перерізів не може бути застосована**, оскільки перерізи викривляються (деплануються). Тому дослідження НДС таких стержнів не можна виконати методами опору матеріалів. Для розв'язання цієї проблеми застосовують методи теорії пружності. Результати досліджень показали, що в межах закону Гука найбільші дотичні напруження відсутні та повні і відносні кути закручування можна визначати за формулами:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр\ max}}{W_k}; \quad (10.15)$$

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot \ell}{GJ_k}; \quad (10.16)$$

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GJ_k}, \quad (10.17)$$

де J_k і W_k – геометричні характеристики: **момент інерції (см⁴) та момент опору (см³) при крученні**. Формули для визначення J_k і W_k для деяких перерізів наведені в табл.10.1

Таблиця 16.2 – Значення коефіцієнтів a , b для деяких матеріалів

Матеріал	a , МПа	b , Мпа	λ_0	$\lambda_{кр}$
Сталь:				
Ст2	264	0,7	60	105
Ст3	310	1,14	60	100
20, Ст4	328	1,15	40	96
45	449	1,67	52	85
Дюралюміній Д16 Т	406	1,83	30	83
Сосна, ялина	29,3	0,194		70

II. Стержні середньої гнучкості ($\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_{кр}$), які розраховуються за формулою Ясинського (16.17). Для них залежність $\sigma_{кр}$ від гнучкості λ лінійна (BC):

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda.$$

III. Стержні малої гнучкості ($\lambda < \lambda_0$), які розраховуються не на стійкість, а на міцність. Для них критичне напруження вважається постійним (CD) $\sigma_{кр} = \sigma_T$ або $\sigma_{кр} = \sigma_B$.

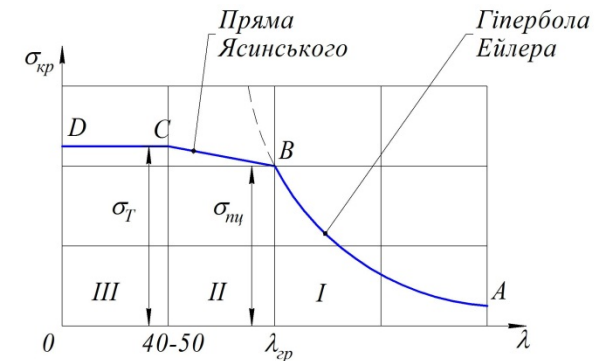


Рисунок 16.4 – Використання методів розрахунку стійкості

формулами, складеними **Ф.С. Ясинським**¹² на базі досліджень:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda. \quad (16.17)$$



Рисунок 16.3 – Портрет Ф.С. Ясинського

У цій формулі залежність критичного напруження від гнучкості лінійна; a і b – коефіцієнти, які визначаються дослідним шляхом, постійні для даного матеріалу (див. табл. 16.2).

При деякому значенні гнучкості $\sigma_{кр}$, за формулою (16.17) стає рівним границі текучості σ_T (для пластичного матеріалу), або границі міцності σ_B (для крихких матеріалів).

Тоді гнучкість обчислюємо за формулою:

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_T}} \text{ або } \lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_B}}.$$

Отже в залежності від гнучкості стиснуті стержні умовно поділяють на три категорії (див. рис. 16.4):

I. Стержні великої гнучкості ($\lambda \geq \lambda_{кр}$), для яких розрахунок на стійкість ведеться за **формулою Ейлера** і залежність $\sigma_{кр}$ від λ – гіперболічна (АВ):

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} - \text{(гіпербола Ейлера)}.$$

¹² **Ф.С. Ясинський (1856–1899)** – вчений-механік та інженер, фахівець в галузі будівельної механіки.

Таблиця 10.1 Геометричні характеристики деяких перерізів при крученні

Форма перерізу	2	3	4	Примітки			
				h/b	α	β	γ
	1			1	0,208	0,141	1
				1,5	0,231	0,196	0,859
				1,75	0,239	0,214	-
				2,0	0,246	0,229	0,795
				2,5	0,256	0,249	-
				3,0	0,267	0,263	0,753
				4,0	0,282	0,281	0,745
				6,0	0,299	0,299	0,743
				8,0	0,307	0,307	0,743
				1,0	0,313	0,313	0,743
			∞	0,333	0,333	0,743	

Точки з найбільшими дотичними напруженнями $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}}$

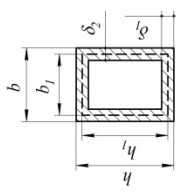
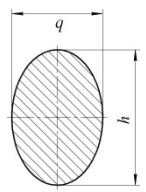
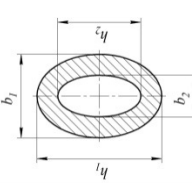
Посередині довгих сторін $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}}$; посередині коротких сторін $\tau = \gamma \tau_{max}$; У кутах $\tau = 0$.

Момент опору при крученні, $W_{кр}, \text{см}^3$

$$W_{кр} = \alpha h b^2$$

Момент інерції при крученні, $J_{кр}, \text{см}^4$

$$J_{кр} = \beta h b^3$$

Продовження табл. 10.1				
1	2	3	4	5
	$J_K = \frac{h_0^2 b_0^2 \delta_1 \delta_2}{h \delta_2 + b \delta_1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}$	$W_{K1} = 2 h_0 b_0 \delta_1$ $W_{K2} = 2 h_0 b_0 \delta_2$	Посередині довгих сторін $\tau_1 = \frac{M_{кр}}{W_{K1}}$; посередині коротких сторін $\tau_2 = \frac{M_{кр}}{W_{K2}}$. У зовнішніх точках малих півосей $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_K}$; у кінці великих півосей $\tau_1 = \frac{\tau_{max}}{m}$.	У внутрішніх кутах має місце висока концентрація напружень, що досягають границі текучості матеріалу. Якщо є заокруглення радіуса r, коефіцієнт концентрації $\alpha_K = 1,74 \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{r}}$.
	$J_K = \frac{h_0^2 b_0^2 \delta_1 \delta_2}{h \delta_2 + b \delta_1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}$	$W_K = \frac{\pi b^2 h}{16}$	У кінці малих півосей $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_K}$; у кінці великих півосей $\tau_1 = \frac{\tau_{max}}{m}$.	$\frac{h}{b} = m > 1$
	$J_K = \frac{\pi m^3 b_1^4 (1 - \alpha^4)}{16(m^2 + 1)}$	$W_K = \frac{\pi b_1^3}{16} \times (1 - \alpha^4) m$	У кінці малих півосей $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_K}$; у кінці великих півосей $\tau_1 = \frac{\tau_{max}}{m}$.	$\frac{h_1}{b_1} = \frac{h_2}{b_2} = m > 1$ $\frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2}{b_1} = \alpha < 1$

Таблиця 16.1 – Значення коефіцієнтів ϕ для деяких матеріалів

Гнучкість	Сталь			Чавун	
	Ст. 0	Ст. 5	15ХСНД	C4 15-32	
	Ст. 2			C4 12-28	C4 24-44
	Ст. 3			C4 18-36	C4 28-48
	Ст. 4			C4 21-40	
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95
20	0,97	0,95	0,95	0,91	0,87
30	0,95	0,93	0,93	0,81	0,75
40	0,92	0,90	0,90	0,69	0,60
50	0,89	0,84	0,83	0,57	0,43
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23
80	0,75	0,66	0,63	0,26	0,18
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14
100	0,60	0,50	0,45	0,16	0,12
110	0,52	0,43	0,39		
120	0,45	0,38	0,33		
130	0,40	0,32	0,29		
140	0,36	0,28	0,25		
150	0,32	0,27	0,23		
160	0,29	0,24	0,21		
170	0,26	0,21	0,19		
180	0,23	0,19	0,17		
190	0,21	0,17	0,15		
200	0,19	0,15	0,13		

16.5 Розрахунки на стійкість за межею гнучкості матеріалів

У випадку неможливості застосування формули Ейлера ($\lambda < \lambda_{кр}$) критичне напруження визначається за емпіричними

де φ – коефіцієнт зниження допустимого напруження $[\sigma]$, залежить від матеріалу стержня і гнучкості λ (табл. 16.1).

4. Перевіряємо умову стійкості стиснутого стержня за формулою:

$$\sigma_y = \frac{P}{F} \leq \varphi \cdot [\sigma] . \quad (16.14)$$

За заданим коефіцієнтом запасу стійкості $n_{ст}$ визначаємо величину **допустимого зовнішнього навантаження**:

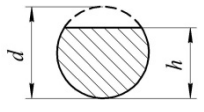
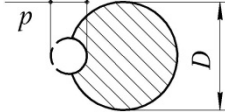
$$P \leq [P] = \frac{P_{кр}}{n_{ст}} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu \ell)^2 n_{ст}} . \quad (16.15)$$

Звідки визначається найменший осьовий момент інерції

$$J_{min} = \frac{P \cdot n_{ст} (\mu \ell)^2}{\pi^2 E} . \quad (16.16)$$

Для того, щоб із (16.14) знайти площу поперечного перерізу F , необхідно знати величину коефіцієнта φ в залежності від гнучкості λ . Але для визначення гнучкості потрібно знати розміри перерізу. У зв'язку з цим задачу розв'язуємо методом послідовного наближення. Спочатку за наближеними значеннями коефіцієнта зменшення напружень φ_1 визначаємо площу перерізу. Приймаючи форму перерізу, отримаємо величину i_{min} . Знайденими значеннями i_{min} і λ визначаємо φ_1^* . Якщо φ_1^* , виявляється близьким до значення φ_1 , то розрахунок на цьому закінчується. У протилежному випадку розрахунок повторюємо, доки вхідні і отримані значення коефіцієнта φ не виявляться досить близькими (метод послідовних наближень).

Продовження табл. 10.1

1			2	$J_k = \frac{d^4}{16} \left(2,6 \frac{h}{d} - 1 \right)$	$J_k = \alpha \frac{D^4}{16}$	3	$W_k = \frac{d^3}{8} \frac{2,6 \frac{h}{d} - 1}{\left(0,3 \frac{h}{d} + 0,7 \right)}$	$W_k = \frac{D^3}{\beta \cdot 8}$	4	$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_k}$	По дну канавки $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_k}$	5	$\frac{h}{d} > 0,5$	d/D	β	d/D	α	β	
	0,00													1,57	0,40	0,76	1,22	0,05	0,80

10.4.1 Стержні прямокутного перерізу.

В практиці найчастіше застосовуються стержні прямокутного перерізу. В цьому разі розподіл дотичних напружень має вигляд, як на рис. 10.7.

Найбільші напруження виникають біля поверхні, посередині довгих сторін прямокутного перерізу в точках C і D .

Визначаються вони за формулою (10.14), де

$$W_k = \alpha hb^2; \quad (10.18)$$

h і b – сторони перерізу;

α – коефіцієнт, який залежить від співвідношення h і b .

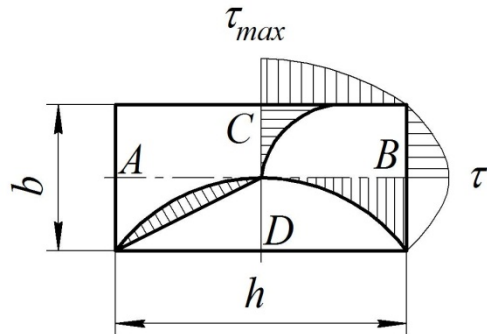


Рисунок 10.7 – Епюри напружень у прямокутному перерізі при крученні

Напруження, які виникають посередині коротких сторін (в точках A та B), визначаються таким чином

$$\tau = \gamma \tau_{max}. \quad (10.19)$$

Відносні та повні кути закручування за формулами (10.16) та (10.17), де

$$J_k = \beta hb^3. \quad (10.20)$$

Умова (16.11) визначає границі застосування формули Ейлера. При гнучкості стержня, менше граничного значення $\lambda_{гр}$, формулою Ейлера користуватися неможна.

Формулою (16.10) можна користуватися при умові, що гнучкість стержня, яка визначена за виразом:

$$\lambda = \mu \ell \sqrt{\frac{F}{J_{min}}} \quad (16.12)$$

задовольняє нерівність

$$\lambda_{кр} \leq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}},$$

тобто при $\lambda > \lambda_{кр}$ втрата стійкості проходить у границях пропорційності матеріалу.

16.4 Розрахунки на стійкість за допомогою коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження

Наведені вище співвідношення відносяться до випадку втрати стійкості у пружній області, тобто справедливі за умови, що аж до досягнення критичного стану максимальне напруження не перевищує границі пропорційності ($\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$).

Якщо $\sigma_{кр} > \sigma_{пц}$, то втрата стійкості проходить за границями пропорційності.

Послідовність розрахунків не стійкості:

1. Визначаємо гнучкість за формулою (16.12) і граничну критичну гнучкість, за формулою (16.11).

2. Якщо $\lambda > \lambda_{кр}$, то розрахунок виконується за формулами (16.9) і (16.10).

3. При гнучкості, яка задовольняє умову $\lambda > \lambda_{кр}$, критичне напруження наближено може бути знайдене за формулою:

$$\sigma_y = \varphi[\sigma], \quad (16.13)$$

Критичне напруження знайдемо, поділивши критичну силу на площу поперечного перерізу F :

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E J_z}{(\mu \ell)^2 F} = \frac{\pi^2 E i_{min}}{(\mu \ell)^2}, \quad (16.10)$$

де

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}}$$

– мінімальний радіус інерції.

16.3 Умови застосування формули Ейлера

При виведенні формули Ейлера було використано диференційне рівняння зігнутої осі стержня, справедливе тільки в межах дії закону Гука.

Звідси виходить, що формула Ейлера також справедлива тільки у тому випадку, якщо втрата стійкості відбувається при напруженні $\sigma_{кр}$, яке менше границі пропорційності $\sigma_{пц}$. Умову справедливості формули Ейлера можна представити у вигляді $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$. Підставляючи у цю нерівність значення $\sigma_{кр}$ із (16.10), отримаємо:

$$\left(\frac{i_{min}}{\mu \ell}\right)^2 \leq \frac{\sigma_{пц}}{\pi^2 E}.$$

Відношення $\mu \ell / i_{min} = \lambda$ називається **гнучкістю стержня**.

Отже, **граничне значення гнучкості**:

$$\lambda_{гр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \quad (16.11)$$

Коефіцієнти α , β , γ залежать від співвідношення сторін h і b .

h/b	α	β	γ
1	0,208	0,141	1
10	0,313	0,313	0,743

Умови міцності та жорсткості при крученні стержнів прямокутного перерізу розраховуються за формулами:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр max}}{\alpha h b^2} \leq [\tau]; \quad (10.21)$$

$$\theta = \frac{M_{кр}}{G \beta h b^3} \leq [\theta]. \quad (10.22)$$

10.4.2 Стержні відкритого складного профілю

Стержні, які мають поперечні перерізи у вигляді кутника, двотавра або швелера, можна розраховувати за такими ж формулами, що і стержні прямокутного поперечного перерізу. У цьому разі перерізи умовно розбивають на прямокутні частини, а геометрична характеристика J_k визначається як сума:

$$J_k = \frac{1}{3} \eta \sum b_i^3 h_i. \quad (10.23)$$

При співвідношенні сторін $h/b > 10$ коефіцієнти α і β в формулах (10.20) і (20.21) дорівнюють $\alpha + \beta = \frac{1}{3}$. Коефіцієнт η в формулі (10.23) в залежності від реального перетину буде різним. Так для кутника $\eta=1,0$, швелера $\eta=1,12$, тавру $\eta=1,15$, двотавру $\eta=1,2$.

Геометричну характеристику міцності (**момент опору при крученні**) W_k визначають за формулою:

$$W_k = \frac{J_k}{\delta_{max}}, \quad (10.24)$$

де δ_{max} – найбільша товщина прямокутників, які входять у розгорнутий складний переріз.

Кут закручування і найбільше дотичне напруження визначається в вигляді:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot \ell}{G\beta hb^3}; \quad (10.25)$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр} \delta_{max}}{J_k}, \quad (10.26)$$

де згідно з формулою (10.24)

$$\delta_{max} = \left(\frac{J_{ki}}{W_{ki}} \right)_{max}$$

Приклад 10.4. Визначити максимальне дотичне напруження, яке виникає в поперечному перерізі стержня у вигляді швелера №22а. Стержень скручується моментом $M=600$ Н·м. Схема до прикладу наведена на рис. 10.8.

Згідно з таблицею сортаменту (ГОСТ 8240-89) випишемо потрібні для розрахунків дані швелера №22а (Рис. 10.8): $h = 220$ мм; $b = 87$ мм; $d = 5,4$ мм; $t = 10,2$ мм $= \delta_{max}$.

Профіль швелера – тонкостінний відкритий (220×5,4 мм; 81,6×10,2 мм; 81,6×10,2 мм).

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_z}{4 \ell^2} = \frac{\pi^2 E J_z}{(2\ell)^2}. \quad (16.8)$$

Як бачимо, при зміні умов закріплення змінюється числовий множник біля ℓ^2 у знаменнику правої частини (16.7).

Оскільки при втраті стійкості прямолінійної форми рівноваги згин завжди має місце у площині найменшої жорсткості EJ_{min} , то нейтральною лінією служить та із головних центральних осей інерції, для яких момент інерції поперечного перерізу мінімальний (J_{min}). Тоді **формула Ейлера в загальному вигляді:**

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu \ell)^2}, \quad (16.9)$$

де μ – характеризує умову закріплення кінців стержня (Рис.16.3).

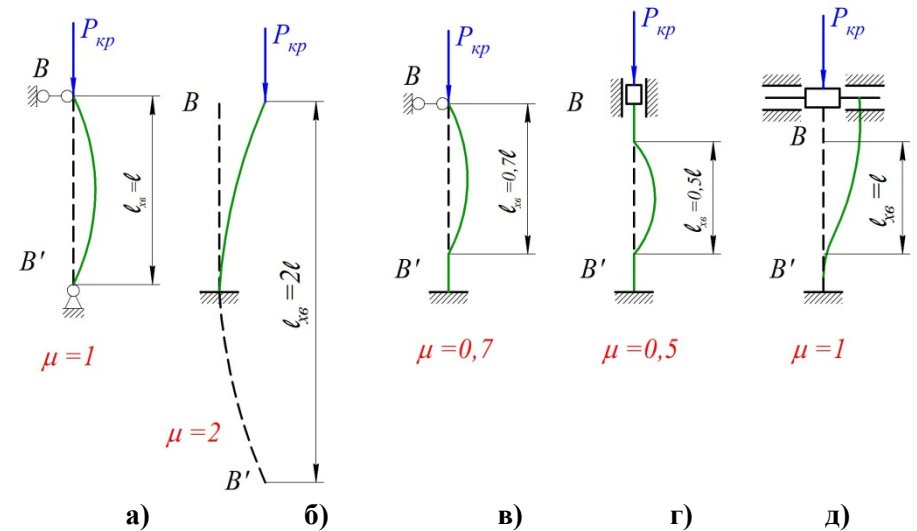


Рисунок 16.3 – Залежність μ від умов закріплення

Добуток $\mu \ell$ називається **зведеною довжиною стержня**.

другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Розв'язок рівняння (16.5) отримаємо у вигляді:

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \quad (16.6)$$

Довільні постійні C_1 і C_2 знаходимо із умови закріплення кінців стержня:

при $x = 0, y = 0$ і, відповідно, $C_1 = 0$

при $x = \ell, y = 0, C_2 \sin k\ell = 0$.

Якщо $C_2 = 0$, то для рівняння (16.6) отримаємо тривіальний розв'язок: $y = 0$. Цей розв'язок відповідає рівновазі не викривленого стержня. Якщо $C_2 \neq 0$, то повинно бути $\sin k\ell = 0$. Але ця умова можлива тоді, коли $k\ell = 0; \pi, 2\pi, 3\pi \dots$

Отже рівновага має місце коли $\ell \sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ_z}} = 0; \pi; 2\pi; 3\pi; \dots$

Перша умова $\left(\ell \cdot \sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ_z}} = 0\right)$ дає тривіальне рішення:

$F_{кр} = 0$. Друга умова $\left(\ell \cdot \sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ_z}} = \pi\right)$ призводить до **формули**

Ейлера для визначення критичної сили:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_z}{\ell^2}. \quad (16.7)$$

16.2.2 Вплив умов закріплення.

При зміні умов закріплення величина критичної сили змінюється. Із схеми (Рис. 16.3, б), на якій зображено стержень довжиною ℓ , закріплений одним кінцем, і його дзеркальне відображення, видно, що критичну силу для даного випадку можна визначити за формулою (16.7), якщо замість ℓ в неї підставити $\ell_1 = 2\ell$.

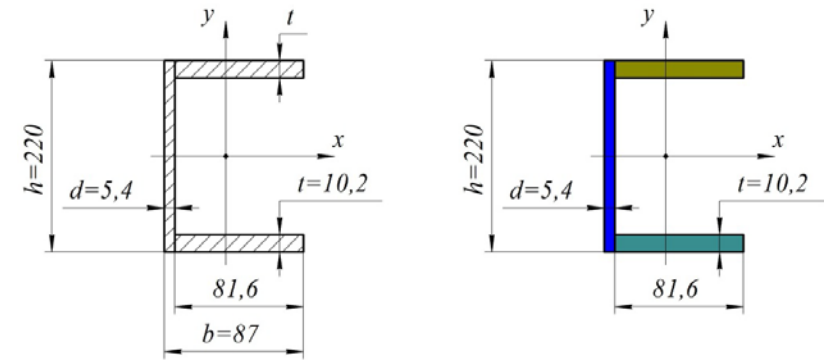


Рисунок 10.8 – Схема до визначення максимального дотичного напруження

За формулою (10.23) визначаємо геометричну характеристику J_k , приймаючи $\eta = 1,12$:

$$J_k = \eta \frac{1}{3} \sum b_i^3 h_i = 1,12 \frac{1}{3} (220 \cdot 5,4^3 + 2 \cdot 81,6 \cdot 10,2^3) = 77,4 \cdot 10^3 \text{ мм}^4 = 77,4 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4.$$

За формулою (10.24) визначаємо геометричну характеристику міцності

$$W_k = \frac{J_k}{\delta_{max}} = \frac{77,4 \cdot 10^{-9}}{10,2 \cdot 10^{-3}} = 7,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Максимальні дотичні напруження виникають посередині довгих сторін прямокутників, які мають найбільшу товщину стінки δ_{max} , тобто в даному випадку полиць

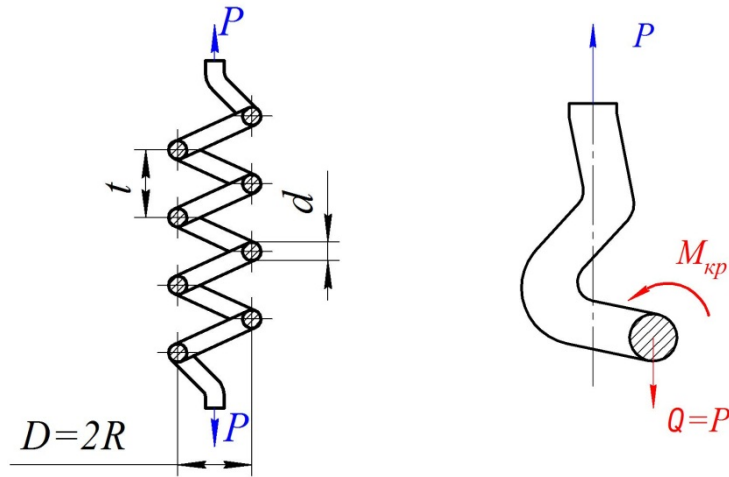
$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_k} = \frac{600}{7,6 \cdot 10^{-6}} = 79 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 79 \text{ МПа}.$$

10.5 Розрахунок гвинтових циліндричних пружин

Точний розрахунок на міцність гвинтових циліндричних пружин досить складний, оскільки дріт пружини може зазнавати складного навантаження – одночасних кручення, зсуву та

згинання. Але при малих кутах нахилу витків, впливом згинання можна знехтувати.

Розглянемо циліндричну гвинтову пружину з середнім діаметром $D = 2R$, яка має n витків і виготовлена із дроту діаметром d . Пружина зазнає розтягання центральною силою P (Рис. 10.9, а).



а) б)
Рисунок 10.9 – Розрахунок гвинтових пружин

Поділимо пружину діаметральною площею і розглянемо рівновагу верхньої частини. Для забезпечення рівноваги прикладемо в точці перерізу силу P і $M_{кр}$ (Рис. 10.9, б). Таким чином, дріт пружини зазнає деформації зсуву та кручення. Від зсуву дотичні напруження будуть рівномірно розподілені по перерізу (Рис. 10.10, а). Від кручення максимальні напруження τ_2 виникає на поверхні (Рис. 10.10, б):

$$\tau_1 = \frac{P}{F} = \frac{4P}{\pi d^2}, \quad \text{де } F = \frac{\pi d^2}{4},$$

критичної сили $\bar{P}_{кр}$ (Рис. 16.2, б).

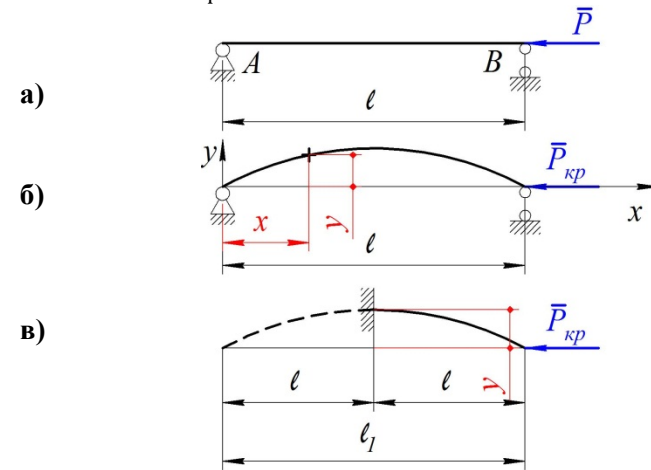


Рисунок 16.2 – Стійкість стиснутих стержнів

У перерізі, що знаходиться на відстані x від початку координат, діє згинаючий момент:

$$M_z = -P_{кр} \cdot y. \quad (16.3)$$

Диференційне рівняння пружної лінії на основі виразу (16.2):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P_{кр} \cdot y}{EJ_z}, \quad (16.4)$$

звідки

$$\frac{d^2y}{dx^2} \pm k^2 y = 0, \quad (16.5)$$

де

$$k^2 = \frac{P_{кр}}{EJ_z}.$$

Диференційне рівняння (16.5) є лінійним однорідним

силою". Сам Ейлер її називав "сила колони", так як в той час найбільш поширеними стиснутими елементами технічних споруд були колони.

16.2.1 Критична сила.

Розглянемо стержень з площею поперечного перерізу F (Рис. 16.2) який стискається подовжньою силою F , лінія дії якої співпадає з геометричною віссю стержня. Якщо сила P невелика, то стержень буде зазнавати рівномірний тиск з напруженням

$$\sigma = \frac{P}{F}.$$

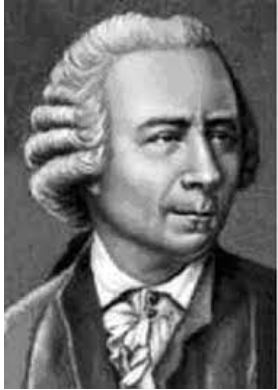


Рисунок 16.1 – Портрет Л. Ейлера

Прикладаючи, крім того, невелику поперечну силу, можемо провокувати згин стержня, і він буде знаходитись у рівновазі, залишаючись зігнутим. Після зняття поперечної сили стержень стане знову прямолінійним. Стан, у якому знаходиться стержень під дією невеликої сили P , є **стійка рівновага**.

Якщо збільшити силу P , то після досягнення нею деякого значення рівновага стержня стає байдужою. **Найменше значення осьової стискаючої сили, при якій стає рівноможливим дві форми рівноваги стержня** (прямолінійна і криволінійна, безкінечно близькі одне до другої), **називається критичною силою**. У цьому випадку, коли величина сили досягла значення критичної, стержень знаходиться у стані нестійкої рівноваги. При цьому дія малої поперечної сили виведе стержень із рівноваги, виникає раптовий поперечний вигин його і руйнування.

Шарнірно закріплений стержень.

Нехай шарнірно закріплений стержень знаходиться у рівновазі, зберігаючи вигнуту форму під дією на нього

τ_1 – дотичні напруження в дроті від зсуву;

$$\tau_2 = \frac{M_{кр}}{W_\rho} = \frac{16M_{кр}}{\pi d^3}, \quad \text{де } W_\rho = \frac{\pi d^3}{16},$$

τ_2 – дотичні напруження в дроті від кручення.

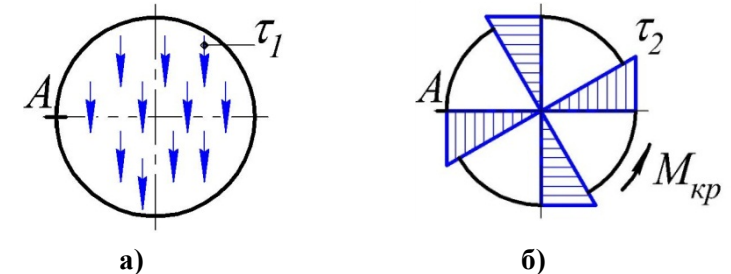


Рисунок 10.10 – Напруження в дроті від зсуву (а) і кручення (б)

Максимальне напруження буде в точці А (Рис.10.10, а)

$$\tau_{max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4D}\right). \quad (10.27)$$

Нехтуючи виразом у дужках одержимо

$$\tau_{max} = \frac{16PD}{\pi d^3}.$$

При розрахунках потужних пружин (залізничний транспорт) необхідно враховувати вираз у дужках, оскільки напруження від зрізу тут істотні внаслідок великого значення $\frac{d}{R}$.

Руйнування в цьому випадку починається з внутрішнього боку витка, де діють найбільші сумарні дотичні напруження τ_1 і τ_2 . Формула τ_{max} набуває такого вигляду:

$$\tau_{max} = \frac{16PD}{\pi d^3} \left(\frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0,615}{m} \right), \quad (10.28)$$

$$\text{де } m = \frac{D}{d}.$$

Визначення розтягання λ пружини

Розглянемо деформації кручення виділеного елемента пружини довжиною dS (Рис. 10.11).

Під дією крутильного моменту $M_{кр}$ переріз повернеться відносно лівого перерізу на деякий кут $d\varphi$. За рахунок цього точка O переміститься в точку O_1 .

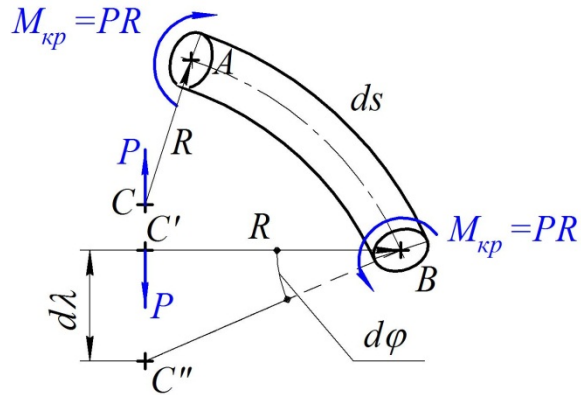


Рисунок 10.11 – Визначення розтягу λ пружини

$d\lambda$ – осадка пружини елемента довжиною dS .

Кінець пружини опуститься на величину $d\lambda = R d\varphi$; де

$$d\varphi = \frac{M_{кр} dS}{G J_\rho}; \quad M_{кр} = P \cdot R; \quad J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}.$$

$$d\lambda = \frac{P \cdot R \cdot R \cdot dS \cdot 32}{G \pi d^4}.$$

Повне опускання нижнього кінця пружини, тобто її подовження визначається формулою:

спростити, якщо врахувати, що для більшості конструкцій максимальний прогин, звичайно складає дуже малу частину прольоту ℓ : $y_{max} < (0,003 \dots 0,002)\ell$.

