

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
ДО ВИКОНАННЯ РГР ТА КР.

РОЗДІЛИ: «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ
ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ», «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ».

Для студентів усіх форм навчання.

Методичні вказівки з вищої математики до виконання РГР та КР.
Розділи: «Диференціальне числення функції однієї змінної»,
«Диференціальне числення функції багатьох змінних Для студентів
усіх форм навчання. / Укл. : І. М. Килимник. – Запоріжжя : НУ
«Запорізька політехніка», 2025. – 63 с.

Укладач: Килимник І.М., к. т. н., доцент

Рецензент: Онуфрієнко В.М., д. ф.-м. н., професор

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к. т. н., доцент

Затверджено на засіданні
кафедри «Математика»
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 1 від 28.08.2025 р.

Рекомендовано НМК
Машинобудівного факультету
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 2 від 30.09.2025 р.

ЗМІСТ

1.	Диференціальне числення функції однієї змінної	4
1.1.	Границі та неперервність функції однієї змінної	5
1.2.	Похідна функції однієї змінної	20
1.3.	Застосування похідної функції однієї змінної	32
2.	Диференціальне числення функції двох змінних	47
2.1.	Частинні похідні та диференціали функції двох змінних	48
2.2.	Деякі застосування частинних похідної функції двох змінних	57
	Література	63

1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Означення 1.1. Якщо кожному числу x з деякої числової множини D ($x \in D$) за певним законом поставлене у відповідність єдине число y з множини E , то кажуть, що задана однозначна функція y від x і позначають $y=f(x)$.

Множина D – область визначення функції, множина E – область функції, x – аргумент функції.

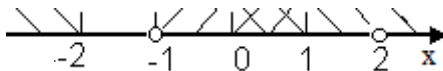
Задача 1. Знайти область визначення $D(y)$ функцій:

$$\text{а) } y = \arcsin x - \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - x - 2}, \quad \text{б) } y = \ln(x^2 - 3x - 10) + \sqrt{18 - 3x}.$$

Розв'язання. а) $y = \arcsin x - \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - x - 2}$. Для знаходження області визначення функції запишемо обмеження для кожного доданку, що входить в рівняння функції. Маємо систему нерівностей:

$$D(y): \begin{cases} |x| \leq 1, \\ x^2 + 2x \geq 0, \\ x^2 - x - 2 \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ x \leq -2; x \geq 0, \\ x \neq 2; x \neq -1. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему нерівностей методом інтервалів:

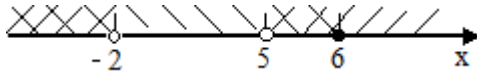


Розв'язок системи нерівностей: $x \in [0; 1]$, тому $D(y): x \in [0; 1]$;

б) $y = \ln(x^2 - 3x - 10) + \sqrt{18 - 3x}$. Маємо

$$D(y): \begin{cases} x^2 - 3x - 10 > 0, \\ 18 - 3x \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2, x > 5, \\ x \leq 6. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему нерівностей методом інтервалів:



Розв'язок системи нерівностей: $x \in (-\infty; -2) \cup (5; 6]$, тому $D(y): x \in (-\infty; -2) \cup (5; 6]$.

Відповідь: а) $D(y): x \in [0; 1]$; б) $D(y): x \in (-\infty; -2) \cup (5; 6]$.

1.1. Границі та неперервність функції однієї змінної

Означення 1.2. Число A називається *границею функції* $y=f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, якщо для довільного завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M(\varepsilon) > 0$, що при $|x| > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ і записують $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Означення 1.3. Число A називається *границею функції* $y=f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для довільного завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ і записують $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

При цьому вважається, що x прямує до x_0 довільним чином.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 .

Означення 1.4. Число A називається *границею функції* $y=f(x)$ зліва в точці x_0 , якщо для довільного завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ і записують $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A$.

Означення 1.5. Число A називається *границею функції* $y=f(x)$ справа в точці x_0 , якщо для довільного завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ виконується

нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ і записують $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = A$.

Ліву і праву границі функції називають *односторонніми границями*.

Означення 1.6. Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою функцією*, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ або $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.

Означення 1.7. Число A є *границею функції* $y = f(x)$ в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли має місце рівність

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad (1.1)$$

де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція в точці x_0 .

Означення 1.8. Нескінченно малі в точці x_0 функції $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називають *еквівалентними*, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$, і позначають $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$.

Деякі еквівалентні нескінченно малі функції ($\alpha(x) \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow x_0$, $k \in \mathbb{R}$):

Таблиця 1.1

$\sin(k \cdot \alpha(x)) \sim k \cdot \alpha(x)$	$\operatorname{tg}(k \cdot \alpha(x)) \sim k \cdot \alpha(x)$
$\arcsin(k \cdot \alpha(x)) \sim k \cdot \alpha(x)$	$\operatorname{arctg}(k \cdot \alpha(x)) \sim k \cdot \alpha(x)$
$1 - \cos k \cdot \alpha(x) \sim \frac{(k \cdot \alpha(x))^2}{2}$	$e^{k \cdot \alpha(x)} - 1 \sim k \cdot \alpha(x)$
$a^{k \cdot \alpha(x)} - 1 \sim k \cdot \alpha(x) \cdot \ln a$	$\ln(1 + k \cdot \alpha(x)) \sim k \cdot \alpha(x)$
$(1 + k \cdot \alpha(x))^n - 1 \sim n \cdot k \cdot \alpha(x), (n > 0)$	$\sqrt[n]{1 + k \cdot \alpha(x)} - 1 \sim \frac{k \cdot \alpha(x)}{n}, (n > 1)$

Основні теореми про границі

Якщо існують границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad (1.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad (1.3)$$

Наслідки:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad (1.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n. \quad (1.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0. \quad (1.6)$$

Введемо «умовні» правила дій над символами ∞ , $-\infty$, $+\infty$:

а) $(\pm \infty) + a = \pm \infty$, $a - (\pm \infty) = \mp \infty$;

б) $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$, $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$;

в) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$;

г) $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$; $\infty \cdot \infty = \infty$; $\frac{\infty}{a} = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$;

д) $\frac{a}{\infty} = 0$; $\frac{a}{0} = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$;

е) $(+\infty)^n = +\infty$; $(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty, & n = 2m \\ -\infty, & n = 2m - 1 \end{cases}$; $\sqrt[n]{+\infty} = +\infty$.

Знаходження границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0 . Якщо після підстановки отримаємо стале число, то воно є границею функції, коли $x \rightarrow x_0$.

Задача 2. Знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1}$ при $x_0 = -1$.

Розв'язання. За умовою $x \rightarrow -1$. Значення $x_0 = -1$ є граничним значенням змінної. Підставимо (-1) у чисельник і знаменник дробу замість x . Маємо у чисельнику $2 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) - 5 = -12$ і у знаменнику $6 \cdot (-1)^2 - (-1) - 1 = 6$. Оскільки відношення отриманих значень є величина стала, то вона є границею функції:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1} = \frac{-12}{6} = -2.$$

Відповідь: -2 .

Однак, підстановка може привести до «невизначених виразів», а саме: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $[1^\infty]$ та інших (можна застосовувати інше позначення: $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\{\infty - \infty\}$, $\{0 \cdot \infty\}$, $\{1^\infty\}$). Це вирази, яким не можна поставити у відповідність числовий результат. Знаходження границі в цьому випадку називається *розкриттям невизначеності*. Розглянемо розкриття деяких з них.

