

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання контрольних робіт
з вищої математики**

**РОЗДІЛИ
«ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ»,
«ЕЛЕМЕНТИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ»**

**для студентів транспортного факультету
заочної форми навчання**

2024

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з вищої математики. Розділи «Елементи теорії функції комплексної змінної», «Елементи операційного числення» для студентів транспортного факультету заочної форми навчання / Укл. : І. М. Килимник, Т. І. Слюсарова. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2024. – 70 с.

Укладачі: Килимник І. М., к. т. н., доцент
Слюсарова Т. І., асистент

Рецензент: Левицька Т. І., к. ф.-м. н., доцент

Відповідальний за випуск: Килимник І. М., к. т. н., доцент

Затверджено на засіданні
кафедри «Математика»
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 7 від 18.04.2024 р.

Рекомендовано НМК
Машинобудівного факультету
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 8 від 22.04.2024 р.

ЗМІСТ

	Стор.
Правила оформлення та виконання контрольної роботи	4
Контрольна робота «Елементи теорії функції комплексної змінної»	5
1. Вказівки до виконання контрольної роботи «Елементи теорії функції комплексної змінної»	5
1.1 Комплексні числа та дії над ними	5
1.2 Лінії та множини точок на комплексній площині	10
1.3 Функції комплексної змінної	14
1.4 Диференціювання функцій комплексної змінної.	20
Аналітичні функції	
1.5 Інтегрування функцій комплексної змінної	23
1.6 Степеневі ряди функцій комплексної змінної. Ряд Лорана	30
1.7 Індивідуальні завдання	36
Контрольна робота «Елементи операційного числення»	45
2. Вказівки до виконання контрольної роботи «Елементи операційного числення»	45
2.1 Перетворення Лапласа. Зображення та оригінал	45
2.2 Властивості перетворення Лапласа. Теорема	47
2.3 Знаходження оригіналу по зображенню	53
2.4 Розв'язання задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами	55
2.5 Індивідуальні завдання	61
Література	67
Додаток А – Деякі розвинення функцій в ряд Маклорена	68
Додаток Б – Основні оригінали та їх зображення	69
Додаток В – Довідковий матеріал (формули)	70

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ТА ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Студент повинен виконувати КР в окремому зошиті.
 2. На обкладинці зошита треба вказати назву дисципліни, з якої виконується КР, тему, номер академічної групи, прізвище та ініціали. В правому верхньому куті вказати шифр – номер залікової книжки.
 3. В КР повинні бути розв'язані всі завдання, вказані викладачем. Розв'язання завдань необхідно записувати в порядку номерів завдань, зберігаючи їх послідовність. Умова задачі в завданні переписується повністю. Розв'язування кожного завдання повинно бути повністю наведено.
 4. Номер варіанта студенту надає викладач.
 5. КР подається викладачеві на перевірку і захищається студентом на консультаціях.
- КР, виконана не за своїм варіантом, не зараховується.

Зауваження. У випадку дистанційної форми навчання студент завантажує виконану КР на загальноуніверситетській платформі MOODLE.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

1. ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ «ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ»

1.1 Комплексні числа та дії над ними

Означення. Комплексним числом z називається число $z = x + i \cdot y$, де x і y – дійсні числа, i – уявна одиниця ($i^2 = -1$), $x = \operatorname{Re} z$ – дійсна частина комплексного числа, $y = \operatorname{Im} z$ – уявна частина комплексного числа.

Означення. Комплексне число $\bar{z} = x - i \cdot y$ називається **спряженим** комплексному числу z .

Комплексне число $z = x + i \cdot y$ можна зобразити точкою площини xOy з координатами $(x; y)$ або вектором $\bar{r}$, який має напрямок з початку координат т. O в точку $(x; y)$. Довжина вектора $\bar{r}$ називається **модулем комплексного числа**:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Означення. Кут φ , утворений вектором з додатним напрямом осі Ox , називається **аргументом комплексного числа**:

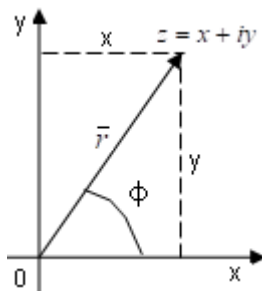
$$\varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Величина $\operatorname{Arg} z$ багатозначна і позначена з точністю до доданка кратного 2π :

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При $z = 0$ величина $\operatorname{Arg} z$ не визначається.

Головне значення аргументу позначається $\arg z$ і визначається як $-\pi < \arg z \leq \pi$.



$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{якщо } x > 0, y - \text{будь яке;} \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{якщо } x < 0, y > 0; \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{якщо } x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0, y < 0; \\ 0, & \text{якщо } x > 0, y = 0; \\ \pi, & \text{якщо } x < 0, y = 0. \end{cases}$$

Форми комплексного числа

1. **Алгебраїчна форма:** $z = x + i \cdot y$.

2. **Тригонометрична форма:** $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, якщо в алгебраїчній формі зробити заміну $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$.

3. **Показникова форма:** $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$, якщо застосувати формулу Ейлера $e^{i \cdot \varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$, то перейдемо від тригонометричної форми до показникової.

Дії над комплексними числами

Якщо

$$z_1 = x_1 + i \cdot y_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = x_2 + i \cdot y_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2), \text{ то:}$$

$$1) \text{ рівність: } z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ і } y_1 = y_2;$$

$$2) \text{ додавання: } z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$

$$3) \text{ добуток: } z_1 \cdot z_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$z \cdot \bar{z} = (x + i \cdot y) \cdot (x - i \cdot y) = x^2 - x \cdot i \cdot y + i \cdot y \cdot x - y^2 \cdot i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2;$$

4)

частка:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z_1 \cdot z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

5) піднесення до натурального степеня n :

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi) = r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi}.$$

Формула Муавра: $(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi$;6) здобування кореня натурального степеня n :

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi \cdot k}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2\pi \cdot k}{n} \right),$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.**ПАМ'ЯТКА**

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i.$$

Таким чином, $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$, де $n \in \{N \cup 0\}$, N – множина натуральних чисел.

$$|z - z_0| = |(x - x_0) + i \cdot (y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$z^2 = (x + i \cdot y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot i \cdot y + (i \cdot y)^2 = x^2 + i \cdot 2xy - y^2,$$

$$\bar{z}^2 = (x - i \cdot y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot i \cdot y + (i \cdot y)^2 = x^2 - i \cdot 2xy - y^2,$$

$$\begin{aligned} z^3 &= (x + i \cdot y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot i \cdot y + 3 \cdot x \cdot (i \cdot y)^2 + (i \cdot y)^3 = \\ &= x^3 + i \cdot 3x^2y - 3xy^2 - i \cdot y^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{z}^3 &= (x - i \cdot y)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot i \cdot y + 3 \cdot x \cdot (i \cdot y)^2 - (i \cdot y)^3 = \\ &= x^3 - i \cdot 3x^2y - 3xy^2 - (-i) \cdot y^3 = x^3 - i \cdot 3x^2y - 3xy^2 + i \cdot y^3. \end{aligned}$$

Задача 1. Задано комплексні числа $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + 2i$, $z_3 = 2 - 2\sqrt{3}i$. Знайти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$.

Записати: д) z_2 в тригонометричній формі; е) z_3 в показниковій формі.

Розв'язання.

а) $z_1 + z_2 = (2 + i) + (-2 + 2i) = 0 + 3i = 3i$;

$$\text{б) } z_1 - z_2 = (2 + i) - (-2 + 2i) = 4 - i;$$

$$\text{в) } z_1 \cdot z_2 = (2 + i) \cdot (-2 + 2i) = -4 + 4i - 2i + 2i^2 = -4 + 2i - 2 = -6 + 2i;$$

$$\text{г) } \frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 + i) \cdot (-2 - 2i)}{(-2 + 2i) \cdot (-2 - 2i)} = \frac{-4 - 4i - 2i - 2i^2}{(-2)^2 + 2^2} = \frac{-2 - 6i}{8} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot i;$$

д) $z_2 = -2 + 2i$. Знайдемо модуль комплексного числа та головне значення аргументу: $x = -2, y = 2, r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2};$

$$x < 0, y > 0 \Rightarrow \arg z = \pi + \arctg \frac{y}{x} = \pi + \arctg(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Тригонометрична форма z_2 : $z_2 = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \right);$

є) $z_3 = 2 - 2\sqrt{3}i$. Знайдемо модуль комплексного числа та головне значення аргументу:

$$x = 2, y = -2\sqrt{3}, r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{16} = 4;$$

$$x > 0, y < 0 \Rightarrow \arg z = \arctg \frac{y}{x} = \arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Показникова форма z_3 : $z_3 = 4 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{3}}.$

Задача 2. Записати в алгебраїчній формі комплексне число

$$z = \left(\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1} \right)^2.$$

Розв'язання. Запишемо в алгебраїчній формі чисельник і знаменник дробу:

$$i^5 + 2 = i^4 \cdot i + 2 = i + 2 = 2 + i,$$

$$i^{19} + 1 = i^{16+3} + 1 = i^{4 \cdot 4 + 3} + 1 = i^{4 \cdot 4} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 + 1 = -i + 1 = 1 - i,$$

$$\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1} = \frac{2 + i}{1 - i}.$$

Помножимо чисельник і знаменник дробу на комплексне число, спряжене знаменнику:

$$\frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+i+i^2}{1^2+(-1)^2} = \frac{2+3i-1}{1+1} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Піднесемо до квадрата:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}i + \frac{9}{4}i^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}i - \frac{9}{4} = -2 + \frac{3}{2}i.$$

Задача 3. Обчислити: а) $(-1 + \sqrt{3}i)^{60}$; б) $\sqrt[4]{1-i}$.

Розв'язання.

а) Застосовуємо формулу $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Маємо $z = -1 + \sqrt{3}i$, де $n=60$, $x=-1$, $y=\sqrt{3}$.

Запишемо комплексне число z в тригонометричній формі.
 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$. Оскільки $x < 0$ і $y > 0$, то $\arg z = \arctg \frac{y}{x} + \pi = \arctg \left(\frac{\sqrt{3}}{-1} \right) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi$. Тоді

$$z = 2 \cdot \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \cdot \sin \frac{2}{3}\pi \right).$$

$$z^{60} = 2^{60} \left(\cos \left(60 \cdot \frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(60 \cdot \frac{2}{3}\pi \right) \right) = 2^{60} (\cos 40\pi + i \sin 40\pi) = 2^{60}.$$

б) Корінь n -го степеня з комплексного числа z , відмінного від нуля, має n значень, які визначаються формулою $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi \cdot k}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2\pi \cdot k}{n} \right)$, де $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

Маємо $z = 1 - i$, де $x = 1$, $y = -1$. Запишемо комплексне число z в тригонометричній формі. Знаходимо

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Оскільки $x > 0$, $y < 0$, то $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \left(\frac{-1}{1} \right) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$.

$$\text{Маємо } \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2} \cdot \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4} + i \cdot \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4} \right), \quad k=0,1,2,3.$$

$$\text{При } k=0 \quad z_1 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{16} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{16} \right) \right) = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{\pi}{16} - i \sin \frac{\pi}{16} \right);$$

$$k=1 \quad z_2 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{7}{16} \pi + i \sin \frac{7}{16} \pi \right);$$

$$k=2 \quad z_3 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{15}{16} \pi + i \sin \frac{15}{16} \pi \right);$$

$$k=3 \quad z_4 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{23}{16} \pi + i \sin \frac{23}{16} \pi \right).$$

1.2 Лінії та множини точок на комплексній площині

Рівняння $F(z)=0$ визначає лінію на комплексній площині, а нерівності $F(z) \leq 0$, $F(z) < 0$, $F(z) \geq 0$, $F(z) > 0$ визначають частину комплексної площини. При побудові кривих або множин точок треба перейти в заданих рівняннях або нерівностях від змінної z до змінних x і y . Тоді отримаємо рівняння або нерівності від змінних x і y . Після цього вже безпосередньо будемо криві або множини.

Задача 4. Визначити та побудувати лінії, задані наступними рівняннями:

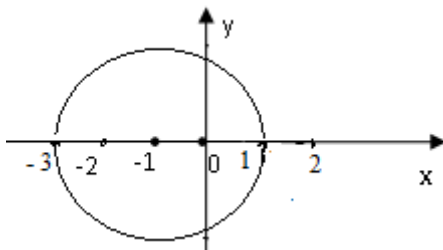
$$\text{а) } |z|^2 + 2 \operatorname{Re} z = 3; \quad \text{б) } |z - 3 + 4i| = |z - 2|; \quad \text{в) } \operatorname{Im}(z^2 - \bar{z}) = 2 - \operatorname{Im} z.$$

Розв'язання.

$$\text{а) } |z|^2 + 2 \operatorname{Re} z = 3. \quad \text{Відомо, що } |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{Re} z = x. \quad \text{Тоді}$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x = 3 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 4 - \text{коло з центром}$$

в т. $(-1; 0)$ і радіусом $R = 2$;



б) $|z - 3 + 4i| = |z - 2|$. Маємо

$$|z - 3 + 4i| = |x + i \cdot y - 3 + 4i| = |(x - 3) + i \cdot (y + 4)| = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2},$$

$$|z - 2| = |x + i \cdot y - 2| = |(x - 2) + i \cdot y| = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}. \text{ Тоді}$$

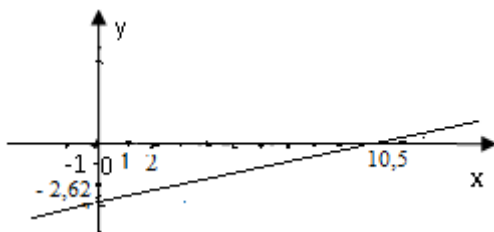
$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = (x - 2)^2 + y^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = x^2 - 4x + 4 + y^2$$

$$2x - 8y - 21 = 0.$$

Це рівняння прямої $\frac{x}{10,5} + \frac{y}{-2,625} = 1$.



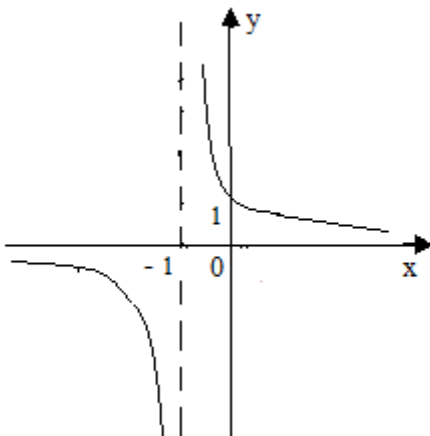
в) $\text{Im}(z^2 - \bar{z}) = 2 - \text{Im} z$. Відомо, що $\bar{z} = x - iy$, $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

Тоді $z^2 - \bar{z} = x^2 - y^2 + 2xyi - x + yi = x^2 - y^2 - x + i(y + 2xy)$,

$\text{Im}(z^2 - \bar{z}) = y + 2xy$. Враховуємо, що $\text{Im} z = y$. Матимемо

$$y + 2xy = 2 - y \Rightarrow 2y + 2xy = 2, y(1 + x) = 1 \Rightarrow y(x + 1) = 1.$$

$y = \frac{1}{x+1}$ – рівняння рівнобічної гіперболи, асимптоти якої $x = -1, y = 0$.