Отже кут повороту перерізу $\varphi(x)$ буде малий у порівнянні з одиницею $[\varphi(x) = \frac{dy}{dx} \leq 1]$ і ще менша буде величина $(\frac{dy}{dx})^2$.

Тоді можна записати $\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 y}{dx^2}$. Задача пошуку рівняння пружної лінії зведеться до пошуку функції $y(x)$ із диференційного рівняння $\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M_z}{EJ_z}$. Якщо $M_z > 0$ кривизни $\frac{1}{\rho} > 0$; якщо $M_z = 0$ кривизна $\frac{1}{\rho} = 0$. Отже, для прийнятої системи координат у правій частині диференційного рівняння необхідно поставити знак плюс:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{EJ_z} \quad (16.2)$$

де EJ_z – жорсткість бруса при згині; $J_z = \int_F y^2 dF$ – момент інерції всього перерізу відносно нейтральної осі z .

16.2 Задача Ейлера для центрально-стиснутого стержня

Задача втрати стійкості стиснутого стержня була вперше розв'язана в 1744 р. великим математиком і механіком, членом Російської Академії Наук Леонардом **Ейлером**¹¹ (Рис. 16.1). Саме тому, коли говорять про стійкість стиснутого стержня, вживають вираз “задача Ейлера”, а знайдену за розв'язком такої задачі критичну силу інколи називають “**ейлеровою**”

¹¹ Леонард Ейлер (1707 — 1783) - Ейлер вважається найвидатнішим математиком 18-го століття, а, можливо, навіть усіх часів. Ейлер відомий також завдяки своїм роботам в механіці, динаміці рідини, оптиці та астрономії і в інших прикладних науках.

16 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

16.1 Диференційне рівняння пружної лінії деформованого стержня

Бруси, які застосовуються в інженерних спорудах, повинні мати не тільки достатню міцність, але й достатню жорсткість. Допустимі прогини встановлюються нормами. **Форму зігнутої осі бруса можна визначити за допомогою виразу для кривизни** (див. курс математики):

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Підставляючи сюди значення $1/\rho$ із формули (11.14),

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z}$$

отримуємо

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \pm \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (16.1)$$

Оскільки для бруса постійного перерізу $J_z = const$, то права частина рівняння (16.1) залежить тільки від M_z . Якщо функція M_z відома, то диференційне рівняння (16.1) можна використати для визначення пружної лінії бруса. Рівняння це нелінійне і неоднорідне другого порядку. Інтегрування його пов'язане з великими труднощами. Але це рівняння можна

$$\lambda = \int_0^{2\pi Rn} \frac{32P \cdot R^2 dS}{G\pi d^4} = \frac{64P \cdot R^3 \pi n}{G\pi d^4} = \frac{64P \cdot R^3 n}{Gd^4}$$

$$\lambda = \frac{8P \cdot D^3 n}{Gd^4}, \quad (10.29)$$

де P – сила, що розтягує (або стискає) пружину;

D – діаметр пружини;

n – кількість витків пружини;

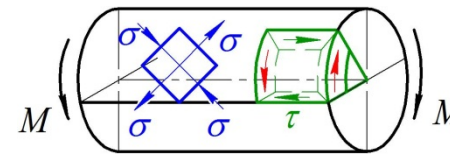
d – діаметр дроту;

G – модуль пружності матеріалу дроту.

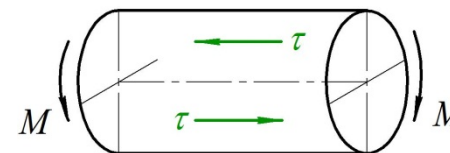
10.6 Головні напруження при крученні

Аналітичні розрахунки та досліди показують, що при крученні валів, в них виникають як головні нормальні, так і головні дотичні напруження. Такий характер розподілу напружень при крученні підтверджується виглядом руйнувань різних матеріалів від кручення.

Деревина (деякі пластмаси) руйнуються при крученні від дотичних напружень, що діють вздовж волокон.



Пластичні матеріали (сталі, сплави тощо) руйнуються від дотичних напружень, що діють у поперечних напрямках.



Крихкі матеріали (чавуни) руйнуються від нормальних напружень шляхом руйнування під кутом 45° .

Рисунок 10.12 – Схема розподілу різних видів напружень при крученні різних матеріалів

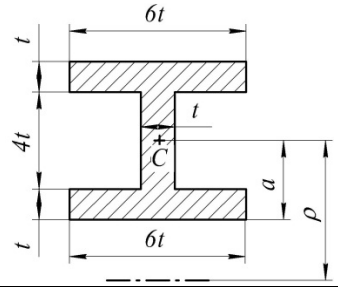
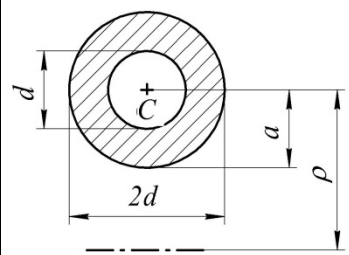
10.7 Контрольні запитання

1. Який вид деформації називається крученням?
2. Правило знаків для крутильних моментів?
3. Правила для побудови епюр кручення.
4. Який кут називається повним кутом закручування?
5. Як пишеться формула повного кута закручування?
6. Яка величина називається жорсткістю при крученні?
7. Закон Гука при крученні.
8. Що називається моментом опору крученню? Яка його розмірність?
9. За якою формулою визначається осадку циліндричної спіральної пружини?
10. Умова міцності для кручення.
11. Умова жорсткості для кручення.

15.5 Контрольні запитання

1. Як розрізняють бруси малої та великої кривизни?
2. Яким методом користуються для визначення переміщень в кривих стержнях?
3. Умова міцності для стержнів великої кривизни.

Продовження табл.15.2

$\frac{\rho}{a}$		
1,2	0,453	0,269
1,4	0,319	0,182
1,6	0,236	0,134
1,8	0,183	0,104
2,0	0,147	0,083
2,2	0,122	0,068
2,4	0,104	0,057
2,6	0,090	0,049
2,8	0,078	0,043
3,0	0,067	0,038
3,5	0,048	0,028
4,0	0,036	0,020
6,0	0,016	0,0087
8,0	0,0089	0,0049
10,0	0,0057	0,0031

11. ЗГИНАННЯ

11.1 Найпоширеніші види балок і опор

Балками будемо називати прямолінійні стержні, покладені на опори і які працюють на згинання. В опорі матеріалів з точки зору розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість балкою називають не тільки будівельну балку, та інші елементи конструкцій на опорах: вал, болт, вагонну вісь, зуб шестерні. тощо.

На розрахункових схемах балку прийнято зображати її віссю, поперечний переріз зображають окремо. При цьому всі навантаження повинні зводитися до осі балки, а силова площина буде збігатися з площиною рисунка.

Реальні вузли закріплення елементів конструкції різноманітні, проте в опорі матеріалів їх зводять до умовних опор: защемленням і шарнірними опорами.

Шарнірно-рухома опора – це опора, яка поставлена на катки, які не перешкоджають переміщенню балки уздовж опорної поверхні. В рухомій шарнірній опорі (Рис. 11.1, а) виникає тільки одна реакція R_y – сила в напрямку обмеження руху (перпендикулярно напрямку руху).

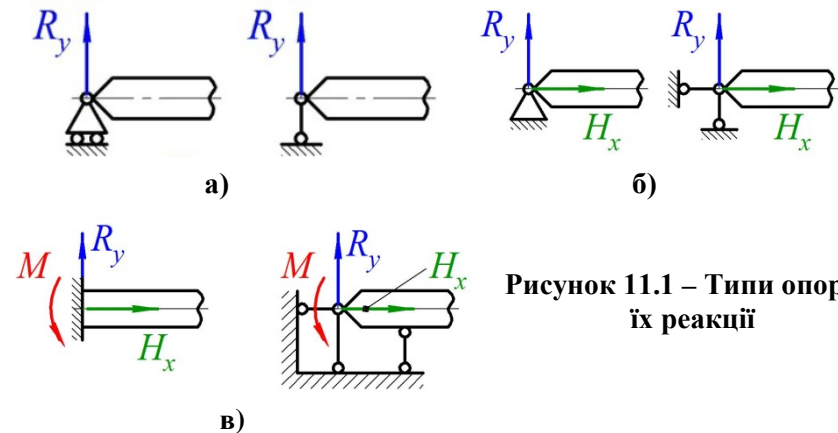


Рисунок 11.1 – Типи опор та їх реакції

Шарнірно-нерухома опора – це опора, яка перешкоджає поступальним переміщенням балки уздовж координатних осей, але дає їй можливість повертатися щодо осі шарніра. В нерухомій шарнірній опорі (Рис. 11.1, б) можуть виникати дві складові – вертикальна реакція R_y та горизонтальна реакція H_x . Опора дозволяє опорному перерізу балки повертатися навколо шарніру, але не допускає поступального переміщення.

Жорстке затиснення або защемлення – це опора, яка не дозволяє конструкції ніяких переміщень. З боку опори на балку (**консоль**) діє сила і реактивний момент пари сил, які враховують як три складові: вертикальну реакцію R_y , горизонтальну реакцію H_x , та опорний момент M (Рис. 11.1, в). Опора не дозволяє ніяких переміщень закріпленого кінця балки.

Реакції опор балок відносяться до зовнішніх навантажень.

Консоллю називають незакріплену частину балки.

У реальних умовах кількість прольотів завжди більш одного. Такі балки називають **багатопрольотними**.

Балка, що перекидає один прольот і має дві опори, називається **розрізною**. Балка без проміжних шарнірів, що перекидає декілька прольотів і має декілька опор, називається **нерозрізною багатопрольотною** (статично невизначуваною).

Види навантажень.

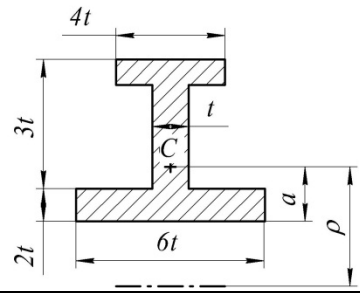
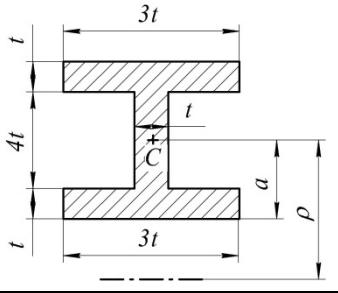
Всі існуючі навантаження можна звести до таких:

1. Зосереджена сила P , Н (Рис.11.2).
2. Зосереджений момент M , Н·м (Рис.11.2, б, в).
3. Розподілене навантаження з інтенсивністю q , Н/м (Рис. 11.3).

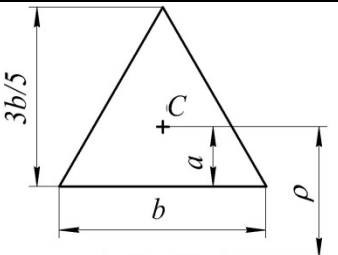
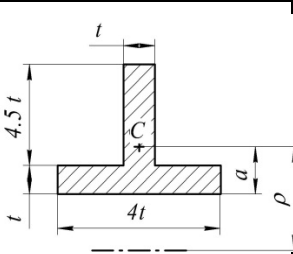
11.3).

Інтенсивність – це величина навантаження, яка приходить на певну довжину.

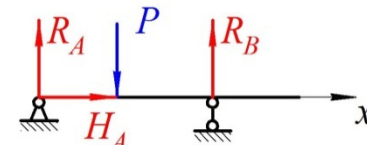
Продовження табл.15.2

$\frac{\rho}{a}$		
1,2	0,409	0,408
1,4	0,292	0,285
1,6	0,224	0,208
1,8	0,178	0,160
2,0	0,144	0,127
2,2	0,120	0,104
2,4	0,103	0,088
2,6	0,089	0,077
2,8	0,077	0,067
3,0	0,067	0,058
3,5	0,049	0,041
4,0	0,038	0,030
6,0	0,018	0,018
8,0	0,010	0,0076
10,0	0,0065	0,0048

Продовження табл.15.2

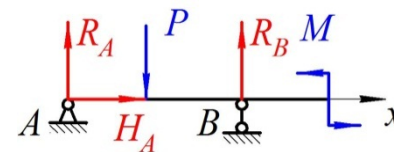
$\frac{\rho}{a}$		
		
1,2	0,361	0,418
1,4	0,251	0,299
1,6	0,186	0,229
1,8	0,144	0,183
2,0	0,116	0,149
2,2	0,096	0,125
2,4	0,082	0,106
2,6	0,070	0,091
2,8	0,060	0,089
3,0	0,052	0,079
3,5	0,038	0,052
4,0	0,029	0,040
6,0	0,013	0,018
8,0	0,0060	0,010
10,0	0,0039	0,0065

В залежності від видів опор, що застосовуються на схемі, розрізняють такі **види балок**:



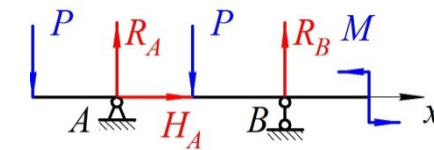
а)

– проста однопрольотна балка на двох опорах, відстань l між двома опорами називають **прольотом**;



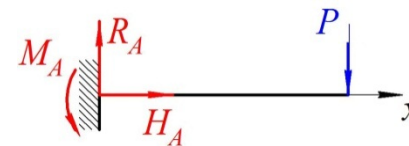
б)

– двохопорна (однопрольотна) балка з однією консоллю (права консоль);



в)

– двохопорна однопрольотна балка з двома консолями (ліва та права);



г)

– жорстко защемлена консольна балка.

Рисунок 11.2 – Види балок

Для вирішення задач розподілене навантаження замінюють рівнодіючою силою, величина якої дорівнює площі епюри навантаження і прикладена в центрі ваги цієї фігури (Рис. 11.3).

Приклад 11.1

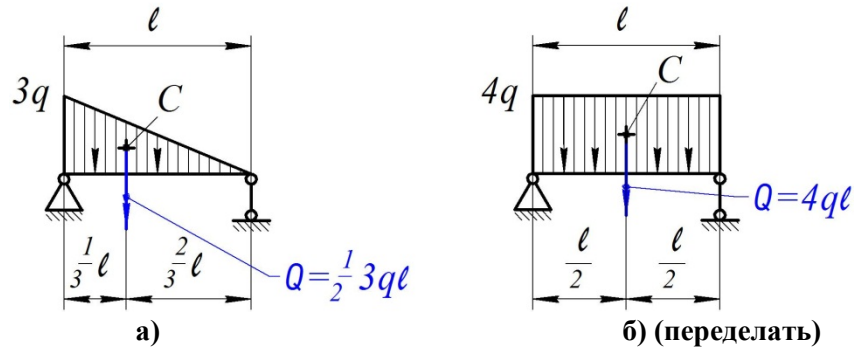
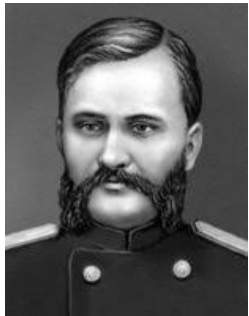


Рисунок 11.3 – Рівнодійна прикладеного навантаження

Рівнодійна $Q = \frac{1}{2}3q\ell$, де C – центр ваги трикутника, який розташований на $\frac{1}{3}\ell$ від лівої опори (Рис.11.3, а).

11.2 Диференційні залежності Д.І. Журавського⁷ при згинанні



Ці диференційні залежності виражають зв'язок між згинальним моментом та навантаженням і поперечною силою

Виділимо із балки елемент довжиною dx . Виділений елемент повинен знаходитися в рівновазі під дією зовнішніх навантажень і внутрішніх зусиль (Рис. 11.5).

Рисунок 11.4 – Портрет Д.І. Журавського

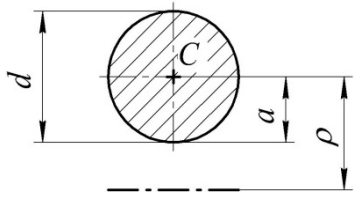
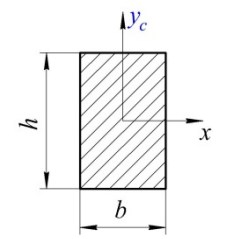
Продовження табл.15.2

$\frac{\rho}{a}$		
1,2	0,336	0,352
1,4	0,229	0,243
1,6	0,168	0,179
1,8	0,128	0,138
2,0	0,102	0,110
2,2	0,084	0,092
2,4	0,071	0,078
2,6	0,061	0,067
2,8	0,063	0,058
3,0	0,046	0,050
4,0	0,024	0,028
6,0	0,011	0,012
8,0	0,0060	0,0060
10,0	0,0039	0,0039

⁷ Журавський Дмитро Іванович (1821 – 1891), російський учений і інженер, фахівець в області мостобудування і будівельної механіки.

де k – коефіцієнт, який обирають за таблицею 15.2, в залежності від відношення ρ/a , a – відстань від центра ваги перерізу до внутрішніх волокон.

Таблиця 15.2 – Значення коефіцієнта k

$\frac{\rho}{a}$		
1,2	0,224	0,305
1,4	0,151	0,204
1,6	0,108	0,149
1,8	0,084	0,112
2,0	0,069	0,090
2,2	0,058	0,077
2,4	0,049	0,065
2,6	0,042	0,055
2,8	0,036	0,047
3,0	0,030	0,041
3,5	0,022	0,028
4,0	0,016	0,021
6,0	0,0070	0,0093
8,0	0,0039	0,0052
10,0	0,025	0,0033

$$\sum P_{ky} = 0; \quad -dQ_y + qdx = 0; \quad \frac{dQ_y}{dx} = q. \quad (11.1')$$

Таким чином, інтенсивність розподіленого навантаження в даному перерізі дорівнює першій похідній від поперечної сили по dx .

Складемо рівняння суми моментів сил відносно точки O_2 (Рис.11.5, б):

$$\sum M_{kO_2} = 0; \quad -M_z + (M_z + dM_z) - Q_y dx - \frac{q(dx)^2}{2} = 0.$$

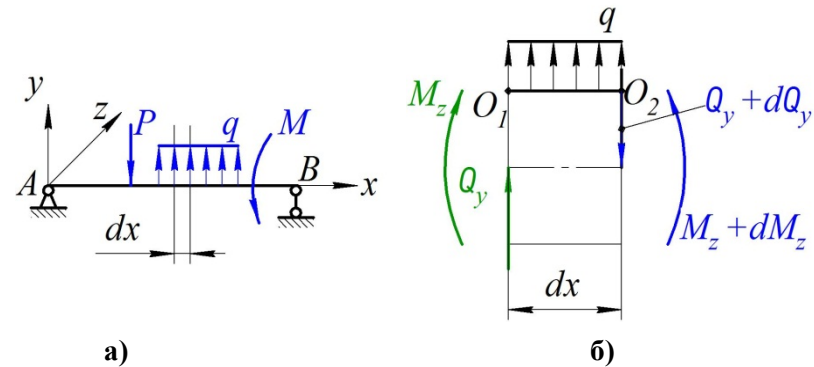


Рисунок 11.5 – Довільне навантаження балки

Нехтуючи складовою $\frac{q(dx)^2}{2}$ та враховуючи (11.1'), яка є членом другого порядку малості, будемо мати:

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y, \quad \frac{d^2 M_z}{dx^2} = q. \quad (11.1)$$

Рівняння (11.1) – диференційні залежності при згинанні.

На підставі диференційних залежностей при згинанні одержано ряд правил, які дозволяють контролювати **правильність побудови епюр Q_y і M_z при згинанні.**

1. На ділянках, де немає розподіленого навантаження епюра Q_y пряма, де є розподілене навантаження – епюра нахилена до осі x .

2. На ділянках, де $Q_y > 0$ епюра M_z зростає.

3. Стрибки на епюрах там, де є зосереджені навантаження.

11.3 Плоске згинання. Побудова епюр внутрішніх зусиль при плоскому згинанні

Деформація згинання полягає у викривленні осі прямого стержня або в зміні кривизни кривого стержня. У прямих стержнях переміщення точок δ , які спрямовані перпендикулярно до початкового положення осі, називають прогинами. На згинання працюють осі залізничних вагонів, ресори, зуби шестерень, балки міжповерхових перекриттів, важелі та ін.

Як відомо, згинання буває чистим і поперечним.

Згинання називається **плоским**, якщо переріз балки має осі симетрії, а зовнішні навантаження діють в площині симетрії, вісь балки згинається, але залишається в площині симетрії.

Плоским, чистим згинанням називають таке згинання, коли у поперечному перерізі діє одне внутрішнє зусилля – згинальний момент M_x .

Якщо в поперечному перерізі діє два внутрішніх зусилля – згинальний момент M_x та поперечна сила Q_y , то таке згинання називається **плоским поперечним згинанням**.

При плоскому згинанні початкова пряма вісь балки викривляється, але лежить в поздовжній площині симетрії, залишаючись плоскою кривою.

Кут повороту перерізів, від осьових сил внаслідок різної довжини волокон елемента (Рис.15.4, б), дорівнює

$$d\theta_2 = \frac{N_p dS}{EFR_0}.$$

Повний кут повороту:

$$d\theta = d\theta_1 + d\theta_2 = \frac{M_p dS}{EFR_0} + \frac{N_p dS}{EFR_0}. \quad (15.17)$$

Подовження елемента в результаті дії осьових сил:

$$\Delta(dS)_1 = \frac{N_p dS}{EF}.$$

Подовження елемента в результаті повороту перерізу на кут $d\theta$:

$$\Delta(dS)_2 = \ell d\theta_1 = \frac{M_p dS}{ESR_0} \ell = \frac{M_p dS}{EFR_0}. \quad (15.18)$$

Повне подовження осьового волокна:

$$\Delta(dS) = \Delta(dS)_1 + \Delta(dS)_2 = \frac{N_p dS}{EF} + \frac{M_p dS}{EFR_0}. \quad (15.19)$$

Підставивши (15.18) та (15.19) в формулу можливих переміщень, знайдемо загальну формулу для визначення переміщень бруса великої кривизни:

$$\Delta_{ip} = \int_S \left[\frac{\bar{M}_i M_p}{ESR_0} + \frac{\bar{N}_i M_p + \bar{M}_i N_p}{EFR_0} + \frac{\bar{N}_i N_p}{EF} + k \frac{\bar{Q}_i Q_p}{GF} \right] dS, \quad (15.20)$$

15.4 Визначення переміщень у кривих брусах

Для визначення переміщень в стержнях будь-якої кривизни зручно користуватися методом Мора. В стержнях малої кривизни можна нехтувати подовжньою деформацією і деформацією зсуву. Тоді у разі плоского вигину можна користуватися формулою Мора у вигляді (14.10).

При плоскому згинанні бруса великої кривизни деформації елемента від дії зусиль і теж складаються з подовження відрізка осі і відносного повороту перерізів, що обмежують елемент (Рис. 15.4, а, б).

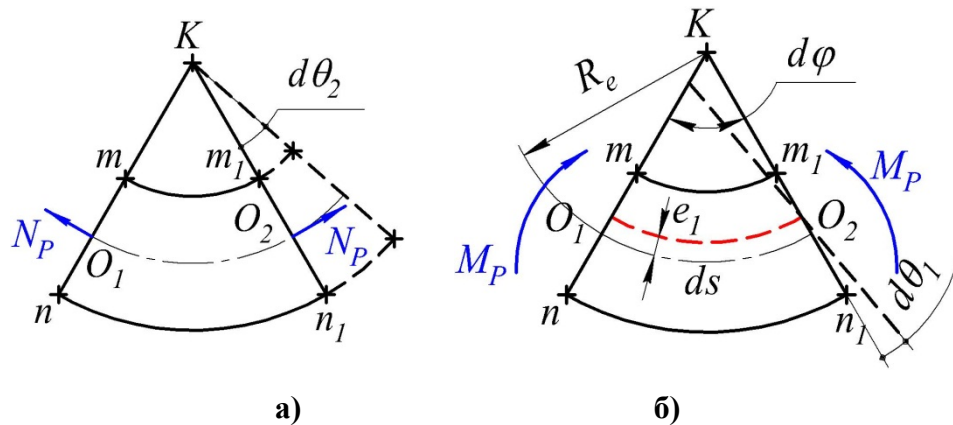


Рисунок 15.4 – Плоске згинання елемента бруса великої кривизни

Взаємний кут повороту перетинів $\Delta d\varphi = d\theta_1$, від згинаючого моменту можна визначити з (15.10).

$$d\theta_1 = \frac{M_p d\varphi}{ES} = \frac{M_p dz}{ESR_0},$$

де $S = |S_y| = \ell F$.

11.3.1 Побудова епюр внутрішніх зусиль при згинанні.

Порядок побудови епюри внутрішніх зусиль розглянемо на прикладах.

Правило знаків для поперечної сили та згинального моменту.

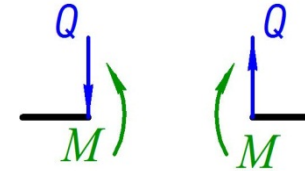


Рисунок 11.6 – Правило знаків при згинанні

Додатними вважаються напрямки коли:

- поперечна сила Q_y повертає відрізану частину балки за годинниковою стрілкою;
- згинальний момент M_z діє так, що верхні волокна балки укорочуються, а нижні подовжуються.

Приклад 11.2

Балка АВ (Рис. 11.7) навантажена в точці С зосередженою силою Р. Побудувати епюри внутрішніх зусиль.

Побудову епюр починають з визначення реакції опор.

Порядок визначення реакцій опор:

1. Вибирають систему координатних осей.
2. Вибирають напрямки невідомих реакцій і складають рівняння статички:

$$1) \sum M_{kA} = 0; \quad 2) \sum M_{kB} = 0;$$

Так як на балку діє тільки сила $\bar{P} \parallel y$, то $\sum P_{kx} = 0$.

$$1) \sum M_{kA} = 0; \quad R_B 3\ell - P\ell = 0; \quad R_B = \frac{P\ell}{3\ell} = \frac{P}{3}.$$

$$2) \sum M_{kB} = 0; \quad -R_A 3\ell + P2\ell = 0; \quad R_A = \frac{2P\ell}{3\ell} = \frac{2}{3}P.$$

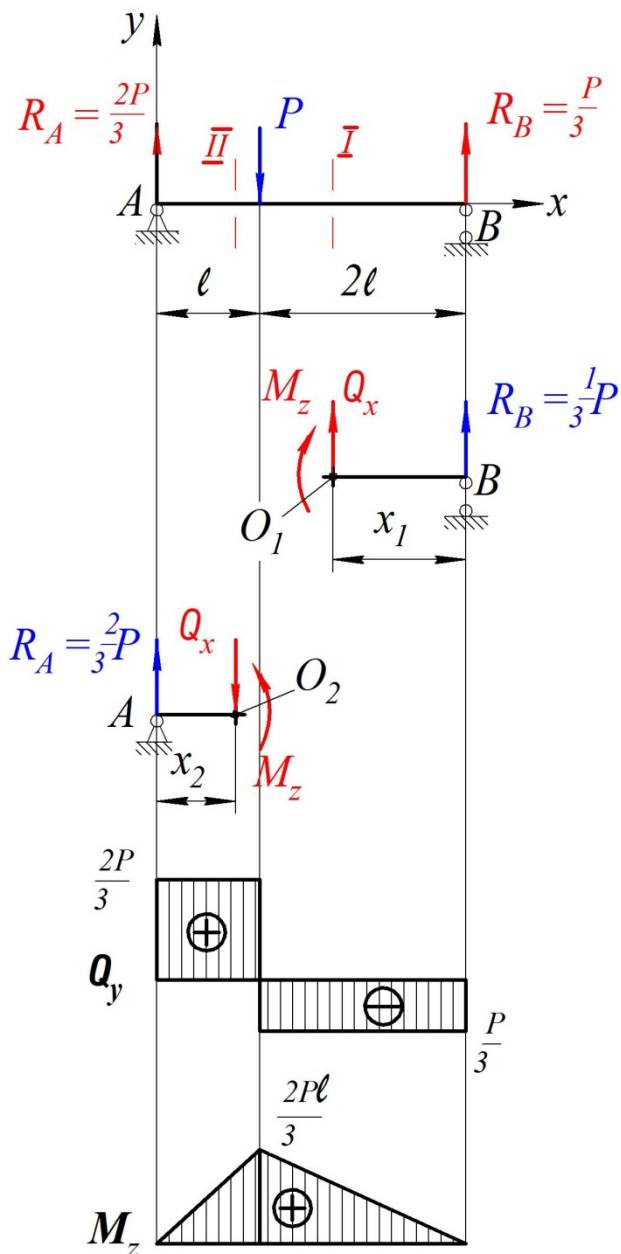


Рисунок 11.7 - Побудова епюр внутрішніх зусиль

Форма перерізу	Радіус кривизни нейтрального шару
	$r_H = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{R_1}{R_2} + b_2 \ln \frac{R_2}{R_3} + b_3 \ln \frac{R_3}{R_4}}$
	$r_H = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2}{b_1 \ln \frac{R_1 - h_2}{R_2} + 2 b_2 \ln \frac{R_1}{R_1 - h_2}}$

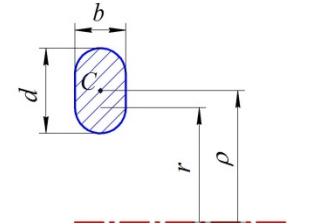
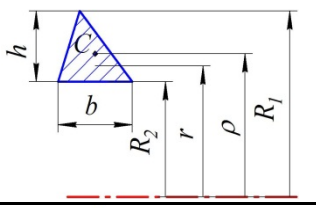
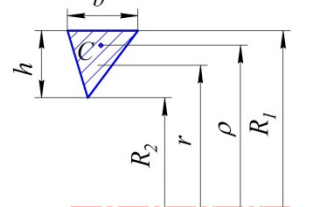
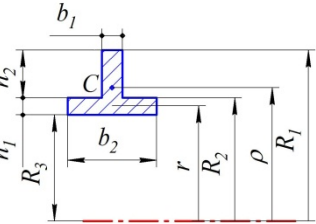
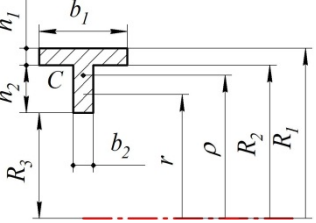
15.3 Розрахунки на міцність брусів великої кривизни

Якщо при згинанні кривого бруса крім згинального моменту в перерізі діє й поздовжня сила N , то розрахунок на міцність виконують, враховуючи обидва силові фактори. Дотичні напруження не справляють помітного впливу на міцність і їх, як правило, не визначають.

Для стержнів великої кривизни на підставі формули (15.11) умова міцності запишеться так:

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot y}{S_z \cdot r} + \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (15.16)$$

При цьому треба розглядати перерізи, в яких сумарні напруження – найбільші. У цих перерізах небезпечною буде одна з крайніх точок. Для цих точок у формулу (15.16) слід підставити $y = h_1$ або $y = h_2$ та відповідно $r = R_1$ або $r = R_2$.

Форма перерізу	Радіус кривизни нейтрального шару
	$r_H = \frac{d^2}{4(2\rho - \sqrt{4\rho^2 - d^2})}$
	$r_H = \frac{h}{2\left(\frac{R_1}{h} \ln \frac{R_1}{R_2} - 1\right)}$
	$r_H = \frac{h}{2\left(1 - \frac{R_2}{R_1} \ln \frac{R_1}{R_2}\right)}$
	$r_H = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2}{b_1 \ln \frac{R_1}{R_2} + b_2 \ln \frac{R_2}{R_3}}$
	$r_H = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2}{b_1 \ln \frac{R_1}{R_2} + b_2 \ln \frac{R_2}{R_3}}$

Для перевірки вірності визначення реакцій запишемо рівняння:

$$\sum P_{ky} = 0; R_A - P + R_B = 0; \frac{2}{3}P - P + \frac{1}{3}P = 0.$$

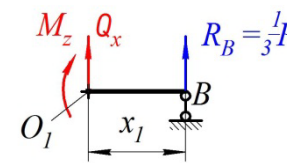
Реакції визначені вірно.