1) *Невизначеність вигляду* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Розглянемо границю відношення двох многочленів: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Підставимо (∞) у чисельник і знаменник дробу замість x . Оскільки

$\lim_{x \rightarrow \infty} P_n(x) = \infty$ і $\lim_{x \rightarrow \infty} Q_m(x) = \infty$, то маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Необхідно поділити чисельник і знаменник на x^m і перейти до знаходження границі, враховуючи «умовні» правила.

Можна для розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ у цьому випадку порівняти степені чисельника та знаменника і застосувати наступну схему:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left[\frac{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \right] =$$

$$= \begin{cases} \pm \infty, n > m \\ 0, n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, n = m \end{cases} \quad (1.7)$$

Задача 3. Без використання правила Лопітала знайти границі функцій: а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 9x^3 - 5x^4}{4x^2 - 6x - 7}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^5 - 3x + 4}$.

Розв'язання. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1}$. Перетворимо дріб, поділивши

його чисельник і знаменник на змінну в найвищому степені в знаменнику, тобто на x^2 . Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{9}{x} - \frac{5}{x^2}}{6 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

або

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \begin{cases} n = 2 \\ m = 2 \\ n = m \end{cases} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 9x^3 - 5x^4}{4x^2 - 6x - 7} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left\{ \begin{array}{l} n = 4 \\ m = 2 \\ n > m \end{array} \right\} = -\infty;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^5 - 3x + 4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left\{ \begin{array}{l} n = 2 \\ m = 5 \\ n < m \end{array} \right\} = 0.$$

Відповідь: а) $\frac{1}{3}$; б) $-\infty$; в) 0.

2) *Невизначеність вигляду* $\left[\frac{0}{0} \right]$. Розглянемо границю відношення

двох многочленів, коли $x \rightarrow x_0$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Припустимо, що x_0 є коренем многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$, тобто $P_n(x_0) = 0$ і $Q_m(x_0) = 0$. Тоді треба чисельник і знаменник поділити на $(x - x_0)$ і перейти до знаходження границі відношення часток від ділення.

Задача 4. Без використання правила Лопіталя знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1}$ при $x_0 = 0,5$.

Розв'язання. За умовою $x \rightarrow 0,5$. Значення $x_0 = 0,5$ є граничним значенням змінної. Чисельник і знаменник дробу при цьому значенні дорівнюють нулю. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. Виконаємо наступні дії. Ділимо чисельник і знаменник дробу на $(x - x_0)$, тобто на $(x - 0,5)$:

$$\begin{array}{r} \frac{2x^2 + 9x - 5}{2x^2 - x} \Big|_{x-0,5} \\ - \frac{2x^2 - x}{10x - 5} \\ \hline \frac{10x - 5}{10x - 5} \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{6x^2 - x - 1}{6x^2 - 3x} \Big|_{x-0,5} \\ - \frac{6x^2 - 3x}{2x - 1} \\ \hline \frac{2x - 1}{2x - 1} \\ \hline 0 \end{array}$$

Переходимо до границі відношення часток від ділення. Матимемо

$$\lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{2x + 10}{6x + 2} = \frac{2 \cdot 0,5 + 10}{6 \cdot 0,5 + 2} = \frac{11}{5} = 2,2.$$

Відповідь: 2,2.

Зауваження. Замість ділення можна розкласти чисельник і знаменник на множники і зробити скорочення однакових виразів.

3) *Невизначеність вигляду* $\left[\frac{0}{0} \right]$ у випадку, коли у чисельнику і знаменнику, або у чисельнику, або знаменнику є ірраціональність.

У першу чергу необхідно «позбутися» ірраціональності, яка «сприяє» невизначеності, застосовуючи формули скороченого множення чи інші, зберігаючи еквівалентність заданого і отриманого виразів під границею. Іноді від ірраціональності можна позбутися введенням нової змінної. Далі виконуємо дії, розглянуті в 2).

Задача 5. Без використання правила Лопітала знайти границі

функцій: а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x^2 - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{8-x}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}$.

Розв'язання. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x^2 - 1}$. Якщо $x \rightarrow 1$, то чисельник і

знаменник дроби при $x=1$ дорівнюють нулю. Маємо невизначеність

$\left[\frac{0}{0} \right]$, якій сприяє ірраціональність, що знаходиться у чисельнику.

Позбудемося її, доповнивши вираз у чисельнику до формули $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$. Для цього помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до виразу $(\sqrt{3-x} - 2)$, тобто на $(\sqrt{3-x} + 2)$, а потім чисельник і знаменник поділимо на $(x-1)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3+x} - 2)(\sqrt{3+x} + 2)}{(x^2 - 1)(\sqrt{3+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3+x-4}{(x^2 - 1)(\sqrt{3+x} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3+x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{3+x}+2)} = \frac{1}{2(\sqrt{4}+2)} = \frac{1}{8};$$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{8-x}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}$. Якщо $x \rightarrow 2$, то чисельник і знаменник

дробу при $x=2$ дорівнюють нулю. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$, якій сприяє ірраціональність що знаходиться у чисельнику та знаменнику. Позбудемося її, доповнивши до формули $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$ вираз у чисельнику і знаменнику. Для цього помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до виразів $(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{8-x})$ і $(\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1})$, тобто на $(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{8-x})$ і на $(\sqrt{5-x} + \sqrt{x+1})$, а потім чисельник і знаменник поділимо на $(x-2)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{8-x}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{8-x})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{8-x})}{(\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{8-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+x - (8-x))(\sqrt{5-x} + \sqrt{x+1})}{(\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{8-x})(\sqrt{5-x} + \sqrt{x+1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+2x-8)(\sqrt{5-x} + \sqrt{x+1})}{(5-x - (x+1))(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{8-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5-x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{8-x}} \cdot \\ &\cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x-8}{4-2x} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+4)(x-2)}{-2(x-2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{-2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь: а) $\frac{1}{8}$; б) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Зауваження. Якщо границя містить корені 3-го степеня, то

застосовують формули $a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot (a^2 \mp ab + b^2)$.

4) *Невизначеність вигляду* $[\infty - \infty]$ зводимо до невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ або $\left[\frac{0}{0}\right]$. Одним із способів є приведення до спільного знаменника.

Задача 6. Без використання правила Лопіталя знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $[\infty - \infty]$. Дроби приводимо до спільного знаменника:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x) \cdot (1+x+x^2)} = \\ &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+2)}{(1-x) \cdot (1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-1) \cdot (x+2)}{1+x+x^2} = \frac{-3}{3} = -1. \end{aligned}$$

Відповідь: -1 .

4) *Невизначеність вигляду* $\left[\frac{0}{0}\right]$ у випадку, коли чисельник і знаменник, або чисельник, або знаменник містять тригонометричні функції $\sin(kx)$, $\operatorname{tg}(kx)$.

Тоді для розкриття невизначеності можна застосовувати **першу важливу границю**:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1.8)$$

Наслідки:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(kx)}{x} = k. \quad (1.9)$$

Задача 7. Без використання правила Лопіталя знайти границі

функцій: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arcsin^3 5x}{x \cdot \sin^2 3x}$.

Розв'язання.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$. При $x \rightarrow 0$ чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. Застосовуємо першу

важливу границю. Оскільки $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Зауваження. Для розкриття невизначеності типу $\left[\frac{0}{0} \right]$ часто буває корисним застосувати заміну нескінченно малих величин еквівалентними їм нескінченно малими величинами (табл. 1.1).