Задача 5. Знайти та побудувати множину точок комплексної площини задану умовами:

$$\text{а) } \begin{cases} 1 < |z - 1 - 2i| \leq 2 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} -\frac{\pi}{4} < \arg(z - 1 - 2i) \leq \frac{\pi}{6} \\ |z - 2i| \leq 2 \end{cases}$$

Розв'язання.

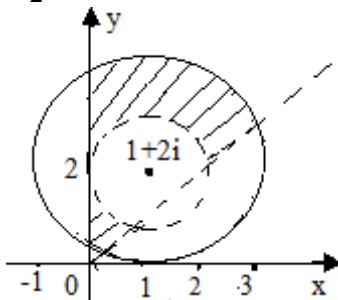
$$\text{а) } \begin{cases} 1 < |z - 1 - 2i| \leq 2 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

Оскільки $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, то

$$|z - 1 - 2i| = |(x - 1) + i(y - 2)| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} .$$

Перша нерівність системи $1 < (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$. На площині вона визначає кільце, яке обмежене концентричними колами радіусів $R = 1$ (не включаючи саме коло) та $R = 2$.

Друга нерівність системи $\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ визначає частину площини між променями, що виходять з точки O , кожному з яких відповідають кути $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{\pi}{2}$ (не включаючи пряму $y=x$).



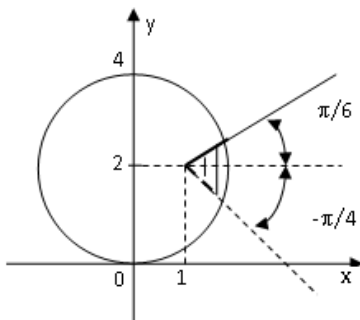
Розв'язок – заштрихована частина площини.

$$\text{б) } \begin{cases} -\frac{\pi}{4} < \arg(z-1-2i) \leq \frac{\pi}{6} \\ |z-2i| \leq 2 \end{cases}.$$

Комплексне число $z-1-2i = z-(1+2i)$ зображується вектором, початком якого є точка $(1+2i)$, а кінцем – точка z . Кут між цим вектором та віссю OX змінюється в межах від $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ до $\frac{\pi}{6}$. Тоді нерівність $-\frac{\pi}{4} < \arg(z-1-2i) \leq \frac{\pi}{6}$ визначає частину площини між променями, що виходять з точки $(1+2i)$ і утворюють з віссю OX кути $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ та $\frac{\pi}{6}$, включаючи верхню пряму.

Нерівності $|z-2i| \leq 2$ задовольняють точки площини, що знаходяться всередині кола з центром в точці $z=2i$ і радіусом $R=2$ та на самому колі.

Системі нерівностей задовольняє множина точок заштрихованої частини площини.



Розв'язок – заштрихована частина площини.

1.3 Функції комплексної змінної

Означення. Множина D точок комплексної площини називається **областю**, якщо вона задовольняє умовам:

- а) разом із кожною точкою з D цій множині належить і деякий окіл з центром в указаній точці (властивість відкритості);
- б) будь-які дві точки множини D можна сполучити ламаною, що повністю складається із точок множини D (властивість зв'язності).

Означення. Точки, які задовольняють умові а) означення області, називаються точками області (**внутрішніми точками області**).

Означення. **Зовнішня точка області D** – точка комплексної площини, яка не належить множині D разом із деяким її оточенням.

Означення. **Межова точка області D** – точка, що не належить цій області, але будь-який достатньо малий окіл указаної точки містить точки області D .

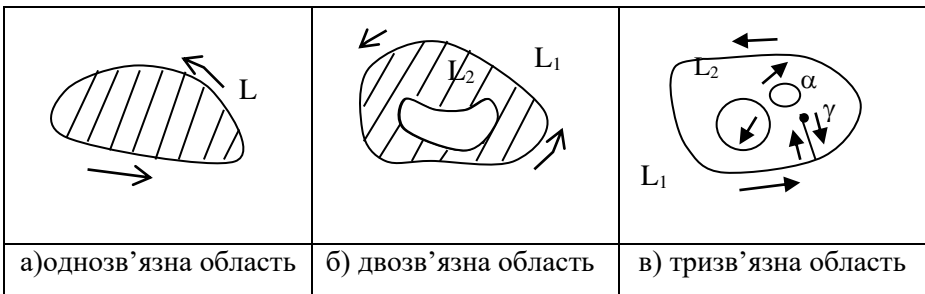
Означення. **Межа області** – сукупність усіх межових точок області D .

Означення. **Замкнута область** – множина точок, що складається з області D та її межі.

Означення. Область D називається **однозв'язною**, якщо будь-яка проста замкнута крива, що цілком належить D , може бути стягнута в точку за допомогою неперервної деформації без виведення з області D (в іншому випадку – область **багатозв'язна**).

З цього означення маємо, що межа багатозв'язної області не може складатися з однієї замкнутої кривої.

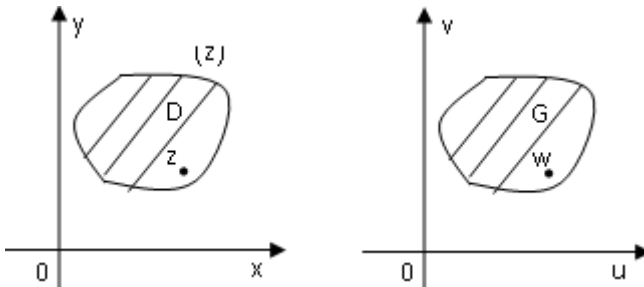
Приклади областей:



Нехай D – однозв'язна область і L – її межа. Виберемо на L деяку точку і, починаючи з неї, будемо обходити межу L .

Означення. Додатним напрямом обходу межі області вважається такий напрям, при якому область залишається зліва.

Нехай задано дві площини комплексних чисел $z = x + i \cdot y$ і $w = u + i \cdot v$.



Означення. Якщо кожному числу $z \in D$ за деяким законом поставлено у відповідність комплексне число $w \in G$, то кажуть, що на

множині D задано **однозначну функцію комплексної змінної**, яка відображає множину D у множину G : $w = f(z)$. Множина D називається **множиною означення** функції $f(z)$

Якщо кожна точка множини G є значенням функції, то множина G – **множина значень** цієї функції, або образ множини D , заданий за допомогою функції $f(z)$.

Означення. Якщо кожному $z \in D$ відповідає кілька різних значень w , то функція $w = f(z)$ називається **багатозначною**.

Функцію $f(z)$ можна записати у вигляді:

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y),$$

де $(x, y) \in D$, де $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ – функції дійсних змінних x і y .

Основні елементарні функції комплексної змінної

1. Дробово-раціональна функція:

$$w = \frac{a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0}{b_m \cdot z^m + b_{m-1} \cdot z^{m-1} + \dots + b_1 \cdot z + b_0},$$

де коефіцієнти $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_0 \in C$, C – множина комплексних чисел, $n \neq m$, $n, m \in N$.

Частинні випадки дробово-раціональної функції:

а) многочлен $w = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0$;

б) лінійна функція $w = a_1 z + a_0$;

в) степенева функція $w = z^n$;

г) дробово-лінійна функція $w = \frac{a_1 \cdot z + a_0}{b_1 \cdot z + b_0}$.

2. Показникова функція $w = e^z$:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \text{ де } |e^z| = e^x, \arg(e^z) = y.$$

При довільних значеннях комплексних аргументів z_1 і z_2 маємо:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

Показникова функція є періодичною з періодом $2\pi i$:

$$e^z = e^{z+i \cdot 2\pi} = e^z \cdot e^{i \cdot 2\pi} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i \cdot \sin 2\pi) = e^z \cdot (1 + i \cdot 0) = e^z.$$

3. Логарифмічна функція: $w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \cdot (\arg z + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Вона визначається як функція обернена показниковій за умови $z \neq 0$. Функція багатозначна. Число w називається *логарифмом числа* $z \neq 0$, якщо виконується умова $e^w = z$. Справедливо, що

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} z^n = n \cdot \operatorname{Ln} z.$$

Якщо $k = 0$, то маємо *головне значення логарифму*:

$$\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z.$$

4. Загальна степенева функція: $w = z^{\alpha+i\beta} = e^{(\alpha+i\beta)\operatorname{Ln} z}$, α, β – дійсні числа. Функція багатозначна.

5. Загальна показникова функція: $w = (\alpha + i \cdot \beta)^z = e^{z \cdot \operatorname{Ln}(\alpha+i\beta)}$, α, β – дійсні числа, $\alpha + i \cdot \beta \neq 0$. Функція багатозначна.

6. Тригонометричні функції: $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$.

За формулами Ейлера: $e^{i \cdot z} = \cos z + i \cdot \sin z$, $e^{-i \cdot z} = \cos z - i \cdot \sin z$.

Тоді
$$\cos z = \frac{e^{i \cdot z} + e^{-i \cdot z}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{i \cdot z} - e^{-i \cdot z}}{2i}.$$
 Функції $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$

визначаються як
$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Функції $\sin z$, $\cos z$ періодичні з дійсним періодом 2π , а функції $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ – з дійсним періодом π . При довільних значеннях комплексних аргументів z_1 і z_2 маємо:

$$\begin{aligned} \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2, \\ \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2. \end{aligned}$$

Всі відомі зі шкільного курсу формули тригонометрії залишаються справедливими для тригонометричних функцій

комплексної змінної. На відміну від тригонометричних функцій дійсного аргументу модулі функцій $\sin z, \cos z$ можуть бути > 1 .

7. Гіперболічні функції:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Функції $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ мають період $2\pi i$, а $\operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$ – період πi .

Зв'язок гіперболічних функцій з тригонометричними функціями:

$$\operatorname{sh} z = -i \cdot \sin(i \cdot z), \quad \sin z = -i \cdot \operatorname{sh}(i \cdot z),$$

$$\operatorname{ch} z = \cos(i \cdot z), \quad \cos z = \operatorname{ch}(i \cdot z),$$

$$\operatorname{th} z = -i \cdot \operatorname{tg}(i \cdot z), \quad \operatorname{tg} z = -i \cdot \operatorname{th}(i \cdot z),$$

$$\operatorname{cth} z = i \cdot \operatorname{ctg}(i \cdot z), \quad \operatorname{ctg} z = i \cdot \operatorname{cth}(i \cdot z).$$

8. Обернені тригонометричні функції: $\operatorname{Arcsin} z, \operatorname{Arccos} z, \operatorname{Arctg} z, \operatorname{Arcctg} z$ визначаються як функції обернені відповідно до функцій $\sin w, \cos w, \operatorname{tg} w, \operatorname{ctg} w$. Всі вони є багатозначними і виражаються через логарифмічні функції:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \cdot \operatorname{Ln}\left(i \cdot z \pm \sqrt{1 - z^2}\right), \quad \operatorname{Arccos} z = -i \cdot \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \cdot \operatorname{Ln} \frac{1 + i \cdot z}{1 - i \cdot z}, \quad \operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \cdot \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}.$$

Задача 6. Обчислити: а) $\sin i$; б) $\operatorname{ch}(2 - 5i)$; в) $\operatorname{Ln}(-1 - i)$; г) $(1 - i\sqrt{3})^i$.

Розв'язання.

а) $\sin i$. За означенням $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. У нашому випадку $z = i$.

$$\text{Маємо } \sin i = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2 \cdot i} = \frac{e^{-1} - e^1}{2 \cdot i} = -\frac{1}{i} \cdot \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = -\frac{1}{i} \cdot \operatorname{sh} 1 = i \cdot \operatorname{sh} 1.$$

Можна користуватись наведеними вище співвідношеннями: $\sin z = -i \cdot \operatorname{sh} iz$. Тоді

$$\sin i = -i \cdot \operatorname{sh}(i \cdot i) = -i \cdot \operatorname{sh}(-1) = i \cdot \operatorname{sh} 1.$$

б) $\operatorname{ch}(2-5i)$. За означенням $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. Тоді

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(2-5i) &= \frac{e^{2-5i} + e^{-2+5i}}{2} = \frac{e^2 \cdot (\cos(-5) + i \cdot \sin(-5)) + e^{-2} \cdot (\cos 5 + i \cdot \sin 5)}{2} = \\ &= \cos 5 \cdot \frac{e^2 + e^{-2}}{2} - i \cdot \sin 5 \cdot \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = \cos 5 \cdot \operatorname{ch} 2 - i \cdot \sin 5 \cdot \operatorname{sh} 2.\end{aligned}$$

Або $\operatorname{ch}(2-5i) = \cos(i \cdot (2-5i)) = \cos(5+2i) = \cos 5 \cdot \cos 2i - \sin 5 \cdot \sin 5i =$
 $= [\text{за формулами маємо: } \cos 2i = \operatorname{ch} 2; \sin 2i = i \operatorname{sh} 2] = \cos 5 \cdot \operatorname{ch} 2 - i \sin 5 \cdot \operatorname{sh} 2.$

в) $\operatorname{Ln}(-1-i)$. За означенням $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \cdot (\arg z + 2\pi k)$,
 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Маємо $z = -1 - i$. Тоді $|z| = |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Оскільки
 $x = -1 < 0$, $y = -1 < 0 \Rightarrow \arg z = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = -\pi + \operatorname{arctg} \left(\frac{-1}{-1} \right) = -\pi + \operatorname{arctg} 1 =$
 $= -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$, $\ln|z| = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \ln 2$.

$$\operatorname{Ln}(-1-i) = \frac{1}{2} \ln 2 + i \left(-\frac{3}{4} \pi + 2k\pi \right) = \frac{1}{2} \ln 2 + \pi i \left(-\frac{3}{4} + 2k \right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Головне значення $\ln(-1-i) = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 - \frac{3\pi}{4} \cdot i$.

г) $(1-i\sqrt{3})^i$. За означенням $z^a = e^{a \cdot \operatorname{Ln} z}$. Маємо $z = 1 - \sqrt{3}i$, $a = i$.