Поперечна сила Q_y в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх навантажень (крім зосереджених моментів), діючих по один бік від перерізу, що розглядається.

Згинальний момент M_z дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх зовнішніх навантажень відносно точки перерізу, що діють по один бік перерізу.

Після визначення і перевірки реакцій опор, використовуючи метод перерізів. Розділяють балку на ділянки визначають внутрішні зусилля Q_y і M_z по ділянках.

I ділянка $0 \leq x_1 \leq 2\ell$



$$\sum P_{ky} = 0; Q_y + R_B = 0;$$

$$Q_y = -R_B = -\frac{1}{3}P.$$

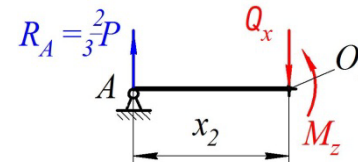
$$\sum M_{kO_1} = 0; -M_z + R_B \cdot x_1 = 0;$$

$$M_z = R_B \cdot x_1.$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad M_z = 0; \quad \text{при } x_1 = 2\ell$$

$$M_z = \frac{1}{3}P \cdot 2\ell = \frac{2}{3}P\ell.$$

II ділянка $0 \leq x_2 \leq \ell$



$$\sum P_{ky} = 0; Q_y - R_A = 0;$$

$$Q_y = R_A = \frac{2}{3}P.$$

$$\sum M_{kO_2} = 0; M_z - R_A \cdot x_2 = 0;$$

$$M_z = R_A \cdot x_2 = \frac{2}{3}P \cdot x_2.$$

При $x_2 = 0$ $M_z = 0$; при $x_2 = \ell$ $M_z = \frac{2}{3}P \cdot \ell$.

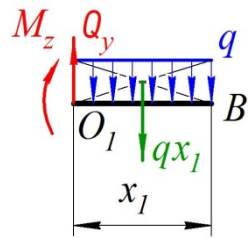
По отриманим значенням будемо епюри Q_y і M_z (в довільно вибраному масштабі) (див. рис. 11.7).

Приклад 11.3

Консольна балка AB (Рис. 11.8) на ділянці CB навантажена рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q , а в точці C зосередженим моментом $M = 2q\ell^2$. Побудувати епюри внутрішніх зусиль.

Оскільки балка консольна, то починаємо з вільного кінця, визначаємо кількість силових ділянок і складаємо рівняння рівноваги для кожної з них.

I ділянка $0 \leq x_1 \leq \ell$



Замінюємо розподілене навантаження на ділянці x_1 , на рівнодійну. Вона дорівнює qx_1 і прикладена на середині ділянки x_1 .

Тоді:

$$\sum P_{ky} = 0;$$

$$Q_y - qx_1 = 0; \quad Q_y = qx_1.$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad Q_y = 0;$$

$$\text{При } x_1 = \ell \quad Q_y = q\ell.$$

$$\sum M_{kO_1} = 0; \quad -M_z - -q \frac{x_1^2}{2} = 0;$$

$$M_z = -q \frac{x_1^2}{2}.$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad M_z = 0; \quad \text{при } x_1 = \ell$$

$$M_z = -q \frac{x\ell^2}{2}.$$

(Тут 2,303 – модуль переходу до десяткових логарифмів).

Користуючись формулою (15.14), можна знайти вираз для e для будь-яких поперечних перерізів бруса.

Значення r_H для часто зустрічаючихся перерізів різної форми наведено у таблиці 15.1.

Таблиця 15.1 – Значення радіуса кривизни нейтрального шару

Форма перерізу	Радіус кривизни нейтрального шару
	$r_H = \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}};$ $\ln \frac{R_1}{R_2} = \frac{h}{\rho} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^4 + \dots \right]$
	$r_H = \frac{h(b_1 + b_2)}{2 \frac{b_2 R_1 - b_1 R_2}{h} \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1)}$
	$r_H = \frac{d^2}{4(2\rho - \sqrt{4\rho^2 - d^2})}$
	$r_H = \frac{d_H^2 - d_e^2}{4 \left(\sqrt{4\rho^2 - d_e^2} - \sqrt{4\rho^2 - d_H^2} \right)}$

Для визначення напружень у кривому брусі при згинанні за формулами (15.11) та (15.12) треба насамперед обчислити значення e (відстань від нейтрального шару до центра ваги) або радіус r_H – нейтрального шару, оскільки

$$e = R - r_H, \quad (15.13)$$

де R – радіус шару, який містить центри ваги перерізів кривого бруса (Рис. 15.1).

Радіус r_H будемо визначати з рівняння (15.6):

$$\int_F \frac{y \cdot dF}{r_H - y} = 0.$$

Зробимо тут таку заміну:

$$r = r_H - y, \text{ або } y = r_H - r.$$

Тоді рівняння (15.6) можна переписати так:

$$\int_F \frac{r_H - r}{r} dF = 0, \text{ або } r_H \cdot \int_F \frac{dF}{r} - F = 0,$$

звідки

$$r_H = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}}. \quad (15.14)$$

Враховуючи, що $F = b \cdot h$, $dF = b \cdot dr$, Будемо мати

$$r_H = \frac{b \cdot h}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{b \cdot dr}{r}} = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{h}{2,303 \lg \frac{R_2}{R_1}}. \quad (15.15)$$

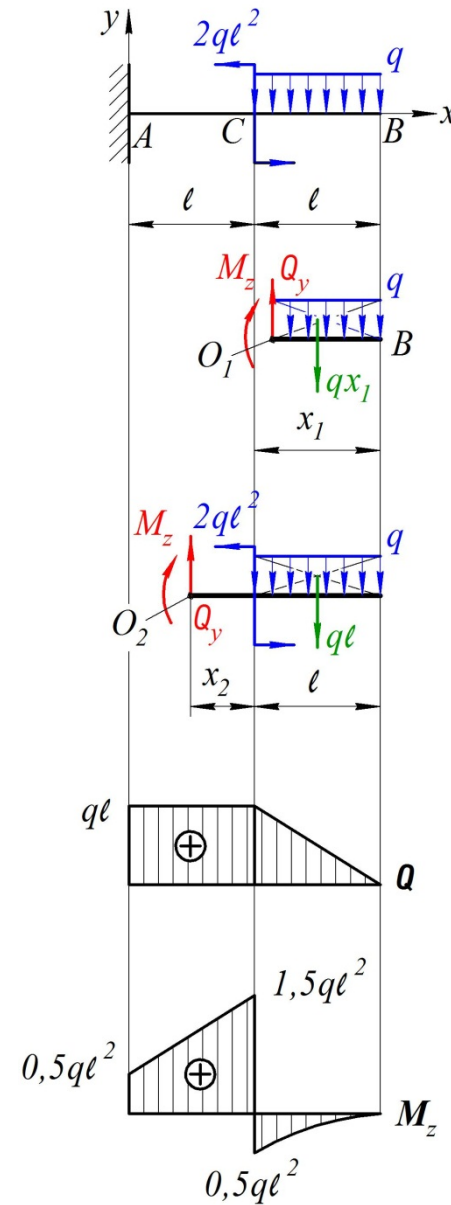


Рисунок 11.8 – Епюри внутрішніх зусиль в консольній балці

Треба зазначити, що оскільки x_1 в цьому рівнянні в квадраті, то еюра M_x буде мати вигляд квадратичної параболи. Вигин параболи визначають за так званим «правилом парасольки» (Рис. 11.9).

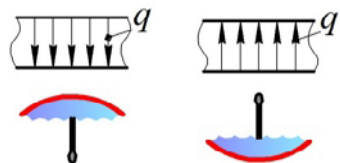
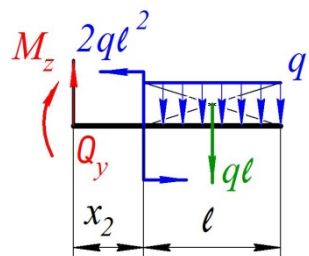


Рисунок 11.9 – Правило для визначення вигину параболи

II ділянка $0 \leq x_2 \leq \ell$



На другій ділянці розподілене навантаження прикладене по довжині ℓ , рівнодійна цього навантаження дорівнює $q\ell$ і прикладена всередині I ділянки.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum P_{ky} = 0;$$

$$Q_y - q\ell = 0; \quad Q_y = q\ell.$$

$$\sum M_{kO_2} = 0; \quad -M_z + 2q\ell^2 - q\ell\left(\frac{\ell}{2} + x_2\right) = 0;$$

$$M_z = 2q\ell^2 - q\ell\left(\frac{\ell}{2} + x_2\right).$$

$$\text{При } x_2 = 0 \quad M_z = 2q\ell^2; \quad \text{при } x_2 = \ell \quad M_z = 0,5q\ell^2.$$

В цьому рівнянні x_2 входить в першому ступені, тому еюра буде лінійною.

По отриманим значенням Q_y і M_z будуємо еюри (див. рис. 11.8).

Враховуючи вираз (15.10), формулу (15.5) для визначення напружень тепер можна записати так:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{eE(r_H - y)} \quad (15.11)$$

або

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{S_z(r_H - y)},$$

де M – згинальний момент у перерізі;

S_z – статичний момент площі перерізу кривого бруса відносно нейтральної лінії.

З аналізу формули (15.11) видно, що нормальне напруження по ширині перерізу однакові (не залежать від z) і змінюється тільки із зміною відстані точки від нейтральної лінії:

Найбільше за модулем напруження будуть у крайніх точках перерізу, розташованих біля вогнутої поверхні бруса.

Максимальні значення напружень будуть у крайніх точках перерізу кривого бруса та обчислюються за формулами:

$$\sigma_1 = \frac{Mh_1}{F \cdot e \cdot R_1}; \quad \sigma_2 = \frac{Mh_2}{F \cdot e \cdot R_2}, \quad (15.12)$$

де R_1 та R_2 – радіуси кривизни внутрішнього та зовнішнього шару волокон кривого бруса;

h_1 та h_2 – відстані від нейтральної лінії до цих волокон (Рис. 15.1). **Знаки напружень легко визначити за напрямом згинального моменту в перерізі.**

Якщо на кривий стержень діє осьова сила N , то в стержні, крім напруження, спричиненого згинальним моментом, діятимуть нормальні напруження

$$\sigma_H = \frac{N}{F}.$$

Із (15.2) знаходимо

$$\int_F \sigma \cdot y \cdot dF = \frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_F \frac{y^2 dF}{r_H - y} = M. \quad (15.7)$$

Інтеграл в (15.7) можна записати так:

$$\begin{aligned} \int_F \frac{y^2 dF}{r_H - y} &= \int_F \frac{y^2 + r_H y - r_H y}{r_H - y} dF = \\ &= - \int_F \left(y - \frac{r_H y}{r_H - y} \right) dF = - \int_F y dF + r_H \int_F \frac{y}{r_H - y} dF. \end{aligned} \quad (15.8)$$

Перший інтеграл в (15.8) є статичним моментом S_z площі поперечного перерізу відносно нейтральної осі z , а другий інтеграл, згідно з (15.6), дорівнює нулю. Тоді вираз (15.8) запишемо так:

$$\int_F \frac{y^2 dF}{r_H - y} = -S_z = -(-e)dF = e \cdot dF, \quad (15.9)$$

де e – відстань від центра ваги перерізу кривого бруса до нейтральної осі;

F – площа поперечного перерізу бруса.

Підставимо (15.9) в (15.7) та отримаємо

$$\frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \cdot eF = M,$$

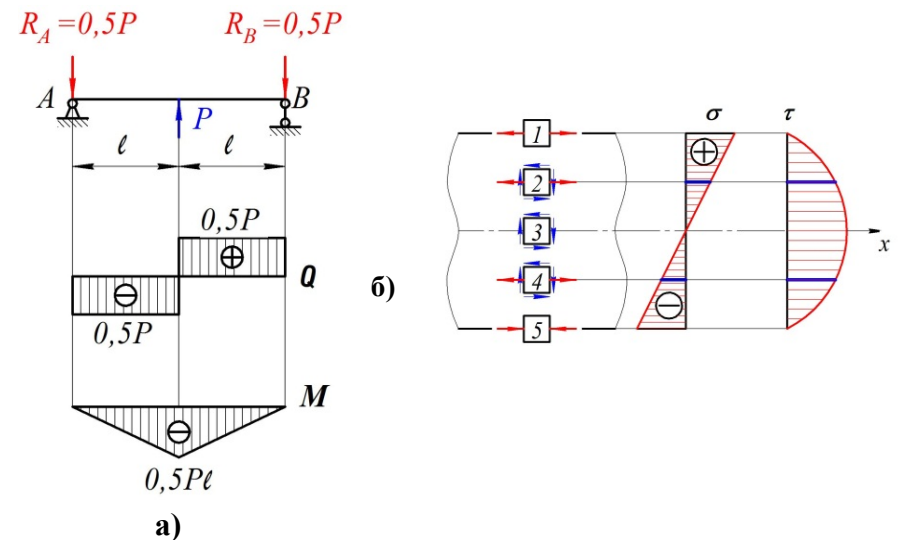
звідки

$$\frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{M}{eF}. \quad (15.10)$$

11.4 Розрахунок на міцність та жорсткість при згинанні

Виходячи з характеру розподілу діючих при поперечному згинанні напружень, робимо висновок, що напружений стан в перерізах стержнів неоднорідний, і це має враховуватись у розрахунках на міцність. Розглянемо двоопорну балку на шарнірних опорах (Рис. 11.10).

В довільному перерізі балки, крім опорних перерізів A і B , одночасно діють поперечні сили і згинальні моменти, епюри яких представлені на рис. 11.10, а. Зображені епюри розподілу нормальних і дотичних напружень по висоті перерізу. Виберемо ряд точок в перерізі стержня та проаналізуємо напружений стан в них.



а) – схема навантажування балки та епюри зусиль;

б) – напружений стан в точках по висоті перерізу балки.

Рисунок 11.10 – До аналізу напруженого стану балки при поперечному згинанні

Точка 1. Це найвіддаленіша від нейтрального шару точка.

Тут

$$\sigma = \sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z}; \tau = 0.$$

Маємо лінійний напружений стан, і умова міцності для цієї точки запишеться так:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (11.1)$$

Точка 2. Тут

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y; \quad = \frac{QS_z(y)}{b(y)J_z}.$$

Має місце плоский напружений стан. Щоб перевірити точку 2 на міцність, слід скористатися відповідним критерієм міцності, **залежно від матеріалу балки.**

Визначимо головні напруження в цій точці.

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}); \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}).$$

Якщо матеріал балки **крихкий**, то слід скористатися критерієм найбільших нормальних напружень (перша теорія міцності). Умова міцності за цією теорією:

$$\sigma_p^I = \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \quad (11.2)$$

Якщо матеріал балки **пластичний**, то скористаємось критерієм найбільших дотичних напружень (третя теорія міцності) або критерієм найбільшої потенціальної енергії

$$M_y = \int_F \sigma \cdot z \cdot dF = 0 \quad (15.3)$$

виконується автоматично внаслідок симетрії перерізу відносно осі y .

Розглянемо **геометричний аспект задачі.**

Відносно подовження вибраного довільно волокна AB , яке розташоване на відстані y від нейтрального шару, яке отримало в результаті деформації подовження $y\Delta d\varphi$, дорівнює

$$\varepsilon = \frac{y\Delta(d\varphi)}{(r_n - y)d\varphi}, \quad (15.4)$$

де $(r_n - y)d\varphi$ – довжина елемента до деформації.

Фізичний аспект, як і для балки, можна виразити формулою Гука:

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r_n - y}. \quad (15.5)$$

Умову (15.3) перепишемо у вигляді

$$\int_F \sigma \cdot dF = \frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \cdot \int_F \frac{y dF}{r_n - y} = 0.$$

Оскільки тут

$$\frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \neq 0,$$

то

$$\int_F \frac{y dF}{r_n - y} = 0. \quad (15.6)$$

3) поперечні перерізи бруса, плоскі до його деформації, залишаються плоскими і після деформації (гіпотеза плоских перерізів);

4) тиск подовжніх волокон бруса одне на одне істотно не впливає на розподіл напружень у брусі, а тому його можна не враховувати.

Для виведення рівнянь **статичного аспекту задачі** розділимо брус на дві частини будь-яким поперечним перерізом ab (Рис. 15.1, а), і виділимо в перерізі елемент площі dF на відстані y від нейтральної лінії (Рис. 15.1, б та 15.3, а). На елемент діє зусилля σdF . З умов симетрії при $N = 0$, та $M_z = M$, маємо:

$$\int_F \sigma \cdot dF = 0; \int_F \sigma \cdot y \cdot dF = M. \quad (15.2)$$

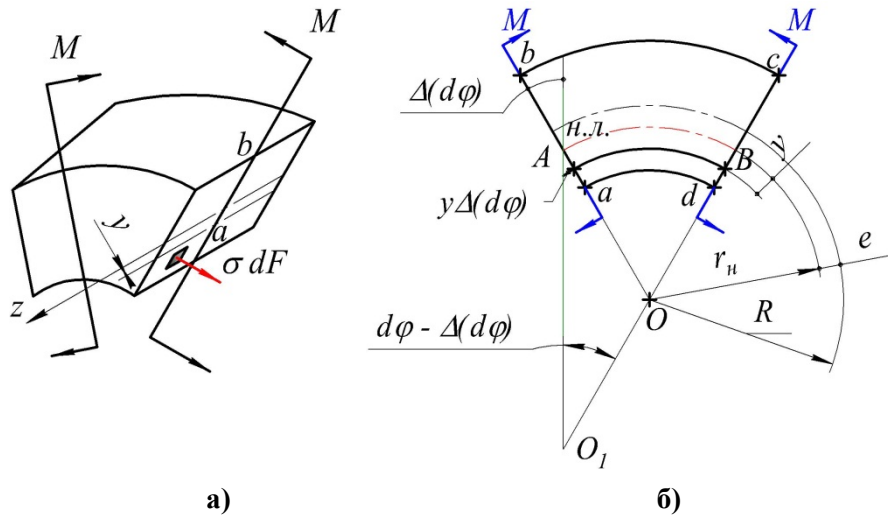


Рисунок 15.3 – Статичний та геометричний аспекти задачі

Умова рівності моменту M_y нулю

формозміни (четверта теорія міцності). За цими теоріями розрахункові напруження відповідно дорівнюють

$$\sigma_p^{III} = \sigma_1 - \sigma_3; \sigma_p^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Підставляючи знайдені вирази для головних напружень, отримуємо умови міцності в такому вигляді:

$$\sigma_p^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (11.3)$$

$$\sigma_p^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (11.4)$$

Якщо матеріал балки **по-різному опирається розтягнню і стисканню**, то слід скористатися критерієм Мора (п'ята теорія міцності):

$$\sigma_p^V = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{ст}} \sigma_3.$$

Позначивши

$$\frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{ст}} = \alpha,$$

(див. формулу 8.19) отримаємо **умову міцності**:

$$\sigma_p^V = \frac{1 - \alpha}{2} \sigma + \frac{1 + \alpha}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (11.5)$$

Точка 3. Ця точка належить нейтральному шару, де $\sigma = 0$;

$\tau = \tau_{max}$.

Умова міцності:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_{max}}{bJ_z} \leq [\tau]. \quad (11.6)$$

Точка 4. Тут умови міцності аналогічні до умов міцності для точки 2.

Точка 5. Як і у точці 1, тут має місце лінійний напружений стан. Якщо відстань від нейтрального шару до точки 5 така ж, як до точки 1, тобто переріз симетричний відносно осі z , то умова міцності для точки 5 записується аналогічно до умови (11.8). Оскільки в нашому прикладі в цій точці діють стискаючі напруження, отримаємо таку умову міцності:

$$|\sigma_{max}| = \frac{M}{W} \leq [\sigma_{ст}]. \quad (11.7)$$

Якщо ця точка знаходиться ближче до нейтрального шару, ніж точка 1, то умову міцності слід записати так:

$$\sigma'_{max} = \frac{M_z}{J_z} y_5 \leq [\sigma_{ст}]. \quad (11.8)$$

Тут σ'_{max} – напруження у точці 5, і вони є найбільшими напруженнями стискання в перерізі; y_5 – відстань від нейтрального шару до точки 5.

Примітка. Якщо матеріал стержня однаково опирається розтяганню і стисканню, то перевіряти слід лише точки 1, 2 і 3.

Приклад 11.4. Визначити запаси міцності у потенціально небезпечних точках балки, зображеної на рис. 11.9, прийнявши $P = 700$ кН, $l = 1$ м. Поперечний переріз балки зображений на рис. 11.10. Матеріал балки – сталь з границею текучості $\sigma_T = 250$ МПа.

1. Згідно з епюрами зусиль (Рис. 11.10, а), небезпечний переріз знаходиться посередині балки, де діє максимальний згинальний момент.

$$M_{max} = 0,5P\ell = 0,5 \cdot 700 \cdot 1 = 350 \text{ кН}\cdot\text{м} \text{ і поперечна сила}$$

$$Q(\varphi) = P_1 \sin\varphi - P_2 \cos\varphi.$$

При складанні виразу для згинального моменту домовимося **вважати згинальний момент додатним, коли він збільшує кривизну стержня.** Будемо мати

$$\begin{aligned} M_C(\varphi) &= P_1 \cdot AD - P_2 \cdot CD = \\ &= P_1 R(1 - \cos\varphi) - P_2 R \sin\varphi. \end{aligned}$$

Отримані формули дають змогу будувати епюри N , Q та M . Приймаємо $P_1 = P$ та $P_2 = 0,5P$. Тоді:

$$N(\varphi) = (\cos\varphi + 0,5\sin\varphi)P;$$

$$Q(\varphi) = (\sin\varphi - 0,5\cos\varphi)P; \quad (15.1)$$

$$M_C(\varphi) = PR(1 - \cos\varphi - 0,5\sin\varphi).$$

Користуючись формулами (15.1), визначимо значення N , Q та M в перерізі стержня через 10° і у масштабі побудуємо епюри N , Q та M (Рис. 15.2, б).

15.2 Визначення напружень в плоских кривих брусах

Розглянемо випадок чистого згинання кривого бруса (Рис. 15.1). Припустимо, що нейтральний шар має поки що невідомий **радіус кривизни** r_n , взагалі інший ніж радіус R осі стержня. Виведемо формули для напружень σ в брусах великої кривизни.

При виведенні цих формул передбачається, що:

1) кривий брус є плоским (тобто вісь його є кривою, що розташована в одній площині);

2) брус симетричний відносно площини, в якій розташована його вісь, а зовнішні сили діють в цій площині;

15.1 Епюри внутрішніх зусиль в криволінійних брусах

У поперечних перерізах плоского кривого бруса в загальному випадку є три внутрішні силових фактори – N , Q та M . На практиці мають справу зі стержнями, вісь яких окреслена по дузі кола. У цьому разі має сенс перейти до полярної системи координат, тоді поздовжня, поперечна сила та згинальний момент будуть функціями кута φ : $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$, $M(\varphi)$.

Як приклад розглянемо плоский кривий брус (Рис. 15.2, а). Запишемо вирази $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$, $M(\varphi)$ для довільного перерізу C .

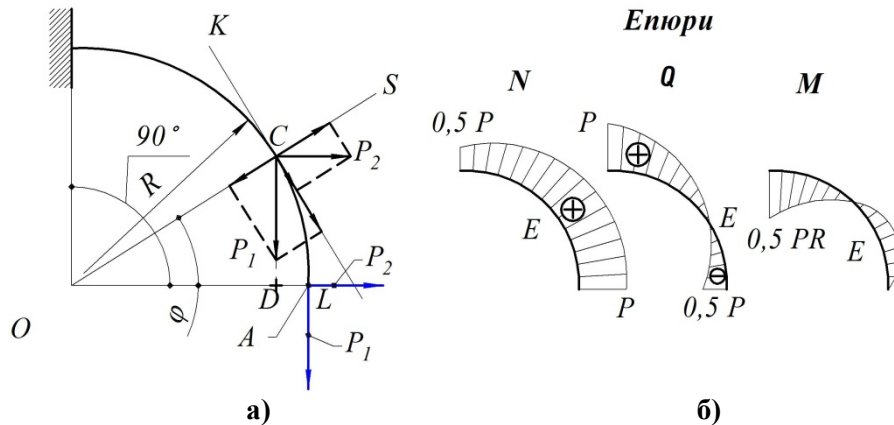


Рисунок 15.2 – Епюри внутрішніх зусиль

Щоб отримати вираз для знаходження $N(\varphi)$ треба визначити проекції сил P_1 та P_2 на дотичну KL . Для зручності перенесемо проекції в точку C (Рис. 15.2, а). Тоді

$$N(\varphi) = P_1 \cos \varphi + P_2 \sin \varphi.$$

Щоб отримати вираз для знаходження $Q(\varphi)$, треба знайти проекції сил, прикладених на ділянці дуги AC , на площину перерізу, тобто на напрям SO .

$$Q = 0,5P = 0,5 \cdot 700 = 350 \text{ кН.}$$

2. Знайдемо головний центральний момент інерції перерізу. Оскільки переріз має дві осі симетрії, то ці осі і є головними центральними осями інерції.

Щоб знайти моменти інерції відносно осі z , розіб'ємо переріз на складові: прямокутник I і два однакових квадрати II і III (Рис. 11.11).

Тоді

$$\begin{aligned} J_z &= J_{zI} + J_{zII} + J_{zIII} = \frac{bh^3}{12} + 2 \left(\frac{a^4}{12} + c_2^2 F_2 \right) = \\ &= \frac{30 \cdot 200^3}{12} + 2 \left(\frac{100^4}{12} + 150^2 \cdot 100^2 \right) = 48666,67 \cdot 10^4 \text{ мм}^4. \end{aligned}$$

Момент опору перерізу:

$$W_z = \frac{J_z}{y_{max}} = \frac{48666,67 \cdot 10^4}{200} = 243,33 \cdot 10^4 \text{ мм}^3.$$

3. Побудуємо епюри розподілу напружень по висоті перерізу балки.

3.1. Епюра нормальних напружень. Знайдемо величину максимального нормального напруження:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_z} = \frac{350 \cdot 10^6}{243,33 \cdot 10^4} = 143,84 \text{ МПа.}$$

На нейтральній лінії перерізу (вісь z) $\sigma = 0$. За цими значеннями будуємо епюру нормальних напружень (Рис. 11.11). Беручи до уваги що, згідно зі схемою навантаження, верхні волокна балки розтягнені, нормальні напруження в цих волокнах будуть додатними.

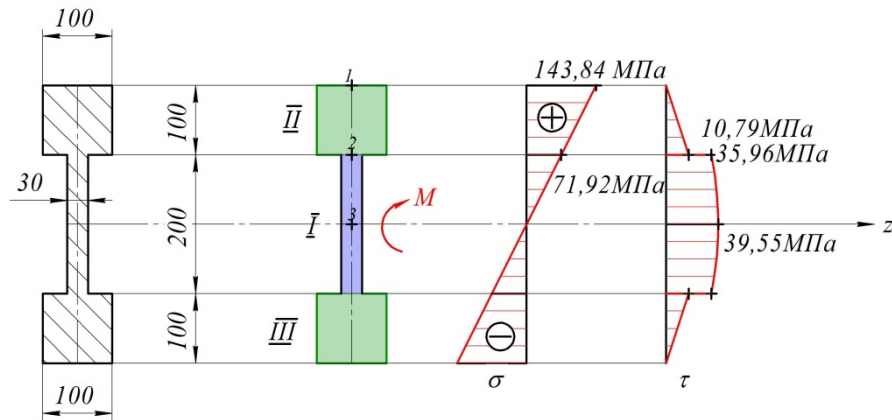


Рисунок 11.11 – До прикладу 11.4

3.2 Для побудови епюри дотичних напружень обчислимо їх значення в точках, вказаних на рис. 11.4

Точка 1. Дотичні напруження: $\tau = 0$.

Точка 2. Статичний момент площі, розташованої вище рівня точки 2, тобто квадрата II.

$$S_z^{II} = A_2 c_2 = 100^2 \cdot 150 = 150 \cdot 10^4 \text{ мм.}$$

Щоб визначити дотичні напруження для цього рівня відносно нейтральної лінії, слід розглянути дві точки: 2*, яка належить стороні квадрата II, і 2**, яка належить стороні прямокутника I, оскільки ширина перерізу $b(y)$ в цих точках різна.

Для точки 2*

$$\tau^{(2^*)} = \frac{QS_z^{II}}{b^{(2^*)} J_z} = \frac{350 \cdot 10^3 \cdot 150 \cdot 10^4}{100 \cdot 486000,67 \cdot 10^4} = 10,79 \text{ МПа}$$

Для точки 2**

$$\tau^{(2^{**})} = \frac{QS_z^{II}}{b^{(2^{**})} J_z} = \frac{350 \cdot 10^3 \cdot 150 \cdot 10^4}{30 \cdot 486000,67 \cdot 10^4} = 35,96 \text{ МПа}$$

Точка 3. Статичний момент площі половини перерізу відносно осі z

$$S_z = S_z^{II} + S_z^{1^{**}} = 150 \cdot 10^4 + 100 \cdot 30 \cdot 50 = 165 \cdot 10^4 \text{ мм.}$$

Тоді

15. НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН ПЛОСКИХ КРИВИХ БРУСІВ ВЕЛИКОЇ КРИВИЗНИ

У різних конструкціях часто застосовуються бруси з криволінійною віссю. До них належать гаки, кільця ланцюгів, ободи шківів та коліс, арки тощо. Осі цих брусів – плоскі криві.

Дослідження показують, що при згинанні розподіл нормальних напружень у поперечному перерізі в кривому брусі істотно відрізняється від тих, які мають місце в балці з прямою віссю. За інших однакових умов ця відмінність тим більша, чим більше відношення висоти h поперечного перерізу до радіуса R кривизни його осі (Рис. 15.1).

У зв'язку з цим розрізняють бруси різної кривизни:

якщо $h/R < 1/5$ – це **бруси малої кривизни**;

якщо $h/R \geq 1/5$ – це **бруси великої кривизни**.

При згинанні брусів малої кривизни нормальні напруження можна визначати за формулами виведення для балок з прямою віссю (похибка при цьому становить $\sim 2\%$).

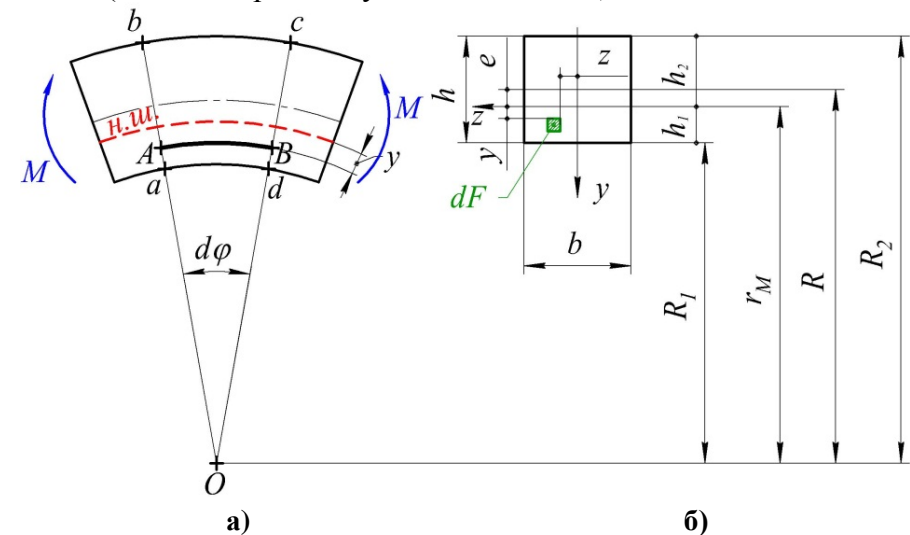


Рисунок 15.1 – Плоский брус великої кривизни

$$w_C = \frac{P\ell^3}{3EI_z}$$

14.5 Контрольні запитання

1. В яких випадках використовують теорему Кастіліано?
2. Формула переміщення за методом Мора.
3. Формула Верещагіна для визначення переміщень.
4. Дві умови використання способу Верещагіна.
5. Умови використання формули Карнаухова.
6. Що таке переміщення? Види переміщень.

$$\tau^{(3)} = \tau_{max} = \frac{QS_z^{II}}{b^{(2^{**})}J_z} = \frac{350 \cdot 10^3 \cdot 165 \cdot 10^4}{30 \cdot 486000,67 \cdot 10^4} = 39,55 \text{ МПа}$$

3. Знайдемо запаси міцності балки в указаних точках.