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arcsin^3 5x}{x \cdot \sin^2 3x}$. При $x \rightarrow 0$ чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. Застосуємо таблицю еквівалентності нескінченно малих функцій (табл. 1.1): $\arcsin 5x \sim 5x$, $\sin 3x \sim 3x$ при $x \rightarrow 0$. Матимемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arcsin^3 5x}{x \cdot \sin^2 3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot (5x)^3}{x \cdot (3x)^2} = \frac{4 \cdot 125}{9} = \frac{500}{9}.$$

Відповідь: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{500}{9}$.

5) Невизначеність вигляду $[1^\infty]$.

Для її розкриття застосовують *другу важливу границю*:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2,71828 \text{ або } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \quad (1.10)$$

Наслідки:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \quad (1.11)$$

Задача 8. Без використання правила Лопітала знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+3}\right)^{4x-7}$.

Розв'язання. При $x \rightarrow \infty$ маємо невизначеність $[1^\infty]$. Застосуємо другу важливу границю. Перетворимо вираз у дужках. Поділимо чисельник на знаменник або виділимо в чисельнику вираз знаменника і перетворений чисельник поділимо на знаменник, щоб мати одним з доданків одиницю. Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+3}\right)^{4x} = [1^\infty] = \left[\frac{x-5}{x+3} = \frac{x+3-8}{x+3} = 1 + \frac{-8}{x+3} \text{ або } \frac{-x-5}{x+3} \left| \frac{x+3}{1} \right. \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{x+3}\right)^{4x-7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-8}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-8}}\right]^{\frac{-8}{x+3} \cdot (4x-7)}.$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-8}} = e$ і $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8}{x+3} \cdot (4x-7) =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-32x+56}{x+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-32}{1+\frac{3}{x}} = -32, \text{ то } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+3}\right)^{4x-7} = e^{-32}.$$

Відповідь: e^{-32} .

Означення 1.9. Функція $y=f(x)$ неперервна в точці x_0 , якщо вона визначена в ній, односторонні границі в точці існують і рівні між собою, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо хоча б одна з умов не виконується, то x_0 є точкою розриву. Точки розриву бувають усувного розриву, розриву першого роду, розриву другого роду.

Означення 1.10. Точка x_0 називається *точкою усувного розриву*, якщо функція в точці невизначена, а границя функції в точці існує.

Означення 1.11. Точка x_0 називається *точкою розриву першого роду*, якщо функція в точці невизначена, односторонні границі в точці існують, але не рівні між собою.

В цьому випадку стрибок функції визначається формулою:

$$\delta = \left| \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \right|. \quad (1.12)$$

Означення 1.12. Точка x_0 називається *точкою розриву другого роду*, якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує або дорівнює нескінченності.

Задача 9. Дослідити на неперервність функції, встановити характер точок розриву, якщо вони існують: а) $y = f(x) = 7^{-\frac{2}{x+1}}$;

б) $y = f(x) = \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$; в) $y = f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \leq 1 \\ 5 - 4x, & 1 < x < 3 \\ x - 5, & 3 \leq x < \infty \end{cases}$. Зробити

схематичне креслення.

Розв'язання. а) $y = f(x) = 7^{-\frac{2}{x+1}}$. Оскільки задана показникова функція, то вона неперервна при всіх значеннях x , крім $x = -1$. У цій

точці функція невизначена, тобто має в ній розрив. З'ясуємо характер розриву.

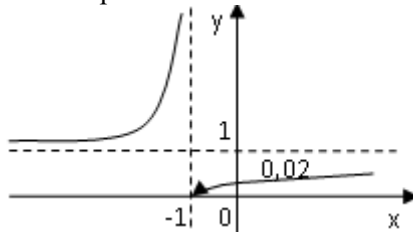
Знайдемо односторонні границі функції в точці $x = -1$:

$$f(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} 7^{-\frac{2}{x+1}} = \left\{ 7^{-\frac{2}{-0}} = 7^{+\infty} \right\} = \infty,$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} 7^{-\frac{2}{x+1}} = \left\{ 7^{-\frac{2}{+0}} = 7^{-\infty} \right\} = 0.$$

Оскільки одна з границь дорівнює ∞ , то $x = -1$ – точка розриву другого роду.

Зробимо схематичне креслення.



б) $y = f(x) = \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$. Задана функція неперервна при всіх значеннях x , крім $x = 1$. У цій точці вона невизначена. Точка $x = 1$ є точкою розриву. З'ясуємо характер розриву. Обчислимо односторонні границі функції в точці $x = 1$:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = \left\{ \begin{array}{l} x-1 \rightarrow -0 \\ \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty \\ 2^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow 0 \end{array} \right\} = 2,$$

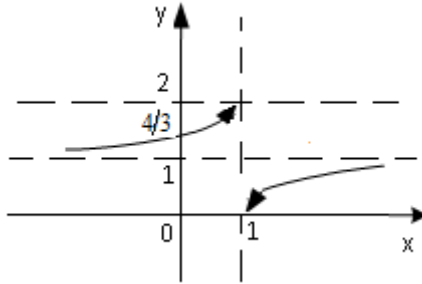
$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = \left\{ \begin{array}{l} x-1 \rightarrow +0 \\ \frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty \\ 2^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow \infty \end{array} \right\} = 0.$$

Оскільки границі існують, але $f(1+0) \neq f(1-0)$, то маємо в точці

$x = 1$ розрив першого роду. Стрибок δ функції $f(x)$ знаходимо за формулою (1.12):

$$\delta = |f(1+0) - f(1-0)| = |2 - 0| = 2.$$

Зробимо схематичне креслення.



$$\text{в) } y = f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \leq 1 \\ 5 - 4x, & 1 < x < 3 \\ x - 5, & 3 \leq x < \infty \end{cases} . \text{ Область визначення функції}$$

$(-\infty; \infty)$. На інтервалах $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$, $(3; \infty)$ функція неперервна. Розриви можуть бути лише в точках $x = 1$ і $x = 3$.

Обчислимо односторонні границі функції в точці $x = 1$:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1, \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (5 - 4x) = 1.$$

Оскільки $f(1-0) = f(1+0) = 1$, то в точці $x = 1$ задана функція неперервна.

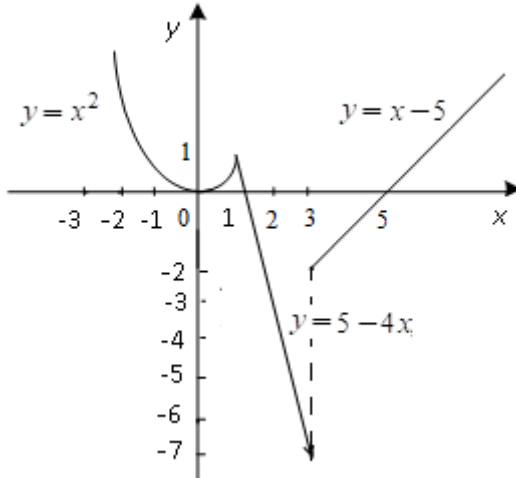
Обчислимо односторонні границі функції в точці $x = 3$:

$$f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (5 - 4x) = -7, \quad f(3+0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (x - 5) = -2.$$

Оскільки $f(3-0) \neq f(3+0)$, то функція в точці $x = 3$ має розрив першого роду. Стрибок функції в точці розриву:

$$\delta = |f(3+0) - f(3-0)| = |-2 - (-7)| = 5.$$

Зробимо схематичне креслення.



Відповідь: а) $x = -1$ – точка розриву другого роду; б) $x = 1$ – точка розриву першого роду; в) в точці $x = 1$ функція неперервна, $x = 3$ – точка розриву першого роду.