Тоді $|z| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$. Оскільки

$$x = 1 > 0, y = -\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

$$\operatorname{Ln}(1-i\sqrt{3}) = \ln 2 + i \cdot \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Підставляємо знайдене значення в формулу.

$$(1-i\sqrt{3})^i = e^{i \cdot \operatorname{Ln}(1-i\sqrt{3})} = e^{i \left(\ln 2 + i \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) \right)} = e^{i \cdot \ln 2 - \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right)} =$$

$$= e^{\frac{\pi}{3} - 2\pi k} \cdot (\cos(\ln 2) + i \cdot \sin(\ln 2)), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Головне значення } (1 - i\sqrt{3})^i = e^{\frac{\pi}{3}} \cdot (\cos(\ln 2) + i \cdot \sin(\ln 2)).$$

1.4 Диференціювання функцій комплексної змінної. Аналітичні функції

Нехай функція $w = f(z)$ означена в деякому околі точки $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$, окрім можливо, самої точки z_0 .

Означення. Якщо існують границі $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$ і $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$, то функція $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ має **границю** при $z \rightarrow z_0$, яка дорівнює $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + i v_0 = w_0$.

Це означення зводиться до звичайного означення границі функції дійсних аргументів, тому основні властивості граничного переходу для функцій дійсних змінних справедливі і для функцій комплексної змінної.

Означення. Функція $f(z)$ називається **неперервною в точці** z_0 , якщо вона означена у деякому околі z_0 (включаючи саму точку z_0) і $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Для неперервності функції $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ в точці z_0 , необхідно і достатньо, щоб функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ були неперервними у точці $(x_0; y_0)$.

Сума, різниця, добуток і частка неперервних у точці z_0 комплексних функцій $f(z)$ і $g(z)$ є неперервними функціями в цій точці (у випадку частки $g(z) \neq 0$).

Означення. Функція називається **неперервною в області** D , якщо вона є неперервною в кожній точці цієї області.

Основні поняття і формули аналізу функцій дійсної змінної переносяться на випадок функції комплексної змінної.

Нехай функція $w = f(z)$ означена в деякій області D і точки $z, z + \Delta z \in D$.

Означення. Похідною функції $w = f(z)$ комплексної змінної називається границя $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{dw}{dz}$ за умови, що $\Delta z \rightarrow 0$ є довільним чином.

Означення. Функція $w = f(z)$ називається диференційованою в точці, якщо існує похідна в цій точці.

Означення. Функція $w = f(z)$ називається аналітичною точці z , якщо вона диференційована як в самій точці z , так і в деякому її околі.

Означення. Функція $w = f(z)$, що однозначна та диференційована в кожній точці області D , називається аналітичною в області D .

Означення. Точки області, де функція аналітична, називаються правильними, а точки де вона не аналітична – особливими.

Умови диференційованості функції $f(z)$ у термінах дійсних функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ виражає наступна теорема.

Теорема. Нехай функція $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ означена в деякому околі точки z , до того ж у цій точці функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ диференційовані. Тоді для диференційованості функції комплексної змінної $f(z)$ у точці z необхідно і достатньо, щоб у цій точці мали

$$\text{місце рівності: } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. & (2) \end{cases}$$

Рівності (1), (2) називаються **умовами Коші-Рімана**.

Для того, щоб функція $f(z)$ була аналітичною в області D , необхідно і достатньо існування в цій області неперервних частинних похідних від функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$, які задовольняють умовам Коші-Рімана.

Умови Коші-Рімана дають змогу відновити аналітичну функцію, знаючи її дійсну або уявну частини.

Задача 7. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ по відомій дійсній або уявній частині: а) $v(x, y) = 5x + 4xy$; б) $u(x, y) = 2e^x \sin y + 3x - 2y$ за умови, що $f(0) = 0$.

Розв'язання.

а) $v(x, y) = 5x + 4xy$. Шукана функція $f(z)$ є аналітичною за умовою задачі і тому задовольняє умовам Коші-Рімана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. & (2) \end{cases} \quad \text{Знаходимо} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 4x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -5 - 4y.$$

Інтегруємо перше співвідношення по x і знаходимо функцію

$$u(x, y) = \int 4x dx + \varphi(y) = 2x^2 + \varphi(y).$$

Щоб знайти функцію $\varphi(y)$, диференціюємо отриману функцію по y і підставляємо в друге співвідношення: $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(y) = -5 - 4y$.

Тоді $\varphi(y) = \int (-5 - 4y) dy + C = -5y - 2y^2 + C$. Дійсна частина шуканої функції $u(x, y) = 2x^2 - 5y - 2y^2 + C$.

Знаходимо функцію

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y) = 2x^2 - 5y - 2y^2 + C + i(5x + 4xy) = \\ = 5 \cdot i \cdot (x + i \cdot y) + 2(x^2 - y^2 + i \cdot 2xy) + C = 5 \cdot i \cdot z + 2z^2 + C.$$

б) $u(x, y) = 2e^x \sin y + 3x - 2y$, $f(0) = 0$. Шукана функція $f(z)$ є аналітичною за умовою задачі і тому задовольняє умовам Кош-Рімана:

$$\text{Знаходимо} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \sin y + 3, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \cos y - 2.$$

Інтегруємо перше співвідношення по y і знаходимо функцію

$$v(x, y) = \int (2e^x \sin y + 3) dy + \varphi(x) = -2e^x \cos y + 3y + \varphi(x).$$

Щоб знайти функцію $\varphi(x)$, диференціюємо отриману функцію по x і підставляємо в друге співвідношення:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -(-2e^x \cos y + \varphi'(x)) = 2e^x \cos y - 2.$$

$$\text{Тоді } 2e^x \cos y - \varphi'(x) = 2e^x \cos y - 2.$$

$$\varphi'(x) = 2 \Rightarrow \varphi(x) = \int 2dx + C = 2x + C.$$

Уявна частина шуканої функції

$$v(x, y) = -2e^x \cos y + 3y + 2x + C$$

Знаходимо функцію

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y) = 2e^x \sin y + 3x - 2y + \\ + i \cdot (-2e^x \cos y + 3y + 2x + C) = -i \cdot 2e^x (\cos y + i \sin y) + 3(x + iy) + \\ + 2i(x + iy) + iC = -2ie^x \cdot e^{iy} + 3z + 2iz + iC = -2ie^z + 3z + 2iz + iC.$$

Комплексну сталу C знайдемо з умови $f(0) = 0$:

$$0 = -2ie^0 + 3 \cdot 0 + 2i \cdot 0 + iC \Rightarrow C = 2.$$

$$\text{Тоді } f(z) = -2ie^z + 3z + i2z + i2 = -2ie^z + z(3 + 2i) + 2i.$$

1.5 Інтегрування функції комплексної змінної

Нехай функція $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ означена і неперервна в області D , а C – кусково-гладка замкнута або незамкнута крива, що належить D . Обчислення інтеграла від $f(z)$ зводиться до обчислення двох криволінійних інтегралів другого роду:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy.$$

Інтеграли від функції комплексної змінної мають властивості криволінійних інтегралів другого роду для функцій дійсного аргументу.

Якщо крива C задана параметричним рівнянням

$$z(t) = x(t) + i y(t), \text{ де } \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_1 \text{ і значення параметра } t = t_0$$

і $t = t_1$ відповідають початковій та кінцевій точкам кривої C , то

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \cdot z'(t)dt.$$

Якщо $f(z)$ – аналітична функція в однозв’язній області D , що містить точки z_0 і z_1 , то має місце **формула Ньютона-Лейбніца**:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0), \text{ де } F(z) - \text{первісна функція для } f(z).$$

Обчислення інтегралів від аналітичних функцій проводять із використанням таблиці основних інтегралів та методів інтегрування функцій дійсного аргументу.

У випадку, коли $f(z)$ – аналітична функція в однозв’язній області D , обмеженій контуром L , і C – замкнутий контур, що цілком лежить в області D , то $\oint_C f(z)dz = 0$ (**Теорема Коші**). Інтегральна

теорема Коші має місце і у випадку замкнутого контуру, який є границею області аналітичності.

Нехай $f(z)$ – аналітична функція в замкнутій однозв’язній області D , обмеженій кусково-гладким замкнутим контуром C і на самому контурі, то значення функції $f(z)$ в будь-якій точці $z_0 \in D$ можна обчислити за **інтегральною формулою Коші**:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

(при обході контуру C область D залишається зліва).

Формула Коші зв'язує значення аналітичної функції $f(z)$ у довільній точці області зі значенням цієї функції на межі області.

Теорема. Нехай функція $f(z)$ аналітична в області D і неперервна в замкнутій області D . Тоді в кожній внутрішній точці $z_0 \in D$ функція $f(z)$ має похідні всіх порядків, а похідну n -го порядку обчислюють за формулою:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

При застосуванні інтегральної формули Коші може бути корисною наступна теорема.

Теорема. Нехай область D – багатозв'язна, обмежена додатньо орієнтовним контуром C , та декількома внутрішніми додатньо орієнтовними контурами C_i ($i = 1, n$). Область $\bar{D}$ – внутрішня частина області D . Якщо функція $f(z)$ – аналітична в $\bar{D}$, то

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} f(z) dz.$$

Задача 8. Обчислити інтеграли:

а) $\int_{-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz;$

б) $\int_L (2\bar{z} + \operatorname{Im} z^2) dz$, де L – парабола $y = 2x^2$ від точки $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + 2i$;

в) $\int_L (2i + 3z + 2\bar{z}) dz$, де L – дуга кола $|z| = 2$ і $0 \leq \arg z \leq \pi$;

г) $\int_L \frac{dz}{z-4}$, де L – еліпс $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$; д) $\int_{|z-2|=3/2} \frac{e^z}{z(z-3)} dz$;

е) $\int_{|z-3|=4} \frac{e^{z^2} dz}{z^2 - 6z}$;

ж) $\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3} dz$.

Розв'язання.

а) $\int_{-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz$. Підінтегральна функція $f(z) = 3z^2 + 2z$ є

аналітичною. Інтеграл від неї не залежить від лінії, яка з'єднає точки $z_0 = 1 - i$ та $z_1 = 2 + i$. Справедлива формула Ньютона-Лейбніца. Для знаходження первісної застосовуємо табличні інтеграли.

$$\int_{-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz = (z^3 + z^2) \Big|_{-i}^{2+i} = (2+i)^3 + (2+i)^2 - (-i)^3 - (-i)^2 =$$

$$= 8 + 12i + 6i^2 + i^3 + 4 + 4i + i^2 + i^3 - i^2 = 12 + 16i + 6i^2 + 2i^3 = 12 + 16i - 6 - 2i = 6 + 14i;$$

б) $\int_L (2\bar{z} + \operatorname{Im} z^2) dz$. Підінтегральна функція $f(z) = 2\bar{z} + \operatorname{Im} z^2$ не є

аналітичною. Виділяємо дійсну та уявну частини функції $f(z)$:

$$2\bar{z} + \operatorname{Im} z^2 = 2(x - iy) + \operatorname{Im}(x^2 - y^2 + i2xy) = 2x - i2y + 2xy.$$

Маємо $u(x, y) = 2x(1 + y)$, $v(x, y) = -2y$.

За формулою $\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy$ матимемо

$$I = \int_L (2\bar{z} + \operatorname{Im} z^2) dz = \int_L 2x(1 + y) dx + 2y dy + i \int_L -2y dx + 2x(1 + y) dy.$$

Інтегруємо вздовж параболи $y = 2x^2$ від $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + 2i$. Маємо

$0 \leq x \leq 1$ і $0 \leq y \leq 2$. З рівняння параболи $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$. Інтеграл матиме

вигляд

$$I = \int_0^1 2x(1 + 2x^2) dx + 2 \int_0^2 y dy - i \int_0^1 2 \cdot 2x^2 dx + i \int_0^2 2 \sqrt{\frac{y}{2}} (1 + y) dy =$$

$$= \int_0^1 (2x + 4x^3) dx + 2 \int_0^2 y dy - i 4 \int_0^1 x^2 dx + i \cdot 2 \int_0^2 \left(\sqrt{\frac{y}{2}} + y \sqrt{\frac{y}{2}} \right) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + x^4) \Big|_0^1 + y^2 \Big|_0^2 - i \cdot 4 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + i \cdot 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} \right) \Big|_0^2 = \\
&= 2 + 4 - i \cdot \frac{4}{3} + i \left(\frac{4}{3\sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} \right) = 6 + i \left(-\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \frac{16}{5} \right) = 6 + \frac{68}{15}i ;
\end{aligned}$$

в) $\int_L (2i + 3z + 2\bar{z}) dz$. Для точок півкола $|z| = 2$ і $0 \leq \arg z \leq \pi$ маємо $z = 2e^{i\varphi}$. Тоді $dz = z' d\varphi = 2 \cdot i \cdot e^{i\varphi} d\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Підінтегральна функція має вигляд

$$f(z) = 2i + 3z + 2\bar{z} = 2i + 3 \cdot 2e^{i\varphi} + 2 \cdot 2e^{-i\varphi} = 2i + 6e^{i\varphi} + 4e^{-i\varphi}.$$

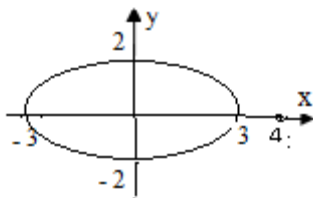
$$\text{Тоді } \int_L (2i + 6z + 4\bar{z}) dz = \int_0^\pi (2i + 6e^{i\varphi} + 4e^{-i\varphi}) \cdot 2ie^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi (-4e^{i\varphi} + 12ie^{i2\varphi} + 8i) d\varphi = \left(-\frac{4}{i} e^{i\varphi} + \frac{12i}{2i} e^{i2\varphi} + 8\varphi i \right) \Big|_0^\pi =$$

$$\begin{aligned}
&= 4ie^{i\pi} + 6e^{i2\pi} + 8\pi i - 4i - 6 = 4i(\cos \pi + i \sin \pi) + 6(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) + \\
&+ 8\pi i - 4i - 6 = -4i + 6 + 8\pi i - 4i - 6 = -8i + 8\pi i = 8(\pi - 1) \cdot i ;
\end{aligned}$$

г) $\int_L \frac{dz}{z-4}$. Підінтегральна функція $f(z) = \frac{1}{z-4}$ є аналітичною в

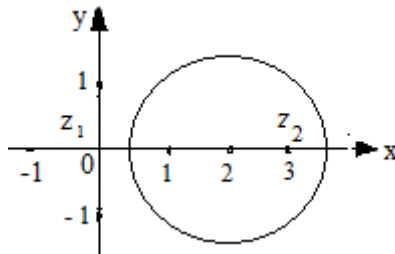
області, обмеженою еліпсом $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$. Особлива точка $z = 4$ не належить внутрішній частині еліпса



За теоремою Коші $\int_L \frac{dz}{z-4} = 0$;

д) $\int_{|z-2|=3/2} \frac{e^z}{z(z-3)} dz$. Підінтегральна функція $\frac{e^z}{z(z-3)}$ не означена

в точках $z_1 = 0$ і $z_2 = 3$. Область інтегрування обмежена колом радіуса $\frac{3}{2}$ з центром в точці $z_0 = 2$. Області інтегрування належить точка $z_2 = 3$.