Точка 1. $\sigma_{max} = 143,84$ МПа. Запас міцності

$$n_1 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}} = \frac{250}{143,84} = 1,74.$$

Точка 2.**

$$\sigma = \frac{M}{J_z} y^{(2)} = \frac{350 \cdot 10^6}{48666,67 \cdot 10^4} 100 = 71,92 \text{ МПа},$$

$$\tau^{(2^{**})} = 35,96 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_p^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{71,92^2 + 4 \cdot 35,96^2} = 101,71 \text{ МПа}$$

$$n_{2^{**}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_p^{III}} = \frac{250}{101,71} = 2,46.$$

Точка 3. $\tau_{max} = 39,55$ МПа.

Поклавши $\tau_T = 0,5\sigma_T = 0,5 \cdot 250 = 125$ МПа, знаходимо, що

$$n_1 = \frac{\tau_T}{\tau_{max}} = \frac{125}{39,55} = 3,16.$$

З отриманих результатів робимо висновок, що найменший запас міцності маємо в точці 1 перерізу. Отже небезпечними є крайні точки перерізу розглянутої балки.

11.4.1 Визначення нормальних напружень в поперечному перерізі балки при чистому згинанні. Розглянемо випадок чистого плоского згинання. АВ – волокно на нейтральному шарі (Рис. 11.12, а).

Сукупність точок, розподілених на одній лінії називається волокном.

При згинанні має місце гіпотеза плоских перерізів або гіпотеза Бернуллі, за якою плоскі перерізи до деформації залишаються плоскими та перпендикулярними до

нейтральної лінії після деформації, повертаючись один відносно іншого на деякий кут.

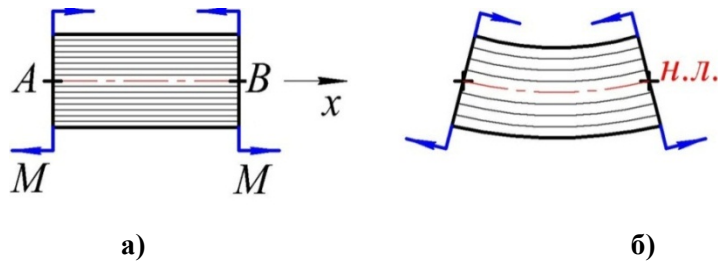


Рисунок 11.12 – Чисте згинання

Сукупність волокон, які при згинанні не змінюють своєї довжини, називають центральним шаром або нейтральною лінією (Рис. 11.11, б).

Частина волокон, що лежить вище нейтральної лінії укорочується, тобто зазнає деформації стискання. Частина волокон, що лежить нижче нейтральної лінії подовжується, тобто зазнає деформації розтягання.

Виділимо із балки двома паралельними перерізами елемент довжиною $dx = 1$ (Рис. 11.13) та розглянемо його деформований стан.

θ – відносний кут повороту перерізу по довжині ℓ або кривизні нейтральної лінії.

$$\theta = \frac{1}{\rho}, \quad dx = \rho d\varphi; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx} = \theta, \quad (11.8')$$

де ρ – радіус від центру кривизни до нейтральної лінії.

Одержана залежність називається **правилом трапецій** або формулою Симпсона-Карнаухова.

Приклад 14.3. Визначити переміщення точки С консольної балки довжиною ℓ , навантаженою в точці С зосередженою силою P (Рис. 14.8, а).

Будуємо епюру M_x від заданого навантаження (Рис.14.8, в) і епюру \bar{M}_x від одиничного навантаження $\bar{P} = 1$, прикладеного теж в точці С (Рис.14.8, г).

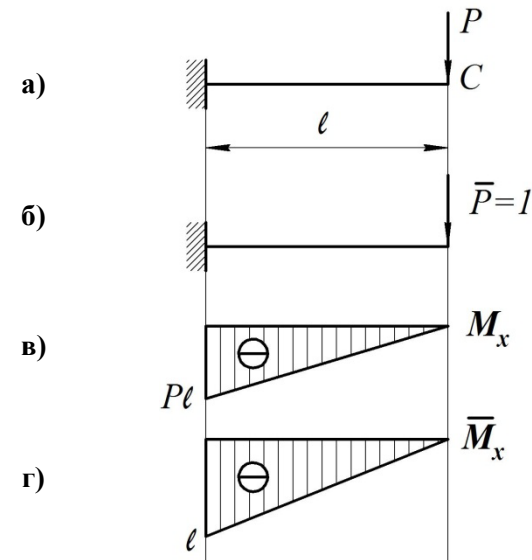


Рисунок 14.8 – До прикладу 14.3

Визначаємо коефіцієнти:

$$a = 1; \quad b = 0; \quad c = 1; \quad d = 0$$

Тоді добуток за формулою Карнаухова буде дорівнювати:

$$\omega \bar{y}_C = \frac{\ell}{6} (2P\ell \cdot \ell + 2 \cdot 0 \cdot 0 + P\ell \cdot 0 + 0 \cdot \ell) = \frac{P\ell^3}{3}.$$

Знаходимо прогин в точці С:

Якщо на ділянках балки всі епюри прямолінійні (відсутнє розподілене навантаження), то вигідніше використовувати **формулу М.В. Карнаухова**. Розглянемо приклад коли вантажна епюра має форму трапеції (Рис. 14.7).

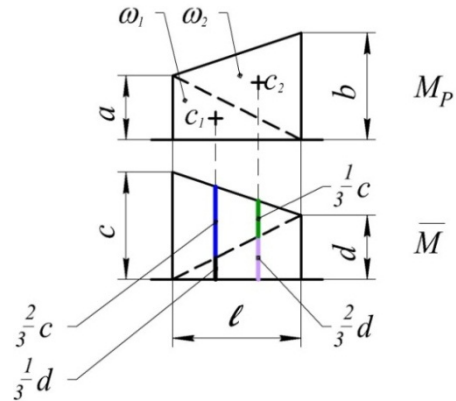


Рисунок 14.7 – Визначення переміщення за формулою Карнаухова

$$\omega_1 = \frac{1}{2}al; \omega_2 = \frac{1}{2}bl.$$

Тоді добуток

$$\begin{aligned} \omega \bar{y}_c &= \frac{al}{2} \left(\frac{2}{3}c + \frac{d}{3} \right) + \frac{bl}{2} \left(\frac{2}{3}d + \frac{c}{3} \right) = \frac{2alc}{6} + \frac{ald}{6} + \frac{blc}{6} = \\ &= \frac{l}{6} (2ac + 2bd + ad + bc). \end{aligned}$$

При наявності декількох ділянок на балці, що задовольняють зазначеним умовам, формула для визначення переміщень приймає вид:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\ell_i}{6EJ_z} (a \cdot \bar{a} + 4 \cdot c \cdot \bar{c} + b \cdot \bar{b}). \quad (14.14)$$

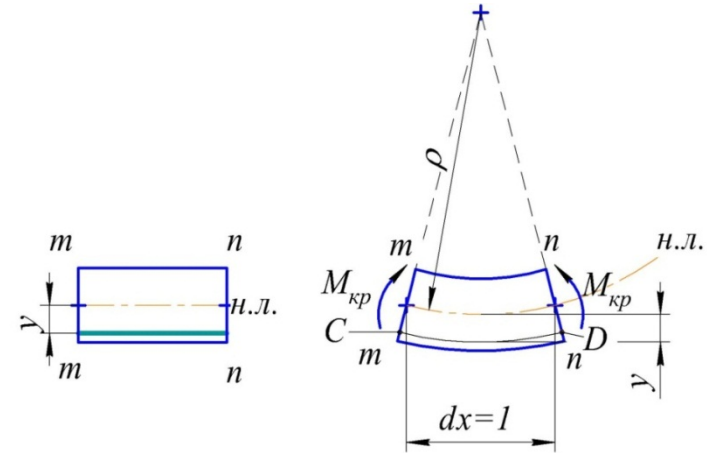


Рисунок 11.13 – Чисте згинання елемента dx

Розглянемо випадок чистого згинання балки (Рис. 11.14) із шести внутрішніх силових факторів, які можуть діяти в поперечних перерізах в загальному випадку згинання, при чистому згинанні не дорівнює нулю тільки згинальний момент M .

Проведемо поперечний переріз $m - m$ на відстані x_1 від початку координат. Виділимо в перерізі елемент площі dF з координатами y та z .

При чистому згинанні всі зусилля Q та моменти $M_{кр}$, пов'язані з дотичними напруженнями – дорівнюють нулю. Отже, з усіх умов рівноваги (3.4) залишаться тільки три.

Для визначення нормальних напружень в поперечному перерізі при згинанні розглянемо 3 аспекта задачі:

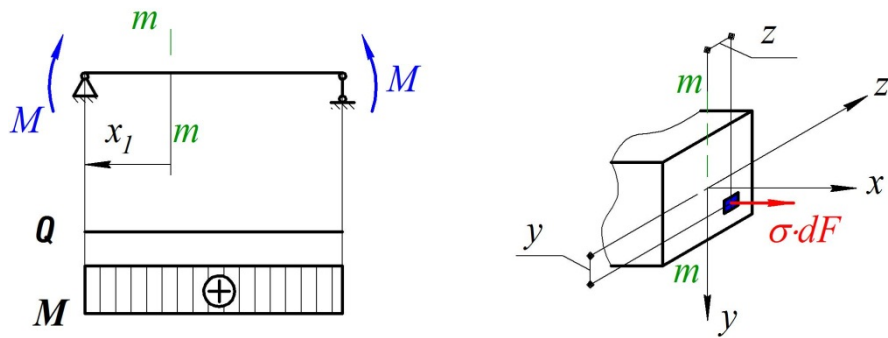


Рисунок 11.14 – Чисте плоске згинання

Статичний аспект задачі.

В загальному вигляді в перерізі діє

$$N = \int_F \sigma dF; \quad M_y = \int_F \sigma z dF; \quad M_z = \int_F \sigma y dF.$$

Але при чистому згинанні в поперечному перерізі діє тільки M_z . Тобто,

$$N = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = \int_F \sigma y dF. \quad (11.9)$$

Геометричний аспект задачі.

Відносна деформація волокна (Рис.11.13, б)

$$CD = \varepsilon_x = \theta \cdot y, \quad (11.10)$$

або враховуючи (11.8'), отримаємо

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}, \quad (11.10')$$

де y – відстань від н.л. до точки, в якій визначається напруження σ .

Таблиця 14.2 – Значення площ та координати центрів ваги для найбільш використовуваних видів одиничних епюр

Вигляд одиничної епюри	ω	X_c
	$h\ell$	$\frac{\ell}{2}$
	$\frac{1}{2}h\ell$	$\frac{2}{3}\ell$
	$\frac{1}{2}h\ell$	$\frac{1}{3}(\ell + a)$
	$\frac{1}{3}h\ell$	$\frac{3}{4}\ell$
	$\frac{2}{3}h\ell$	$\frac{5}{8}\ell$

Будуємо епюру M_p від заданого навантаження (Рис.14.6, а) і епюру \bar{M} від одиничного навантаження (Рис.14.6, б).

Так як реакція $R_B=0$ не потрібно розбивати епюру M_p на другій ділянці на прості фігури. На другій ділянці буде тільки епюра від розподіленого навантаження.

Визначаємо площі цих простих фігур і ординати на епюрі \bar{M} під центрами ваги цих фігур.

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(-q\ell^2)\ell = -\frac{q\ell^3}{2};$$

\bar{y}_{C_1} знаходимо з подібності трикутників

$$\frac{\frac{2}{3}\ell}{\ell} = \frac{\bar{y}_{C_1}}{\frac{\ell}{2}}; \quad \bar{y}_{C_1} = \frac{2\ell \cdot \ell}{3 \cdot 2\ell} = \frac{1}{3}\ell.$$

$$\omega_2 = \frac{1}{3}(-q\ell^2)\ell = -\frac{q\ell^3}{3};$$

\bar{y}_{C_2} знаходимо з подібності трикутників

$$\frac{\frac{3}{4}\ell}{\ell} = \frac{\bar{y}_{C_2}}{\frac{\ell}{2}}; \quad \bar{y}_{C_2} = \frac{3\ell \cdot \ell}{4 \cdot 2\ell} = \frac{3}{8}\ell.$$

$$\begin{aligned} w_c &= \frac{1}{EJ_z} [\omega_1 \cdot \bar{y}_{C_1} + \omega_2 \cdot \bar{y}_{C_2}] = \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{q\ell^3}{2} \cdot \frac{1}{3}\ell - \frac{q\ell^3}{3} \cdot \frac{3}{8}\ell \right] = \\ &= \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{1}{6}q\ell^4 - \frac{1}{8}q\ell^4 \right] = -\frac{7q\ell^4}{24EJ_z}. \end{aligned}$$

Знак «мінус» вказує, що переміщення здійснилось проти напрямку одиничної сили, тобто вверх.

Отже, розв'язання геометричного аспекту завдання показало, що **відносна повздовжня деформація пропорційна відстані волокна від нейтральної лінії.**

Фізичний аспект задачі:

Так як на елементарній площадці dF перерізу немає дотичних напружень, волокна матеріалу, розташовані вздовж балки, не тиснуть одне на одне і напруження між ними дорівнюють нулю, то волокно CD (Рис. 11.13, б) перебуває в лінійному напруженому стані (просте розтягання або стискання). Тому **закон Гука** для нього слід записати так:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma}{E} \quad \text{або} \quad \sigma = \varepsilon_x \cdot E. \quad (11.11)$$

Сінтез. Виключимо ε_x із залежностей (11.10') і (11.11):

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y.$$

Підставляючи (11.11) в (11.5), отримаємо

$$M_z = \int_F \varepsilon_z E y dF, \quad (11.12)$$

а потім підставляючи (11.10') в (11.12) маємо:

$$M_z = \int_F \theta E y^2 dF = \theta E J_z, \quad (11.13)$$

звідки (враховуючи, що $\int_F y^2 dF = J_z$,

$$\theta = \frac{M_z}{EJ_z} \quad \text{і} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (11.14)$$

Тоді

$$\varepsilon_x = \frac{M_z y}{E J_z}, \quad (11.15)$$

а отже

$$\sigma = \frac{M_z y}{J_z}. \quad (11.16)$$

Тут при $y = 0; \sigma = 0; y = y_{max}; \sigma = \sigma_{max}$.

Формула (11.16), яка вперше була виведена французьким вченим **К. Нав'є**⁸, дає змогу визначити нормальні напруження при чистому згинанні балки σ будь-якої точки її перерізу.



Рисунок 11.15 – Портрет К.А. Нав'є

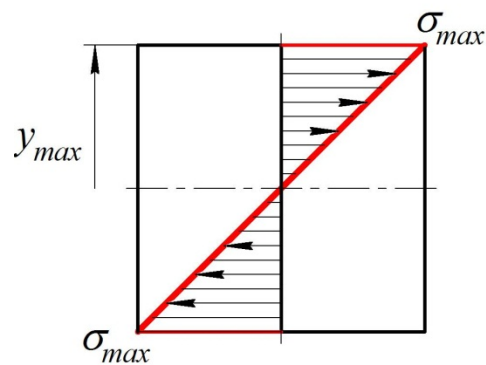


Рисунок 11.16 – Розподіл нормальних напружень за формулою Нав'є по висоті балки при згинанні

Розподіл нормальних напружень по висоті балки при згинанні показано на рис. 11.16.

⁸ Клод-Луї Марі-Анрі Нав'є (1785 – 1836) – французький інженер і учений, автор ряду праць з будівельної механіки, опору матеріалів, теорії пружності, гідравліки і гідродинаміки, автор курсу опору матеріалів.

підтверджує, що переміщення відбулося в напрямі, протилежному одиничному навантаженню. Якщо задана балка навантажена декількома силами, то в цьому випадку вигідніше скористатися принципом незалежності дії сил, тобто будують епюри від кожного навантаження окремо.

Для полегшення розрахунків площ та ординат приводимо таблицю 14.2.

Приклад 14.2. Для умов прикладу 14.1 визначити лінійне переміщення перерізу балки в середині прольоту в точці С.

Реакції опор знайдено в прикладі 14.1.

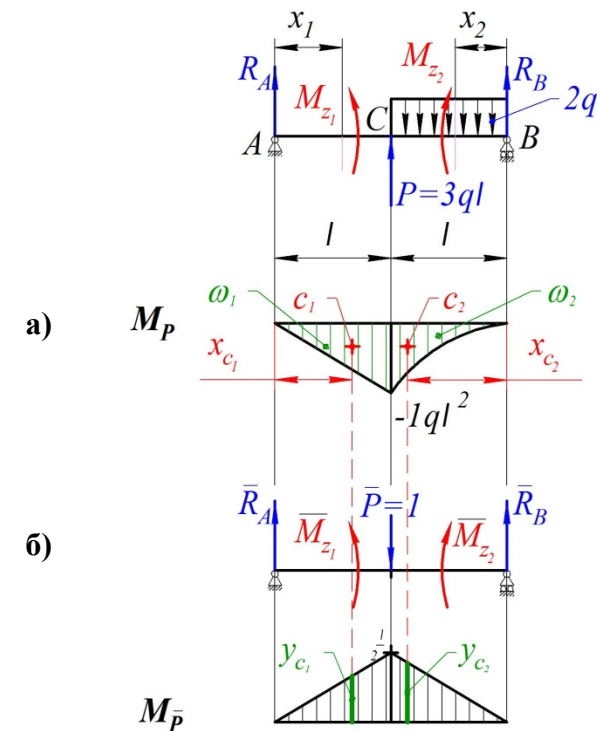


Рисунок 14.6 – Визначення переміщення способом Верещагіна

ординату епюри від одиничного навантаження під центром ваги C вантажної епюри.

Очевидно, $M_p dx = d\omega$ – диференціал площі епюри M_p .

$$\bar{M} = x \cdot tg\alpha.$$

Інтеграл Мора буде мати вигляд

$$\int_{\ell} M_p \cdot \bar{M} \cdot dx = tg\alpha \int_{\ell} x d\omega.$$

Інтеграл в правій частині є статичним моментом площі епюри M_p , відносно осі y , він дорівнює

$$\int_{\ell} x d\omega = x \cdot X_C.$$

де X_C – абсциса центра ваги епюри M_p . Оскільки

$$tg\alpha \cdot X_C \cdot \omega = \omega \cdot \bar{M}_C, \quad \text{інтеграл} \int_{\ell} M_p \cdot \bar{M} \cdot dx = \omega \cdot \bar{y}_C.$$

Таким чином, ми отримуємо формулу 14.13.

Іншими словами **переміщення дорівнює добутку площі епюри від зовнішнього навантаження на ординату прямолінійної епюри від одиничного навантаження, розташовану під центром ваги фігури епюри від заданого зовнішнього навантаження**. Обчислення за формулою (14.12) виконують по ділянках. Якщо епюра M_p складається з епюр від декількох навантажень, то її слід розбивати на прості фігури, для яких легко визначити площу і положення центра ваги. При цьому кожен з площ треба множити на ординату одиничної епюри під центром ваги відповідної площі.

Якщо епюри від заданого і одиничного навантаження протилежні за знаком, їхній добуток має знак «мінус» і це

Враховуючи, що

$$\frac{J_z}{y_{max}} = W_x,$$

умова міцності по нормальним напруженням при згинанні буде мати вигляд

$$\sigma_{max} = \frac{M_{zmax}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Положення нейтрального шару визначимо із рівняння

$$N = \int_F \sigma dF = 0; \quad \sigma = \varepsilon_x E = \theta y E.$$

Тоді

$$N = \theta E \cdot y dF = \theta E \int_F y dF = 0,$$

але $E\theta \neq 0$, отже

$$\int_F y dF = S_x = 0.$$

Таким чином **нейтральна лінія при згинанні проходить через центр ваги перерізу**. А осі y та x будуть головними центральними осями. При цьому силова площина співпадає з однією із головних осей інерції, а друга вісь буде нейтральною лінією.

11.4.2 Визначення дотичних напружень при згинанні (формула Д.І. Журавського)

При плоскому поперечному згинанні, коли в перерізах має місце зусилля $Q_y \neq 0$ і $M_z \neq 0$, виникають не тільки нормальні напруження σ , а і дотичні τ .

Із теорії пружності відомо, що при плоскому поперечному згинанні гіпотеза плоских перерізів не витримується. Перерізи при деформуванні викривлюються (деплануються). Але вплив цього фактору на величину і характер розподілення нормальних напружень залежить від розміру балки. Якщо $\frac{h}{\ell} \leq \frac{1}{5}$ (h – висота поперечного перерізу, ℓ – довжина балки), то помилка в обчисленні не перевищує 1%.

Таким чином, з допустимою похибкою можна прийняти, що при плоскому поперечному згинанні, для **невисоких довгих балок**, нормальні напруження розподіляються по висоті балки за лінійним законом і їх можна обчислити за відомою **формулою Нав'є**:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} \cdot y.$$

Дотичні напруження τ в площині поперечного перерізу будемо визначати через парні їм дотичні напруження, які діють в поздовжніх перерізах. Формулу для визначення τ будемо вивчати на прикладі консольної балки прямокутного перерізу (Рис. 11.17) навантаженої зосередженою силою на вільному кінці.

Розглянемо елемент балки dx , який обмежений двома суміжними площинами. В обох перерізах I і II діють, згідно з епюрою Q , однакові за величиною поперечні сили. Згинальні моменти в цих перерізах різні: M і $M + dM$ відповідно (Рис. 11.17, а). При дії вказаних зусиль в перерізах мають місце нормальні і дотичні напруження.

де ω_i – площа вантажної епюри;

\bar{y}_{C_i} – ордината одиничної епюри (обов'язково прямолінійної), узяті під центром ваги вантажної епюри;

EJ_z – жорсткість перерізу.

Слід мати на увазі, що використання цього способу можливе тільки за наявності **двох умов**: жорсткість балки на даній ділянці має бути постійною ($EJ_z = \text{const}$), одна з двох епюр моментів на цій ділянці (вантажна або одинична) має бути обов'язково лінійною. При цьому обидві епюри не повинні в межах цієї ділянки мати перелому.

Доведемо цю формулу.

Нехай вантажна епюра M_p довільна, а одинична лінійна (оскільки одиничним навантаженням буває зосереджена сила, або пара сил, то одинична епюра \bar{M} виявляється обмеженою прямими лініями) (Рис. 14.5).

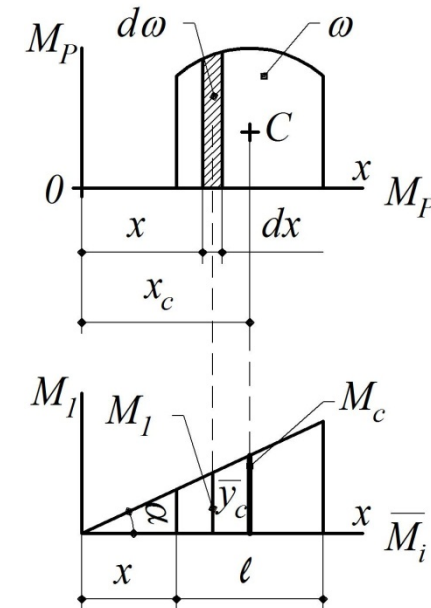


Рисунок 14.5 – Вантажна епюра та епюра від одиничного навантаження

Позначимо через ω площу епюри M_p , а через \bar{y}_C –

уверх, а не по направленню одиничної сили.

14.4 Визначення переміщень способом Верещагіна

У багатьох випадках інтегрування по Морю можна уникнути і застосувати інші способи визначення переміщення. Одним з таких способів є спосіб Сімсона, але також можна визначити переміщення за способом Верещагіна. Цей спосіб А.К. Верещагін¹⁰ запропонував в 1924 році, будучи студентом.

Розглянемо послідовність дій за правилом Верещагіна. Початковий етап такий же, як за методом Мору, тобто спочатку будується вантажна епюра від діючих навантажень (дійсний стан), потім розглядаємо балку в допоміжному стані.



Рисунок 14.4 – Портрет А.К. Верещагіна

Допоміжний стан виходить також як за методом Мора: спочатку усе задане навантаження треба видалити, потім прикласти "одиничний силовий чинник" в тому місці, де потрібно визначити переміщення, і по напрямку цього шуканого переміщення. Будується епюра одиничних моментів або епюра від одиничного навантаження.

Далі переміщення обчислюється за формулою:

$$\Delta = \frac{1}{EJ_z} \sum \omega_i \cdot \bar{y}_{C_i}, \quad (14.13)$$

¹⁰ Андрій Костянтинівич Верещагін (1896–1959) – вважається засновником наукової школи мінної електротехніки. А.К. Верещагін зробив великий внесок у розвиток військової техніки.

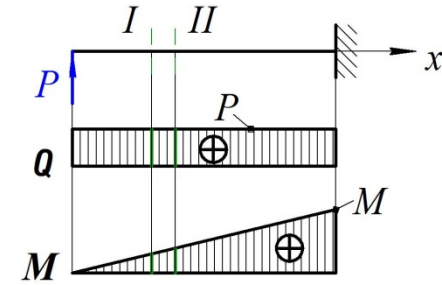


Рисунок 11.17 – Балка в умовах поперечного згинання

Нормальні напруження в перерізах I і II знаходимо за формулою Нав'є (11.16). Ці напруження для довільного шару волокон відповідно дорівнюватимуть:

$$\sigma' = \frac{M_z}{J_z} y; \quad \sigma'' = \frac{M_z + dM_z}{J_z} y. \quad (11.17)$$

Епюри нормальних напружень представлені на рис. 11.18, а.

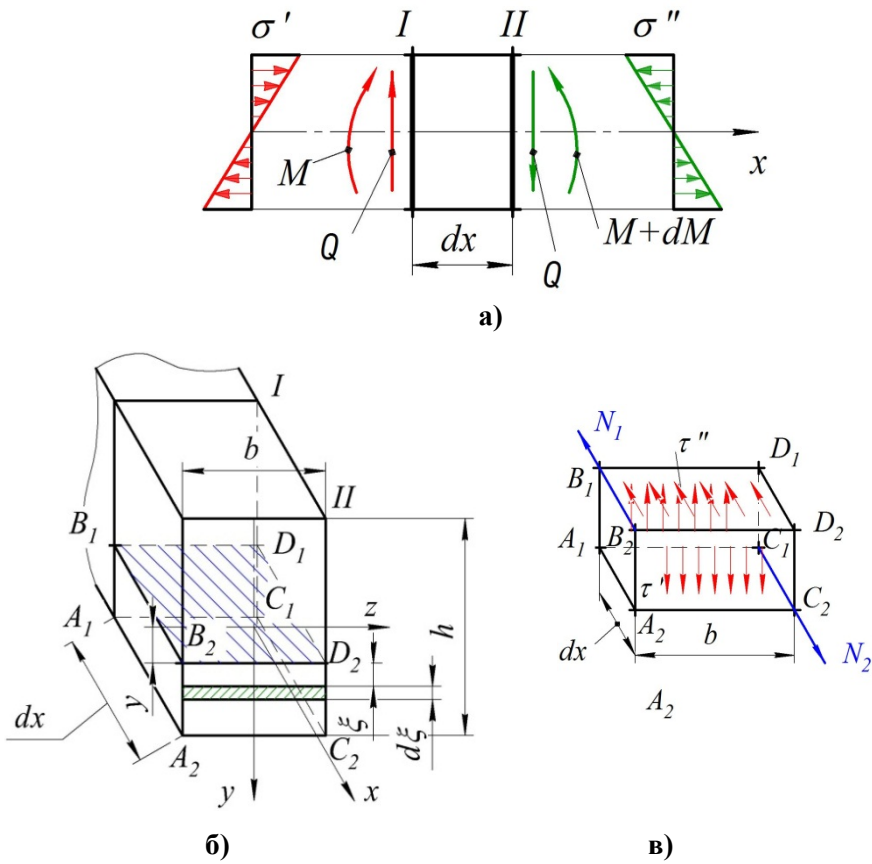
Щоб знайти дотичні напруження, сформулюємо деякі припущення щодо характеру їх розподілу в поперечному перерізі.

1. Дотичні напруження τ в перерізі паралельні поперечній силі Q .

2. В даному шарі волокон на відстані u від нейтрального шару дотичні напруження однакові за величиною по всій ширині перерізу.

Примітка. Ці припущення справедливі лише для перерізів зі співвідношенням сторін $h/b > 2$, коли поперечна сила паралельна стороні h .

Далі площиною, паралельною нейтральному шару балки, на відстані u від нього відріжемо частину елемента стержня (Рис. 11.18, б). Розглянемо умови рівноваги елементарного паралелепіпеда $A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2$. Для цього спочатку проаналізуємо, які сили діють у його гранях.



а) схема навантаження елемента балки;
 б) схема виділення частини елемента балки;
 в) схема навантаження частини елемента балки.
 Рисунок 11.18 – До визначення дотичних напружень при згинанні

Грані $A_1A_2B_1B_2$, $C_1C_2D_1D_2$ і $A_1A_2C_1C_2$ належать бічній поверхні стержня, вільній від навантаження, тому тут жодні сили не діють.