Таблиця 1.2

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
$\log_a b^k = k \log_a b, a > 0, b > 0, a \neq 1;$	
$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1$
$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$	
$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$	$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$
$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

1.2 Похідна функції однієї змінної

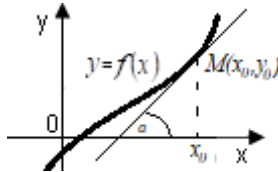
Означення 1.13. Похідною функції $y=f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції $\Delta y=f(x+\Delta)-f(x)$ в цій точці до приросту аргумента Δx за умови, що $\Delta x \rightarrow 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1.13)$$

Також для позначення похідної функції $y=f(x)$ застосовують символи: y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, y'_x .

Геометричний зміст похідної. Похідна $f'(x_0)$ в точці $M(x_0, y_0)$ – це кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y=f(x)$ в цій точці або тангенс кута α , який утворює дотична до кривої в заданій точці з додатним напрямом осі Ox :

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0). \quad (1.14)$$



Правила диференціювання

Нехай маємо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$, $C - \text{const}$.

Таблиця 1.3

$(C \cdot u)' = C \cdot (u)'$	(1.15)	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	(1.16)
$(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$	(1.17)	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{(v)^2}$	(1.18)

Таблиця похідних для функції $u = u(x)$.

Таблиця 1.4

1. $(C)' = 0$	2. $(x)' = 1$
3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	3а). $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
4. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', a - \text{const}$	4а). $(e^u)' = e^u \cdot u'$
5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	5а). $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
8. $(\text{tg } u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	9. $(\text{ctg } u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12. $(\text{arctg } u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	13. $(\text{arcctg } u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Для гіперболічних функцій:

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}, \quad \text{cth } x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}$$

похідні мають вигляд:

Таблиця 1.5

$(\text{sh } x)' = \text{ch } x,$	$(\text{ch } x)' = \text{sh } x,$
$(\text{th } x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x},$	$(\text{cth } x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}.$

Похідна степенєво-показникової функції $(u(x))^{v(x)} = u^v$ може бути знайдена за формулою:

$$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'. \quad (1.19)$$

або застосовують *метод логарифмічного диференціювання*, який полягає в наступному:

1) Логарифмуємо функцію $y = (u(x))^{v(x)}$, яку надалі позначатимемо $y = u^v$. Матимемо

$$\ln y = \ln u^v = v \cdot \ln u.$$

2) Диференціюємо отримане рівняння. Тоді

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot u'.$$

3) Знаходимо y' :

$$y' = \left(v' \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot u' \right) \cdot y = \left(v' \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot u' \right) \cdot u^v = u^v \cdot v' \cdot \ln u + v \cdot u^{v-1} \cdot u',$$

тобто $y' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$, що відповідає формулі (1.19).

Означення 1.14. Функція $y(x)$ називається *неявно заданою функцією*, якщо рівняння $F(x, y) = 0$ неможливо розв'язати відносно функції $y(x)$.

При знаходженні похідної неявно заданої функції необхідно:
а) диференціюємо обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$, врахувавши, що $(y)' = y'$ і $(x)' = 1$; б) отримане рівняння розв'язати відносно y' .

Якщо функція параметрично задана $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$, то похідна знаходиться за формулою:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (1.20)$$

Диференціал функції $y = f(x)$ знаходиться за формулою:

$$dy = f'(x) \cdot dx. \quad (1.21)$$

Властивості диференціала функції

Нехай маємо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$, $C = \text{const}$.

Таблиця 1.6

1. $d(C \cdot u) = C \cdot du$	1a) $dC = 0$
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$	2a) $d(u \pm C) = du$
3. $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$	3a) $du = \frac{1}{C} \cdot d(C \cdot u)$
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{(v)^2}$	5. $df(u) = f'(u) \cdot u'_x dx$

Враховавши, що перша похідна y' функції $y=f(x)$ є функцією, продовжимо її диференціювати. Тоді $y'' = (y')'$, $y''' = (y'')'$, Для похідної n -го порядку матимемо

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = (y^{(n-1)})'. \quad (1.22)$$

Друга похідна параметрично заданої функції знаходиться за формулою:

$$y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}, \quad (1.23)$$

або

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t}. \quad (1.24)$$

Похідна n -го порядку від параметрично заданої функції знаходиться за формулою:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)_t \cdot \frac{1}{x'_t} \quad (1.25)$$

При знаходженні другої похідної неявно заданої функції необхідно рівняння $F(x, y) = 0$ двічі продиференціювати, врахувавши, що $(y)' = y'$, $(y')' = y''$ і $(x)' = 1$. Отримане рівняння розв'язують відносно y'' .

Диференціалом другого порядку від функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціала першого порядку

$$d^2 y = d(dy) = f''(x) \cdot dx^2. \quad (1.26)$$

Означення 1.15. Диференціалом n -го порядку від функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціала $(n-1)$ -го порядку

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x) \cdot dx^n. \quad (1.27)$$

Правило Лопітала дозволяє розкрити невизначеності, застосувавши похідні.

Теорема 1.1 (правило Лопітала I розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0} \right]$).

Якщо: 1) функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані на інтервалі $(a; b)$, $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a; b)$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$; 3) існує

скінченна або нескінченна границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує границя

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому має місце рівність:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (1.28)$$

Зауваження. Якщо похідні $f'(x)$ і $g'(x)$ задовольняють тим же вимоги, що і функції $f(x)$ і $g(x)$, то правило Лопітала можна

застосувати повторно. При цьому отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}. \quad (1.29)$$

Правило Лопіталя при виконанні умов теореми можна застосувати багаторазово.

Якщо в Теоремі 1.1 замінити умову 2) на:

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty,$$

то формула (1.28) також має місце. В цьому випадку маємо правило Лопіталя II для розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Після певних перетворень правило Лопіталя може бути застосовано також до розкриття інших невизначеностей: $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $[\infty \cdot 0]$, $[\infty^0]$, $[0^\infty]$, $[0^0]$, $[1^\infty]$. Перш ніж застосувати до розкриття цих невизначеностей правило Лопіталя, треба їх звести або до $\left[\frac{0}{0} \right]$, або $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Задача 10. Знайти похідні заданих функцій:

а) $y = \left(2x^5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5 \right)^3$, б) $y = \ln^2 2x \cdot \operatorname{arctg}(2 - 3x^2)$, в) $y = \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{e^{5x}}$, г)

$y = \left(\sqrt{x^2 + 2x} \right)^{\cos 5x}$, д) $\sin(xy) = \frac{x}{y} + 3$.

Розв'язання. а) $y = \left(2x^5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5 \right)^3$. Застосовуємо формулу 3 (табл. 1.4) і формулу (1.15) (табл. 1.3):

$$y' = 3 \left(2x^5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5 \right)^2 \cdot \left(2x^5 + 3 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - 5 \right)' = 3 \left(2x^5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5 \right)^2 \cdot$$

$$\cdot \left(2 \cdot 5x^4 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot x^{-\frac{4}{3}} \right) = 3 \left(2x^5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5 \right)^2 \cdot \left(10x^4 - x^{-\frac{4}{3}} \right).$$

б) $y = \ln^2 2x \cdot \arctg(2 - 3x^2)$. Застосовуємо формулу (1.16) (табл. 1.3) і формули 3, 5а) і 12 (табл. 1.4):

$$\begin{aligned} y' &= \left(\ln^2 2x \right)' \arctg(2 - 3x^2) + \ln^2 2x \cdot \left(\arctg(2 - 3x^2) \right)' = 2 \ln 2x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 \cdot \\ &\cdot \arctg(2 - 3x^2) + \ln^2 2x \cdot \frac{1 \cdot (-6x)}{1 + (2 - 3x^2)^2} = \frac{2 \ln 2x}{x} \cdot \arctg(2 - 3x^2) - \\ &- \frac{6x \cdot \ln^2 2x}{1 + (2 - 3x^2)^2}. \end{aligned}$$