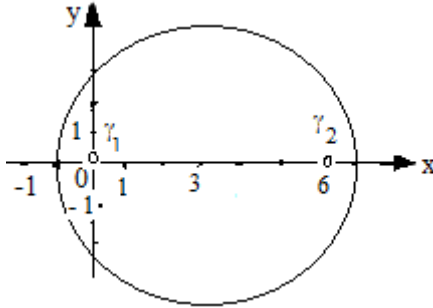


Функція $f(z) = \frac{e^z}{z}$ є аналітичною в крузі $|z-2| = \frac{3}{2}$. За інтегральною формулою Коші матимемо

$$\int_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{e^z dz}{z(z-3)} = \int_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{\frac{e^z}{z}}{z-3} dz = 2\pi i \frac{e^z}{z} \Big|_{z=3} = 2\pi i \frac{e^3}{3} = \frac{2}{3} \pi e^3 i;$$

е) $\int_{|z-3|=4} \frac{e^{z^2} dz}{z^2 - 6z}$. Підінтегральна функція $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}$ не

означена в точках $z_1 = 0$ і $z_2 = 6$, які належать області інтегрування, що обмежена колом $|z-3|=4$. Можна розкласти підінтегральну функцію на суму найпростіших дробів із знаменниками z і $z-6$ або розглянути область інтегрування, як тризв'язну. Обмежимо точки z_1 і z_2 колами γ_1 і γ_2 відповідно. Тоді заданий інтеграл дорівнює сумі інтегралів по контурам γ_1 і γ_2 .



В області, обмеженій контуром γ_1 , функція $\frac{e^{z^2}}{z-6}$ є аналітичною,

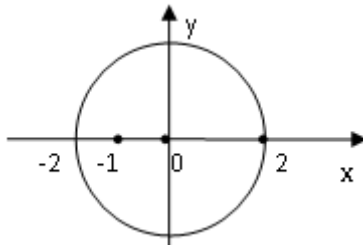
а в області, обмеженій контуром γ_2 , аналітичною є функція $\frac{e^z}{z}$.

Враховуючи це, матимемо:

$$\begin{aligned} \int_{|z-3|=4} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz &= \int_{\gamma_1} \frac{e^{z^2}}{z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^{z^2}}{z-6} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{z^2}}{z-6} \Bigg|_{z=0} + \\ &+ 2\pi i \cdot \frac{e^{z^2}}{z} \Bigg|_{z=6} = -\frac{2\pi i}{6} + \frac{2\pi i}{6} \cdot e^{36} = \frac{\pi \cdot i}{3} \cdot e^{36} - \frac{\pi \cdot i}{3} = \frac{\pi \cdot i}{3} \cdot (e^{36} - 1); \end{aligned}$$

ж) $\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3} dz$. Підінтегральна функція $\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3}$ є

аналітичною в області $|z| \leq 2$ всюди, окрім точки $z_0 = -1$.



Виділимо під знаком інтеграла функцію $f(z)$, яка є аналітичною в крузі $|z| \leq 2$: $f(z) = \operatorname{ch} z$. Застосуємо інтегральну формулу Коші для похідної 2-го порядку:

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3} dz = \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^{2+1}} dz = \left[f(z) = \operatorname{ch} z \right] = \frac{2\pi i}{2!} \cdot (\operatorname{ch} z)'' \Big|_{z=-1} =$$

$$= [(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z; (\operatorname{ch} z)'' = (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z] = \pi i \operatorname{ch} z \Big|_{z=-1} = \pi i \operatorname{ch}(-1) = \pi i \operatorname{ch} 1.$$

1.6 Степеневі ряди функції комплексної змінної. Ряд Лорана

Означення. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots,$$

де z — комплексна змінна, $c_0, c_1, \dots, c_n$ — сталі комплексні числа (коефіцієнти ряду), z_0 — комплексне число (центр ряду), називається **степеневим**.

Ті значення z , при яких ряд збігається, називають **точками збіжності**. Множина точок збіжності утворює **область збіжності** степеневому ряду.

Область $|z - z_0| < R$, $R > 0$, у кожній точці якої степеневий ряд збігається, а зовні її — розбігається, називають **кругом збіжності** з центром у точці z_0 , число R — **радіусом збіжності** цього ряду. На межі круга ряд може як збігатися, так і розбігатися.

Радіус збіжності степеневому ряду знаходять за формулами:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad \text{або} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}},$$

якщо границі існують.

Якщо $R = 0$, то ряд збігається в єдиній точці $z = z_0$, а для $R = \infty$ ряд збігається на всій комплексній площині.

Степеневий ряд в крузі збіжності збігається до аналітичної функції, яка є сумою ряду. Степеневий ряд в крузі збіжності можна почленно інтегрувати і диференціювати довільне число раз, при цьому радіус збіжності одержаних рядів дорівнює радіусові збіжності початкового ряду.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в крузі $|z - z_0| < R$, то вона може бути розвинута в ньому у збіжний степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \text{ при цьому коефіцієнти цього ряду визначаються}$$

$$\text{однозначно за формулами } c_n = \frac{n!}{2\pi \cdot i} \cdot \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$, де C – довільний замкнутий контур всередині круга аналітичності, що містить точку z_0 .

Однозначна функція $f(z)$, аналітична в крузі $|z - z_0| < R$, може бути єдиним чином розвинена в ньому в збіжний до неї **ряд Тейлора**

$$f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} \cdot (z - z_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n.$$

Отже, розвинути функцію в ряд Тейлора в крузі $|z - z_0| < R$, означає представити її у вигляді ряду $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$.

Якщо $z_0 = 0$, то маємо **ряд Маклорена**

$$f(0) + f'(0) \cdot z + \frac{f''(0)}{2!} \cdot z^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n.$$

Однозначна функція $f(z)$, аналітична в кільці $0 \leq r < |z - z_0| < R \leq +\infty$, може бути єдиним чином розвинена в ньому в збіжний до неї **ряд Лорана**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

де коефіцієнти c_n знаходяться за формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{|z-z_0|=l} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots; r < l < R).$$

Означення. Головною частиною ряду Лорана називають ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \text{ а правильною частиною ряду Лорана}$$

$$\text{— ряд } \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

При цьому ряд $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ збігається в крузі

$$|z-z_0| < R, \text{ а ряд } f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \text{ збігається при } |z-z_0| > r.$$

У кільці $r < |z-z_0| < R$ ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ збігається до аналітичної функції $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

Рядом Лорана для функції $f(z)$ в околі точки $z = +\infty$ буде ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \text{ який збігається в кільці } r < |z| < \infty. \text{ У цьому}$$

випадку головною частиною ряду Лорана є ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, а

правильною є ряд $\sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n$.

На практиці для знаходження коефіцієнтів c_n намагаються

$$\text{уникнути застосування формул } c_n = \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{|z-z_0|=l} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

оскільки вони призводять до громіздких викладок при обчисленні коефіцієнтів, а застосовують відомі розвинення в ряд Маклорена (Додаток А).

Задача 9. Знайти радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} e^{(i+2)n} z^n$.

Розв'язання.

Радіус збіжності знаходимо за формулою $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$, де

$$\begin{aligned} c_n &= e^{(i+2)n} : R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|e^{(i+2)n}|}} = \frac{1}{|e^{i+2}|} = \frac{1}{|e^2 (\cos 1 + i \sin 1)|} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(e^2 \cos 1)^2 + (e^2 \sin 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{e^4}} = \frac{1}{e^2}. \end{aligned}$$

Задача 10. Розвинути функції в ряд Тейлора по степенях z , використовуючи відомі формули (Додаток А):

$$\text{а) } f(z) = \ln(z+4); \quad \text{б) } f(z) = \operatorname{ch}^2 \frac{z}{2}.$$

Розв'язання.

а) застосуємо розвинення в ряд

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1.$$

Перетворимо задану функцію наступним чином:

$$\ln(z+4) = \ln\left(4\left(\frac{z}{4} + 1\right)\right) = \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{z}{4}\right) = \ln 4 + \frac{z}{4} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z}{4}\right)^2 + \dots$$

$$\text{Маємо } f(z) = \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^n}{n \cdot 4^n}, \text{ де } \left|\frac{z}{4}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 4.$$

б) переходимо від гіперболічної функції до тригонометричної функції: $f(z) = \operatorname{ch}^2 \frac{z}{2} = \cos^2 \frac{i \cdot z}{2} = \frac{1 + \cos(i \cdot z)}{2}$. Застосуємо розвинення в ряд

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty.$$

Тоді

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(1 + 1 - \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^4}{4!} - \dots \right) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Задача 11. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{3z}{z^2 - z - 2}$ по степенях z .

Розв'язання.

Задана функція є аналітичною в усіх точках, окрім $z = 2$ та $z = -1$, в яких знаменник обертається на нуль. Розглянемо розвинення функції в ряд Лорана: а) в крузі $|z| < 1$; б) в кільці $1 < |z| < 2$; в) в кільці $2 < |z| < +\infty$.

Розкладемо функцію $f(z)$ на суму найпростіших дробів:

$$f(z) = \frac{3z}{z^2 - z - 2} = \frac{3z}{(z-2)(z+1)} = \frac{2}{z-2} + \frac{1}{z+1}.$$

а) отримаємо розвинення $f(z)$ в крузі $|z| < 1$. Застосуємо формулу

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1. \text{ Зробимо перетворення для дробів:}$$

$$\frac{2}{z-2} = \frac{2}{-2 \cdot \left(1 - \frac{z}{2}\right)} = \frac{-1}{1 - \frac{z}{2}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 2,$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1 - (-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n, \quad |z| < 1.$$

$$\text{Тоді } f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n, \quad |z| < 1.$$

б) отримаємо розвинення $f(z)$ в кільці $1 < |z| < 2$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$ для

функції $\frac{2}{z-2}$ є збіжним в цьому кільці, оскільки $|z| < 2$, а ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$ для функції $\frac{1}{z+1}$ є розбіжним для $|z| > 1$, тому зробимо

перетворення для функції:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}}$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1. \quad \text{Тоді} \quad f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}} \quad \text{в кільці}$$

$$1 < |z| < 2.$$

в) отримаємо розвинення $f(z)$ для $|z| > 2$. Для функції $\frac{2}{z-2}$ ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$ є розбіжним для $|z| > 2$. Зробимо перетворення функції:

$$\frac{2}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{2}{1-\frac{2}{z}} = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad \left|\frac{2}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 2.$$

Для функції $\frac{1}{z+1}$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}}$ є збіжним для $|z| > 1$. Тому він є збіжним і для $|z| > 2$. Тоді задана функція $f(z)$ для $|z| > 2$ має розвинення

$$f(z) = \frac{2}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{z^{n+1}}.$$

1.7 Індивідуальні завдання

Завдання 1. Задано комплексні числа z_1 , z_2 , z_3 . Виконати дії над ними: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$. Представити z_2 у тригонометричній формі, а z_3 у показниковій формі

	z_1	z_2	z_3
1.	$-3 + 2i$	$2 - 3i$	$-3 + 3i$
2.	$2 + 3i$	$1 + 4i$	$-\sqrt{3} - 3i$
3.	$-5 + 2i$	$4 + i$	$3 - \sqrt{3}i$
4.	$5 - 3i$	$3 - i$	$-\sqrt{5} + i \cdot \sqrt{15}$
5.	$-1 + 3i$	$5 - 2i$	$-4 - 4i$
6.	$-4 - 3i$	$2 + 5i$	$\sqrt{7} - i \cdot \sqrt{21}$
7.	$4 + 5i$	$5 - i$	$-3\sqrt{3} + 3i$
8.	$4 - i$	$5 + 3i$	$-\sqrt{15} - i \cdot \sqrt{5}$
9.	$5 + i$	$3 + 4i$	$2 - 2i$
10.	$-6 + i$	$5 + 2i$	$-4 + 4i$
11.	$1 + i$	$6 - 7i$	$-7\sqrt{3} - i \cdot 21$
12.	$-6 - i$	$2 + i$	$\sqrt{3} - i$
13.	$5 + 4i$	$6 - i$	$-1 + i$
14.	$3 + 2i$	$4 + 3i$	$-3 + \sqrt{3}i$

Завдання 2. Обчислити. Відповідь надати в алгебраїчній формі

1.	а)	$(-1 - i)^8$	б)	$\sqrt[3]{125 \cdot i}$
2.	а)	$(-1 + \sqrt{3} \cdot i)^{12}$	б)	$\sqrt[3]{-125 \cdot i}$

3.	a)	$(-\sqrt{3}-i)^{24}$	б)	$\sqrt[3]{8 \cdot i}$
4.	a)	$(-1+i)^8$	б)	$\sqrt[3]{-8 \cdot i}$
5.	a)	$(-1-\sqrt{3} \cdot i)^{18}$	б)	$\sqrt[3]{27 \cdot i}$
6.	a)	$(-\sqrt{3}+i)^6$	б)	$\sqrt[3]{-27 \cdot i}$
7.	a)	$(-\sqrt{2}-\sqrt{2} \cdot i)^4$	б)	$\sqrt[3]{216 \cdot i}$
8.	a)	$(-1+\sqrt{3} \cdot i)^{18}$	б)	$\sqrt[3]{-216 \cdot i}$
9.	a)	$(-\sqrt{3}-i)^6$	б)	$\sqrt[3]{729 \cdot i}$
10.	a)	$(-\sqrt{2}+\sqrt{2} \cdot i)^{12}$	б)	$\sqrt[3]{-729 \cdot i}$
11.	a)	$(-1-\sqrt{3} \cdot i)^{12}$	б)	$\sqrt[3]{64 \cdot i}$
12.	a)	$(-\sqrt{3}+i)^{24}$	б)	$\sqrt[3]{-64 \cdot i}$
13.	a)	$(-2-2i)^8$	б)	$\sqrt[3]{343 \cdot i}$
14.	a)	$(-3+3i)^4$	б)	$\sqrt[3]{-343 \cdot i}$

Завдання 3. З'ясувати, яка крива визначається заданим рівнянням. Побудувати її

1.	$\operatorname{Re}(2 \cdot z + 8) = z ^2$	2.	$ z = 2 + \operatorname{Im} z$
3.	$ z - 2 \cdot i = z - 4 $	4.	$z \cdot \bar{z} + 6 \cdot \bar{z} = 7 - 6 \cdot i \cdot \operatorname{Im} z$
5.	$ z - i = \operatorname{Im} z$	6.	$\operatorname{Re}(z + 1) = z $
7.	$z \cdot \bar{z} = 4 \cdot \operatorname{Im} \bar{z}$	8.	$\operatorname{Im}(\bar{z} \cdot (1 - i)) = 2$
9.	$ z - 2 = \sqrt{9 - 8 \cdot \operatorname{Re} z}$	10.	$\operatorname{Im}(z^2 - 2z) = 2 \operatorname{Re}(1 + i \cdot z)$
11.	$ z ^2 = \operatorname{Im}(8z)$	12.	$\bar{z}^2 - z^2 = 4 \cdot i$
13.	$ z = \operatorname{Im}(z + 2 \cdot i)$	14.	$\operatorname{Re}(0,75 - z) = z ^2$