У грані $A_1B_1C_1D_1$ діють нормальні σ' і дотичні τ' напруження. Знайдемо рівнодійну нормальних напружень

$$= \frac{q\ell^2 - 3q\ell^2}{2\ell} = -q\ell.$$

$$\bar{R}_A = \frac{\bar{P}\ell}{2\ell} = \frac{\bar{P}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ділянка I – I $0 \leq x_1 \leq \ell$
 $\sum \bar{M}_{iO_1} = -\bar{R}_A x_1 + \bar{M}_{z_1} = 0;$
 $\bar{M}_{z_1} = \bar{R}_A \cdot x_1 = \frac{\bar{P}}{2} \cdot x_1 = \frac{1}{2} \cdot x_1.$
 При $x_1 = 0$ $\bar{M}_{z_1} = 0.$
 При $x_1 = \ell$ $\bar{M}_{z_1} = \frac{1}{2} \ell.$

Ділянка II – II $0 \leq x_2 \leq \ell$
 $\sum \bar{M}_{iO_2} = \bar{R}_B \cdot x_2 - \bar{M}_{z_2} = 0;$
 $\bar{M}_{z_2} = \bar{R}_B \cdot x_2.$ При $x_2 = 0$ $\bar{M}_{z_2} = 0.$
 При $x_2 = \ell$ $\bar{M}_{z_2} = \frac{1}{2} \ell.$

Запишемо інтеграл Мора, враховуючи дію навантажень на обидві ділянки:

$$w_c = \frac{1}{EJ_z} \int_{\ell} \left[(-q\ell \cdot x_1) \cdot \left(\frac{1}{2} x_1\right) dx + \left(-2q \frac{x_2^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} x_1\right) dx. \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_z} \int_{\ell} \left[\left(-\frac{1}{2} q\ell \cdot x_1^2\right) dx + \left(-q \frac{x_2^3}{2}\right) dx. \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{1}{2} q\ell \cdot \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^{\ell} + -\frac{1}{2} q \frac{x_2^4}{4} \Big|_0^{\ell} \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{1q\ell^4}{6} - \frac{1q\ell^4}{8} \right] = \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{4q\ell^4}{24} - \frac{3q\ell^4}{24} \right] = -\frac{7q\ell^4}{24EJ_z}.$$

Знак «мінус» говорить, що переміщення буде направлено

$$\sum M_A(P_i) = 0; P\ell - 2q\ell \cdot 1,5\ell + R_B \cdot 2\ell = 0;$$

$$R_B = \frac{3q\ell^2 - P\ell}{2\ell} = \frac{3q\ell^2 - 3q\ell^2}{2\ell} = 0.$$

$$\sum M_B(P_i) = 0; -P\ell + 2q\ell \cdot 0,5\ell - R_A \cdot 2\ell = 0;$$

$$R_A = \frac{q\ell^2 - P\ell}{2\ell} = \frac{q\ell^2 - 3q\ell^2}{2\ell} = -q\ell.$$

Перевірка.

$$\sum P_{yi} = 0; R_A + P - 2q\ell + R_A = 0;$$

$$-q\ell + 3q\ell - 2q\ell + 0 = 0$$

2) Визначаємо аналітичне значення моментів на кожній ділянці

Ділянка I – I $0 \leq x_1 \leq \ell$

$$\sum M_{iO_1} = -R_A x_1 + M_{z_1} = 0;$$

$$M_{z_1} = R_A \cdot x_1 = -q\ell \cdot x_1. \text{ При } x_1 = 0 \quad M_{z_1} = 0.$$

$$\text{При } x_1 = \ell \quad M_{z_1} = -q\ell^2.$$

Ділянка II – II $0 \leq x_2 \leq \ell$

$$\sum M_{iO_2} = -2q \frac{x_2^2}{2} - M_{z_2} = 0;$$

$$M_{z_2} = -2q \frac{x_2^2}{2};$$

$$\text{При } x_2 = 0 \quad M_{z_2} = 0.$$

$$\text{При } x_2 = \ell \quad M_{z_2} = -q\ell^2.$$

3) В точці C прикладаємо одиничну силу $\bar{P} = 1$ (Рис.14.3, б). Визначаємо реакції опор від одиничного навантаження та записуємо вирази моментів від одиничного навантаження.

$$4) \sum \bar{M}_A(\bar{P}_i) = 0; \quad -\bar{P}\ell + \bar{R}_B \cdot 2\ell = 0;$$

$$\bar{R}_B = \frac{\bar{P}\ell}{2\ell} = \frac{\bar{P}}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\sum \bar{M}_B(\bar{P}_i) = 0; \quad \bar{P}\ell - \bar{R}_A \cdot 2\ell = 0;$$

$$N_1 = \int_F \sigma' dF.$$

Тут елементарна площадка $dF = bdy$ знаходиться на відстані y від нейтральної лінії перерізу (Рис. 11.17, б).

Тоді

$$N_1 = \int_F \frac{M_z}{J_z} y dF = \frac{M_z}{J_z} \int_F y dF.$$

Тут $\int_F y dF = S_z(y)$ – статичний момент площі грані $A_1B_1C_1D_1$ відносно осі z , тобто частини площі поперечного перерізу, розташованої між шаром волокон на рівні y та краєм балки. Отже

$$N_1 = \frac{M_z}{J_z} S_z(y). \quad (11.18)$$

Аналогічно знайдемо рівнодійну N_2 на грані $A_2B_2C_2D_2$:

$$N_2 = \frac{M_z + dM_z}{J_z} S_z(y). \quad (11.19)$$

Розглянемо тепер грань $B_1B_2D_1D_2$. Нормальними напруженнями на цій грані, які виникають за рахунок бічного тиску між волокнами при згинанні балки, нехтуємо через їх малість. Дотичні напруження τ'' тут виникають згідно закону парності дотичних напружень, оскільки діють дотичні напруження τ' на ортогональних гранях (Рис. 11.18, в). Через малість грані $B_1B_2D_1D_2$ (один її розмір dx) вважатимемо напруження τ'' рівномірно розподіленими, а їх рівнодійна

$$dT = \tau'' b dx = \tau b dx.$$

Запишемо рівняння рівноваги елемента, спроектувавши сили на вісь x :

$$\sum X_k = N_2 - N_1 - dT = 0$$

або

$$\frac{M_z + dM_z}{J_z} S_z(y) - \frac{M_z}{J_z} S_z(y) - \tau b dx = 0.$$

Звідси

$$\tau b dx = \frac{dM_z}{J_z} S_z(y).$$

Враховуючи, що $dM_z/dx = Q$, остаточно отримаємо:

$$\tau = \frac{Q S_z(y)}{b J_z}. \quad (11.20)$$

Формулу (11.20) вперше вивів **Д.І. Журавський**.

Для прямокутного перерізу статичний момент дорівнює

$$\begin{aligned} S_z(y) &= b(0,5h - y) \left(y + \frac{0,5h - y}{2} \right) = \\ &= b(0,5h - y)(0,5y + 0,25h) = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right). \end{aligned}$$

Тоді, приймаючи до уваги, що для прямокутника

$$J_z = \frac{bh^3}{12}$$

отримаємо:

$$\tau = \frac{Q S_z(y)}{b} \frac{12}{bh^3} \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right) = \frac{3Q}{2bh} \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right). \quad (11.21)$$

З наведеної формули випливає, що залежність між дотичними напруженнями в перерізі при поперечному згинанні і положенням шару волокон відносно нейтральної лінії

5. Обчислюємо інтеграли для відповідних виразів моментів за кожною ділянкою. Підсумовування ведемо в межах всієї конструкції.

Якщо результат вийде додатний, значить, напрям переміщення співпадає з напрямом одиничної сили. Від'ємний знак свідчить про те, що дійсний напрям шуканого переміщення протилежний напрямку одиничної сили.

Розглянемо використання методу Мора.

Приклад 14.1. Балка довжиною 2ℓ навантажена зосередженою силою P та розподіленим навантаженням інтенсивністю $2q$. Визначити лінійне переміщення перерізу балки в середині прольоту в точці C (Рис. 14.3).

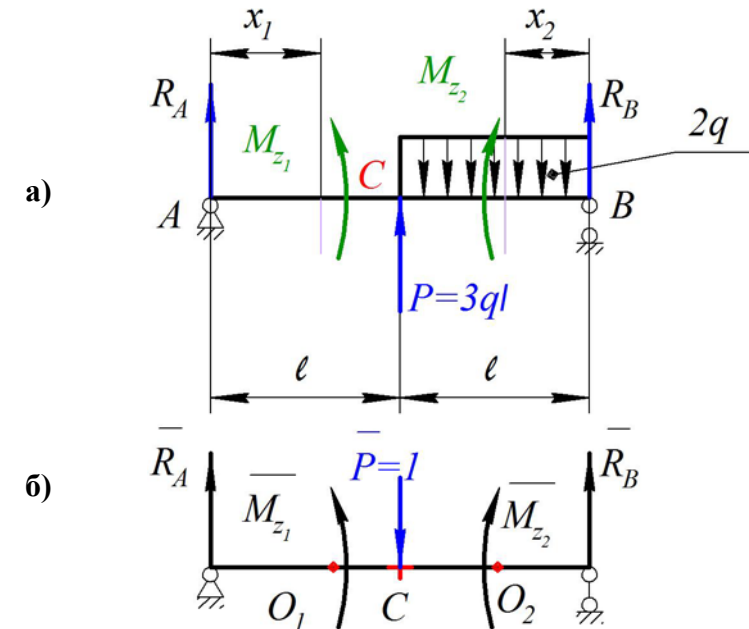


Рисунок 14.3 – Визначення переміщення методом Мора

- 1) Визначаємо реакції опор від дійсного навантаження (Рис.14.3, а)

$$\theta_x = \frac{M_z + \int_F \delta E_y dF}{\int_F E y^2 dF},$$

де $\delta = \beta \Delta t \ell \pm \Delta i$ – лінійні температурні та монтажні переміщення;

β – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу;

Δt – різниця температур;

ℓ – довжина стержня;

Δi – різниця неточності виготовлення стержня.

Якщо $\delta = 0$, тобто температурні навантаження відсутні, то

$$\ell_z = \frac{N_z}{EF};$$

$$\theta_z = \frac{1}{\rho_z} = \frac{M_z}{EJ_z};$$

$$\theta_y = \frac{1}{\rho_y} = \frac{M_y}{EJ_y}.$$

Порядок визначення переміщень за методом Мора.

1. Розглядаємо навантажену систему та визначаємо опорні реакції.

2. Розглядаємо кожну ділянку системи і для них записуємо аналітичні вирази згинальних моментів від заданого навантаження (M_z) для кожної ділянки.

3. До ненавантаженої системи прикладаємо в точці, де необхідно визначити переміщення, одиничну силу (при визначенні лінійного переміщення) або одиничний момент (при визначенні кута повороту) за напрямком шуканого переміщення.

4. За кожною ділянкою системи складаємо аналітичний вираз для згинального моменту від одиничного силового фактора.

параболічна. В крайніх точках перерізу при $y = h/2$ $\tau = 0$. **Найбільші дотичні напруження** виникатимуть у нейтральному шарі, коли $y = 0$:

$$\tau_{max} = \frac{3 Q}{2 bh} = \frac{3 Q}{2 F}. \quad (11.22)$$

Епюра розподілу дотичних напружень по висоті прямокутного перерізу зображена на рис. 11.19.

Хоча **формула Журавського** була виведена для прямокутних перерізів зі співвідношенням $h/b > 2$, тим не менше на практиці нею можна скористатися для перерізів будь-якої форми, за виключенням вузьких прямокутників, розташованих так, що силова лінія паралельна до меншої сторони b . Такі перерізи нами будуть розглянути пізніше.

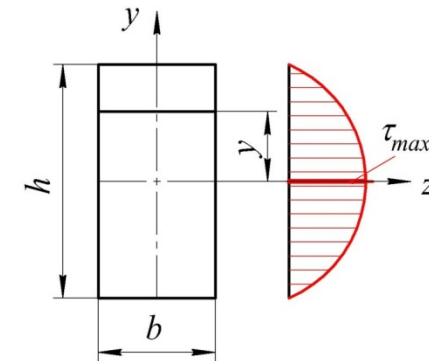


Рисунок 11.19 – Епюра дотичних напружень для прямокутного перерізу

Отже, для довільного перерізу **формулу Журавського** можна записати в такому вигляді:

$$\tau = \frac{QS_z(y)}{b(y)J_z}. \quad (11.23)$$

Тут $b(y)$ – ширина перерізу на тому рівні, де визначаються дотичні напруження, і яка для довільного перерізу буде величиною змінною.

11.4.3 Про раціональну форму перерізу при згинанні

Аналізуючи епюри напружень, можна побачити, що на поздовжньої лінії нормальні напруження дорівнюють нулю, дотичні напруження досягають максимуму. В крайніх волокнах, найбільш віддалених від поздовжньої лінії, навпаки нормальні напруження досягають найбільших по модулю значень, а дотичні напруження дорівнюють нулю. Розрахункова практика показала, що нормальні напруження, як правило, в декілька разів більше дотичних. Тому має сенс проектувати переріз так, щоб в зоні дії великих напружень знаходилася б велика частина матеріалу. Цій вимозі відповідають перерізи у вигляді двотаврових і швелерових прокатних профілів, а також різні корбочасті і кільцеві перерізи (Рис. 11.20).

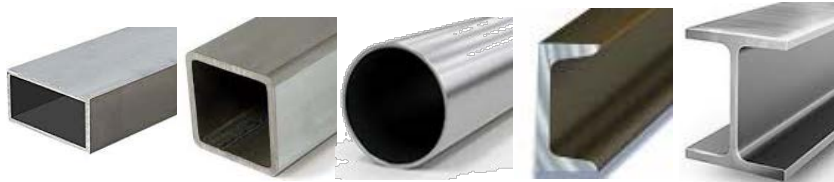


Рисунок 11.20 – Види перерізів балки

Звідси можна зробити висновок: оскільки основний опір прогину є на зовнішніх шарах матеріалу, доцільно при згинанні застосовувати бруси з перерізами, в яких волокна основного матеріалу знаходяться на відстані від нейтральної осі.

Відношення $\varepsilon = \frac{W_z}{\sqrt{F^3}}$ можна назвати **коефіцієнтом раціональності перерізу при згинанні**. Тобто, чим менша площа (або вага) перерізу при тому ж опорі, тим раціональніше буде переріз.

Цей принцип визначає, чому важелі машин, шатуни і інші деталі, а також рейки, балки, корпусу і рами машин в площині

$$\Delta = \sum \int_{\ell} \frac{N_x \cdot \bar{N}_x \cdot dx}{EF} + \int_{\ell} \frac{M_x \cdot \bar{M}_x \cdot dx}{EF} + \int_{\ell} \frac{M_y \cdot \bar{M}_y \cdot dx}{EF} + \int_{\ell} \frac{M_z \cdot \bar{M}_z \cdot dx}{EF}, \quad (14.11)$$

де N_x, M_x, M_y, M_z – значення зусиль заданої балки в довільному перерізі від заданого навантаження.

$\bar{N}_x, \bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_z$ – значення внутрішніх зусиль в допоміжній балці від прикладеного одиничного навантаження.

При цьому потрібно врахувати, що одиничне навантаження прикладають тільки в перерізі, де потрібно визначити переміщення. **Якщо із умови задачі потрібно визначити лінійне переміщення, то одиничним навантаженням буде сила $\bar{P} = 1$.**

Якщо потрібно визначити кутове переміщення (кут повороту), то одиничним навантаженням буде зосереджений момент $\bar{M} = 1$.

Якщо крім механічного до системи прикладено і температурне навантаження, то інтеграл Мора має вигляд:

$$\Delta = \sum \int_{\ell} \bar{N}_x \ell_x dx + \int_{\ell} \bar{M}_z \theta_x dx + \int_{\ell} \bar{M}_y \theta_y dx + \int_{\ell} E dF, \quad (14.12)$$

де ℓ_x – відносна лінійна деформація системи;

θ_x – відносна кутова деформація в площі xz ;

θ_y – відносна кутова деформація або зміна кривизни стержня в площі yx ;

потрібно визначити переміщення (узагальнено) будь-якої точки в напрямі 1. Введемо допоміжний етап: задану систему, навантажимо лише однією одиничною (узагальненою) силою $\bar{P} = 1$, прикладеною в тій точці, де ми маємо знайти переміщення Δ_{1P} . Зусилля в допоміжному стані спричинені цією силою позначимо як силові фактори від одиничного навантаження $\bar{M}_1, \bar{Q}_1, \bar{N}_1$.

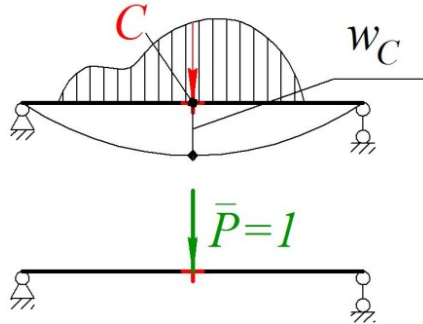


Рисунок 14.2 – Основна та допоміжна схеми навантаження балки

Відповідно до теореми про взаємність переміщень **потенціальна енергія деформації** дорівнює:

$$U_{1-2} = 1 \cdot w_C, \quad (14.9)$$

тобто дорівнює роботі сили по переміщенню точки з одного стану в інший стан.

Прогин в точці C буде дорівнювати

$$w_C = \int_l \frac{M_P \cdot \bar{M}_1 \cdot dx}{EJ_z}. \quad (14.10)$$

В загальному випадку навантаження системи **переміщення по методу Мора** можна визначити по формулі:

дії згинального моменту мають особливу форму перерізу, при якій посилені частини, найбільш віддалені від нейтральної осі. В цілому ці перерізи нагадують дошку, поставлену на ребро. Таким чином, в техніці, в разі сталевих балок прийшли до стандартних перерізів прокатного профілю типу двотавра або швелера.

Круглі порожністі перерізи також ефективні при роботі деталей на згинання. Цим пояснюється все більш широке застосування цих перерізів для деталей, що обертаються і при цьому піддаються також згинаючим зусиллям (наприклад, для осей залізничних вагонів).

11.5 Контрольні запитання

1. Який вид конструкції називають балками?
2. На які три типи діляться опори балок?
3. Види балок.
4. Що називається консоллю?
5. Що називається інтенсивністю розподіленого навантаження?
6. Що називається плоским чистим згинанням?
7. Що називається плоским поперечним згинанням?
8. Які існують залежності між інтенсивністю розподіленого навантаження, згинаючим моментом і поперечною силою?
9. Правила знаків при згинанні.
10. Для чого будуються епюри згинальних моментів і поперечних сил?
11. Як проходить нейтральна лінія при згинанні?
12. Принцип вибору раціонального перерізу.
13. Формула Журавського.
14. Умова міцності при згинанні по нормальним напруженням.
15. Умова міцності при згинанні по дотичним напруженням.

12. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕННЯ БАЛКИ

12.1 Диференційне рівняння зігнутої осі балки

Працюючи на згинання елементи будівельних і машинобудівних конструкцій в багатьох випадках повинні бути розраховані не тільки на міцність, але і на жорсткість. При цьому найчастіше буває, що необхідні розміри поперечного перерізу бруса (балки), отримані з розрахунку на жорсткість, є більшими, ніж отримані за умовою міцності.

Під розрахунком на жорсткість ми розуміємо оцінку пружної податливості балки під дією прикладеного навантаження та добір таких розмірів поперечного перерізу, при яких переміщення не буде перевищувати встановлених нормами меж.

Викривлену вісь балки називають **зігнутою віссю** або **пружною лінією**, а переміщення центра ваги – **прогином балки** в даному перерізі і позначають буквою w .

Кривизна зігнутої осі балки в загальному випадку має вигляд (11.14):

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{M_x}{EJ_x}$$

З курсу аналітичної геометрії відомо таке рівняння кривизни плоскої кривої:

$$\frac{1}{\rho_x} = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 \mp \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]}.$$

Прирівняємо праві частини цих рівнянь. Значення додатка $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2$ в багато разів менше, ніж одиниця і тому нею можна знехтувати. Тоді одержимо основне **диференційне рівняння**

фіктивну силу, слід взяти від його похідну за фіктивною силою і в одержаному виразі для переміщення застосувати **фіктивне навантаження**, яке дорівнює нулю. Не дивлячись на складність даного способу і наявність інших способів, теорема Кастіліано застосовується для визначення переміщень в нестержневих системах (пластинках, оболонках і деталях, усі три вимірювання яких мають один порядок).

Спосіб Кастіліано також зручно використовувати у випадках, коли необхідно визначити переміщення в точці прикладання сили.

14.3 Визначення переміщень по методу Мора

Визначення переміщень за допомогою теореми Кастіліано має очевидний недолік, вона дає можливість визначити переміщення тільки точок прикладання сил і лише у напрямку дії цих сил. На практиці часто виникає необхідність визначити переміщення будь-яких точок системи в будь-якому напрямку.

Метод Максвелла–Мора визначення переміщень є універсальним методом, справедливим, на відміну розглянутого вище аналітичного способу, як для балок, так і для будь-яких стержневих систем. Даний метод застосовується для обчислення переміщень довільно навантажених брусів з будь-якою формою поперечного перерізу як з прямою, так і з кривою віссю.

Якщо необхідно визначити переміщення в точці, де не прикладені зовнішні сили, ми самі прикладаємо в цій точці зовнішню фіктивну силу \bar{P} в напрямку, що цікавить нас. Далі, складаємо вираз потенціальної енергії системи з урахуванням фіктивної сили. Знаходимо переміщення даної точки в напрямку, що нас цікавить, тобто за напрямком прикладеної сили \bar{P} . Тепер залишається «пригадати», що насправді сили немає. Таким чином, визначається шукане переміщення.

Розглянемо балку навантажену заданими силами. Зусилля в довільному перерізі позначимо через M_P , Q_P , N_P . Нехай

14.2 Теорема про взаємність робіт і переміщень (теорема Кастіліано)

К. Кастіліано⁹ запропонував метод визначення переміщення, заснований на визначенні потенціальної енергії деформації.

Отримані ним результати можна трактувати ширше: **переміщення точки прикладання узагальненої сили за напрямком її дії дорівнює частковій похідній від потенціальної енергії деформації за цією силою:**



$$\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P}, \quad (14.8)$$

де Δ_P – повне переміщення (лінійне переміщення або кут повороту) від узагальненої сили;

P – узагальнена сила (сила або момент пари сил).

Рисунок 14.1 – Портрет К. Кастіліано

Даний висновок носить назву **теорема Кастіліано**, яка була опублікована в 1875 році.

Згідно зі способом, запропонованим Кастіліано, щоб визначити лінійне або кутове переміщення в точці, де за умовою задачі сила відсутня, в цій точці слід прикласти відповідну фіктивну узагальнену силу. Далі, написавши вираз для потенціальної енергії від системи сил, включаючи вказану

пружної лінії балки (для малих деформацій):

$$\frac{dw^2}{dx^2} = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (12.1)$$

За допомогою рівняння (12.1) можна обчислювати лінійні та кутові переміщення в балках за будь-яких умов навантаження.

Проінтегрувавши рівняння (12.1) перший раз, матимемо вираз для кута повороту θ_x :

$$\theta_x = \frac{dw}{dx} = \int \frac{M(x)}{EJ_x} dx + C, \quad (12.2)$$

який має одну довільну сталу C .

Інтегруючи це рівняння другий раз знаходимо вираз для прогину $w(x)$

$$w(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EJ_x} dx + C(x) + D, \quad (12.3)$$

де C, D – сталі інтегрування.

Значення цих сталих визначають з умов закріплення балок:

а) якщо балка має на кінці закріплення (Рис. 12.1), то прогин та кут повороту в ньому дорівнюють нулю:

$$w_A = 0; \theta_A = 0;$$

б) для балки на двох шарнірних опорах прогини на цих опорах дорівнюють нулю.

Зауважимо, що якщо задано розподілене навантаження $q(x)$ рівняння пружної лінії можна записати у вигляді:

⁹ Карло Альберто Кастіліано (1747–1844), італійський механік і інженер. Знайшов вираження пружної енергії для стрижнів, що піддаються різним видам деформації, і використовував їх для вирішення статично невизначених задач для балок і арок.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ_x \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] = q(x). \quad (12.4)$$

Цей метод корисно використовувати, коли балка має одну ділянку.

Зауважимо, що якщо балка має дві або більше ділянок (n), то необхідно складати диференційні рівняння для кожної ділянки і кількість сталих буде в два або в $2n$ разів більше.

Приклад 12.1. Визначити прогин і кут повороту кінця консолі т. А. В точці А балка навантажена зосередженою силою P (Рис. 12.1).

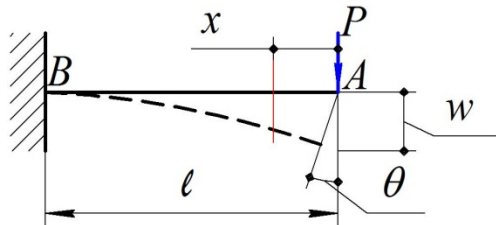


Рисунок 12.1 – Визначення переміщення балки

Запишемо диференційне рівняння пружної лінії балки і проінтегруємо його два рази:

$$EJ_z \frac{d^2 w}{dx^2} = M_z = -Px;$$

$$1) \quad EJ_z \frac{dw}{dx} = \theta(x) = \int_0^l (-Px) dx = -\frac{Px^2}{2} + C;$$

$$2) \quad EJ_z w = \int_0^l \left(-\frac{Px^2}{2} + C \right) dx = -\frac{Px^3}{2 \cdot 3} + Cx + D.$$

Значення сталих C і D визначимо з умов закріплення балки:

При $x = 0$ $\theta(x) = 0$; $w = 0$; $C = 0$; $D = 0$.

Таблиця 14.1 – Потенціальна енергія для простих видів навантаження

Розтягання-стискання	$U = \int_{\ell} \frac{N^2 d\ell}{2EF}. \quad (14.2)$
Чистий зсув	$U = \int_{\ell} \frac{Q^2 dx}{2GF}. \quad (14.3)$
Кручення	$U_{кр} = \int_{\ell} \frac{M_{кр}^2 d\varphi}{2GJ_{\rho}}. \quad (14.4)$
Чисте згинання	$U_{згин} = \int_{\ell} \frac{M^2 d\varphi}{2EJ_z}. \quad (14.5)$
Згинання пружини	$U_{згин.пруж.} = \int_{\ell} \frac{2P^2 R^3 n}{Gr^4}. \quad (14.6)$

Замінюючи в цьому виразі величини U_p і U чисельно рівними ним значеннями A_p і $-A$, одержуємо інше формулювання цього закону

$$A_p = -A. \quad (14.6)$$

З рівняння (14.1) виходить, що потенціальна енергія деформації U чисельно рівна роботі зовнішніх сил A_p , виконаній ними при цій деформації, тобто

$$U = A_p. \quad (14.7)$$

Баланс енергії має вигляд

$$A = U + K.$$

Якщо навантаження проводиться поволі, і швидкість переміщення мас тіла буде вельми малою, то можна вважати $K = 0$. Такий процес навантаження можна вважати статичним. Тіло у будь-який момент часу знаходиться в стані рівноваги. У цьому випадку $A = U$ вся робота зовнішніх сил переходить в потенціальну енергію деформації.

При розвантаженні тіла його внутрішні сили виконують роботу за рахунок потенціальної енергії деформації тіла. Таким чином, пружне тіло є «акумулятором» енергії (наприклад, пружина годинникового механізму, ресора і т.д.).

Таким чином, можна сказати, що повне перетворення одного виду енергії на інший має місце, якщо деформація відбувається без порушення рівноваги системи. Мірою енергії, що перетворилася на інший вид, є величина роботи, проведеної силами, що діють на конструкцію.

Позначимо величину накопиченої потенціальної енергії через U , а зменшення потенціальної енергії зовнішніх навантажень через U_p . Тоді величина U_p вимірюється позитивною роботою цих навантажень A_p . З іншого боку, накопиченню потенціальної енергії деформації відповідає негативна робота внутрішніх сил ($-A$), оскільки переміщення точок тіла при деформації відбуваються у зворотному до внутрішніх сил напрямку.

Закон збереження енергії при деформації пружних систем набуває вигляду

$$U_p = U. \quad (14.1)$$

При $x = \ell$

$$\theta(x) = -\frac{Px^2}{2} + C;$$

де

$$C = +\frac{P\ell^2}{2}; \quad D = -\frac{P\ell^3}{3}.$$

Тоді кут повороту в будь-якому перерізі можна обчислити з рівняння:

$$EJ_z\theta(x) = -\frac{Px^2}{2} + \frac{P\ell^2}{2},$$

а прогин в будь-якому перерізі з рівняння

$$EJ_z w = -\frac{Px^3}{6} + \frac{P\ell^2}{2}x - \frac{P\ell^3}{3}.$$

При $x = 0$, тобто в точці A .

$$\theta_A(\ell) = -\frac{P\ell^2}{2EJ_z}; \quad w_A = -\frac{P\ell^3}{3EJ_z}.$$

При $x = \ell$

$$\theta_B(x) = 0; \quad w_B = 0.$$

Правило знаків: w – вверх (+); вниз (-)

φ – по годинниковій стрілці (-); проти (+)

Як видно з наведеного прикладу, довільна стала при інтегруванні рівнянь є не що інше, як кут повороту і прогин перерізу на початку ділянки.

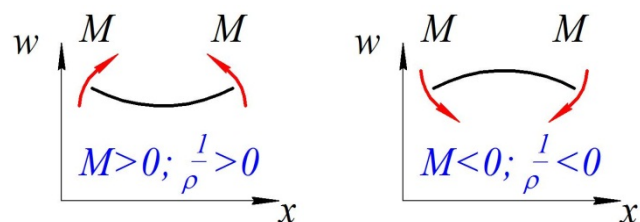


Рисунок 12.2 – Правило знаків в балці при згинанні

12.2 Метод початкових параметрів

Розглянемо балку, на яку діють основні типи навантажень. Напрямок навантажень вибрано таким чином, щоб згинальні моменти в перерізах балки були додатними (Рис. 12.3, а).

Щоб звести кількість сталих інтегрування до двох, необхідно, щоб стали на всіх ділянках балки при інтегруванні рівняння пружної лінії були однаковими. Це можливо за умов, що на кожній ділянці вирази для згинальних моментів містять всі члени, які входили до виразів на попередній ділянці, а додаткові члени, що з'явилися на цій ділянці, зникатимуть на спільній границі з попередньою. Такі умови можна забезпечити, якщо записувати диференціальні рівняння пружної лінії балки, дотримуючись певного алгоритму:

1. Початок координат завжди обирають у крайньому лівому перерізі на осі балки. В цій системі складають вирази для згинальних моментів на кожній ділянці.

2. Вирази для згинальних моментів завжди отримують з умов рівноваги для лівої частини балки. Тобто ці вирази мають включати навантаження, прикладені до балки зліва від перерізу.

14. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Одним з найважливіших завдань опору матеріалів є оцінка жорсткості конструкції, тобто ступеня її деформації під дією навантажень, в'язів, зміни температури. Для вирішення вказаного завдання необхідно вміти визначати переміщення (лінійні та кутові) пружної системи (балки, рами, криволінійного стрижня, ферми і т.д.), навантаженої довільним чином.

Вирішення поставленої задачі необхідне не тільки для з'ясування величини самих переміщень і оцінки жорсткості конструкції. На основі визначення переміщень створюються загальні методи визначення внутрішніх силових факторів в статично невизначуваних системах.

Визначення переміщень необхідне також при дослідженні питань коливань пружних систем.

14.1 Поняття про потенціальну енергію деформації

Методи визначення переміщення засновані на двох основних принципах механіки: на **принципі можливих переміщень і на законі збереження енергії**.

Згідно до **закону збереження енергії**, робота зовнішніх сил не зникає, а трансформується в потенціальну енергію, що накопичується в пружному тілі. Отже, величина накопиченої потенціальної енергії деформації визначається величиною роботи зовнішніх сил. Ця енергія виявляється у вигляді роботи, що здійснюється при розвантаженні внутрішніми силами.

Розглянемо процес деформації пружного тіла з енергетичної точки зору. Зовнішні сили, прикладені до пружного тіла, здійснюють певну роботу. Позначимо її через A . Ця робота частково переходить в потенціальну енергію U деформації тіла, а частково йде на надання швидкості масі тіла, тобто перетворюється на кінетичну енергію K .

Опорний момент перерізу та площа поперечного перерізу дорівнюють

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{16 \cdot 30^2}{6} = 2400 \text{ см}^3; \quad F = 16 \cdot 30 = 480 \text{ см}^2.$$

Найбільші стискаючі напруження (в верхніх волокнах балки, в перерізі зліва від сили дорівнюють

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{P \sin 30^\circ}{F} - \frac{M_{max}}{W} = -\frac{2500}{2 \cdot 480} - \frac{187500}{2400} = \\ &= -2,6 - 78,1 = -80,7 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}. \end{aligned}$$

13.8 Контрольні запитання

1. Що називається складним опором?
2. В якому випадку згинання називається косим?
3. Що таке тензор напружень?
4. Який вид навантаження називається позацентровим розтяганням або стисканням?
5. Чи проходить нейтральна лінія при косому згинанні через центр ваги поперечного перерізу?
6. У яких випадках необхідно визначати ядро перерізу?
7. Який силові чинники виникають при згинанні з крученням?
8. Умова міцності при косому згинанні.
9. Умова міцності при згинанні з розтяганням.
10. Визначення напружень в небезпечних кутових точках.
11. Умова міцності при позацентровому розтяганні-стисканні.
12. Умова міцності при згинанні з крученням (III та IV теорії міцності).
13. Умова міцності при поздовжньо-поперечному згинанні.