в) $y = \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{e^{5x}}$. Застосовуємо формулу (1.4) (табл. 1.3) і формули 3а), 4а) (табл. 1.4):

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(\sqrt{3x^2 - 2} \right)' e^{5x} - \left(e^{5x} \right)' \sqrt{3x^2 - 2}}{\left(e^{5x} \right)^2} = \\ &= \frac{\frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 2}} \cdot e^{5x} - 5 \cdot e^{5x} \sqrt{3x^2 - 2}}{e^{10x}} = \frac{3x \cdot e^{5x} - 5 \cdot e^{5x} (3x^2 - 2)}{e^{10x} \sqrt{3x^2 - 2}} = \\ &= \frac{3x \cdot e^{5x} - 15x^2 e^{5x} + 10e^{5x}}{e^{10x} \sqrt{3x^2 - 2}} = \frac{-15x^2 + 3x + 10}{e^{5x} \sqrt{3x^2 - 2}}. \end{aligned}$$

г) $y = \left(\sqrt{x^2 + 2x} \right)^{\cos 5x}$. *Перший спосіб.* Застосуємо логарифмічне

диференціювання. Логарифмуємо рівняння $y = \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^{\cos 5x}$:

$$\ln y = \ln \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^{\cos 5x} = \cos 5x \cdot \ln \sqrt{x^2 + 2x} = \frac{\cos 5x}{2} \cdot \ln(x^2 + 2x).$$

Продиференціюємо отриманий вираз, врахувавши що $(y)' = y'$ і $(x)' = 1$.

$$(\ln y)' = \left(\frac{\cos 5x}{2} \cdot \ln(x^2 + 2x)\right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \left(\frac{\cos 5x}{2}\right)' \ln(x^2 + 2x) + \frac{\cos 5x}{2} (\ln(x^2 + 2x))'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-\sin 5x \cdot 5}{2} \cdot \ln(x^2 + 2x) + \frac{\cos 5x}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 2x} \cdot (2x + 2)$$

$$y' = y \cdot \left(-\frac{5}{2} \cdot \sin 5x \cdot \ln(x^2 + 2x) + \cos 5x \cdot \frac{x+1}{x^2 + 2x}\right).$$

Врахувавши, що $y = \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^{\cos 5x}$, матимемо:

$$y' = \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^{\cos 5x} \cdot \left(-\frac{5}{2} \cdot \sin 5x \cdot \ln(x^2 + 2x) + \cos 5x \cdot \frac{x+1}{x^2 + 2x}\right).$$

Другий спосіб. Знайдемо похідну за формулою (1.19):

$$y' = \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^{\cos 5x} \cdot \ln \sqrt{x^2 + 2x} \cdot (-\sin 5x \cdot 5) + \cos 5x \cdot \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^{\cos 5x - 1} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x}} \cdot (2x + 2) = \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^{\cos 5x} \left(-\frac{5}{2} \cdot \sin 5x \cdot \ln(x^2 + 2x) + \cos 5x \cdot$$

$$\cdot \frac{x+1}{x^2 + 2x}\right).$$

д) $\sin(xy) = \frac{x}{y} + 3$. Функція $y(x)$ неявно задана. Диференціюємо

обидві частини рівняння, врахувавши, що $(y)' = y'$ і $(x)' = 1$.

$$(\sin(xy))' = \left(\frac{x}{y} + 3 \right)' \Rightarrow \cos(xy) \cdot (y + xy') = \frac{y - xy'}{y^2}.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно y' .

$$y \cdot \cos(xy) + x \cdot y' \cdot \cos(xy) = \frac{y}{y^2} - \frac{x \cdot y'}{y^2}$$

$$\frac{x \cdot y'}{y^2} + x \cdot y' \cos(xy) = \frac{1}{y} - y \cdot \cos(xy)$$

$$y' \cdot \left(\frac{x}{y^2} + x \cdot \cos(xy) \right) = \frac{1}{y} - y \cdot \cos(xy)$$

$$y' = \frac{\frac{1 - y^2 \cdot \cos(xy)}{y}}{\frac{x \cdot (1 + y^2 \cdot \cos(xy))}{y^2}} = \frac{y \cdot (1 - y^2 \cdot \cos(xy))}{x \cdot (1 + y^2 \cdot \cos(xy))}.$$

Таким чином, $y' = \frac{y \cdot (1 - y^2 \cdot \cos(xy))}{x \cdot (1 + y^2 \cdot \cos(xy))}$.

Відповідь: а) $y' = 3 \left(2x^5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5 \right)^2 \cdot \left(10x^4 - x^{-\frac{4}{3}} \right)$;

б) $y' = \frac{2 \ln 2x}{x} \cdot \operatorname{arctg}(2 - 3x^2) - \frac{6x \cdot \ln^2 2x}{1 + (2 - 3x^2)^2}$;

в) $y' = \frac{-15x^2 + 3x + 10}{e^{5x} \sqrt{3x^2 - 2}}$;

г) $y' = \left(\sqrt{x^2 + 2x} \right)^{\cos 5x} \cdot \left(-\frac{5}{2} \cdot \sin 5x \cdot \ln(x^2 + 2x) + \cos 5x \cdot \frac{x+1}{x^2 + 2x} \right)$;

д) $y' = \frac{y \cdot (1 - y^2 \cdot \cos(xy))}{x \cdot (1 + y^2 \cdot \cos(xy))}$

Задача 11. Знайти першу і другу похідні функції:

$$1) y = (1+x^2) \cdot \operatorname{tg} x, \quad 2) \text{ а) } \begin{cases} x = 5t^2 - t, \\ y = 3t + t^3 \end{cases}, \quad \text{б) } \begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = 2t + \sin 2t \end{cases}.$$

Розв'язання. 1) $y = (1+x^2) \cdot \operatorname{tg} x$. Маємо явно задану функцію.

Знайдемо y' за формулою (1.17) (табл. 1.3), а потім $y'' = (y')'$:

$$\begin{aligned} y' &= (1+x^2)' \cdot \operatorname{tg} x + (1+x^2) \cdot (\operatorname{tg} x)' = 2x \cdot \operatorname{tg} x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \\ &= 2x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1+x^2}{\cos^2 x}, \\ y'' &= (y')' = (2x)' \cdot \operatorname{tg} x + 2x \cdot (\operatorname{tg} x)' + \frac{(1+x^2)' \cos^2 x - (1+x^2)(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} = \\ &= 2 \operatorname{tg} x + \frac{2x}{\cos^2 x} + \frac{2x \cdot \cos^2 x - (1+x^2) \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} = \\ &= 2 \operatorname{tg} x + \frac{2x}{\cos^2 x} + \frac{2x \cdot \cos^2 x + (1+x^2) \sin 2x}{\cos^4 x}. \end{aligned}$$

2) Маємо параметрично задані функції.

$$\text{а) } \begin{cases} x = 5t^2 - t, \\ y = 3t + t^3. \end{cases} \quad \text{Для знаходження першої похідної застосуємо}$$

формулу (1.20). Знайдемо $x'_t = 10t - 1$ і $y'_t = 3 + 3t^2$. Матимемо

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3 + 3t^2}{10t - 1}.$$

Для знаходження другої похідної застосуємо формулу (1.23). Знайдемо $x''_t = 10$ і $y''_t = 6t$. Тоді друга похідна

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{(10t-1) \cdot 6t - 10 \cdot (3 + 3t^2)}{(10t-1)^3} = \\ &= \frac{60t^2 - 6t - 30 - 30t^2}{(10t-1)^3} = \frac{30t^2 - 6t - 30}{(10t-1)^3} = \frac{6 \cdot (5t^2 - t - 5)}{(10t-1)^3}. \end{aligned}$$

б) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = 2t + \sin 2t. \end{cases}$ Для знаходження першої похідної застосуємо

формулу (1.20). Знайдемо $y'_t = 2 + 2 \cos 2t = 2(1 + \cos 2t) = 4 \cos^2 t$,

$x'_t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Тоді перша похідна

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4 \cos^2 t}{1/\cos^2 t} = 4 \cos^4 t.$$

Для знаходження другої похідної застосуємо формулу (1.24).