Завдання 4. Побудувати множину точок, що задовольняє заданим умовам

1.	$\begin{cases} 2 \leq z+2 < 3 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{2\pi}{3} \end{cases}$	2.	$\begin{cases} 2 < z+i \leq 4 \\ -\frac{3\pi}{4} \leq \arg z < \frac{\pi}{6} \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 2 < z-1 \leq 4 \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg z < \frac{\pi}{2} \end{cases}$	4.	$\begin{cases} 3 \leq z+2i < 5 \\ -\frac{\pi}{6} < \arg z \leq \pi \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 3 \leq z+1 < 4 \\ \frac{\pi}{6} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$	6.	$\begin{cases} 2 < z-i \leq 4 \\ -\frac{5\pi}{6} \leq \arg z < \frac{\pi}{2} \end{cases}$
7.	$\begin{cases} 3 < z-2 \leq 4 \\ -\frac{\pi}{6} \leq \arg z < \frac{\pi}{3} \end{cases}$	8.	$\begin{cases} 3 \leq z-2i < 5 \\ \frac{\pi}{3} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$
9.	$\begin{cases} 3 \leq z+3 < 5 \\ \frac{\pi}{3} < \arg z \leq \frac{5\pi}{6} \end{cases}$	10.	$\begin{cases} 5 < z+3i \leq 6 \\ -\frac{2\pi}{3} \leq \arg z < 0 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} 5 < z-4 \leq 7 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \arg z < \pi \end{cases}$	12.	$\begin{cases} 3 \leq z-3i < 5 \\ \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{2\pi}{3} \end{cases}$
13.	$\begin{cases} 3 \leq z-3 < 5 \\ -\frac{\pi}{3} < \arg z \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$	14.	$\begin{cases} 5 < z-4i \leq 7 \\ \frac{\pi}{4} \leq \arg z < \pi \end{cases}$

Завдання 5. Відновити функцію $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ по відомій її дійсній $u(x, y)$ або уявній $v(x, y)$ частині

1.	$v = x + y$	8.	$u = x^2 - y^2 + 2xy - 3$
----	-------------	----	---------------------------

2.	$u = 2e^x \cos y - x$	9.	$v = 6xy^2 - 2x^3 + x^2 - y^2$
3.	$v = x^3 - 3xy^2 + 2xy$	10.	$u = 3x^2 y - y^3 + 6xy$
4.	$u = 4xy - e^x \cos y$	11.	$v = x^2 - y^2 + 2x + 3$
5.	$v = e^x \sin y - x$	12.	$u = e^x \cos y + 2xy$
6.	$u = y^2 - x^2$	13.	$v = 4xy + 5x$
7.	$v = y^3 - 3x^2 y + 1$	14.	$u = 3xy + 3x + 3y$

Завдання 6. Обчислити інтеграли

1.	a)	$\int_0^i (\sin z + \cos z) dz$	в)	$\int_{ z+1 =6} \frac{\sin^2(0,5 \cdot z) - 3}{z^2 - \pi \cdot z} dz$
	б)	$\int_{ z-2 =2} \frac{\operatorname{ch} z}{z^4 - 1} dz$	г)	$\int_{ z =2\pi} \frac{e^{-i \cdot z} + \frac{z^3}{(z - \pi)^3}}{\pi} dz$
2.	a)	$\int_{1-i}^{2i} 4z dz$	в)	$\int_{ z-i =2} \frac{e^{-i \cdot z} + 1}{z^2 - i \cdot z} dz$
	б)	$\int_{ z-1-i =1} \frac{\sin(\pi \cdot (z-1))}{z^2 - 2 \cdot z + 2} dz$	г)	$\int_{ z-1 =7} \frac{z^5 - z^3}{(z + 3 \cdot i)^3} dz$
3.	a)	$\int_{-1}^i z \cdot e^{z^2} dz$	в)	$\int_{ z-2 =3} \frac{\cos^2 z + 1}{z^2 - \frac{\pi}{3} \cdot z} dz$
	б)	$\int_{ z =1} \frac{\cos(z + i \cdot \pi)}{z^2 - 2 \cdot z} dz$	г)	$\int_{ z =\pi} \frac{1 - \sin 5z}{\left(z + \frac{\pi}{2}\right)^3} dz$

4.	a)	$\int_{-2-i}^{2+i} (2z+3)dz$	В)	$\int_{ z+2 \cdot i =2} \frac{4z \, dz}{z^2 + 5 \cdot i \cdot z - 6}$
	б)	$\int_{ z-2 \cdot i =3} \frac{dz}{z^2 + 2 \cdot i \cdot z}$	Г)	$\int_{ z =2\pi} \frac{e^{i \cdot z} + \frac{z^3}{\pi}}{(z + \pi)^3} dz$
5.	a)	$\int_0^{1+i} \sin z \, dz$	В)	$\int_{ z =3} \frac{e^{i \cdot z}}{z^2 + 1} dz$
	б)	$\int_{ z =2} \frac{z \, dz}{(z-i) \cdot (z-3)}$	Г)	$\int_{ z =1,5\pi} \frac{\cos^2 \frac{z}{2} - 3z}{(z + \pi)^3} dz$
6.	a)	$\int_{-1}^i z^2 \cdot e^{z^3} dz$	В)	$\int_{ z+2 =4} \frac{\sin z \cdot \sin(z + \pi)}{z^2 - \frac{\pi}{2} \cdot z} dz$
	б)	$\int_{ z =1,5} \frac{z \, dz}{z^2 - 3 \cdot z + 2}$	Г)	$\int_{ z-2 =3} \frac{i \cdot \operatorname{ch}^2 z}{z^3} dz$
7.	a)	$\int_{\pi+i}^{\frac{\pi}{2}} \cos z \, dz$	В)	$\int_{ z+3 \cdot i =5} \frac{e^{i \cdot \frac{z}{3}} + 2}{z^2 + 3 \cdot i \cdot z} dz$
	б)	$\int_{ z =0,5} \frac{z+2}{(z^2 - z) \cdot (z-2)} dz$	Г)	$\int_{ z-i =3} \frac{\sin(i \cdot \pi \cdot z)}{(z - 0,5 \cdot i)^3} dz$
8.	a)	$\int_{\sqrt[3]{3}}^{1+i} z^2 dz$	В)	$\int_{ z =2,5} \frac{z^2 + z + 3}{z^2 - 4} dz$
	б)	$\int_{ z =1,5} \frac{2z^2 dz}{(z+1) \cdot (z-2)}$	Г)	$\int_{ z =2\pi} \frac{e^z - \frac{i \cdot z^3}{\pi}}{(z + \pi \cdot i)^3} dz$

9.	a)	$\int_1^i (2z^3 - 5z^4) dz$	Б)	$\int_{ z-1 =2} \frac{\sin(1,5 \cdot \pi \cdot z)}{z^2 - z} dz$
	б)	$\int_{ z =3} \frac{z dz}{(z^2 + 10) \cdot (z + 2)}$	Г)	$\int_{ z+i =6} \frac{\cos z + 4z^2}{z^3} dz$
10.	a)	$\int_{-1-i}^{1+i} (2z + 3) dz$	Б)	$\int_{ z-3 \cdot i =3} \frac{\ln z dz}{z^2 - 6 \cdot i \cdot z - 8}$
	б)	$\int_{ z =2} \frac{dz}{(z^2 + 4z) \cdot (z + 3)}$	Г)	$\int_{ z+1 =7} \frac{\cos(i \cdot \pi \cdot z)}{(z - 3 \cdot i)^3} dz$
11.	a)	$\int_{1-i}^0 (4z^3 + z) dz$	Б)	$\int_{ z-2 =5} \frac{\operatorname{sh} \frac{i \cdot \pi \cdot z}{2}}{z^2 - z} dz$
	б)	$\int_{ z-i =1,5} \frac{e^{i \cdot z}}{z^2 + 1} dz$	Г)	$\int_{ z-2 \cdot i =8} \frac{\cos(\pi \cdot z)}{(z - 1)^3} dz$
12.	a)	$\int_i^{2i} z \cdot e^{z^2} dz$	Б)	$\int_{ z+i =2} \frac{e^{\frac{z}{2i}} \cdot \cos \frac{\pi \cdot z}{2i}}{z^2 + 2 \cdot i \cdot z} dz$
	б)	$\int_{ z =3} \frac{z dz}{(z + 4) \cdot (z - i)}$	Г)	$\int_{ z =\pi} \frac{\operatorname{sh}(i \cdot z)}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3} dz$
13.	a)	$\int_{-1-i}^0 \sin z dz$	Б)	$\int_{ z-6 =7} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi \cdot i \cdot z}{5}}{z^2 - 5z} dz$
	б)	$\int_{ z-i =2} \frac{e^z}{z^2 + 4} dz$	Г)	$\int_{ z-1 =7} \frac{z^3 - z^5}{(z + i)^3} dz$

14.	a)	$\int_0^{1+i} \cos z \cdot \sin z \, dz$	В)	$\int_{ z =4,5} \frac{\ln(z+e)}{z^2 - e \cdot z} dz$
	б)	$\int_{ z-i =2} \frac{e^z \, dz}{(z+4i) \cdot (z-i)}$	Г)	$\int_{ z =2\pi} \frac{\operatorname{ch}(5 \cdot i \cdot z)}{(z-\pi)^3} dz$

Завдання 7. Знайти радіус збіжності степеневого ряду

1.	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2+i)^n}$	2.	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3+i}{2} \right)^n \cdot z^n$
3.	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i \cdot 2n}{n+2 \cdot i} \right)^n \cdot z^n$	4.	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+i \cdot n) \cdot z^n}{\sqrt{n^2+4 \cdot i}}$
5.	$\sum_{n=0}^{\infty} e^{i \cdot n} \cdot z^n$	6.	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n+i} \cdot z^n$
7.	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2+i} \right)^n \cdot z^n$	8.	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2 \cdot i)^n}{n+1} \cdot z^n$
9.	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\cos(i \cdot n)}$	10.	$\sum_{n=0}^{\infty} e^{(3+2 \cdot i)n} \cdot z^n$
11.	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt{3}-i)^n} \cdot z^n$	12.	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1-i)^{2n}}$
13.	$\sum_{n=0}^{\infty} (1-i)^{2n} \cdot z^n$	14.	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3 \cdot i - 4)^n}{n^2} \cdot z^n$

Завдання 8. Розвинути функції в ряд Тейлора функцію $f(z)$ по степенях z , використовуючи відомі формули (Додаток А)

1.	$f(z) = \frac{z}{z^2 + i}$	2.	$f(z) = \ln(2 - z)$
3.	$f(z) = \cos^2 \frac{i \cdot z}{2}$	4.	$f(z) = \sin^2 \frac{i \cdot z}{2}$
5.	$f(z) = \ln(3 + z)$	6.	$f(z) = \frac{e^{i \cdot z}}{z}$
7.	$f(z) = \sin^2 \frac{1}{z}$	8.	$f(z) = z^4 \cos \frac{1}{z}$
9.	$f(z) = \frac{z}{z^3 - i}$	10.	$f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}$
11.	$f(z) = \sin^2 \frac{i \cdot z}{4}$	12.	$f(z) = \ln(5 + z)$
13.	$f(z) = \frac{e^{-i \cdot z}}{z}$	14.	$f(z) = \cos^2 \frac{i \cdot z}{4}$

Завдання 9. Розвинути функцію в ряд Лорана в указаному кільці

1.	$f(z) = \frac{4z + 10}{(z + 1) \cdot (z - 5)}$	$1 < z < 5$
2.	$f(z) = \frac{7z}{(z + 2) \cdot (z - 5)}$	$2 < z < 5$
3.	$f(z) = \frac{3z}{(z + 1) \cdot (z - 2)}$	$1 < z < 2$
4.	$f(z) = \frac{z + 4}{(z + 1) \cdot (z - 2)}$	$1 < z < 2$

5.	$f(z) = \frac{5z}{(z-2) \cdot (z+3)}$	$2 < z < 3$
6.	$f(z) = \frac{12-z}{(z-2) \cdot (z+3)}$	$2 < z < 3$
7.	$f(z) = \frac{5z}{(z+2) \cdot (z-3)}$	$2 < z < 3$
8.	$f(z) = \frac{z+12}{(z+2) \cdot (z-3)}$	$2 < z < 3$
9.	$f(z) = \frac{4z}{(z-1) \cdot (z+3)}$	$1 < z < 3$
10.	$f(z) = \frac{6-2z}{(z-1) \cdot (z+3)}$	$1 < z < 3$
11.	$f(z) = \frac{20-3z}{(z-2) \cdot (z+5)}$	$2 < z < 5$
12.	$f(z) = \frac{3z+20}{(z+2) \cdot (z-5)}$	$2 < z < 5$
13.	$f(z) = \frac{24-z}{(z-3) \cdot (z+4)}$	$3 < z < 4$
14.	$f(z) = \frac{3z+8}{(z+1) \cdot (z-4)}$	$1 < z < 4$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

ЕЛЕМЕНТИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

2. ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ «ЕЛЕМЕНТИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ»

2.1 Перетворення Лапласа. Зображення та оригінал

Означення. Оригіналом називається комплексна функція $f(t) = u(t) + i \cdot v(t)$ дійсного аргументу t , яка задовольняє умовам:

1) $f(t)$ – однозначна, неперервна або кусково-неперервна (має скінченне число точок розриву 1-го роду) функція разом зі своїми похідними порядку n в інтервалі $t \in (-\infty; +\infty)$, тобто інтегрована на будь-якому скінченному проміжку;

2) $f(t) = 0$ при всіх $t < 0$;

3) існують такі дійсні числа $M > 0$, $s \geq 0$, що при всіх $t > 0$ має місце нерівність $|f(t)| \leq M \cdot e^{s \cdot t}$, тобто функція $f(t)$ зростає не швидше, ніж деяка показникова функція.

Означення. Число $s_0 \geq 0$, для якого нерівність в умові 3) виконується для всіх $s = s_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) і не виконується для всіх $s = s_0 - \varepsilon$ (s_0 – точна нижня межа чисел s), називається **показником зростання функції $f(t)$** .

Означення. Функції, які є обмеженими (при $t \rightarrow \infty$) або задовольняють умові 3), називаються **функціями експоненціального типу**.