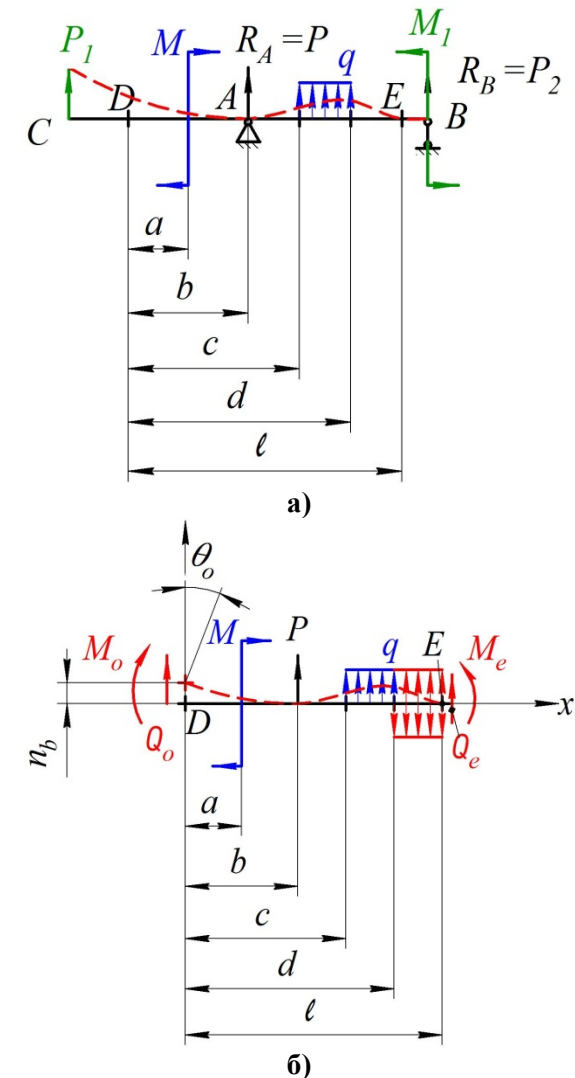


Рисунок 12.3 – Схема навантаження балки а) та розрахункова схема до методу початкових параметрів б)

3. Якщо на ліву частину балки діє зосереджений момент M , то в рівнянні його слід представити у вигляді добутку

$M(x - a)^0$, де $(x - a)^0 = 1$. Тут a – абсциса точки прикладання моменту M (див. рис. 12.3).

4. Коли розподілене навантаження не доходить до кінця балки, його слід продовжити, прикладаючи на цій ділянці компенсуючи розподілене навантаження протилежного знаку. Ці додаткові розподілені навантаження на рис. 12.3, б) виділено червоним.

5. Інтегрують отримані диференціальні рівняння пружної лінії на ділянках балки, не розкриваючи дужок.

Розглянемо частину балки довжиною ℓ , обмежену перерізами D і E (Рис. 12.3, б). Помістимо початок координат в точку D і складемо вирази для згинальних моментів на кожній ділянці.

Ділянка I:

$$M(x) = M_0 + Q_0x.$$

Ділянка II:

$$M(x) = M_0 + Q_0x + M(x - a)^0.$$

Ділянка III:

$$M(x) = M_0 + Q_0x + M(x - a)^0 + P(x - b).$$

Ділянка IV:

$$M(x) = M_0 + Q_0x + M(x - a)^0 + P(x - b) + q \frac{(x - c)^2}{2}.$$

Ділянка V:

$$M(x) = M_0 + Q_0x + M(x - a)^0 + P(x - b) + q \frac{(x - c)^2}{2} - q \frac{(x - d)^2}{2}.$$

На кожній наступній ділянці до виразів моментів попередньої ділянки додаються нові діючі навантаження. Вирази для моментів на границях кожної теперішньої і наступної ділянки будуть однаковими. Наприклад, на границі ділянок II і III ($x = b$), отримаємо

$$M_{II} = M_{III} = M_0 + Q_0x + M(x - a)^0.$$

$$\sigma_{max} = \pm \left[\frac{N}{F} \pm \frac{M_{max}}{W} \right] \leq [\sigma]. \quad (13.31)$$

При складанні формули (13.31) припустимо, що переріз симетричний від нейтральної вісі та матеріал чинить однаковий опір розтягання та стисканню (гіпотези опору матеріалів).

Такий розрахунок використовується при дії на балку нахилених сил (Рис. 13.21). Таку силу розкладають на нормальну до осі, згинаючу балку та поздовжню, стискаючу або розтягуючу балку.

Приклад 13.1

Нахилена балка (Рис. 13.21) навантажена посередині силою $P = 2,5$ т., $\ell = 3$ м. Знайти найбільше стискаюче напруження в балці.

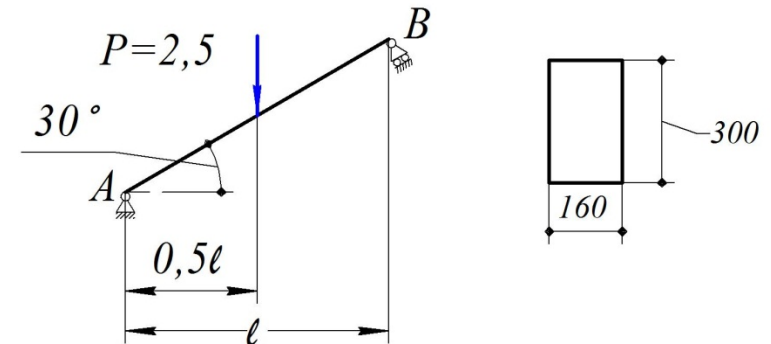


Рисунок 13.21 – До прикладу 13.1

Верхня половина балки тільки згинається; нижня половина згинається та стискається. Згинання викликає сила $P \cos 30^\circ$, а стискання – сила $P \sin 30^\circ$. Найбільший згинаючий момент дорівнює

$$M_{max} = \frac{P \cos 30^\circ \left(\frac{\ell}{\cos 30^\circ} \right)}{4} = \frac{P \ell}{4} = \frac{2,5 \cdot 3}{4} = 1,875 \text{ т} \cdot \text{м},$$

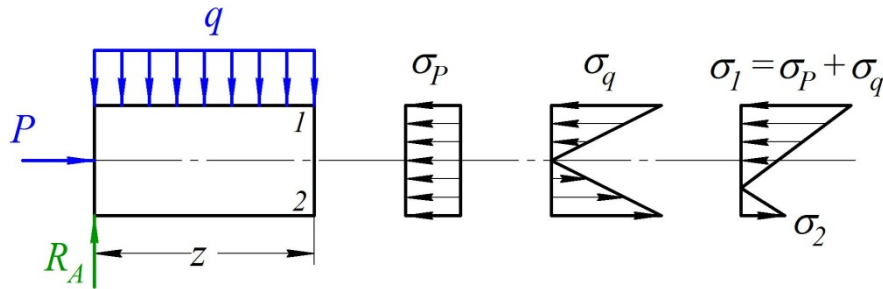


Рисунок 13.20 – Епюри розподілення напружень в розглянутому перерізі

Так як напруження від сил P в усіх перерізах однакові та рівномірно розподілені, то небезпечними будуть волокна, найбільш напружені від згинання. Такими є крайні волокна в перерізі з найбільшим згинаючим моментом для них:

$$\sigma_{q \max} = \pm \frac{M_{\max}}{W}.$$

Таким чином, напруження в крайніх волокнах 1 та 2 (Рис. 13.20) для середнього перерізу балки виражаються формулою:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = -\frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}, \quad (13.29)$$

та **розраховане напруження** буде дорівнювати

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_1| = \left| \frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W} \right|. \quad (13.30)$$

Якщо б сили P були розтягуючими, то знак першого доданку змінився б, небезпечними стануть нижні волокна балки.

Позначимо буквою N стискаючу або розтягуючу силу, та запишемо **загальну формулу для перевірки міцності**

Складемо диференціальні рівняння пружної лінії на кожній ділянці, починаючи з першої.

Ділянка I:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ_z} [M_0 + Q_0 x]. \quad (12.5)$$

Інтегруючи отримане рівняння двічі, отримуємо:

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EJ_z} \left[M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 \right]. \quad (12.6)$$

$$\begin{aligned} w(x) &= EJ_z \frac{dw(x)}{dx} = \\ &= \frac{1}{EJ_z} \left[M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 x + D_1 \right]. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Ділянка II:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ_z} [M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0]. \quad (12.8)$$

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EJ_z} \left[M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x-a) + C_{II} \right]. \quad (12.9)$$

$$w(x) = \frac{1}{EJ_z} \left[M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + C_{II} x + D_{II} \right]. \quad (12.10)$$

Ділянка III:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ_z} [M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0 + F(x-b)]. \quad (12.11)$$

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EJ_z} [M_0x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x-a) + P \frac{(x-b)^2}{2} + C_{III}], \quad (12.12)$$

$$w(x) = \frac{1}{EJ_z} [M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + P \frac{(x-b)^2}{2} + C_{III}x + D_{III}] \quad (12.13)$$

Ділянка IV:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ_z} [M_0 + Q_0x + M(x-a)^0 + P(x-b) + q \frac{(x-c)^2}{2}], \quad (12.14)$$

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EJ_z} [M_0x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x-a) + P \frac{(x-b)^2}{2} + q \frac{(x-c)^3}{6} + C_{IV}], \quad (12.15)$$

$$w(x) = \frac{1}{EJ_z} [M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + P \frac{(x-b)^3}{6} + q \frac{(x-c)^4}{24} + C_{IV}x + D_{IV}] \quad (12.16)$$

Поклавши $x = d$ для сусідніх ділянок IV і V отримаємо:

Стискаючи напруження σ_P від сил P рівномірно розподілені по площині F поперечного перерізу та однакові для усіх перерізів:

$$\sigma_P = -\frac{P}{F};$$

нормальні напруження від згинання в вертикальній площині в перерізі з абсцисою x , яка відраховується від лівого кінця балки та виражається формулою:

$$\sigma_q = \frac{M(x)_z}{J_y}.$$

Таким чином, повне напруження в точці з координатою x (рахуємо від нейтральної осі) для цього перерізу дорівнює:

$$\sigma = \sigma_P + \sigma_q = -\frac{P}{F} + \frac{M(x)_z}{J_y}.$$

На рис. 13.20 зображені епюри розподілення напружень в розглянутому перерізі від сил P , навантаження q та сумарна епюра.

Найбільше напруження в цьому перерізі буде в верхніх волокнах, де обидва види деформації викликають стискання; в нижніх волокнах може бути стискання або розтягання в залежності від чисельних величин напружень σ_P та σ_q . Для складання умови міцності треба знайти найбільше нормальне напруження.

Звідки полярний момент інерції:

$$J_p \geq \frac{M_{\text{пр}}}{G[\theta]}.$$

Оскільки для суцільних круглих перерізів $J_p = 0,1D^4$, то

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{M_{\text{кр}}}{0,1G[\theta]}}.$$

13.7 Повздожньо-поперечне згинання

На практиці часто зустрічаються випадки сумісної роботи стержня на згинання та на розтягання або стискання. Такого роду деформація може бути викликана сумісною дією на балку поздовжніх та поперечних сил, або тільки поздовжніми силами.

Перший випадок зображений на рис. 13.19. На балку АВ діють рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю q та поздовжні стискаючі сили P . Припустимо, що прогинами балки у порівнянні з розмірами поперечного перерізу можна знехтувати; тоді з достатнім для практики ступенем точності $\pm 5\%$ можливо вважати, що і після деформації сили P будуть викликати лише осьове стискання балки.

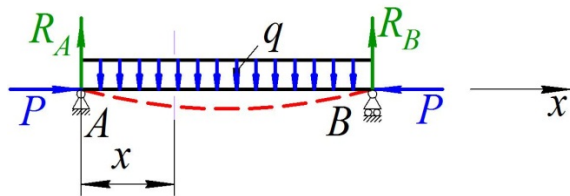


Рисунок 13.19 – Балка одночасно навантажена розподіленим навантаженням q та поздовжніми стискаючими силами P

Користуючись принципом суперпозицій, ми можемо знайти нормальне напруження в кожній точці будь якого поперечного перерізу балки як алгебраїчну суму напружень, які визвано силами P і навантаженням q .

$$\theta_{IV}|_{x=d} = \frac{1}{EJ_z} [M_0 d + Q_0 \frac{d^2}{2} + M(d-a) + P \frac{(d-b)^2}{2} + q \frac{(d-c)^3}{6} + C_{IV}] =$$

$$\theta_{V}|_{x=d} = \frac{1}{EJ_z} [M_0 d + Q_0 \frac{d^2}{2} + M(d-a) + P \frac{(d-b)^2}{2} + q \frac{(d-c)^3}{6} - q \frac{(d-d)^3}{6} + C_V].$$

Звідси отримаємо

$$C_{IV} = C_V. \quad (12.17)$$

$$w_{IV}|_{x=d} = \frac{1}{EJ_z} [M_0 \frac{d^2}{2} + Q_0 \frac{d^3}{6} + M \frac{(d-a)^2}{2} + P \frac{(d-b)^3}{6} + q \frac{(d-c)^4}{24} + C_{IV} d + D_{IV}] =$$

$$w_{V}|_{x=d} = \frac{1}{EJ_z} [M_0 \frac{d^2}{2} + Q_0 \frac{d^3}{6} + M \frac{(d-a)^2}{2} + P \frac{(d-b)^3}{6} + q \frac{(d-c)^4}{24} + C_V d + D_V].$$

Звідси, з урахуванням (12.6),

$$D_{IV} = D_V. \quad (12.18)$$

Провівши подібні операції для границь інших ділянок, переконаємось в рівності відповідних довільних сталих інтегрування на всіх ділянках:

$$C_I = C_{II} = C_{III} = C_{IV} = C_V \quad (12.19)$$

$$D_I = D_{II} = D_{III} = D_{IV} = D_V \quad (12.20)$$

Сталі C і D знайдемо з рівнянь (12.5) і (12.6), поклавши: $x=0$:

$$\theta|_{x=0} = \theta_0 = \frac{C}{EJ_z}, \quad w|_{x=0} = w_0 = \frac{D}{EJ_z} \quad (12.21)$$

Тобто, сталі інтегрування C і D пропорційні куту повороту та прогину на початку координат.

В загальному випадку рівняння для прогинів і кутів повороту можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} w(x) = & w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ_z} \left[M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \right. \\ & + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum F \frac{(x-b)^3}{3!} + \\ & \left. + \sum q \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q \frac{(x-d)^4}{4!} \right] \quad (12.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(x) = & \theta_0 + \frac{1}{EJ_z} \left[M_0 \frac{x^2}{1!} + Q_0 \frac{x^3}{2!} + \sum M \frac{(x-a)^2}{1!} + \right. \\ & \left. + \sum F \frac{(x-b)^3}{2!} + \sum q \frac{(x-c)^4}{3!} - \sum q \frac{(x-d)^4}{3!} \right] \quad (12.23) \end{aligned}$$

$$W_\rho \leq \frac{M_{\text{пр}}}{[\tau]}, \text{ де } [\tau] = (0,5 \dots 0,6)[\sigma].$$

Для суцільного перерізу $W_\rho = 0,2D^3$.

Звідки

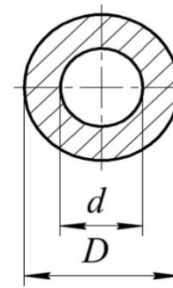
$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{кр}}}{0,2[\tau]}}$$

Для порожнистого валу треба пам'ятати, що, задаючись відношенням

$$\frac{d}{D} = \alpha$$

(Рис.13.18), можна одержати

$$W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = 0,2D^3 (1 - \alpha^4).$$



Підставляючи вираз W_ρ у формулу для D , отримаємо:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{кр}}}{0,2[\tau](1 - \alpha^4)}}$$

Рисунок 13.18 – Переріз порожнистого валу

За умовою жорсткості **максимальний відносний кут закручування** не повинен перевищувати допустимий, тобто:

$$\theta_{\text{max}} = \frac{M_{\text{пр}}}{GJ_\rho} \leq [\theta].$$

де наведені моменти, еквівалентні дії трьох моментів, дорівнюють

$$M_{\text{пр}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{згин}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_{\text{кр}}^2} \quad (13.27)$$

або

$$M_{\text{пр}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{згин}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2} \quad (13.28)$$

Маючи умову міцності, можна здійснювати **проектувальний розрахунок або підбір перерізу вала:**

$$W \leq \frac{M_{\text{пр}}}{[\sigma]}$$

Оскільки

$$W = \frac{\pi d^3}{3r} = 0,1d^3$$

одержуємо

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{пр}}}{0,1[\sigma]}}$$

13.6 Розрахунки на міцність і жорсткість валів при згинанні з крученням

За умовою міцності, найбільші дотичні напруження не повинні перевищувати допустимі, тобто

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{пр}}}{W_{\rho}} \leq [\tau].$$

Звідси при відомому крутильному моменті і допустимому напруженні, можна визначити необхідний момент опору перерізу, а потім і необхідний радіус або діаметр вала, тобто виконати **проектувальний розрахунок:**

Рівняння (12.22) називають узагальненим (універсальним) рівнянням пружної лінії балки, а рівняння (12.23) – узагальненим (універсальним) рівнянням кутів повороту перерізів балки.

Згинальний момент M_0 і поперечну силу Q_0 , які діють в перерізі балки, що збігається з початком координат, називають **статичними початковими параметрами**, а прогин w_0 і кут повороту θ_0 в цьому перерізі – **геометричними початковими параметрами.**

Розглянемо кілька прикладів з визначення переміщень в балках за методом початкових параметрів.

Приклад 12.2.

Для балки, зображеної на рис. 12.4, визначити кути повороту перерізів на опорах A і B та знайти величину найбільшого прогину. Прийняти $P = 20$ кН, $\ell = 1$ м, $a = 0,25$ м. Жорсткість перерізу балки $EJ_z = 12 \cdot 10^{11}$ Н·мм².

Знайдемо опорні реакції.

$$\sum M_{kA} = -P \cdot 0,25 + R_B \cdot 1 = 0; \quad R_B = 20 \cdot 0,25 = 5 \text{ кН};$$

$$\sum M_{kB} = P \cdot 0,75 - R_A \cdot 1 = 0; \quad R_A = 20 \cdot 0,75 = 15 \text{ кН}.$$

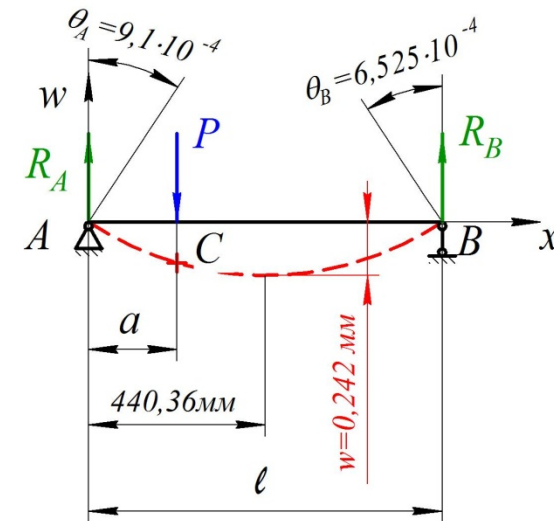


Рисунок 12.4 – До прикладу 12.2

Перевірка:

$$\sum y_k = R_A - P + R_B = 15 - 20 + 5 = 0;$$

Універсальне рівняння пружної лінії:

$$w(x) = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ_z} \left[R_A \frac{x^3}{3!} - P \frac{(x-a)^3}{3!} \right].$$

Універсальне рівняння кутів повороту перерізів:

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EJ_z} \left[R_A \frac{x^2}{2!} - P \frac{(x-a)^2}{2!} \right].$$

Початкові геометричні параметри:

$$w_0 = w_A = 0;$$

θ_0 знайдемо з умови, що при $x = \ell$

$$\begin{aligned} w_B &= \theta_0 \ell + \frac{1}{EJ_z} \left[R_A \frac{\ell^3}{3!} - P \frac{(\ell-a)^3}{3!} \right] = \\ &= \theta_0 \cdot 10^3 + \frac{10^{12}}{12 \cdot 10^{11}} \left[\frac{15}{6} - \frac{20 \cdot 0,422}{6} \right] = 0. \end{aligned}$$

Звідси

$$\theta_0 = -9,1 \cdot 10^{-4}.$$

Отже кути повороту перерізів на опорах:

$$\theta_A = \theta_0 = -9,1 \cdot 10^{-4}.$$

$$\theta_B = \theta_0 + \frac{1}{EJ_z} \left[R_A \frac{\ell^2}{2!} - P \frac{(\ell-a)^2}{2!} \right] =$$

$$= -9,1 \cdot 10^{-4} + \frac{10^{12}}{12 \cdot 10^{11}} \left[\frac{15}{2} - \frac{20 \cdot 0,5625}{2} \right] = 6,525 \cdot 10^{-4}.$$

Запишемо напруження σ і $\tau_{кр}$ через згинальні і крутильні моменти:

$$\sigma_{згин} = \frac{M_{згин}}{W}; \quad \tau_{кр} = \frac{M_{кр}}{W_\rho} = \frac{M_{кр}}{2W}.$$

Підставивши їх в теорії міцності, одержимо за третьою теорією міцності:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\frac{M_{згин}^2}{W^2} + 4 \frac{M_{кр}^2}{(2W)^2}} \leq [\sigma].$$

Звідки

$$\sigma_{екв}^{III} = \frac{\sqrt{M_{згин}^2 + M_{кр}^2}}{W} \leq [\sigma]. \quad (13.24)$$

За четвертою теорією міцності (енергетичній)

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\frac{M_{згин}^2}{W^2} + 3 \frac{M_{кр}^2}{(2W)^2}} \leq [\sigma];$$

або

$$\sigma_{екв}^{IV} = \frac{\sqrt{M_{згин}^2 + 0,75M_{кр}^2}}{W} \leq [\sigma]. \quad (13.25)$$

Формули (13.24) і (13.25) за своєю структурою абсолютно співпадають з формулою (13.22'), тому перевірка міцності круглого вала на сумісну дію кручення і згинання може бути записана у вигляді:

$$\sigma = \frac{M_{пр}}{W} \leq [\sigma], \quad (13.26)$$

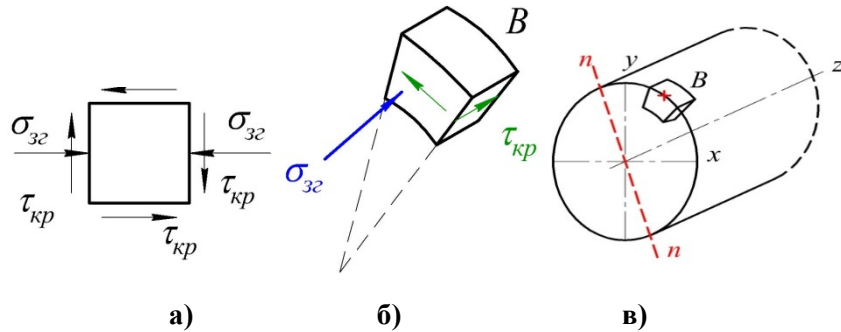


Рисунок 13.17 – Напруження біля небезпечної точки

Тому тут головні напруження треба визначати за тими ж формулами, що і при згинанні:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \frac{1}{2} \left[\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right].$$

Різниця між формулами для поперечного згинання і згинання з крученням лише в тому, що в останньому випадку дотичні напруження, викликані крутильним моментом, а при згинанні – поперечною силою. Для перевірки міцності вала ми повинні визначити еквівалентні (приведені) напруження за відповідною теорією міцності і порівняти їх з допустимими. У зв'язку з тим, що вали зазвичай виготовляються з пластичних матеріалів, можна використовувати третю і четверту теорії міцності.

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} &= \sqrt{\sigma_{\text{згин}}^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2} \leq [\sigma]; \\ \sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} &= \sqrt{\sigma_{\text{згин}}^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2} \leq [\sigma]. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Найбільший прогин, згідно з диференціальною залежністю між переміщеннями при згинанні

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx},$$

буде там, де кут повороту перерізу дорівнюватиме нулю. Знайдемо абсцису екстремуму прогину з умови:

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EJ_z} \left[R_A \frac{x^2}{2!} - P \frac{(x-a)^2}{2!} \right] = 0;$$

$$\begin{aligned} \theta_B &= \theta_0 + \frac{1}{EJ_z} \left[R_A \frac{\ell^2}{2!} - P \frac{(\ell-a)^2}{2!} \right] = \\ -9,1 \cdot 10^{-4} + \frac{10^3}{12 \cdot 10^{11}} \left[15 \frac{x^2}{2} - 20 \frac{(x-250)^2}{2} \right] &= 0, \\ x^2 - 1000x + 698680 &= 0. \end{aligned}$$

Звідси $x=440,36$ мм.

$$\begin{aligned} w_{\text{max}} &= -9,1 \cdot 10^{-4} \cdot 440,36 + \\ + \frac{10^3}{12 \cdot 10^{11}} \left[\frac{15 \cdot 440,36^3}{6} - \frac{20 \cdot 190,36^3}{6} \right] &= -0,242 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Приклад 12.3.

Знайти прогин і кут повороту перерізу в точці C на осі консольної жорстко защемленої балки в двох варіантах її розташування відносно початку вибраної системи координат (Рис. 12.5).

Варіант 1.

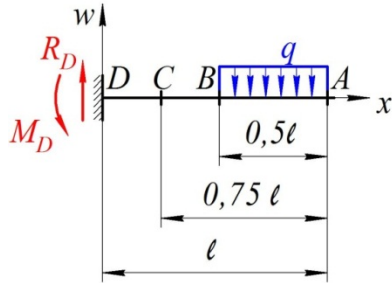


Рисунок 12.5 – До прикладу 12.3 (варіант 1)

Запишемо універсальне рівняння пружної лінії та кутів повороту перерізів для даної балки:

$$w(x) = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ_z} \left[-M_D \frac{x^2}{2!} + R_D \frac{x}{3!} - q \frac{(x - 0,5\ell)^4}{4!} \right];$$

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EJ_z} \left[-M_D \frac{x}{1!} + R_D \frac{x^2}{2!} - q \frac{(x - 0,5\ell)^3}{3!} \right].$$

Геометричні початкові параметри $w_0 = 0$ і $\theta_0 = 0$, оскільки початок координат розміщений в жорсткому защемленні балки. Статичні початкові параметри визначимо з умов рівноваги:

$$R_D = \frac{1}{2} q \ell, M_D = \frac{3}{8} q \ell^2.$$

Тоді прогин і кут повороту перерізу в точці C відповідно дорівнюватимуть:

$$w_C = \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{3}{8} \frac{q \ell^2 \left(\frac{1}{4} \ell\right)^2}{2} + \frac{q \ell}{2} \frac{\left(\frac{1}{4} \ell\right)^3}{6} \right] = -\frac{q \ell^4}{96 EJ_z};$$

знайдені небезпечні точки. Очевидно, небезпечними можуть бути точки A і B (Рис. 13.16) (точки, найбільш віддалені від нейтральної лінії, положення яких легко знайти, оскільки $\varphi = \alpha$, а нейтральна лінія $n - n$ перпендикулярна силовій лінії).

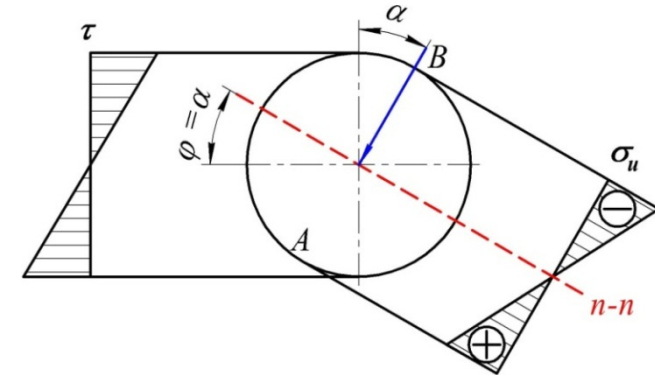


Рисунок 13.16 – Епюра напружень в перерізі вала при згинанні з крученням

Будуємо епюри σ_i від згинального моменту, які змінюються пропорційно відстані точок від нейтральної лінії. У точках A і B нормальні напруження від згинання і дотичні від кручення мають одночасно найбільші значення (τ від згинання в цих точках дорівнює нулю і взагалі $\tau_{зг} \ll \tau_{кр}$).

$$\sigma_{згин} = \frac{M_{згин}}{W} = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W}; \quad \tau_{кр} = \frac{M_{кр}}{W_\rho}. \quad (13.22')$$

Виділимо елементарну частинку матеріалу (Рис. 13.17) навколо найбільш небезпечної точки (наприклад, точки B).

За чотирма гранями діють дотичні напруження, а до двох з них прикладені нормальні напруження, інші дві грані абсолютно вільні від напружень (Рис. 13.17, б). Таким чином, при згинанні з крученням елемент у небезпечній точці знаходиться в плоскому напруженому стані.

Розкладемо навантаження на проекції в горизонтальній і вертикальній площинах і побудуємо епюри згинальних моментів M_z і M_y (див. рис. 13.15, г, е). Маючи ці епюри, можемо для кожного перерізу вала знайти повний згинальний момент $M_{згин}$ (див. рис. 13.15, ж), як геометричну суму обох складових:

$$M_{згин} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

Якщо стержень (вал) **не круглого перерізу**, то для кожного перерізу ми маємо свою площину згинання моменту, але в даному прикладі, оскільки вал має круглий поперечний переріз, у якого моменти опору відносно всіх центральних осей однакові, то без впливу на результати розрахунку ми можемо сумістити площини згинальних моментів для осей перерізів і побудувати сумарну епюру $M_{згин}$, розташовуючи її в площині креслення. Так як сумарний момент в різних перерізах може мати різні напрямки, то навіть за відсутності розподілених навантажень епюра $M_{згин}$, може бути криволінійною.

Для загального випадку це легко показати аналітично. Тоді $M_z = a + by$, $M_y = c + dz$ (де a, b, c і d – постійні коефіцієнти).

$$\text{Тоді } M_{згин} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{(a + bz)^2 + (c + dz)^2}.$$

Вираз, що стоїть під радикалом, лише в деяких випадках є квадратом (наприклад, при $c = d = 0$), а в більшості випадків епюра криволінійна. Величини згинального моменту $M_{згин}$, обчислюють лише для перерізів, в яких епюри M_z і M_y змінюють знак на протилежний. Ці величини відкладають по один бік і сполучають увігнутою параболою (див. рис. 13.15, ж). Далі будуємо епюру крутильних моментів $M_{кр}$ (див. рис. 13.15, с) і відшукуємо небезпечні перерізи, що поєднують відносний екстремум $M_{згин}$ і $M_{кр}$. Небезпечними можуть бути перерізи 1, 2 і 3. Тепер в небезпечному перерізі можуть бути

$$\theta_c = \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{3q\ell^2 \left(\frac{1}{4}\ell\right)}{8} + \frac{q\ell \left(\frac{1}{4}\ell\right)^2}{2} \right] = -\frac{5q\ell^3}{64EJ_z}.$$

Варіант 2.