Знайдемо $(y'_x)'_t = 16 \cos^3 t \cdot (-\sin t)$. Тоді друга похідна

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-16 \cos^3 t \cdot \sin t}{1/\cos^2 t} = -16 \cos^5 t \cdot \sin t.$$

Відповідь: 1) $y' = 2x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1+x^2}{\cos^2 x}$,

$$y'' = 2 \operatorname{tg} x + \frac{2x}{\cos^2 x} + \frac{2x \cdot \cos^2 x + (1+x^2) \cdot \sin 2x}{\cos^4 x};$$

$$2) \text{ а) } y'_x = \frac{3+3t^2}{10t-1}, \quad y''_{xx} = \frac{6 \cdot (5t^2 - t - 5)}{(10t-1)^3};$$

$$\text{ б) } y'_x = 4 \cos^4 t, \quad y''_{xx} = -16 \cos^5 t \cdot \sin t.$$

Задача 12. Знайти границю, застосувавши правило Лопітала:

$$\text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right), \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cdot \sin 5x}{e^{3x} - 3x - 1}, \quad \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin 5x)^{\operatorname{ctg} 3x}.$$

Розв'язання. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$. Маємо невизначеність вигляду

$[\infty - \infty]$. Зведемо цю невизначеність до вигляду $\left[\frac{0}{0} \right]$ (приведемо вираз

до спільного знаменника), а потім застосуємо правило Лопітала, формула (1.29):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \cdot \ln x + x-1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x \ln x + x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2} = 0,5.
\end{aligned}$$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cdot \sin 5x}{e^{3x} - 3x - 1}$. Маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Застосуємо правило Лопіталя, формула (1.29):

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cdot \sin 5x}{e^{3x} - 3x - 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4x \cdot \sin 5x)'}{(e^{3x} - 3x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 5x + 20x \cdot \cos 5x}{3e^{3x} - 3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4 \sin 5x + 20x \cdot \cos 5x)'}{(3e^{3x} - 3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20 \cos 5x + 20 \cos 5x - 100x \cdot \sin 5x}{9e^{3x}} = \frac{40}{9}.
\end{aligned}$$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin 5x)^{\operatorname{ctg} 3x}$. Маємо невизначеність вигляду $\left[1^\infty \right]$.

Зведемо цю невизначеність до вигляду $\left[\frac{0}{0} \right]$ (застосуємо формулу з

елементарної математики $a^b = e^{b \cdot \ln a}$). У нашому випадку

$$(1 - 2 \sin 5x)^{\operatorname{ctg} 3x} = e^{\operatorname{ctg} 3x \cdot \ln(1 - 2 \sin 5x)}.$$

$$\text{Матимемо } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin 5x)^{\operatorname{ctg} 3x} = \left[1^\infty \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 3x \cdot \ln(1 - 2 \sin 5x)}.$$

Знайдемо границю, перейшовши від невизначеності $[\infty \cdot 0]$ до невизначеності $\left[\frac{0}{0} \right]$ і застосувавши правило Лопіталя за формулою

(1.28):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 3x \cdot \ln(1 - 2 \sin 5x) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2 \sin 5x)}{\operatorname{tg} 3x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1 - 2\sin 5x))'}{(\operatorname{tg} 3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2\cos 5x}{1 - 2\sin 5x} \cdot 5}{\frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3} = -\frac{10}{3}.$$

$$\text{Тоді } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2\sin 5x)^{\operatorname{ctg} 3x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 3x \cdot \ln(1 - 2\sin 5x)} = e^{-\frac{10}{3}}.$$

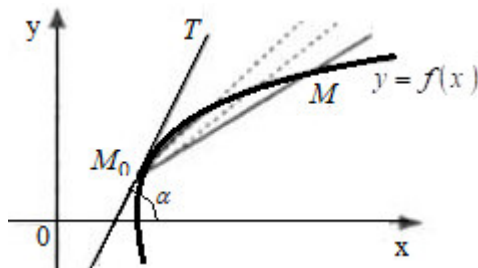
Відповідь: а) 0,5 ; б) $\frac{40}{9}$; в) $e^{-\frac{10}{3}}$.

1.3. Застосування похідної функції однієї змінної

Диференціальне числення застосовують для знаходження рівнянь дотичної та нормалі до графіка функції в заданій точці, знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку, дослідження функції та побудови її графіка.

Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в заданій точці дотику

Маємо криву, задану функцією $y = f(x)$. Зафіксуємо на кривій точку $M_0(x_0, y_0)$. Нехай точка M , рухаючись по кривій, наближається до точки M_0 . При цьому січна M_0M буде повертатися навколо точки M_0 . В граничному положенні при наближенні точки M до точки M_0 займе положення прямої M_0T .



Означення 1.16 Дотичною M_0T до графіка функції $y = f(x)$ в точці M_0 називають граничне положення січної M_0M , коли точка M , рухаючись по кривій, наближається до точки M_0 .

Слід мати на увазі, що не будь-якій точці до кривої можна побудувати дотичну.

Дотична M_0T до кривої $y = f(x)$ проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і утворює з додатним напрямом осі Ox кут α . З геометричного змісту похідної маємо $k = tg\alpha = f'(x_0)$. Підставимо $k = f'(x_0)$ в формулу $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$. Матимемо рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (1.30)$$

Якщо функція $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має нескінченну похідну, то дотична в цій точці паралельна осі Oy , а її рівняння $x = x_0$. Якщо похідна функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ дорівнює нулю, то дотична в цій точці паралельна осі Ox , а її рівняння $y = y_0$.

Означення 1.17. Нормаллю до графіка функції $y = f(x)$ в точці M_0 називають прямою, яка проходить перпендикулярно до дотичної через точку дотику M_0 .

З умови перпендикулярності прямих маємо, що для нормалі $k = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Тоді рівняння нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ матиме вигляд:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0). \quad (1.31)$$

Екстремум функції $y = f(x)$, інтервали монотонності

Означення 1.18 Точки, в яких похідна функції $y = f(x)$ дорівнює нулю, називаються *стаціонарними точками*.

Означення 1.19 Точки, в яких похідна функції $y = f(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками* цієї функції.

Отже, стаціонарні точки є підмножиною множини критичних точок.

Теорема 1.2 (*необхідна умова екстремуму*). Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, то в цій точці або похідна функції дорівнює нулю, або не існує.

Іншими словами, точки екстремуму функції містяться серед її критичних точок, які входять в область визначення функції. Однак легко переконатись, що критична точка зовсім не обов'язково є точкою екстремуму.

Теорема 1.3 (*перша достатня умова екстремуму*). Якщо в околі критичної точки x_0 похідна $f'(x)$ функції $y = f(x)$ змінює знак, то точка x_0 є *екстремальною*.