Функції, що задовольняють умовам 1)-3), утворюють клас оригіналів D .

Найпростішою функцією-оригіналом є **єдинична функція Хевісайда** $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$. Вона задовольняє трьом умовам оригіналу.

Якщо функція $f(t)$ задовольняє умовам функції-оригіналу 1) та 3), то функція $f(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ задовольняє всім трьома умовами оригіналу.

Надалі для скорочення запису замість $f(t) \cdot \eta(t)$ будемо писати $f(t)$: вважаємо, що всі функції, які задовольняють умовам 1) та 3), також задовольняють і умові 2), тобто дорівнюють нулю при всіх $t < 0$. Це можна пояснити так: у фізичних задачах, які зводяться до запису диференціальних рівнянь з початковими умовами, змінна t - це час, і процес досліджується для всіх $t \in [0; +\infty)$.

Означення. Зображенням функції-оригіналу $f(t) \in D$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i \cdot \sigma$, яка визначається інтегралом Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

Цю рівність ще називають **перетворенням Лапласа**, або **лапласовим зображенням**, або **L -зображенням**.

Інтеграл існує і рівномірно збігається, якщо $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

Співвідношення між оригіналом $f(t)$ і зображенням $F(p)$ записують: $f(t) \div F(p)$, $F(p) \div f(t)$, $f(t) \doteq F(p)$, $F(p) \doteq f(t)$, $f(t) \leftarrow F(p)$, $F(p) \rightarrow f(t)$, $F(p) = L\{f(t)\}$.

Якщо функція $f(t)$ є функцією-оригіналом з показником зростання s_0 , то функція $F(p)$ збігається в півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$ і аналітична в ній.

Зміст розгляду зображень полягає в тому, що з їх допомогою можна спростити розв'язання багатьох задач. Наприклад, звести розв'язання диференціальних рівнянь до виконання найпростіших алгебраїчних операцій по знаходженню зображень.

Зауваження. Якщо $f(t) \div F(p)$, то $\lim_{|p| \rightarrow +\infty} F(p) = 0$.

2.2 Властивості перетворення Лапласа. Теореми

Теорема єдності. Якщо $F(p)$ і $\Phi(p)$ – два зображення і вони співпадають, то будуть співпадати і їх оригінали в усіх точках їх неперервності.

Лінійність. Якщо $f_i(t) \div F_i(p)$, $i = \overline{1, n}$, то для будь-яких комплексних чисел c_i маємо

$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot f_i(t) \div \sum_{i=1}^n c_i \cdot F_i(p).$$

Теорема подібності. Якщо $f(t) \div F(p)$, $\alpha > 0$, $\alpha \in R$, то

$$f(\alpha \cdot t) \div \frac{1}{\alpha} \cdot F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Теорема запізнення. Якщо $f(t) \div F(p)$, $t_0 > 0$, то

$$f(t - t_0) \div e^{-p \cdot t} \cdot F(p).$$

Наслідок з теореми запізнення. Якщо $f(t) \div F(p)$, то

$$f(\omega \cdot t - t_0) \div \frac{1}{\omega} \cdot e^{-p \cdot \frac{t_0}{\omega}} \cdot F\left(\frac{p}{\omega}\right).$$

Теорема випередження. Якщо $f(t) \div F(p)$, $t_0 > 0$, то

$$f(t + t_0) \div e^{p \cdot t_0} \cdot \left(F(p) - \int_0^{t_0} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt \right).$$

Теорема зсуву. Якщо $f(t) \div F(p)$, то $e^{p_0 \cdot t} \cdot f(t) \div F(p - p_0)$ або $e^{-p_0 \cdot t} \cdot f(t) \div F(p + p_0)$.

Теорема про диференціювання функції-оригіналу. Якщо $f(t) \div F(p)$ і похідні функції $f'(t)$ також є функціями-оригіналами, то

$$\begin{aligned}
& f'(t) \div p \cdot F(p) - f(0), \\
& f''(t) \div p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0), \\
& f'''(t) \div p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0), \\
& \dots\dots\dots, \\
& f^{(n)}(t) \div p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} \cdot f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

Теорема про диференціювання зображення. Якщо $F(p) \div f(t)$, то

$$\begin{aligned}
& F'(p) \div t \cdot f(t), \\
& F''(p) \div t^2 \cdot f(t), \\
& F'''(p) \div -t^3 \cdot f(t), \\
& \dots\dots\dots, \\
& F^{(n)}(p) \div (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t).
\end{aligned}$$

Останню формулу представимо у увигляді:

$$t^n \cdot f(t) \div (-1)^n \cdot F^{(n)}(p).$$

Теорема про інтегрування функції-оригіналу. Якщо $f(t) \div F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}.$$

Теорема про інтегрування зображення. Якщо $f(t) \div F(p)$ і інтеграл $\int_p^{+\infty} F(\xi) d\xi$ збіжний, то

$$\int_p^{+\infty} F(\xi) d\xi \div \frac{f(t)}{t}.$$

Згорткою функцій оригіналів $f_1(t), f_2(t)$ називається інтеграл

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) \cdot f_2(\tau) d\tau.$$

Теорема множення (теорема про згортку). Якщо $f_1(t) \div F_1(p)$, $f_2(t) \div F_2(p)$, то

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \div f_1(t) * f_2(t).$$

Інтеграл Дюамеля:

$$\begin{aligned} p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \div f_1(t) \cdot f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2'(t-\tau) d\tau = \\ = f_2(t) \cdot f_1(0) + \int_0^t f_2(\tau) \cdot f_1'(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Теорема необхідні для розв'язування прикладів: якщо відома функція-оригінал, то знайти її зображення або навпаки – по відомому зображенню знайти функцію-оригінал.

Задача 1. Для заданої функції $f(t) = 3 - te^t + \sin 2t$ знайти зображення $F(p)$ функції $f(t) \cdot \eta(t)$ за означенням (інтеграл Лапласа) та користуючись таблицею зображень (Додаток Б), де $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда.

Розв'язання.

1. За означенням

$$\begin{aligned} F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt = \int_0^{+\infty} (3 - te^t + \sin 2t) \cdot e^{-p \cdot t} dt = 3 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} dt - \\ - \int_0^{+\infty} t \cdot e^{(1-p)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} \cdot \sin 2t dt. \end{aligned}$$

Обчислимо окремо кожний з трьох інтегралів:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} dt &= -\frac{1}{p} \cdot \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-p \cdot t} d(-p \cdot t) = -\frac{1}{p} \cdot \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(e^{-p \cdot t} \Big|_0^A \right) = \\ &= -\frac{1}{p} \cdot \lim_{A \rightarrow +\infty} (e^{-p \cdot A} - e^{-p \cdot 0}) = -\frac{1}{p} \cdot \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{p \cdot A}} - 1 \right) = -\frac{1}{p} \cdot (0 - 1) = \frac{1}{p}; \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} t \cdot e^{(1-p)t} dt &= \left[\begin{array}{l} u = t \quad \Rightarrow \quad du = dt \\ dv = e^{(1-p)t} dt \Rightarrow v = \frac{1}{1-p} \cdot \int e^{(1-p)t} d((1-p) \cdot t) = \frac{e^{(1-p)t}}{1-p} \end{array} \right] = \\
 &= t \cdot \frac{e^{(1-p)t}}{1-p} \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{1-p} \cdot \int_0^{+\infty} e^{(1-p)t} dt = \\
 &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(t \cdot \frac{e^{(1-p)t}}{1-p} \Big|_0^A - \frac{1}{(1-p)^2} \cdot e^{(1-p)t} \Big|_0^A \right) = -\frac{1}{p-1} \cdot \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^{(p-1)t}} \Big|_0^A \right) - \\
 &- \frac{1}{(p-1)^2} \cdot \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{(p-1)t}} \Big|_0^A \right) = -\frac{1}{p-1} \cdot (0-0) - \frac{1}{(p-1)^2} \cdot (0-1) = \frac{1}{(p-1)^2};
 \end{aligned}$$

в) $\int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} \cdot \sin 2t dt = I$. Застосувавши формулу інтегрування частинами

два рази, отримаємо

$$I = -\frac{1}{p^2 + 4} \cdot \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{p \cdot \sin 2t + 2 \cdot \cos 2t}{e^{p \cdot t}} \Big|_0^A \right) = \frac{2}{p^2 + 4}.$$

$$\text{Отже, } F(p) = \frac{3}{p} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{2}{p^2 + 4}.$$

2. За таблицею:

$$3 \cdot \eta(t) \div \frac{3}{p}, \quad t \cdot e^t \cdot \eta(t) \div \frac{1}{(p-1)^2}, \quad \sin 2t \cdot \eta(t) \div \frac{2}{p^2 + 4}.$$

$$\text{Маємо } F(p) = \frac{3}{p} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{2}{p^2 + 4}.$$

Задача 2. Знайти зображення функції, користуючись теоремами про зображення та оригінали: а) $\text{sh}(t+3) \cdot \eta(t+3)$, б) $t \cdot \cos 3t$, в) $\frac{\text{ch } 2t - \text{ch } t}{t}$, г) $e^{3t} \cdot \sin 2t$, д) $\int_0^t \sin 2\tau d\tau$.

Розв'язання.

а) $f(t) = \operatorname{sh}(t+3) \cdot \eta(t+3)$. За таблицею $\operatorname{sh} t \div \frac{1}{p^2 - 1}$.

Користуючись теоремою випередження, матимемо

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(t+3) \div e^{3p} \cdot \left(\frac{1}{p^2 - 1} - \int_0^3 \operatorname{sh} t \cdot e^{-pt} dt \right) &= \\ = e^{3p} \cdot \left(\frac{1}{p^2 - 1} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^3 \left(e^{(1-p)t} - e^{-(1+p)t} \right) dt \right) &= \\ = e^{3p} \cdot \left(\frac{1}{p^2 - 1} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^{(1-p)t}}{1-p} + \frac{e^{-(1+p)t}}{1+p} \right) \right) \Bigg|_0^3 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^3}{p-1} - \frac{e^{-3}}{p+1} \right); \end{aligned}$$

б) $f(t) = t \cdot \cos 3t$. За таблицею $\cos t \div \frac{p}{p^2 + 9}$. Згідно з теоремою

про диференціювання зображення

$$t \cdot \cos 3t \div -\frac{d}{dp} \left(\frac{p}{p^2 + 9} \right) = -\frac{p^2 + 9 - 2p^2}{(p^2 + 9)^2} = \frac{p^2 - 9}{(p^2 + 9)^2};$$

в) $f(t) = \frac{\operatorname{ch} 2t - \operatorname{cht}}{t}$. Користуючись таблицею та властивістю

лінійності знаходимо $\operatorname{ch} 2t - \operatorname{cht} \div \frac{p}{p^2 - 4} - \frac{p}{p^2 - 1}$. Отже, за теоремою

про інтегрування зображення маємо

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ch} 2t - \operatorname{cht}}{t} \div \int_0^\infty \left(\frac{p}{p^2 - 4} - \frac{p}{p^2 - 1} \right) dp &= \frac{1}{2} \cdot \ln |p^2 - 4| \Bigg|_p^\infty - \frac{1}{2} \cdot \ln |p^2 - 1| \Bigg|_p^\infty = \\ = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{p^2 - 4}{p^2 - 1} \right| \Bigg|_p^\infty &= \ln \sqrt{\frac{p^2 - 4}{p^2 - 1}}; \end{aligned}$$

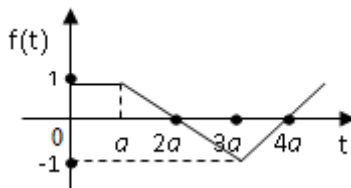
г) $f(t) = e^{3t} \cdot \sin 2t$. За таблицею $\sin 2t \div \frac{2}{p^2 + 4}$. Отже, за

теоремою зсуву $e^{3t} \cdot \sin 2t \div \frac{2}{(p-3)^2 + 4}$;

д) для $\int_0^t \sin 2\tau d\tau$ маємо $f(\tau) = \sin 2\tau$. За таблицею $\sin 2\tau \div \frac{2}{p^2 + 4}$,

а за теоремою про інтегрування оригінала $\int_0^t \sin 2\tau d\tau \div \frac{2}{p \cdot (p^2 + 4)}$.

Задача 3. Знайти зображення функції, заданої графічно



Розв'язання. Задану функцію запишемо аналітично:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 \leq t < a, \\ 1 - \frac{t-a}{a}, & a \leq t < 3a, \\ -1 + \frac{t-3a}{a}, & t \geq 3a. \end{cases}$$

За допомогою функції Хевісайда задана функція записується у вигляді:

$$f(t) = [\eta(t) - \eta(t-a)] + \left(1 - \frac{t-a}{a}\right) \cdot [\eta(t-a) - \eta(t-3a)] + \left(-1 + \frac{t-3a}{a}\right) \cdot \eta(t-3a).$$

$$\cdot \eta(t-3a) = \eta(t) + \left(-1 + 1 - \frac{t-a}{a}\right) \cdot \eta(t-a) + \left(-1 + \frac{t-a}{a} - 1 + \frac{t-3a}{a}\right) \cdot \eta(t-3a).$$

$$\cdot \eta(t-3a) = \eta(t) - \frac{t-a}{a} \cdot \eta(t-a) + 2 \frac{t-3a}{a} \cdot \eta(t-3a).$$

Користуючись теоремою записання, отримаємо функцію $F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot e^{-a \cdot p} + \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot e^{-3a \cdot p}$, яка є зображенням заданої функції $f(t)$.

2.3 Знаходження оригіналу по зображенню

Для знаходження оригіналу по зображенню у простих випадках необхідно скористатись таблицею зображень основних елементарних функцій.

Якщо $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ – правильний раціональний дріб, то його розкладають на суму найпростіших дробів і для кожного з них знаходять оригінали. В більш складних випадках користуються:

1) **Формулою Меліна.** Нехай функція $F(p)$ є аналітичною в області $\operatorname{Re} p > s_0$ і $F(p) \rightarrow 0$, коли $|p| \rightarrow \infty$ рівномірно відносно аргументу p , та виконується умова $\int_{\sigma-i\cdot\infty}^{\sigma+i\cdot\infty} |F(p)| dp < M$. Тоді

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma-i\cdot\infty}^{\sigma+i\cdot\infty} F(p) e^{p \cdot t} dt.$$

2) **Першою теоремою розвинення.** Нехай функція $F(p)$ є аналітичною в околі точки $p = \infty$ і $F(\infty) = 0$. Розвинення функції $F(p)$ в ряд Лорана має вигляд $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{p^{n+1}}$. Тоді її оригінал

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot \frac{t^n}{n!}.$$

3) **Другою теоремою розвинення.** Нехай функція $F(p)$ є аналітичною в області $\operatorname{Re} p > s_0$ і $\lim_{|p| \rightarrow +\infty} F(p) = 0$. Окрім того, $F(p)$ – дробово-раціональна функція, яка має полюси в точках p_i , $i = \overline{1, n}$,

тобто, якщо в розвиненні функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 головна частина ряду Лорана містить скінченну кількість доданків

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \dots + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad \text{то точка}$$

z_0 є **полосом порядку m** , де $m \geq 1$, $c_{-m} \neq 0$. Якщо $m = 1$, то точка z_0 – **простий полюс**.