Запишемо універсальне рівняння пружної лінії та кутів повороту перерізів для даної балки з новим розташуванням відносно початку координат:

$$w(x) = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ_z} \left[-q \frac{x^4}{4!} + q \frac{(x - 0,5\ell)^4}{4!} \right];$$

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EJ_z} \left[-q \frac{x^3}{3!} + q \frac{(x - 0,5\ell)^3}{3!} \right].$$

Початкові геометричні параметри знайдемо з граничних умов на опорі D , де будь-які переміщення відсутні:

$$\theta_D|_{x=\ell} = \theta_0 + \frac{1}{EJ_z} \left[-q \frac{\ell^3}{6} + q \frac{(\ell - 0,5\ell)^3}{6} \right] = 0.$$

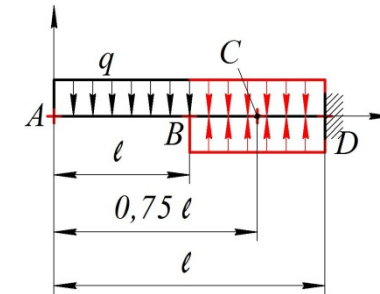


Рисунок 12.6 – До прикладу 12.3 (варіант 2)

Звідси

$$\theta_0 = \theta_A = \frac{7q\ell^3}{48EJ_z}$$

$$\theta_D|_{x=\ell} = w_0 + \frac{7q\ell^3}{48EJ_z} \ell + \frac{1}{EJ_z} \left[-q \frac{\ell^4}{24} + q \frac{(\ell - 0,5\ell)^4}{24} \right] = 0.$$

Звідси

$$w_0 = w_A = -\frac{41q\ell^4}{384EJ_z}$$

Прогин і кут повороту перерізу в точці *C* на осі балки:

$$w_C = -\frac{41q\ell^4}{384EJ_z} + \frac{7q\ell^3}{48EJ_z} \frac{3\ell}{4} + \frac{1}{EJ_z} \left[-q \frac{\frac{3}{4}\ell^4}{24} + q \frac{(\frac{3}{4}\ell - 0,5\ell)^4}{24} \right] =$$

$$= -\frac{q\ell^4}{96EJ_z}$$

$$\theta_C = \frac{7q\ell^3}{48EJ_z} + \frac{1}{EJ_z} \left[-q \frac{\frac{3}{4}\ell^3}{6} + q \frac{(\frac{3}{4}\ell - 0,5\ell)^3}{6} \right] = \frac{5q\ell^3}{64EJ_z}$$

Зауваження. Протилежні знаки кутів повороту перерізу *C*, отриманих за двома варіантами розв'язання задачі, пов'язані з різною орієнтацією балок відносно початку координат: за першим варіантом цей поворот відбувається за годинниковою стрілкою, тобто кут повороту від'ємний, а за другим – проти годинникової стрілки, коли кут повороту вважається додатним.

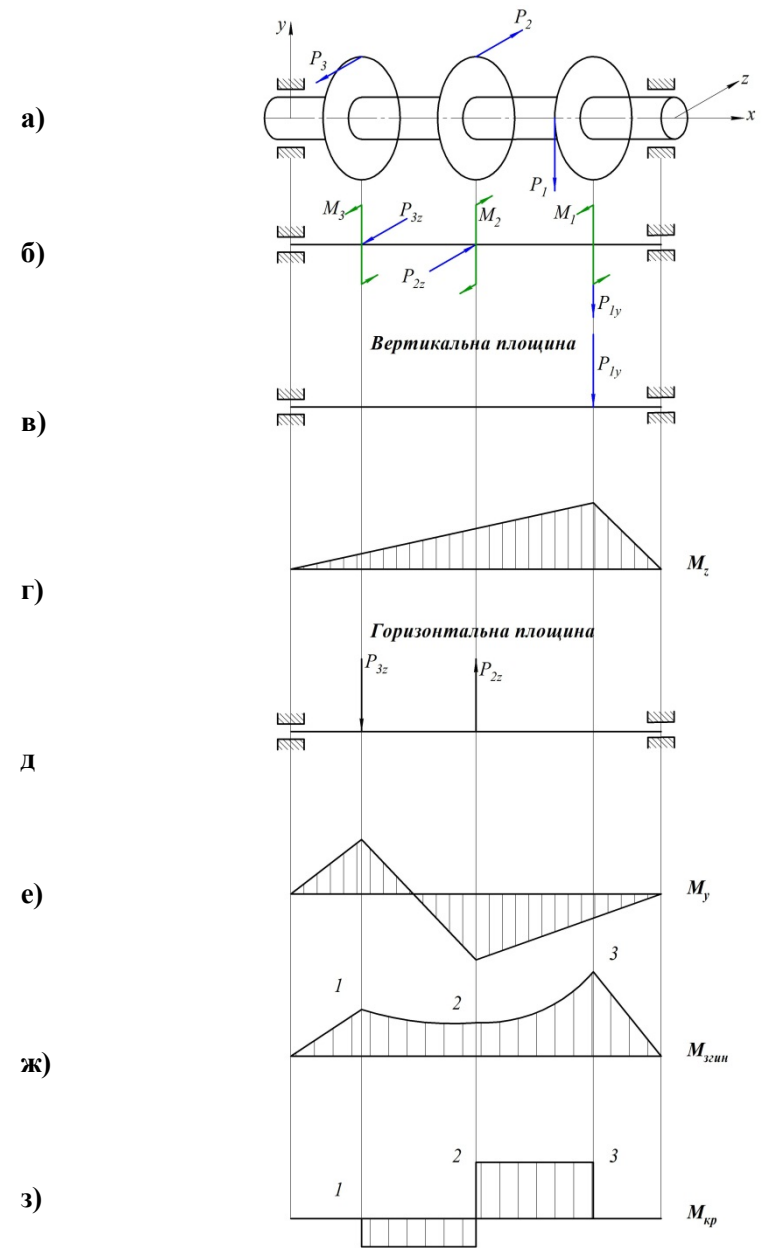


Рисунок 13.15 – Розрахункова схема при згинанні з крученням

Аналогічно визначаємо координати точок 3' і 4'.

Оскільки під час переходу нейтральної лінії з однієї сторони на іншу, вона повертається навколо кутової точки перерізу, то точка прикладання сили переміщується по прямим, утворюючи контур ядра. Таким чином, **ядро перерізу прямокутника буде ромб з діагоналями, рівними одній третині відповідної сторони перерізу.**

13.5 Визначення напружень при згинанні з крученням

При розгляді кручення передбачалося, що в поперечних перерізах круглого стержня (вала) виникає крутильний момент. Проте такі деталі машин, як вали, рідко працюють на чисте кручення. Навіть прямий вал при роботі згинається власною вагою, вагою шківів, натягненням ременів і т.д. Таким чином, більшість зкручувальних елементів машин працюють на сумісну дію згинання і кручення.

При дії **згинання і кручення** в поперечних перерізах вала виникає п'ять внутрішніх силових факторів: крутильний момент $M_{кр}$, згинальні моменти M_z і M_y , і поперечні сили Q_z і Q_y .

Таким чином, в будь-якому поперечному перерізі одночасно виникають нормальні напруження від згинання в двох площинах, а також дотичні від кручення. Для розрахунку вала в першу чергу повинні бути побудовані епюри згинальних моментів M_z , M_y і крутильних моментів $M_{кр} = M_x$.

Навантаження, що діє на вал, розкладаємо на складові вздовж координатних осей, а потім будуємо епюри:

– згинальних моментів M_z від вертикальних проекцій сил P_{1y} , P_{2y} , P_{ny} ;

– згинальних моментів M_y від горизонтальних проекцій сил P_{1z} , P_{2z} , P_{nz} ;

– крутильних моментів, що $M_{кр} = M_x$.

Розглянемо розрахунок вала на **прикладі** (Рис.13.15).

12.3 Визначення переміщень у балках за методом початкових параметрів

Абсолютне значення максимального прогину балки $|w_{max}|$ позначають через f . Тоді умови жорсткості при згинанні набувають виду:

$$\theta \leq [\theta], \quad (12.24)$$

$$f \leq [f], \quad (12.25)$$

тут $[\theta]$ – допустимий кут повороту перерізу;

$[f]$ – допустима стріла прогину.

Приклад 12.4. Для двоопорної опертої на шарніри балки, зображеної на рис. 12.7, побудувати епюри внутрішніх сил, дібрати квадратний переріз зі стороною a , побудувати епюри кутів повороту перерізів та прогинів, а також перевірити балку на жорсткість за кутами повороту перерізів на опорах A і B та за стрілою прогину. Прийняти

$[\sigma] = 100$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[f] = 8$ мм, $[\theta] = 0,01$.

Визначимо опорні реакції.

$$\begin{aligned} \sum M_{kA} &= M - q \cdot 0,5 \cdot 0,75 + R_B \cdot 1 = 0; \\ R_B &= 9,25 \text{ кН}; \\ \sum M_{kB} &= M - q \cdot 0,5 \cdot 0,25 - R_A \cdot 1 = 0; \\ R_A &= 12,25 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Перевірка

$$\sum Y_k = R_A - R_B - 0,5q = 10,25 - 9,25 - 1 = 0;$$

Епюри зусиль Q і M представлені на рис.12.6.

З основної умови міцності визначимо розміри поперечного перерізу балки (за умовою задачі – квадратного):

$$W = \frac{a^3}{6} \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{5,125 \cdot 10^6}{100} = 51250 \text{ мм}^3.$$

Звідси $a \geq 67,497$ мм. Округляючи до ближчого цілого числа, приймаємо $a = 68$ мм.

Головний центральний момент інерції перерізу

$$J_z = \frac{a^4}{12} = \frac{68^4}{12} = 1781781,33 \text{ мм}^4.$$

Тоді жорсткість перерізу

$$EJ_z = 2 \cdot 10^5 \cdot 1781781,33 = 356,35 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.$$

Далі проведемо необхідні розрахунки на жорсткість, включно з побудовою епюр переміщень.

Помістивши початок координат в точці O , запишемо універсальні рівняння кутів поворотів перерізів і прогинів балки:

$$\begin{aligned} \theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EJ_z} & \left[R_A \frac{(x-a)^2}{2!} - M \frac{(x-b)}{1!} - \right. \\ & \left. -q \frac{(x-b)^3}{3!} + q \frac{(x-c)^3}{3!} - R_B \frac{(x-c)^2}{2!} \right]; \\ w(x) = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ_z} & \left[R_A \frac{(x-a)^3}{3!} - M \frac{(x-b)^2}{2!} - \right. \\ & \left. -q \frac{(x-b)^4}{4!} + q \frac{(x-c)^4}{4!} - R_B \frac{(x-c)^3}{3!} \right]; \end{aligned}$$

рис. 13.13, а). Для побудови ядра перерізу якого-небудь багатокутника необхідно проводити дотичні, співпадаючі з його сторонами. Чим більше буде побудовано дотичних, тим точніше буде побудована область ядра. Ядро перерізу повторюватиме форму поперечного перерізу (див. рис.13.13, б).

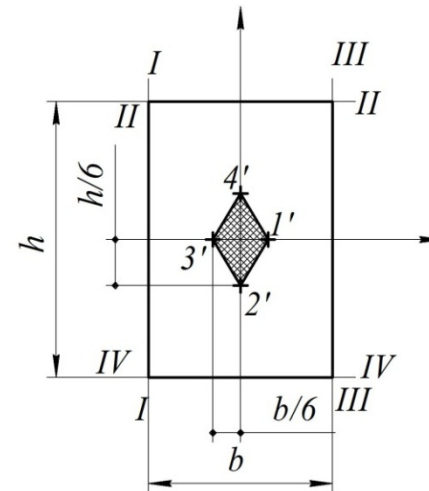
Побудуємо ядро перерізу для **прямокутника** (Рис. 13.14) із сторонами b і h . Спочатку проведемо нейтральну лінію по одній із сторін прямокутника (положення $I-I$). При цьому координати нейтральної лінії дорівнюють

$$z_H = -\frac{b}{2}; y_H = \infty,$$

а враховуючи, що

$$i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}; \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{hb^3}{12bh} = \frac{b^2}{12},$$

з формул (17.9) одержимо



$$y_P = 0; \quad z_P = -\frac{b^2 \cdot 2}{12 \cdot b} = \frac{b}{6} \text{ (точка } 1').$$

Тепер проведемо нейтральну лінію через іншу сторону (положення $II-II$). Координати нейтральної лінії в цьому положенні дорівнюють

$$y_H = \infty; \quad z_H = \frac{h}{2}.$$

Тоді координати точки $2'$ ядра перерізу

$$y_P = -\frac{h^2 \cdot 2}{12 \cdot h} = -\frac{h}{6}; \quad z_P =$$

Рисунок 13.14 – Побудова ядра перерізу прямокутника

знати наперед, який ексцентриситет при вибраному типі перерізу можна допустити, не ризикуючи викликати в перерізі стрижня напружень різних знаків. Це важливо знати при конструюванні стрижнів з матеріалів, що по-різному працюють на розтягання і стискання. Необхідно встановити область таких віддалень сили P від осі, при яких епюра нормальних напружень за перерізом залишатиметься з одним знаком. Бажано досягнути щоб весь переріз працював на стискання.

Ядром перерізу називається область навколо центра його ваги, прикладення сили P усередині якої викликає напруження одного знаку.

Для побудови ядра перерізу необхідно задаватися різними положеннями нейтральної лінії і обчислити відповідні точки прикладення сили P за формулами:

$$z_p = -\frac{i_y^2}{z_H}; \quad y_p = -\frac{i_z^2}{y_H}. \quad (13.22)$$

Розраховані координати z_p, y_p визначають точки, які лежать на межі ядра перерізу (Рис.13.13).

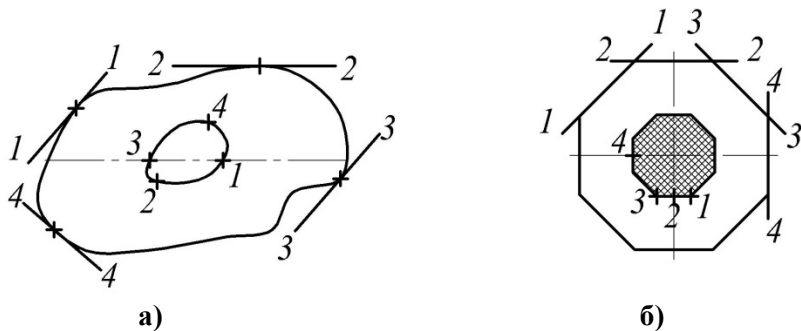


Рисунок 13.13 – Побудова ядра перерізу

При повороті нейтральної лінії навколо деякої нерухомої точки контуру перерізу точка прикладання сили переміщається вдовж деякої кривої, оскільки z_p, y_p і z, y зв'язані лінійно (див.

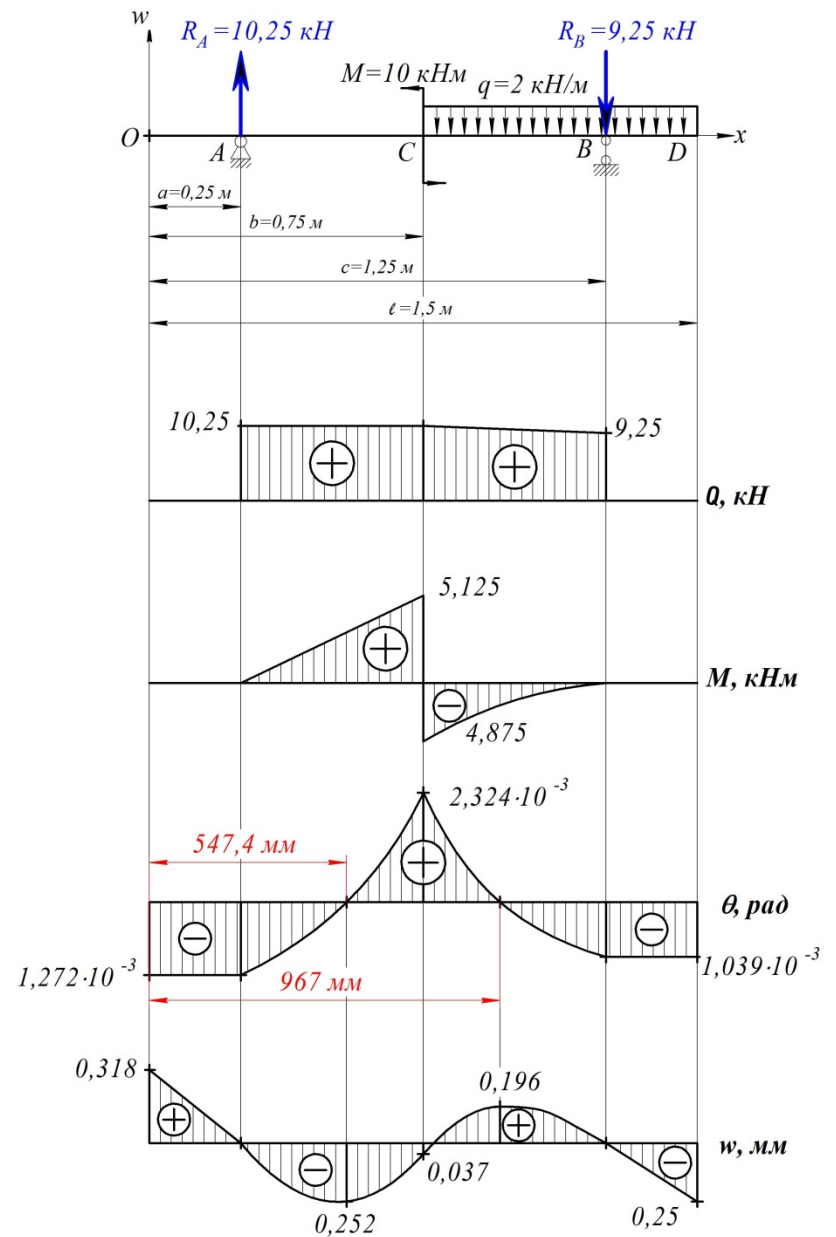


Рисунок 12.7 – До прикладу 12.3

В опорних перерізах прогини відсутні. Тоді

$$w_A|_{x=a} = w_0 + \theta_0 a = 0;$$

$$w_B|_{x=c} = w_0 + \theta_0 a + \frac{1}{EJ_z} \left[R_A \frac{(c-a)^3}{3!} - M \frac{(c-b)^2}{2!} - q \frac{(c-b)^4}{4!} \right] = 0.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$w_0 + \theta_0 \cdot 250 = 0;$$

$$\begin{aligned} w_0 + \theta_0 \cdot 1250 + \frac{1}{EJ_z} \left[10,25 \cdot 10^3 \frac{(10^3)^3}{6} - 10^7 \frac{2,5 \cdot 10^5}{2} - \right. \\ \left. - 2 \frac{6,25 \cdot 10^{10}}{24} \right] = \\ = w_0 + \theta_0 \cdot 1250 + \frac{10^{12}}{EJ_z} \left[\frac{20,5 - 5 - 0,0625}{12} \right] = w_0 + \theta_0 \cdot 1250 + \\ + \frac{10^{12}}{EJ_z} 0,453 = 0. \end{aligned}$$

Віднімаючи від другого рівняння перше отримаємо

$$\theta_0 = - \frac{0,453 \cdot 10^9}{EJ_z} = -1,272 \cdot 10^{-3}.$$

Тоді $w_0 = -250 \cdot \theta_0 = 250 \cdot 1,272 \cdot 10^{-3} = 0,318$ мм.

Знайшовши початкові параметри, будемо епюри переміщень.

Якщо полюс розташований на одній з головних осей, то нейтральна лінія перпендикулярна їй.

Якщо полюс наближається до центра ваги перерізу, нейтральна лінія віддаляється від нього.

Тепер, проводячи паралельно нейтральній лінії дотичні до контуру перерізу, знайдемо найбільш напружені точки A і B у розтягнутій і стиснутій зонах перерізу і побудуємо епюру нормальних напружень σ (див. рис.13.12).

Напруження в цих точках і **умови міцності** мають вигляд:

$$\sigma_A = \sigma_{\text{розт}}^{max} = P \left(\frac{1}{F} + \frac{y_P \cdot y_A}{i_z^2} + \frac{z_P \cdot z_A}{i_y^2} \right) \leq [\sigma_+], \quad (13.19)$$

$$\sigma_B = \sigma_{\text{стиск}}^{min} = P \left(\frac{1}{F} + \frac{y_P \cdot y_B}{i_z^2} + \frac{z_P \cdot z_B}{i_y^2} \right) \leq [\sigma_-]. \quad (13.20)$$

Для поперечних перерізів, у яких обидві головні осі інерції є осями симетрії (прямокутник, двотавр і ін.), координати z , у точок вершин одночасно досягають максимальних значень. Тому формули (13.19) і (13.20) можна записати у вигляді:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (13.21)$$

Ядро перерізу

Нейтральна лінія у загальному випадку може проходити як через поперечний переріз, так і за ним. Дійсно, якщо сила P прикладена в центрі тяжіння ($z_p = y_p = 0$), то, згідно з формулами (13.17) і (13.18), нейтральна лінія проходить в нескінченності, і напруження в цьому випадку розподілене за перерізом рівномірно. Із збільшенням **ексцентриситету** (відстані від центра ваги перерізу елемента до точки **прикладення** поздовжньої **сили**) **е** нейтральна вісь наближатиметься до центра ваги перерізу. Конструктору бажано

Щоб знайти відрізок z_H , який відсікається на осі Ox , необхідно в рівнянні (17.16) взяти $z_o = z_H, y_o = 0$.

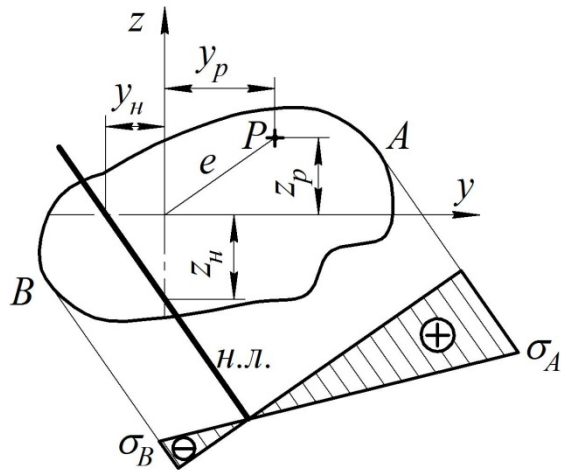


Рисунок 13.12 – Визначення розташування нейтральної лінії

Тоді одержимо

$$1 + \frac{z_P \cdot z_H}{i_y^2} = 0.$$

Звідки

$$z_H = -\frac{i_y^2}{z_P}. \quad (13.17)$$

Аналогічно, беручи $z_o = 0, y_o = y_H$, одержимо

$$y_H = -\frac{i_z^2}{y_P}. \quad (13.18)$$

З виразів (13.17) і (13.18) видно, що якщо y_P і z_P додатні, то відрізки z_H і y_H будуть від'ємні, тобто **нейтральна лінія завжди розташована в квадранті, протилежному тому, в якому знаходиться точка прикладання зовнішньої сили.**

Зауваження. По відношенню до епюри прогинів як графічного зображення функції, епюра кутів повороту є графічним зображенням першої похідної, а епюра згинальних моментів – графічним зображенням другої похідної цієї функції.

Визначимо кути повороту перерізів на опорах A і B , в точці D , а також в точці C прикладання зосередженого моменту.

$$\theta_A|_{x=a} = \theta_0 = -1,272 \cdot 10^{-3};$$

$$\theta_C|_{x=b} = -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EJ_z} + \frac{1}{EJ_z} R_A \frac{(b-a)^2}{2!} =$$

$$= -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EJ_z} + \frac{1}{EJ_z} 10,25 \cdot 10^4 \frac{25 \cdot 10^4}{2} =$$

$$= -1,272 \cdot 10^{-3} + 3,595 \cdot 10^{-3} = 2,324 \cdot 10^{-3}.$$

$$\theta_B|_{x=c} = \theta_0 + \frac{1}{EJ_z} \left[R_A \frac{(c-a)^2}{2!} - M \frac{(c-b)}{1!} - q \frac{(c-b)^3}{3!} \right] =$$

$$= -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EJ_z} + \frac{10^9}{EJ_z} \left[10,25 \frac{1}{2} - 10 \cdot 0,5 - 2 \frac{0,125}{6} \right] =$$

$$= -\frac{0,37 \cdot 10^9}{356,35 \cdot 10^9} = -1,039 \cdot 10^{-3}.$$

$$\theta_D|_{x=\ell} = \theta_0 + \frac{1}{EJ_z} \left[R_A \frac{(\ell-a)^2}{2!} - M \frac{(\ell-b)}{1!} - q \frac{(\ell-b)^3}{3!} - \right.$$

$$\left. - R_A \frac{(\ell-c)^2}{2!} + q \frac{(\ell-c)^3}{3!} \right] = -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EJ_z} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{10^9}{EJ_z} \left[10,25 \frac{11,5625}{2} - 10 \cdot 0,75 - 2 \frac{0,421875}{6} - \right. \\
& \left. - 9,25 \frac{0,0625}{2} + 2 \frac{0,015625}{6} \right] = - \frac{0,453 \cdot 10^9}{EJ_z} + \frac{0,083 \cdot 10^9}{EJ_z} = \\
& = -1,039 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

Оскільки кути повороту перерізів по довжині балки змінюють знак, знайдемо абсциси перерізів, кути повороту яких дорівнюють нулю. Згідно з розрахунками ці перерізи знаходяться на ділянках AC і CB .

Ділянка AC :

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= \theta_0 + \frac{1}{EJ_z} \left[R_A \frac{(x-a)^2}{2!} \right] = \\
&= - \frac{0,453 \cdot 10^9}{EJ_z} + \frac{1}{EJ_z} 10,25 \cdot 10^3 \frac{(x-250)^2}{2} = 0
\end{aligned}$$

Звідси $x=547,4$ мм.

Ділянка CB :

Зауваження. Положення абсциси x , при якій $\theta = 0$, можна знайти з задовільною точністю, не проводячи розрахунків, а безпосередньо з епюри θ . Для цього необхідно провести її побудову з використанням універсального рівняння кутів поворотів перерізів.

Дані розрахунків кутів повороту на ділянці CB зведені до таблиці.

Таблиця 12.1 – Результати розрахунків кутів повороту перерізів на ділянці CB

x , м	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
θ , рад	$1,675 \cdot 10^{-3}$	$0,592 \cdot 10^{-3}$	$-0,210 \cdot 10^{-3}$	$-0,741 \cdot 10^{-3}$	$-1,005 \cdot 10^{-3}$

$\frac{P}{F}$ винесемо за дужки, а моменти інерції виразимо через радіуси інерції

$$J_z = i_z^2 F; \quad J_y = i_y^2 F.$$

Одержимо формулу для визначення нормальних напружень в довільній точці перерізу:

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_P}{i_z^2} y + \frac{z_P}{i_y^2} z \right). \quad (13.15)$$

Складовими, що змінюються, у формулах (13.14) і (13.15) є два останні доданки, що відображають вплив згинання. Оскільки при згинанні найбільші напруження будуть в точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії, то, як і при косому згинанні, треба відшукати положення нейтральної лінії.

Позначимо координати точок, які належать нейтральній лінії, через z_0 і y_0 . На нейтральній лінії $\sigma = 0$, тобто

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_P \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z_P \cdot z_0}{i_y^2} \right) = 0.$$

Оскільки

$$\frac{P}{F} \neq 0, \text{ то } 1 + \frac{y_P \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z_P \cdot z_0}{i_y^2} = 0. \quad (13.16)$$

де z_P, y_P – координати точок прикладання рівнодіючої зовнішніх сил;

z_0, y_0 – координати точок нейтральної лінії.

Рівняння (13.16) є **рівнянням нейтральної лінії**, з якого видно, що нейтральна лінія не проходить через центр ваги перерізу. Щоб побудувати цю пряму, простіше за все визначити відрізки, які відсікаються нею на осях координат. Позначимо ці відрізки через z_n і y_n (Рис. 13.12).

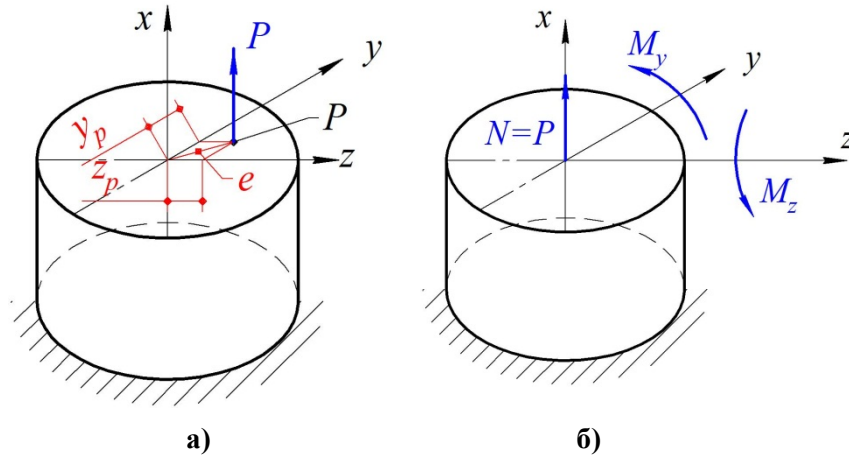


Рисунок 13.11 – Позацентрове розтягання (стискування) осі

Таким чином, позацентрове розтягання-стискування виявляється ідентичним косому згинанню. На відміну від останнього, в поперечному перерізі бруса виникають не тільки згинальні моменти, але і подовжня сила $N = P$.

У довільній точці з координатами z у нормальні напруження σ складатимуться з напружень осевого розтягання (стискування) силою N і напружень від чистого згинання моментів M_z, M_y див. формулу (13.10).

Очевидно, просторова епюра утворює площину (оскільки координати z і y в рівнянні входять до першого ступеню), яка не проходить через центр ваги перерізу (оскільки при $z = 0$ і $y = 0$ $\sigma \neq 0$).

Підставивши в рівняння (13.10) замість N, M_z, M_y їх значення, одержимо:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot y_p}{J_z} y + \frac{P \cdot z_p}{J_y} z. \quad (13.14)$$

З урахуванням масштабу знаходимо $x=967$ мм.

Визначимо прогини балки в точках O, C, D , а також в точках, де прогини екстремальні. Прогин в точці O – це знайдений початковий прогин $w_0 = 0,318$ мм.

$$\begin{aligned} w_C|_{x=b} &= w_0 + \theta_0 b + \frac{1}{EJ_z} R_A \frac{(b-a)^3}{3!} = 0,318 - 1,272 \cdot 10^{-3} + \\ &+ \frac{1}{3563562,67 \cdot 10^5} 10,25 \cdot 10^{-3} \frac{125 \cdot 10^6}{6} = \\ &= -0,636 + 0,599 = -0,037 \text{ мм.} \\ w_D|_{x=\ell} &= w_0 + \theta_0 \ell + \frac{1}{EJ_z} \left[R_A \frac{(\ell-a)^3}{3!} - M \frac{(\ell-b)^2}{2!} + q \frac{(\ell-c)^4}{4!} - \right. \\ &\left. - R_B \frac{(\ell-c)^3}{3!} \right] = 0,318 - 1,272 \cdot 10^{-3} \cdot 1500 + \\ &+ \frac{10^{12}}{3563562,67 \cdot 10^5} \left[10,25 \frac{1,25^3}{6} - 10 \cdot \frac{0,75^2}{2} - 2 \frac{0,75^4}{624} + \right. \\ &\left. + 2 \frac{0,25^4}{24} - 9,25 \frac{0,25^3}{6} \right] = \\ &= -1,59 + \frac{10^7}{3563562,67} [3,337 - 2,812 - 0,026 + 0,003 - 0,024] = \\ &= -1,59 + 1,34 = -0,25 \text{ мм.} \\ w_{max1}|_{x=547,4 \text{ мм}} &= w_0 + \theta_0 \cdot 547,4 + \frac{1}{EJ_z} R_A \frac{(547,4-a)^3}{3!} = \\ &= 0,318 - 1,272 \cdot 10^{-3} \cdot 547,4 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{3563562,67 \cdot 10^5} 10,25 \cdot 10^3 \frac{26304066,424}{6} =$$

$$= 0,318 - 0,696 + 0,126 = -0,252 \text{ мм.}$$

$$w_{max2}|_{x=967 \text{ мм}} = w_0 + \theta_0 \cdot 967 + \frac{1}{EJ_z} [R_A \frac{(967 - a)^3}{3!} -$$

$$M \frac{(967 - b)^3}{2!} - q \frac{(967 - b)^4}{4!} = 0,318 - 1,272 \cdot 10^{-3} \cdot 967 +$$

$$+ \frac{10^{12}}{3563562,67 \cdot 10^5} \left[10,25 \frac{0,717^3}{6} - 10 \frac{0,217^2}{2} - 2 \frac{0,217^4}{24} \right] =$$

$$= -0,912 + 1,108 = 0,196 \text{ мм.}$$

Перевіряємо балку на жорсткість:

- кути повороту на опорах $|\theta_A| = 1,272 \cdot 10^{-3} < [\theta] = 0,01$,
 - $|\theta_B| = 1,039 \cdot 10^{-3} < [\theta] = 0,01$;
 - стріла прогину $f = |w_{max1}| = 0,318 \text{ мм} < [f] = 8 \text{ мм}$.
- Отже, умови жорсткості для балки виконуються.