У цьому випадку при зміні знака похідної з "+" на "-" точка x_0 є *точкою локального максимуму*, а при зміні знака похідної з "-" на "+" точка x_0 є *точкою локального мінімуму*. Якщо знак похідної в околі критичної точки x_0 не змінюється, то точка не є екстремальною.

Теорема 1.4 (*друга достатня умова екстремуму*). Якщо $f'(x_0) = 0$ і в околі точки x_0 існує неперервна друга похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$, то за умови $f''(x_0) > 0$ точка x_0 є *точкою локального мінімуму*, а за умови $f''(x_0) < 0$ точка x_0 є *точкою локального максимуму*.

Теорема 1.5. Якщо в кожній внутрішній точці проміжку $(a; b)$ справедливо, що $f'(x_0) > 0$, то функція $y = f(x)$ на цьому проміжку зростає, якщо $f'(x_0) < 0$, то функція $y = f(x)$ на цьому проміжку спадає.

Найбільше і найменше значення функції на відрізьку

Нехай функція $y = f(x)$ на відрізьку $[a, b]$ є неперервною. На цьому відрізьку вона досягає *найбільшого і найменшого значень* або на кінцях відрізька $x = a$ чи $x = b$, або у критичних точках, що лежать в інтервалі (a, b) і знайдені за умови або похідна функції $f'(x_0)$ не існує, або $f'(x_0) = 0$.

Для знаходження найбільшого і найменшого значень функції необхідно впевнитись, що вона неперервна на заданому відрізьку. Знайти критичні точки. Визначити, які з них належать заданому відрізьку. Знайти значення функції в них та на кінцях відрізька. Серед отриманих значень вибрати найбільше і найменше.

Позначення:

$$y_{\text{найб}} = f_{\text{найб}} = \max_{[a, b]} f(x), \quad y_{\text{найм}} = f_{\text{найм}} = \min_{[a, b]} f(x).$$

Опуклість і угнутість графіка функції $y = f(x)$, точки перегину

Означення 1.20. Крива $y = f(x)$ називається *опуклою на інтервалі $(a; b)$* , якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі, тобто $f''(x) < 0, \forall x \in (a; b)$.

Означення 1.21. Крива $y = f(x)$ називається *угнутою на інтервалі (a, b)* , якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі, тобто $f''(x) > 0, \forall x \in (a; b)$.

Означення 1.22. *Точкою перегину* називається точка кривої $y = f(x)$, що відділяє її опуклу частину від угнутої.

Теорема 1.6. (необхідна умова існування точки перегину). Якщо x_0 – абсциса точки перегину графіка функції $y = f(x)$, то друга похідна в цій точці або дорівнює нулю, або не існує, тобто $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує.

Означення 1.23. Точки, в яких друга похідна $f''(x_0)$ дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками другого роду*.

Зауваження. Зворотнє твердження не завжди є вірним, тобто якщо $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує, то точка з абсцисою x_0 може і не бути точкою перегину.

Теорема 1.7 (достатня умова існування точки перегину). Якщо в околі критичної точки другого роду x_0 функції $y = f(x)$ друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка x_0 є точкою перегину кривої $y = f(x)$.

Асимптоти кривої

Означення 1.24. Асимптотою кривої $y = f(x)$ називається пряма, до якої крива при прямуванні до нескінченності наближається як завгодно близько, але не перетинає її.

Зауваження. Крива може перетинати свою асимптоту, причому неодноразово.

Асимптоти поділяють на вертикальні, похилі (зокрема, горизонтальні).

Означення 1.25. Графік функції $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту $x = x_0$, якщо границя функції дорівнює нескінченності при $x \rightarrow x_0$, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty. \quad (1.32)$$

Крім цього точка $x = x_0$ є точкою розриву II роду.

Означення 1.26. Графік функції $y = f(x)$ має похилу асимптоту

$$y = kx + b, \quad (1.33)$$

де

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad (1.34)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) \quad (1.35)$$

за умови, що обидві границі існують і скінченні.

Слід окремо розглядати випадки, коли змінна прямує до плюс нескінченності ($x \rightarrow +\infty$) та мінус нескінченності ($x \rightarrow -\infty$).

Означення 1.27. Графік функції $y = f(x)$ має горизонтальну асимптоту $y = b$ тільки в тому випадку, коли границя функції при $x \rightarrow +\infty$ або $x \rightarrow -\infty$ існує, скінченна і дорівнює сталій:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ або } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b, \text{ тобто } k = 0 \text{ у формулі (1.34).}$$

Знаходження границь в деяких випадках спрощується, якщо застосовувати правило Лопітала.

Схема дослідження функції та побудова її графіка

1. Знайти область визначення функції. Це дає змогу визначити ті точки осі абсцис, над якими пройде чи не пройде графік функції.

2. Знайти точки перетину графіка з координатними осями. Для цього треба розв'язати дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} y = f(x), \\ x = 0. \end{cases}$$

Перша система дає точки перетину з віссю Ox , друга – з віссю Oy .

3. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.

Якщо $f(x \pm T) = f(x)$, $T \neq 0$, то функція $y = f(x)$ є періодичною з періодом T .

Якщо $f(-x) = f(x)$, то функція $y = f(x)$ парна і її графік симетричний відносно осі Oy .

Якщо $f(-x) = -f(x)$, то функція $y = f(x)$ непарна і її графік симетричний відносно початку координат.

Якщо жодна з умов не виконана, то функція є ні парною, ні непарною і її графік не буде мати ніякої симетрії.

4. Знайти асимптоти графіка функції.

5. Знайти екстремуми функції та інтервали монотонності функції.

6. Знайти інтервали угнутості та опуклості кривої, яка є графіком функції. Знайти точки перегину.

7. Побудувати графік функції.

Задача 13. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{x+2}{x-3}$

у точці перетину його з віссю абсцис та рівняння нормалі в точці перетину його з віссю ординат.

Розв'язання. Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ знаходиться за формулою (1.30), а рівняння нормалі за формулою (1.31). Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат:

а) з віссю Ox : $y = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$; $x = -2 \Rightarrow A(-2; 0)$;

б) з віссю Oy : $x = 0 \Rightarrow y = -2/3$; $\Rightarrow B(0; -2/3)$.

$$\begin{aligned} \text{Знайдемо похідну } y' &= \left(\frac{x+2}{x-3} \right)' = \frac{(x+2)' \cdot (x-3) - (x+2) \cdot (x-3)'}{(x-3)^2} = \\ &= \frac{1 \cdot (x-3) - (x+2) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x-3-x-2}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2}. \end{aligned}$$

Обчислимо похідну в точках A і B :

$$y'(x_A) = \frac{-5}{(-2-3)^2} = \frac{-5}{25} = -\frac{1}{5}, \quad y'(x_B) = \frac{-5}{(-3)^2} = -\frac{5}{9}.$$

Запишемо рівняння дотичної в точці A :

$$y - y_A = y'(x_A) \cdot (x - x_A) \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{5}(x + 2); \quad x + 5y + 2 = 0.$$

Запишемо рівняння нормалі в точці B :

$$y - y_B = -\frac{1}{y'(x_B)}(x - x_B) \Rightarrow y + \frac{2}{3} = -\frac{1}{-5/9}(x - 0); \quad y = \frac{9}{5}x - \frac{2}{3}.$$

$$\text{Відповідь: } x + 5y + 2 = 0, \quad y = \frac{9}{5}x - \frac{2}{3}.$$

Задача 14. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на відрізку $[-1; 2]$.