Тоді її оригінал

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{p=p_i} [F(p)e^{p \cdot t}].$$

Зокрема, якщо всі p_i – прості полюси, а $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ і функції

$A(p)$ і $B(p)$ не мають спільних нулів, то

$$F(p) \div f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \cdot e^{p_i \cdot t}.$$

Задача 4. Знайти функцію-оригінал $f(t)$ за заданим зображенням

$$F(p): \text{ а) } F(p) = \frac{2p+5}{p^2-2p+10}; \quad \text{ б) } F(p) = \frac{2p^2+1}{(p-1) \cdot (p^2+1)}.$$

Розв'язання. а) $F(p) = \frac{2p+5}{p^2-2p+10}$. Застосуємо елементарні

перетворення для розкладання цього дробу на суму найпростіших дробів, оригінали яких відомі: виділимо повний квадрат у знаменнику дробу, а чисельник перетворимо згідно формул 13, 14 (Додаток Б):

$$\begin{aligned} \frac{2p+5}{p^2-2p+10} &= \frac{2p+5}{(p-1)^2+3^2} = 2 \cdot \frac{p+\frac{5}{2}-1+1}{(p-1)^2+3^2} = 2 \cdot \frac{p-1}{(p-1)^2+3^2} + \\ &+ 2 \cdot \frac{\frac{7}{2}}{(p-1)^2+3^2} = 2 \cdot \frac{p-1}{(p-1)^2+3^2} + \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{(p-1)^2+3^2}. \end{aligned}$$

За таблицею (Додаток Б) маємо:

$$2 \cdot \frac{p-1}{(p-1)^2 + 3^2} \div 2 \cdot e^t \cdot \cos 3t, \quad \frac{7}{(p-1)^2 + 3^2} \div \frac{7}{3} \cdot e^t \cdot \sin 2t.$$

Функція-оригінал $f(t) = e^t \cdot \left(2 \cdot \cos 3t - \frac{7}{3} \cdot \sin 3t \right).$

б) $F(p) = \frac{2p^2 + 1}{(p-1) \cdot (p^2 + 1)}.$ Розкладемо функцію $F(p)$ на суму

найпростіших дробів:

$$\frac{2p^2 + 1}{(p-1) \cdot (p^2 + 1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp + C}{p^2 + 1} = \frac{A \cdot (p^2 + 1) + (Bp + C) \cdot (p-1)}{(p-1) \cdot (p^2 + 1)},$$

$$2p^2 + 1 = A \cdot (p^2 + 1) + (Bp + C) \cdot (p-1).$$

Коефіцієнти A, B, C знаходимо комбінованим методом (методом окремих значень аргументу та методом неозначених коефіцієнтів):

$$\begin{array}{l|l} p=1 & 3 = 2A \Rightarrow A = 3/2 = 1,5; \\ p^2 & 2 = A + B \Rightarrow B = 1/2 = 0,5; \\ p & 0 = C - B \Rightarrow C = 1/2 = 0,5. \end{array}$$

Тоді

$$F(p) = 1,5 \cdot \frac{1}{p-1} + 0,5 \cdot \frac{p+1}{p^2 + 1} = 1,5 \cdot \frac{1}{p-1} + 0,5 \cdot \frac{p}{p^2 + 1} + 0,5 \cdot \frac{1}{p^2 + 1}.$$

За таблицею (Додаток Б) для кожного доданку знаходимо:

$$\frac{1}{p-1} \div e^t, \quad \frac{p}{p^2 + 1} \div \cos t, \quad \frac{1}{p^2 + 1} \div \sin t.$$

Функція-оригінал $f(t) = 1,5 \cdot e^t + 0,5 \cdot \cos t + 0,5 \cdot \sin t.$

2.4 Розв'язання задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Необхідно розв'язати задачу Коші методом операційного числення: знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \dots + a_{n-2} \cdot y'' + a_{n-1} \cdot y' + a_n = f(t)$$

при заданих початкових умовах

$$y(0)=y_0, \quad y'(0)=y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0)=y_{n-1},$$

де a_i – дійсні числа, $i=1,2,\dots,n$; y_j – дійсні числа, $j=0,1,\dots,n-1$.

Вважаємо, що шукана функція $y(t)$, всі її похідні, а також функція $f(t)$ є оригіналами.

Для знаходження зображень похідних функції $y(t)$ застосовуємо теорему диференціювання функції-оригіналу:

$$y(t) \div Y(p),$$

$$y'(t) \div p \cdot Y(p) - y(0) = p \cdot Y(p) - y_0,$$

$$y''(t) \div p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y_0 - y_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y^{(n)}(t) \div p^n \cdot Y(p) - p^{n-1} \cdot y(0) - \dots - y^{(n-1)} = p^n \cdot Y(p) - p^{n-1} y_0 - \dots - y_{n-1}.$$

Для функції $f(t)$ зображення $F(p)$ знаходимо за таблицею (Додаток Б) $f(t) \div F(p)$.

Застосовуючи властивість лінійності зображення, переходимо від диференціального рівняння оригіналів до алгебраїчного рівняння відносно невідомого зображення $Y(p)$. Матимемо

$$Q_n(p) \cdot Y(p) = F(p) + R_{n-1}(p),$$

де $Q_n(p)$ і $R_{n-1}(p)$ – алгебраїчні многочлени від p степеня n і $(n-1)$ відповідно:

$$Q_n(p) = p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_n \cdot p,$$

$$R_{n-1}(p) = (p^{n-1} \cdot y_0 + p^{n-2} \cdot y_1 + \dots + y_{n-1}) + \\ + a_1 \cdot (p^{n-2} \cdot y_0 + p^{n-3} \cdot y_1 + \dots + y_{n-1}) + \dots + a_{n-1} \cdot y_0.$$

Розв'язуємо отримане алгебраїчне рівняння відносно $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}.$$

Оригінал $y(t)$, для якого $Y(p)$ є зображенням, буде розв'язком заданого диференціального рівняння з початковими умовами.

Розглянемо цей метод для розв'язування задачі Коші для ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами.

Маємо $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = f(t)$, де $a_1, a_2 - \text{const}$, $f(t)$ – функція-оригінал, $y(t)$ – невідома функція-оригінал. Необхідно знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початковим умовам $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_{01}$.

Нехай $y(t) \div Y(p)$, $f(t) \div F(p)$. Для знаходження зображень похідних функції $y(t)$ застосовуємо теорему диференціювання функції-оригіналу:

$$y'(t) \div p \cdot Y(p) - y(0) = p \cdot Y(p) - y_0,$$

$$y''(t) \div p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y_0 - y_{01}.$$

Перейдемо від диференціального рівняння до алгебраїчного рівняння відносно зображення $Y(p)$:

$$p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y_0 - y_{01} + a_1 \cdot (p \cdot Y(p) - y_0) + a_2 \cdot Y(p) = F(p).$$

Розв'яжемо отримане алгебраїчне рівняння відносно $Y(p)$:

$$Y(p) \cdot (p^2 + a_1 \cdot p + a_2) = F(p) + p \cdot y_0 + y_{01} + a_1 \cdot y_0$$

$$Y(p) = \frac{F(p) + p \cdot y_0 + y_{01} + a_1 \cdot y_0}{p^2 + a_1 \cdot p + a_2}.$$

По зображенню $Y(p)$ знаходимо функцію-оригінал $y(t)$, яка є розв'язком задачі Коші.

Аналогічно розв'язуються системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та заданими початковими умовами.

Задача 5. Розв'язати задачу Коші для лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами за допомогою операційного числення:

$$\text{а) } y'' + 2y' + 2y = t \cdot e^t, y(0) = 1, y'(0) = -1;$$

$$\text{б) } y'' + 4y = \sin 2t + 1, y(0) = 0,25, y'(0) = 0.$$

Розв'язання. а) $y'' + 2y' + y = t \cdot e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Для знаходження зображень похідних функції $y(t)$ застосовуємо теорему диференціювання функції-оригіналу:

$$y(t) \div Y(p),$$

$$y'(t) \div p \cdot Y(p) - y(0) = p \cdot Y(p) - 1,$$

$$y''(t) \div p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 \cdot Y(p) - p + 1.$$

Для функції $f(t) = t \cdot e^t$ зображення знаходимо за таблицею

(Додаток Б): $t \cdot e^t \div \frac{1}{(p-1)^2}.$

Переходимо від диференціального рівняння до алгебраїчного рівняння відносно зображення $Y(p)$:

$$p^2 \cdot Y(p) - p + 1 + 2 \cdot (p \cdot Y(p) - 1) + Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2},$$

$$p^2 \cdot Y(p) - p + 1 + 2 \cdot p \cdot Y(p) - 2 + Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Розв'язуємо отримане алгебраїчне рівняння відносно $Y(p)$:

$$Y(p) \cdot (p^2 + 2p + 1) = \frac{1}{(p-1)^2} + p + 1 = \frac{1 + (p+1) \cdot (p-1)^2}{(p-1)^2},$$

$$Y(p) = \frac{1 + (p+1) \cdot (p-1)^2}{(p^2 + 2p + 1) \cdot (p-1)^2} = \frac{1 + (p+1) \cdot (p^2 - 2p + 1)}{(p+1)^2 \cdot (p-1)^2},$$

$$Y(p) = \frac{1 + p^3 - 2p^2 + p + p^2 - 2p + 1}{(p+1)^2 \cdot (p-1)^2} = \frac{p^3 - p^2 - p + 2}{(p+1)^2 \cdot (p-1)^2}.$$

Розкладемо функцію $Y(p)$ на суму найпростіших дробів:

$$\begin{aligned} \frac{p^3 - p^2 - p + 2}{(p+1)^2 \cdot (p-1)^2} &= \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{D}{p-1} + \frac{E}{(p-1)^2} = \\ &= \frac{A \cdot (p+1) \cdot (p-1)^2 + B \cdot (p-1)^2 + D \cdot (p-1) \cdot (p+1)^2 + E \cdot (p+1)^2}{(p+1)^2 \cdot (p-1)^2}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} p^3 - p^2 - p + 2 &= \\ &= A \cdot (p+1) \cdot (p-1)^2 + B \cdot (p-1)^2 + D \cdot (p-1) \cdot (p+1)^2 + E \cdot (p+1)^2. \end{aligned}$$

Коефіцієнти A , B , D , E знаходимо комбінованим методом (методом окремих значень аргументу та методом невизначених коефіцієнтів):

$$\left. \begin{array}{l} p = -1 \\ p = 1 \\ p^3 \\ p^2 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 = B \cdot (-2)^2 \\ 1 = E \cdot 2^2 \\ 1 = A + D \\ -1 = -A + B + D + E \end{array} \Rightarrow \begin{cases} B = E = 0,25, \\ A = 1 - D, \\ -1 = -1 + D + 0,5 + D. \end{cases} \Rightarrow$$

$$D = -0,25, \quad A = 1 - (-0,25) = 1 + 0,25 = 1,25.$$

Знайдені коефіцієнти підставимо в $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{1,25}{p+1} + \frac{0,25}{(p+1)^2} + \frac{-0,25}{p-1} + \frac{0,25}{(p-1)^2}.$$

За таблицею (Додаток Б) для кожного доданку знаходимо оригінал. Отримаємо частинний розв'язок заданого ЛНДР-2:

$$y(t) = 1,25e^{-t} + 0,25t \cdot e^{-t} - 0,25e^t + 0,25t \cdot e^t.$$

Відповідь: $y(t) = 1,25e^{-t} + 0,25t \cdot e^{-t} - 0,25e^t + 0,25t \cdot e^t$.

б) $y'' + 4y = \sin 2t + 1$, $y(0) = 0,25$, $y'(0) = 0$. Для знаходження зображень похідних функції $y(t)$ застосовуємо теорему диференціювання функції-оригіналу:

$$\begin{aligned} y(t) &\div Y(p), \\ y'(t) &\div p \cdot Y(p) - y(0) = p \cdot Y(p) - 0,25, \\ y''(t) &\div p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 \cdot Y(p) - 0,25 \cdot p, \\ \sin 2t + 1 &\div \frac{2}{p^2 + 4} + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Зображенням заданого диференціального рівняння є алгебраїчне рівняння

$$p^2 \cdot Y(p) - 0,25 \cdot p + 4 \cdot Y(p) = \frac{2}{p^2 + 4} + \frac{1}{p}.$$

Розв'язуємо його відносно $Y(p)$:

$$Y(p) \cdot (p^2 + 4) = \frac{p^2 + 2p + 4}{p \cdot (p^2 + 4)} + 0,25 \cdot p = \frac{4p^2 + 8p + 16 + p^4 + 4p^2}{4p \cdot (p^2 + 4)},$$

$$Y(p) = \frac{p^4 + 8p^2 + 8p + 16}{4p \cdot (p^2 + 4)^2}.$$

Розклавши функцію $Y(p)$ на суму найпростіших дробів і знайшовши невідомі коефіцієнти, отримаємо:

$$Y(p) = 0,25 \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{8}{(p^2 + 4)^2} \right) = 0,25 \cdot \frac{1}{p} + 2 \cdot \frac{1}{(p^2 + 2^2)^2}.$$

За таблицею (Додаток Б) для кожного доданку знаходимо оригінал. Отримаємо частинний розв'язок заданого ЛНДР-2:

$$y(t) = 0,25 + 0,125 \cdot (\sin 2t - 2t \cdot \cos 2t).$$

Відповідь: $y(t) = 0,25 + 0,125 \cdot (\sin 2t - 2t \cdot \cos 2t)$.