12.4 Контрольні запитання

1. Що називається прогином балки?
2. Форму якої кривої набуває вісь стержня при чистому згинанні?
3. Який зв'язок існує між радіусом кривизни ρ , згинаючим моментом M і жорсткістю балки EJ_x ?
4. Правило знаків в балці при згинанні.
5. Що називається статичними початковими параметрами?
6. Запишіть рівняння рівноваги стержня для умов чистого згинання.
7. Що називається нейтральним шаром стержня при згині?

Зауваження. При згинанні з стискуванням формули (13.10) і (13.12) можна застосовувати лише для коротких стержнів великої жорсткості – для тонких довгих стержнів можлива втрата стійкості.

У випадку плоского згинання з розтяганням в головній площині xOy формула (13.12) спрощується:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M_z}{W_z}. \quad (13.13)$$

13.4 Позацентрове розтягання і стискування прямого бруса

Вид навантаження, при якому рівнодіюча зовнішніх сил не співпадає з віссю стрижня, а зміщена щодо його осі і залишається їй паралельною, називається позацентровим розтяганням або стискуванням.

Точка прикладання рівнодіючої P називається полюсом сили.

На брус довільного перерізу діє одна сила P , яка паралельна осі бруса і прикладена в точці P перерізу. Точка прикладання зовнішніх сил має координати z_p, y_p . При такому навантаженні в будь-якому поперечному перерізі бруса діють поздовжня сила $N = P$ і згинальні моменти (див. рис.13.11, б):

$$M_z = P y_p; \quad M_y = P z_p.$$

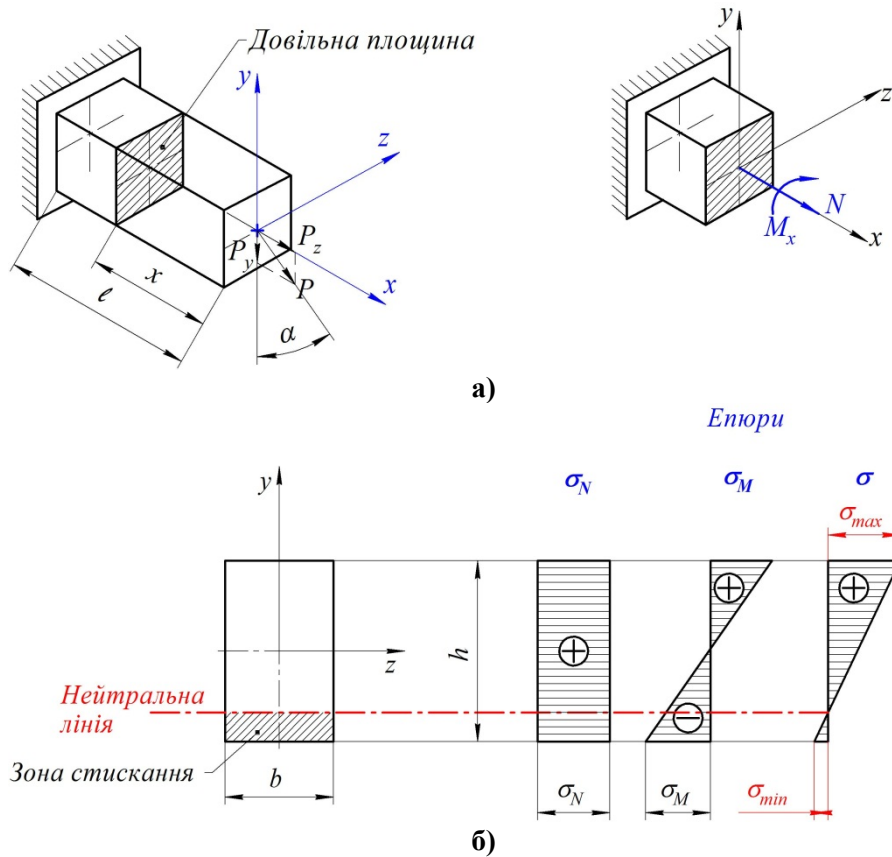


Рисунок 13.10 – Згинання з розтяганням прямого бруса

Отже, умова міцності має простий вигляд:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]. \quad (13.11)$$

Якщо переріз має дві осі симетрії, то небезпечною буде одна з кутових точок і напруження в ній визначають за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}. \quad (13.12)$$

8. Який вид напруженого стану реалізується в стержні при чистому згинанні?
9. Запишіть формулу Нав'є для визначення нормальних напружень в стержні при згинанні.
10. Де знаходиться небезпечна точка перерізу стержня при чистому згинанні?
11. Які зусилля виникають в перерізі стержня при плоскому поперечному згинанні?
12. Запишіть формулу Журавського для визначення дотичних напружень в стержні при згинанні.
13. Сформулюйте основні припущення щодо характеру розподілу дотичних напружень в перерізі стержня при поперечному згинанні, сформульовані Журавським. Для яких перерізів ці припущення справедливі?
14. Сформулюйте правило знаків для переміщень в стержнях при згинанні.
15. Запишіть основне диференціальне рівняння пружної лінії стержня.
16. Умова міцності при згинанні.
17. Умова жорсткості при згинанні.

13. СКЛАДНИЙ ОПІР

Раніше ми вивчали найпростіші види деформації: поздовжні розтягання та стискання, зсув, кручення і плоске поперечне згинання.

У загальному випадку навантаження бруса у поперечних перерізах можуть діяти всі шість компонент внутрішніх сил – N , Q_y , Q_x , M_y , M_z , M_x , пов'язаних з чотирма простими деформаціями.

В практиці найпростіші види деформації в чистому вигляді майже не зустрічаються. Більшість деталей працюють в умовах складного опору. На елементи конструкцій діють декілька простих видів деформацій. Таким чином, у випадку **складного опору в поперечному перерізі стержня можуть виникати комбінація декількох внутрішніх зусиль**.

Якщо в стержні переміщення точок осі в порівнянні з поперечними розмірами малі, а повороти перерізів малі в порівнянні з одиницею, то при визначенні сумарних напружень застосовують **принцип незалежності дії сил**, згідно якого необхідно визначити напруження від кожного компоненту внутрішніх сил окремо за відомими формулами, а потім їх скласти.

13.1 Косе згинання

Складним (неплоским) згинанням називається такий вид навантаження, при якому навантаження діють в декількох площинах, що проходять через вісь балки (Рис. 13.1). При складному згинанні у поперечних перерізах бруса виникають **чотири внутрішніх силових фактори**: Q_y , Q_x , M_y , M_z . Розраховуючи на міцність при складному згинанні, як правило, нехтують впливом дотичних напружень.

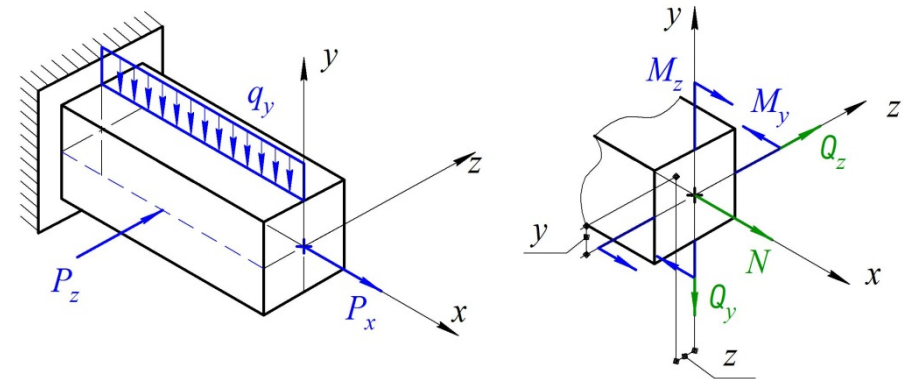


Рисунок 13.9 – Схема навантаження та внутрішні силові фактори при згинанні з розтяганням прямого бруса

Нормальні напруження в довільній точці перерізу при такому навантаженні

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z. \quad (13.10)$$

Згинальні моменти, поздовжню силу та координати точки, в якій визначають напруження, підставляють в цю формулу з урахуванням знаків.

Нехтуючи дотичними напруженнями від поперечних сил, можна вважати, що напружений стан у небезпечній точці лінійний.

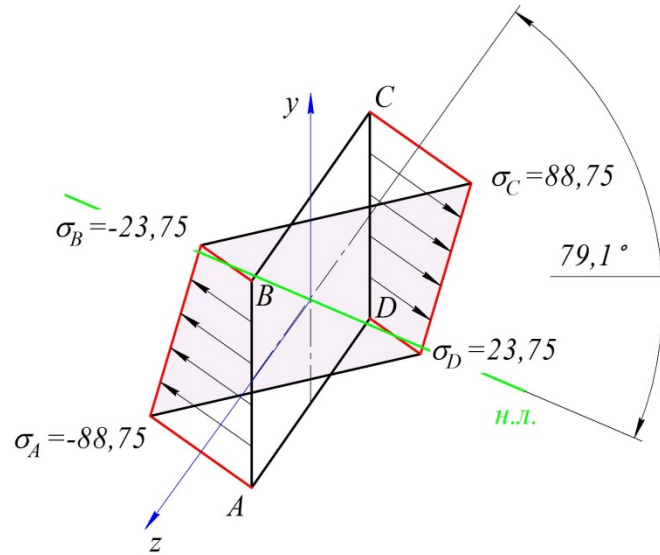


Рисунок 13.8 – Напруження в небезпечному перерізі та положення нейтральної лінії

13.3 Складне згинання з розтяганням прямого бруса

Розрахунки на спільну дію згинання та розтягання можна звести до таки двох видів:

- розрахунки на дію поздовжньо-поперечних навантажень;
- розрахунки на позацентрове розтягання (стискання).

Якщо на балку діють поздовжні та поперечні навантаження, що викривляють вісь бруса, то в поперечних перерізах виникають згинальні моменти M_y та M_z , поперечні сили Q_y , Q_x , а також поздовжня сила N (Рис. 13.9).

Якщо навантаження діють в одній площині, яка не співпадає ні з однією з головних площин інерції, то такий вид згинання називається косим.

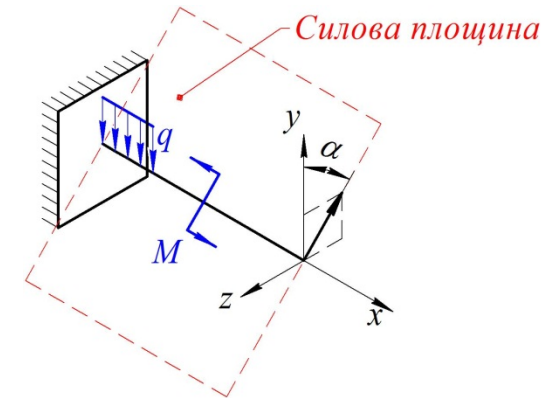


Рисунок 13.1 – Складне згинання

У випадку неплоского згинання найзручніше зводити згинання до двох плоских. Для цього навантаження треба розкласти на складові, які розташовуються в головних площинах xy та xz (тут осі y та z – основні осі інерції перерізу) (Рис. 13.2). Виходячи з принципу суперпозиції, знайдемо напруження в точці з координатами yz , розглядаючи два плоских згинання від моментів M_z і M_y . Тоді нормальні напруження в точці будуть:

$$\sigma' = \frac{M_z \cdot y}{J_z} \quad \text{і} \quad \sigma'' = \frac{M_y \cdot z}{J_y}.$$

У зв'язку з тим, що напруження однойменні, то нормальне напруження $\sigma = \sigma' + \sigma''$,

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y}. \quad (13.1)$$

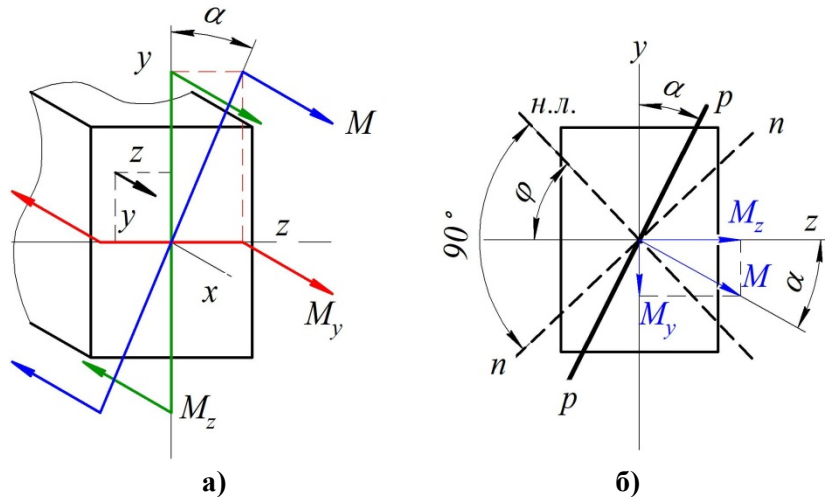


Рисунок 13.2 – Косе згинання

У випадку косоного згинання моменти M_z і M_y пов'язані залежностями:

$$M_z = M \cos \alpha; \quad M_y = M \sin \alpha. \quad (13.2)$$

Тоді, використовуючи формулу (13.1), будемо мати:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M \cos \alpha \cdot y}{J_z} + \frac{M \sin \alpha \cdot z}{J_y} \\ &= M \left(\frac{\cos \alpha \cdot y}{J_z} + \frac{\sin \alpha \cdot z}{J_y} \right), \end{aligned} \quad (13.3)$$

де M – згинальний момент в даному перерізі в силівій площині $p-p$.

Формули (13.1) і (13.3) дозволяють визначити нормальні напруження в будь-якій точці поперечного перерізу при складному або, як говорять ще, **просторовому згинанні**. Згинальний момент і координати точок, в яких визначають напруження, підставляють у формули зі своїми знаками.

Тоді:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -\frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = -\frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-6}} - \frac{3,12 \cdot 10^{-3}}{96 \cdot 10^{-6}} = -88,75 \text{ МПа}, \\ \sigma_B &= -\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = +\frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-6}} - \frac{3,12 \cdot 10^{-3}}{96 \cdot 10^{-6}} = -23,75 \text{ МПа}, \\ \sigma_C &= +\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = +\frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-6}} + \frac{3,12 \cdot 10^{-3}}{96 \cdot 10^{-6}} = +88,75 \text{ МПа}, \\ \sigma_D &= +\frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = -\frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-6}} + \frac{3,12 \cdot 10^{-3}}{96 \cdot 10^{-6}} = +23,75 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

По значенням отриманих напружень в точках небезпечного перерізу, будемо епюру напружень та зображаємо силуову площину (Рис. 13.8).

5. Визначаємо положення нейтральної лінії.

Тангенс кута нахилу нейтральної лінії:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y},$$

де J_z, J_y – моменти інерції прямокутного перерізу (за таблицею 2.1):

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = 576 \text{ см}^3;$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12} = 64 \text{ см}^3.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1,8 \cdot 4 \cdot 12^3}{3,12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 4^3} = 0,58 \cdot 9 = 5,2,$$

Одержуємо кут $\varphi = 79,1^\circ$.

Від дії сили P_y волокна у небезпечному перерізі, на яких знаходяться точки A і D будуть стиснені, а волокна, на яких знаходяться точки B і C - розтягнені. Від дії сили P_z волокна, на яких знаходяться точки A і B - стиснені, а волокна по точках C і D - розтягнені.

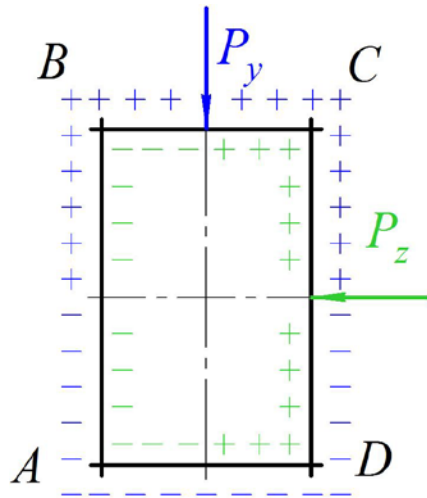


Рисунок 13.8 – Тензор напружень

4. Використовуючи тензор напружень (див. рис. 13.7) знайдемо значення нормальних напружень в точках небезпечного перерізу:

$$\sigma_i = \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z};$$

де W_z, W_y – моменти опору прямокутного перерізу (за таблицею 2.1):

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{4 \cdot 12^2}{6} = 96 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{12 \cdot 4^2}{6} = 32 \text{ см}^3.$$

Рисунок, який відображає як змінюються знаки напружень, називається **тензор напружень**. Тензор напружень (іноді тензор напружень Коші) – тензор другого рангу описує механічні напруження в довільній точці навантаженого тіла, що виникають в цій точці при малих деформаціях. При розрахунку напружень в цих точках знаки M_y і M_z потрібно брати відповідно показаних на рис. 13.8.

Рівняння нейтральної лінії в перерізі знайдемо, вважаючи $\sigma = 0$ і позначаючи координати точок нейтральної лінії (н.л.) через z_0 і y_0 :

$$\frac{y_0}{J_z} \cos \alpha + \frac{z_0}{J_y} \sin \alpha = 0. \quad (13.4)$$

Це рівняння є рівнянням прямої, що проходить через початок координат (центр ваги перерізу), оскільки звертається в нуль при $x_0 = y_0 = 0$.

Положення нейтральної лінії характеризується її кутовим коефіцієнтом

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_0}{z_0} = - \frac{J_z M_y}{J_y M_z}. \quad (13.5)$$

Аналіз останньої формули показує, що:

– при косому згинанні нейтральна лінія не перпендикулярна силовій площині. Вона проходить через центр ваги перерізу та через II і IV квадранти під кутом φ ;

– викривлення осі бруса при косому згинанні відбувається в площині $n - n$, нормальній до напрямку нейтральної лінії (див. рис.13.2, б); ця площина називається **площиною згинання**,

– напрямок площини згинання ($\operatorname{tg} \varphi$) може бути перпендикулярним до площини дії зовнішнього навантаження ($\operatorname{tg} \alpha$) тільки тоді, коли остання співпадає з однією з головних площин бруса, або коли $J_z = J_y$ (круг, квадрат і т.д.); у загальному випадку кут нахилу φ нейтральної лінії $n - n$ не рівний куту α нахилу силовій площини.

13.2 Розрахунки на міцність та жорсткість при косому згинанні

Оскільки еюра нормальних напружень в перерізі балки лінійна, то максимальні напруження виникають в точці, яка найбільш віддалена від нейтральної лінії. Хай координати цієї точки (z_1, y_1) . Тоді з рівняння (13.1) одержуємо:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z \cdot y_1}{J_z} + \frac{M_y \cdot z_1}{J_y}. \quad (13.6)$$

Коли переріз симетричний відносно обох осей, визначення найбільших напружень значно спрощується. Так, для прямокутного перерізу максимальні напруження будуть завжди в вершинах прямокутника, і для них легко записати:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{J_z} y_{max} + \frac{M_y}{J_y} z_{max}.$$

або

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}, \quad (13.7)$$

де

$W_z = \frac{J_z}{y_{max}}$; $W_y = \frac{J_y}{z_{max}}$ – моменти опору перерізу відносно осей z

та y .

При визначенні розмірів перерізу з умови міцності при косому згинанні за формулою

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad (13.8)$$

невідомі W_z та W_y не можна знайти з одного рівняння. Тому, необхідно визначити співвідношення $\frac{W_z}{W_y}$ шляхом послідовних

$$\sigma_z = \pm \frac{M_z}{W_z} = \pm \frac{3,12 \cdot 10^{-3}}{96 \cdot 10^{-6}} = \pm 32,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y = \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm \frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-6}} = \pm 56,25 \text{ МПа}.$$

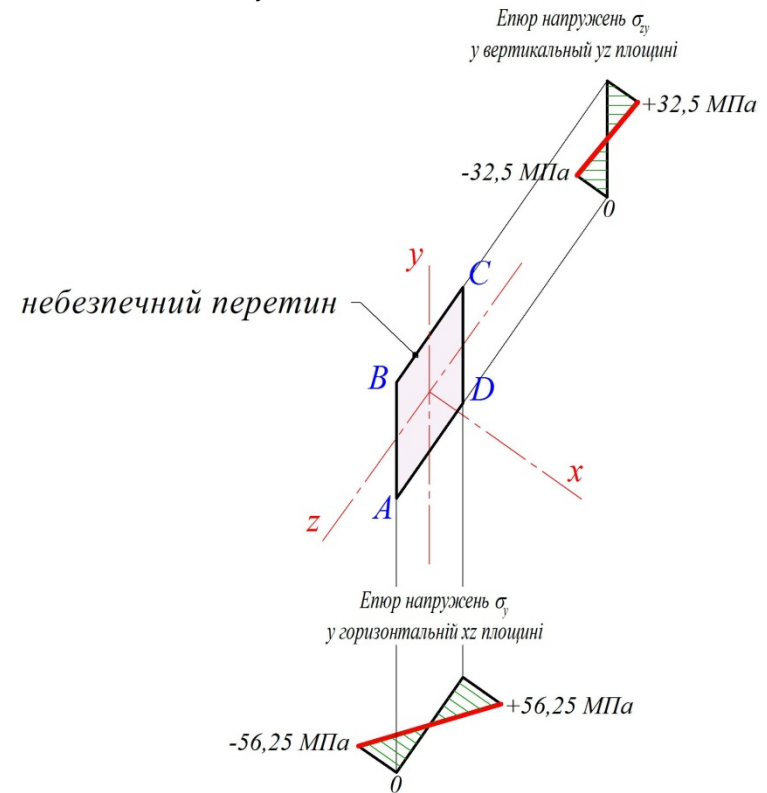
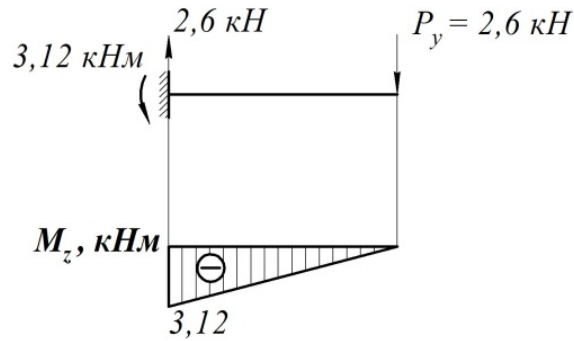


Рисунок 13.7 – Еюри напружень у горизонтальній та вертикальній площинах

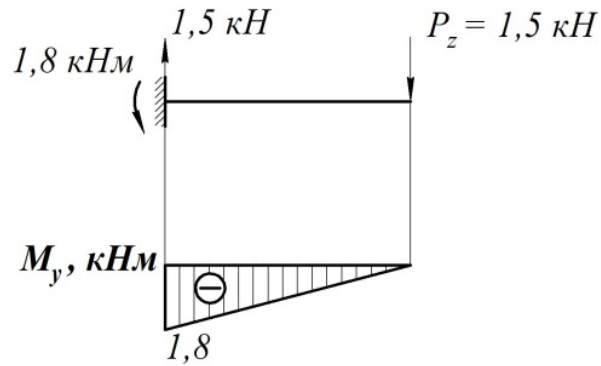
3. Для перерізів, які мають дві осі симетрії (наприклад, прямокутник, двотавр) та виступаючі кути, небезпечними будуть кутові точки. З метою визначення положення силової площини розставимо в кутових точках небезпечного перерізу знаки для визначення напружень (Рис.13.7).

Вертикальна площина yz



а)

Горизонтальна площина xz



б)

Рисунок 13.6 – Епюри згинальних моментів

2. З епюр видно, що небезпечний переріз балки співпадає з перерізом $ABCD$, що знаходиться в защемленні. Знайдемо значення напружень у горизонтальній та вертикальній площинах та побудуємо їх епюри (Рис. 13.6).

спроб, що задовольняє умові (13.8). У разі прямокутного перерізу

$$\frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b}$$

Тому, задаючись співвідношенням, з умови (13.8) можна знайти величину W_z і розміри поперечного перерізу.

Для визначення прогинів у різних перерізах балки при косому згинанні так само, як і при визначенні напружень, використовуємо спосіб суперпозиції, тобто складання діючих сил. Позначаючи прогин у напрямках головних осей z та y через w та v , запишемо диференційні рівняння прогинів у площинах x_z та x_y :

$$EJ_y \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = M_y; \quad EJ_z \cdot \frac{d^2w}{dx^2} = M_z.$$

Сумарний прогин f (Рис.13.3) визначиться як геометрична сума прогинів w та v ($f_z = v$; $f_y = w$)

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2} = \sqrt{v^2 + w^2}. \quad (13.9)$$

Напрямок прогину f при косому згинанні в кожному перерізі співпадає з площиною згинання, перпендикулярною нейтральній лінії (н.л.) у даному перерізі.

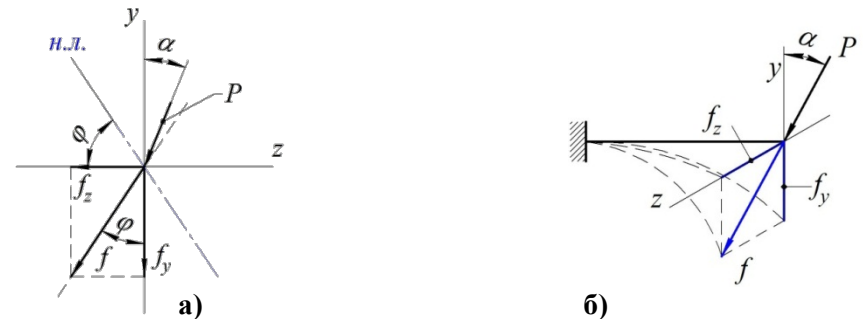
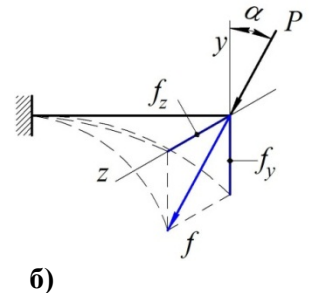


Рисунок 13.3 – Прогини при косому згинанні



Приклад 13.1. Для жорстко закріпленої балки прямокутного перерізу ($h \times b$) та довжиною l необхідно визначити напруження в крайніх точках небезпечного перерізу.

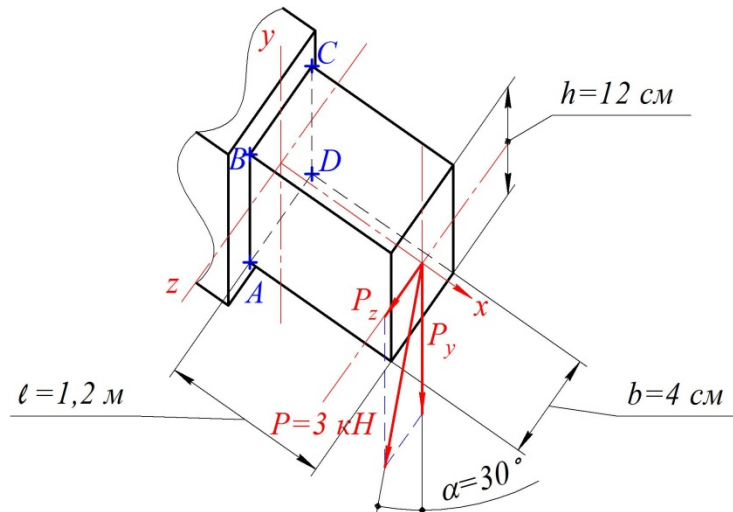


Рисунок 13.4 – Дані до прикладу

З аналізу даних (Рис. 13.4) бачимо, що балка навантажена силою P , яка діє в площині, що не співпадає ні з однією з головних площин інерції. Тому задану силу P слід замінити на її складові, що є проєкціями цієї сили на головні площини інерції:

$$P_y = P \cos 30^\circ = 3 \cdot 0,866 = 2,6 \text{ кН},$$

$$P_z = P \sin 30^\circ = 3 \cdot 0,5 = 1,5 \text{ кН}.$$

Використовуючи принцип суперпозицій, розглянемо дію кожної проєкції окремо (Рис. 13.5).

Балка навантажена силою P_y у вертикальній площині (Рис.13.6, а). Для знаходження небезпечного перерізу побудуємо епюру згинальних моментів M_z . Аналогічно поступимо з горизонтальною площиною (Рис.13.6, б).

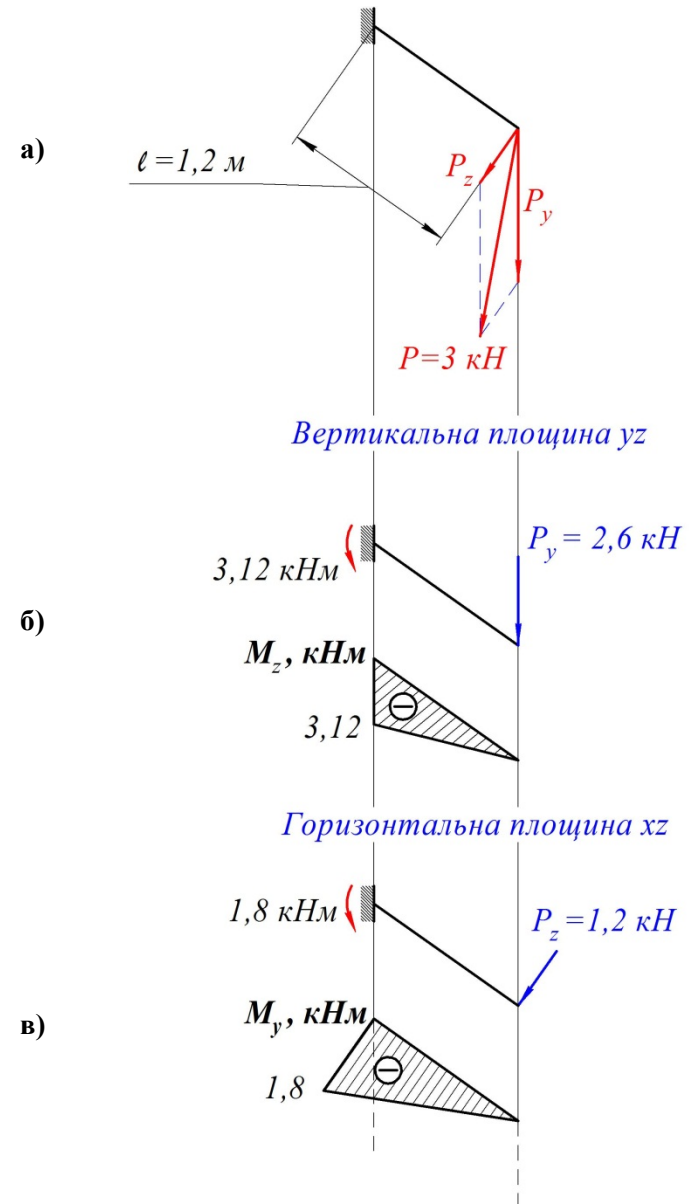


Рисунок 13.5 – Розрахункова схема та епюри до прикладу 13.1