Задача 6. Розв'язати задачу Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь за допомогою операційного числення:

$$\begin{cases} x' = -x + 3y, & \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 1. \end{cases} \\ y' = x + y + e^{2t}, \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай для шуканих розв'язків системи зображеннями є: $x(t) \div X(p)$ і $y(t) \div Y(p)$. Застосовуємо теорему диференціювання функції-оригіналу матимемо:

$$x'(t) \div p \cdot X(p) - x(0) = p \cdot X(p) - 1,$$

$$y'(t) \div p \cdot Y(p) - y(0) = p \cdot Y(p) - 1,$$

$$e^{2t} \div \frac{1}{p-2}.$$

Отримаємо неоднорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих зображень $X(p)$ і $Y(p)$:

$$\begin{cases} p \cdot X(p) - 1 = -X(p) + 3 \cdot Y(p), \\ p \cdot Y(p) - 1 = X(p) + Y(p) + \frac{1}{p-2}. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему відносно $X(p)$ і $Y(p)$ зручним способом (методом Крамера):

$$\begin{cases} p \cdot X(p) + X(p) - 3 \cdot Y(p) = 1 \\ -X(p) + p \cdot Y(p) - Y(p) = 1 + \frac{1}{p-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(p) \cdot (p+1) - 3 \cdot Y(p) = 1 \\ -X(p) + Y(p) \cdot (p-1) = \frac{p-1}{p-2} \end{cases}$$

$$X(p) = \frac{p^2 - 1}{(p-2)^2 \cdot (p+2)}, \quad Y(p) = \frac{p^2 + p - 3}{(p-2)^2 \cdot (p+2)}.$$

Розклавши функції $X(p)$ і $Y(p)$ на суму найпростіших дробів і знайшовши невідомі коефіцієнти, отримаємо:

$$X(p) = \frac{\frac{3}{4}}{(p-2)^2} + \frac{\frac{13}{16}}{p-2} + \frac{\frac{3}{16}}{p+2}, \quad Y(p) = \frac{\frac{3}{4}}{(p-2)^2} + \frac{\frac{17}{16}}{p-2} + \frac{-\frac{1}{16}}{p+2}.$$

За таблицею (Додаток Б) для кожного доданку знаходимо оригінал. Отримаємо частинний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{4}t \cdot e^{2t} + \frac{13}{16}e^{2t} + \frac{3}{16}e^{-2t}, \\ y(t) = \frac{3}{4}t \cdot e^{2t} + \frac{17}{16}e^{2t} - \frac{1}{16}e^{-2t}. \end{cases}$$

Відповідь:
$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{4}t \cdot e^{2t} + \frac{13}{16}e^{2t} + \frac{3}{16}e^{-2t}, \\ y(t) = \frac{3}{4}t \cdot e^{2t} + \frac{17}{16}e^{2t} - \frac{1}{16}e^{-2t}. \end{cases}$$

2.5 Індивідуальні завдання

Завдання 1. Для заданої функції $f(t)$ знайти зображення $F(p)$ функції $f(t) \cdot \eta(t)$ за означенням (інтеграл Лапласа) та користуючись таблицею зображень (Додаток Б), де $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда

1.	$f(t) = 3 \cdot e^{-3 \cdot t} - 7 + \frac{t}{4}$	2.	$f(t) = 9 \cdot e^{9 \cdot t} + 2 - 5t$
3.	$f(t) = 3 \cdot e^{3 \cdot t} + 7 - \frac{t}{4}$	4.	$f(t) = 10 \cdot e^{-10 \cdot t} - 12 + t$

5.	$f(t) = 2 \cdot e^{-2 \cdot t} - 1 + \frac{t}{6}$	6.	$f(t) = 10 \cdot e^{10 \cdot t} + 12 - t$
7.	$f(t) = 2 \cdot e^{2 \cdot t} + 1 - \frac{t}{6}$	8.	$f(t) = -e^{-11t} - \frac{5}{7} + 0,9t$
9.	$f(t) = 4 \cdot e^{-4 \cdot t} - 9 + \frac{t}{8}$	10.	$f(t) = e^{8 \cdot t} + 6 - 8t$
11.	$f(t) = 4 \cdot e^{4 \cdot t} + 9 - \frac{t}{8}$	12.	$f(t) = -4 \cdot e^{-t} - 13 + \frac{t}{3}$
13.	$f(t) = 5 \cdot e^{-5 \cdot t} - 3 + \frac{t}{2}$	14.	$f(t) = 15 \cdot e^{5 \cdot t} + 4 - \frac{t}{9}$

Завдання 2. Знайти функцію-оригінал за заданим зображенням

1.	a) $F(p) = \frac{2p-1}{p^2+2p+5};$	б) $F(p) = \frac{-7p^2+5p-38}{(p^2+4) \cdot (p+6)}.$
2.	a) $F(p) = \frac{8-2p}{p^2-4p+13};$	б) $F(p) = \frac{4p^2+2p-8}{(p^2+9) \cdot (p-5)}.$
3.	a) $F(p) = \frac{3p+6}{p^2+6p+13};$	б) $F(p) = \frac{-2p^2+2p-56}{(p^2+16) \cdot (p+4)}.$
4.	a) $F(p) = \frac{7-3p}{p^2-2p+10};$	б) $F(p) = \frac{9p^2-2p+197}{(p^2+25) \cdot (p-3)}.$
5.	a) $F(p) = \frac{2p-2}{p^2-6p+18};$	б) $F(p) = \frac{-3p^2-3p-410}{(p^2+100) \cdot (p+2)}.$
6.	a) $F(p) = \frac{4-3p}{p^2+8p+20};$	б) $F(p) = \frac{5p^2-16p+207}{(p^2+36) \cdot (p-9)}.$
7.	a) $F(p) = \frac{3p+3}{p^2-8p+41};$	б) $F(p) = \frac{-9p^2+13p-450}{(p^2+49) \cdot (p+8)}.$
8.	a) $F(p) = \frac{4p+2}{p^2-4p+20};$	б) $F(p) = \frac{11p^2-5p+626}{(p^2+64) \cdot (p-7)}.$

9.	a) $F(p) = \frac{1-2p}{p^2+10p+34}$;	б) $F(p) = \frac{14p-76}{(p^2+121) \cdot (p+5)}$.
10.	a) $F(p) = \frac{2-3p}{p^2+6p+25}$;	б) $F(p) = \frac{6p^2-15p+459}{(p^2+81) \cdot (p-6)}$.
11.	a) $F(p) = \frac{2p+3}{p^2-10p+61}$;	б) $F(p) = \frac{-12p-112}{(p^2+144) \cdot (p-4)}$.
12.	a) $F(p) = \frac{3p+4}{p^2+4p+29}$;	б) $F(p) = \frac{p+181}{(p^2+169) \cdot (p+3)}$.
13.	a) $F(p) = \frac{3-2p}{p^2+12p+45}$;	б) $F(p) = \frac{-4p^2+6p-36}{(p^2+4) \cdot (p-2)}$.
14.	a) $F(p) = \frac{3p-5}{p^2-12p+40}$;	б) $F(p) = \frac{21p^2-11p+190}{(p^2+9) \cdot (p-1)}$.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння за допомогою операційного числення

1.	$y'' + y = 6 \cdot e^{-t}$ $y(0) = 3, y'(0) = 1$	2.	$y'' - y' = t^2$ $y(0) = 0, y'(0) = 1$
3.	$y'' + y' = t^2 + 2 \cdot t$ $y(0) = 0, y'(0) = -2$	4.	$y'' - y = \cos 3t$ $y(0) = 1, y'(0) = 1$
5.	$y'' + y' + y = 7 \cdot e^{2 \cdot t}$ $y(0) = 1, y'(0) = 4$	6.	$y'' + y' - 2y = -2t - 2$ $y(0) = 1, y'(0) = 1$
7.	$y'' - 9y = -\cos t + \sin t$ $y(0) = -3, y'(0) = 2$	8.	$y'' + 2y' = 2 + e^t$ $y(0) = 1, y'(0) = 2$
9.	$y'' - y' = \sin 3t$ $y(0) = 1, y'(0) = 0$	10.	$y'' + 2y' = \sin \frac{t}{2}$ $y(0) = -2, y'(0) = 4$

11.	$y'' + y = \operatorname{sh} t$ $y(0) = 2, y'(0) = 1$	12.	$y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$ $y(0) = 0, y'(0) = 1$
13.	$y'' - 3y' + 2y = e^t$ $y(0) = -1, y'(0) = 0$	14.	$2y'' + 3y' + y = 3 \cdot e^t$ $y(0) = 1, y'(0) = 4$

Завдання 4. Розв'язати задачу Коші для систем лінійних диференціальних рівнянь за допомогою операційного числення

1.	a) $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y, \end{cases}$ $x(0) = 2, y(0) = 3;$	б) $\begin{cases} x' = 2x - 3y + e^t, \\ y' = 4x - 6y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 0.$
2.	a) $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y, \end{cases}$ $x(0) = 2, y(0) = 4;$	б) $\begin{cases} x' = x - 2y + \cos t, \\ y' = 3x - 6y - e^t \end{cases}$ $x(0) = 2, y(0) = -1.$
3.	a) $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$ $x(0) = -2, y(0) = 1;$	б) $\begin{cases} x' = 4x + 6y - 1, \\ y' = 2x + 3y + 3 \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 2.$
4.	a) $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 1;$	б) $\begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = x + y + e^t \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 0.$
5.	a) $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y, \end{cases}$ $x(0) = 3, y(0) = 2;$	б) $\begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t, \\ y' = \sin t - x - 2y \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 0.$

6.	а) $\begin{cases} x' = 3x + 7y \\ y' = 4x - 3y \end{cases},$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 3;$	б) $\begin{cases} x' = 4y + 8\sin 2t \\ y' = x - 8\sin 2t \end{cases},$ $x(0) = -2, \quad y(0) = 2.$
7.	а) $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = x - 2y \end{cases},$ $x(0) = -2, \quad y(0) = 4;$	б) $\begin{cases} x' = x + 4y - 1 \\ y' = 2x + 3y + t \end{cases},$ $x(0) = 0, \quad y(0) = -1.$
8.	а) $\begin{cases} x' = 4x + 5y \\ y' = 3x - 2y \end{cases},$ $x(0) = 1, \quad y(0) = -1;$	б) $\begin{cases} x' = 3x + y - 1 \\ y' = 6x - 2y - 5t \end{cases},$ $x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$
9.	а) $\begin{cases} x' = -2x - y \\ y' = x - 4y \end{cases},$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1;$	б) $\begin{cases} x' = 4x - 8y - 1 \\ y' = 2x - 4y + e^{6t} \end{cases},$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$
10.	а) $\begin{cases} x' = 4x - 6y \\ y' = 5x + 7y \end{cases},$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 0;$	б) $\begin{cases} x' = 2x - 4y - t \\ y' = x - 2y + e^{-2t} \end{cases},$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$
11.	а) $\begin{cases} x' = 5x - 3y \\ y' = 4x + y \end{cases},$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 2;$	б) $\begin{cases} x' = 4x - 8y \\ y' = 2x - 4y + e^{2t} \end{cases},$ $x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$
12.	а) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + y \end{cases},$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1;$	б) $\begin{cases} x' = 4x - 8y + e^{-2t} \\ y' = 2x - 4y \end{cases},$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$
13.	а) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4y - x \end{cases},$ $x(0) = 5, \quad y(0) = 1;$	б) $\begin{cases} x' = 4x - y + 2t \\ y' = x + 2y + 8e^t \end{cases},$ $x(0) = 1, \quad y(0) = -2.$

14.	a) $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x - y \end{cases},$ $x(0) = 0, \quad y(0) = -1;$	б) $\begin{cases} x' = 4x - 2\cos 2t \\ y' = 2y + 8\cos 2t \end{cases},$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$
-----	--	--

ЛІТЕРАТУРА

1. Алексеева А. В. Ряди. Теорія функції комплексної змінної. Операційне числення. Практикум. / А. В. Алексеева, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. – Київ, 2013. – 160 с.
2. Валяшек В. Б. Теорія функцій комплексної змінної. Конспект лекцій для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання. / Кривень В. А., Валяшек В. Б., Каплун А. В., Ясній О. П. – Тернопіль : в-во ТНТУ, 2015. – 87 с.
3. Дубовик В. П. Вища математика : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ, 2013. – 648 с.
4. Краєвський В. О. Функції комплексної змінної : навчальний посібник / О. В. Краєвський. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 143 с.
5. Кулініч Г. Л. Вища математика (спеціальні розділи) : підручник / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Тараненко, В. М. Бугрим. – Кн. 2. – Київ : Либідь, 2003. – 368 с.
6. Мартиненко М. А. Теорія функції комплексної змінної. Операційне числення: навчальний посібник / М. А. Мартиненко, І. І. Юрик. – Київ : Слово, 2013. – 296 с.
7. Пак В. В. Вища математика: [підручник] / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Д. : В-тво «Сталкер», 2003. – 496 с.

ДОДАТОК А
Деякі розвинення функцій в ряд Маклорена

- 1) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty;$
- 2) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty;$
- 3) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty;$
- 4) $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1;$
- 5) $\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1;$
- 6) $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha \cdot z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \cdot z^3 + \dots +$
 $+ \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} \cdot z^n + \dots, \quad |z| < 1;$
- 7) $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n \cdot z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n, \quad |z| < 1;$
- 8) $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1;$
- 9) $\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad |z| < \infty;$
- 10) $\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty.$

ДОДАТОК Б

Основні оригінали та їх зображення

№ з/п	оригінал $f(t)$	зображення $F(p)$	№ з/п	оригінал $f(t)$	зображення $F(p)$
1.	C	$\frac{C}{p}$	12.	$\cos(t - \tau)$	$\frac{p \cdot e^{-\tau \cdot p}}{p^2 + 1}$
2.	$t^n,$ $n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	13.	$e^{\lambda t} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
3.	$t^\alpha,$ $\alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha + 1}}$	14.	$e^{\lambda t} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
4.	$e^{\lambda t},$ $\lambda = a + i \cdot b$	$\frac{1}{p - \lambda}$	15.	$e^{\lambda t} \cdot \text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$
5.	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$	16.	$e^{\lambda t} \cdot \text{ch } \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$
6.	$t^\alpha e^{\lambda t}$	$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(p - \lambda)^{\alpha + 1}}$	17.	$t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
7.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	18.	$t \cdot \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
8.	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	19.	$t \cdot \text{sh } \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$
9.	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	20.	$t \cdot \text{ch } \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
10.	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	21.	$t^n \cdot \sin \omega t$	$\frac{\text{Im}(p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} \cdot n!$
11.	$\sin(t - \tau),$ $\tau > 0$	$\frac{e^{-\tau \cdot p}}{p^2 + 1}$	22.	$t^n \cdot \cos \omega t$	$\frac{\text{Re}(p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} \cdot n!$
23.	$\frac{\sin \omega t - \omega \cdot t \cdot \cos \omega t}{2 \cdot \omega^3}$		$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$		

ДОДАТОК В
Довідковий матеріал (формули)

1. $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2}.$
2. $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$
3. $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}.$
4. $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$
5. $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$
6. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$
7. $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}.$
8. $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$
9. $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$
10. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$
11. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$
12. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1.$
13. $\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1.$
14. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$
15. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$
16. $\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1.$
17. $\operatorname{sh} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{ch} \alpha.$
18. $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$
19. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$
20. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$
21. $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2).$
22. $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2).$
23. $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b).$