Розв'язання. Функція на відрізку $[-1; 2]$ неперервна. Знайдемо критичні точки. Перша похідна функції $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$. Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$. Звідки $x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$. Корені цього рівняння: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. Виберемо ті, що належать заданому відрізку: $x_1 \in [-1; 2]$; $x_2 \in [-1; 2]$; $x_3 \notin [-1; 2]$. Знайдемо значення функції в критичних точках $x_1 = 0$ та $x_2 = 1$ і на кінцях відрізка:

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(-1) = -10, \quad f(2) = -7.$$

Виберемо серед цих значень найбільше та найменше. Отже,

$$f_{\text{найб}} = \max_{[-1; 2]} f(x) = f(1) = 2 \quad \text{і} \quad f_{\text{найм}} = \min_{[-1; 2]} f(x) = f(-1) = -10.$$

$$\text{Відповідь: } f_{\text{найб}} = 2, \quad f_{\text{найм}} = -10.$$

Задача 15. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt{x^2} + 1$ на відрізку $[-1; 1]$.

Розв'язання. Функція на відрізку $[-1; 1]$ неперервна. Знайдемо критичні точки. Запишемо функцію у вигляді $f(x) = 2x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} + 1$ і знайдемо першу похідну функції:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} - 5 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{3} x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$. Звідки $x-1=0 \Rightarrow x_1=1$. Перша похідна $f'(x)$ не існує, тобто $f'(x) = \infty \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x_2 = 0$. Обидві критичні точки належать відрізку $[-1; 1]$. Знайдемо значення функції в критичних точках $x_1 = 1$ та $x_2 = 0$ і $x = -1$:

$$f(1) = -2, \quad f(0) = 1, \quad f(-1) = -6.$$

Виберемо серед цих значень найбільше та найменше. Отже,

$$f_{\text{найб}} = \max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1 \quad \text{і} \quad f_{\text{найм}} = \min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = -6.$$

Відповідь: $f_{\text{найб}} = 1$, $f_{\text{найм}} = -6$.

Задача 16. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = 2 \cos x - \sin 2x \quad \text{на відрізку} \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Розв'язання. Функція на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ неперервна. Знайдемо критичні точки. Знайдемо першу похідну функції:

$$f'(x) = -2 \cdot \sin x - 2 \cos 2x.$$

Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$. Звідки $-2 \cdot \sin x - 2 \cos 2x = 0 \Rightarrow 2 \cdot \sin x + 2 \cos 2x = 0$. Оскільки $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$, то матимемо рівняння: $2 \cdot \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. Зробимо заміну: $\sin x = t$, $|t| \leq 1$.

Тоді $2 \cdot t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Маємо

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x = -\frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Зі знайдених коренів відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ належать $x_1 = \frac{\pi}{2}$ і

$x_2 = \frac{\pi}{6}$. Знайдемо значення функції в критичних точках $x_1 = \frac{\pi}{2}$,

$x_2 = \frac{\pi}{6}$ і $x = -\frac{\pi}{2}$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,5\sqrt{3}, \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Виберемо серед цих значень найбільше та найменше. Отже,

$$f_{\text{найб}} = \max_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,5\sqrt{3} \text{ і}$$

$$f_{\text{найм}} = \min_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Відповідь: $f_{\text{найб}} = 0,5\sqrt{3}$, $f_{\text{найм}} = 0$.

Задача 17. За допомогою диференціального числення дослідити функцію $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Область визначення функції $D(y) : x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

2. Точки перетину графіка функції з осями координат.

З віссю OX : $y = 0 \Rightarrow x = 0$.

З віссю OY : $x = 0 \Rightarrow y = 0$.

Графік функції проходить через точку $O(0,0)$.

3. Перевіряємо виконання однієї із рівностей: $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$. Жодна з рівностей не виконується, тому функція є ні парна, ні непарна. Графік функції не буде мати ніякої симетрії.

4. Знайдемо асимптоти графіка функції. У точці $x = -1$ функція має нескінченний розрив:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty \text{ і } \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$$

Отже, $x = -1$ – рівняння вертикальної асимптоти.

Знаходимо похилі асимптоти за формулою (1.33): $y = k \cdot x + b$ і визначаємо за формулами (1.34), (1.35) значення k і b відповідно

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2 \cdot x} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - x(x^2 + 2x + 1)}{2(x+1)^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{2(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} = -1. \end{aligned}$$

Маємо рівняння похилої асимптоти $y = \frac{1}{2}x - 1$.

5. Знайдемо екстремум функції та інтервали монотонності (зростання і спадання) функції.

Перша похідна функції:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(x+1)(3(x+1) - 2x)}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(3x+3-2x)}{(x+1)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3 + 3 \cdot x^2}{(x+1)^3}. \end{aligned}$$

Знаходимо критичні точки: $y' = 0$ при $x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ і $x_2 = -3$; y' не існує при $(x+1)^3 = 0 \Rightarrow x = -1$, однак ця точка не належить області визначення функції. Складемо таблицю.

x	$(-\infty; -3]$	-3	$[-3; -1)$	$(-1; 0]$	0	$[0; \infty)$
y'	$+$	0	$-$	$+$	0	$+$
y	зростає	max	спадає	зростає	extr немає	зростає

Для кожного інтервалу з'ясуємо знак першої похідної y' і результат заносимо в таблицю. Точка $x = -3$ є точкою максимуму.

$$y_{\max} = y(-3) = \frac{(-3)^3}{2(-3+1)^2} = -\frac{27}{8}.$$

6. Знайдемо точки перегину, інтервали угнутості та опуклості кривої, яка є графіком функції.

Друга похідна:

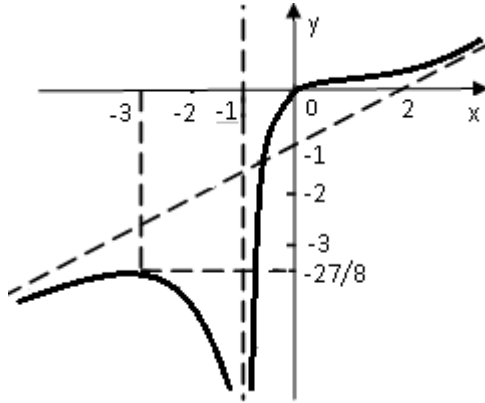
$$\begin{aligned} y'' = (y')' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(3x^2 + 6x) \cdot (x+1)^3 - (x^3 + 3x^2) \cdot 3 \cdot (x+1)^2}{(x+1)^6} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3x(x+2)(x+1)^3 - 3x^2(x+3)(x+1)^2}{(x+1)^6} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3x(x+1)^2((x+2)(x+1) - x(x+3))}{(x+1)^6} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3x(x^2 + 2x + x + 2 - x^2 - 3x)}{(x+1)^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x \cdot 2}{(x+1)^4} = \frac{3x}{(x+1)^4}. \end{aligned}$$

Знаходимо критичні точки: $y'' = 0$ при $x = 0$; y'' не існує при $x = -1$, однак ця точка не належить області визначення. Складемо таблицю.

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0]$	0	$[0; \infty)$
y''	—	—	0	+
y	\cap	\cap	перегин	\cup

Для кожного інтервалу з'ясуємо знак другої похідної y'' і результат заносимо в таблицю. Точка $x = 0$ є точкою перегину графіка функції. Значення функції в точці перегину $y(0) = 0$.

7. За результатами дослідження будемо графік функції.



Задача 18. Дослідити за допомогою диференціального числення функцію $y = \frac{e^x}{x-1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Область визначення функції $D(y) : x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

2. Точки перетину графіка функції з вісями координат.

З віссю OX : $y = 0 \Rightarrow \emptyset$.

З віссю OY : $x = 0 \Rightarrow y = -1$.

3. Перевіряємо виконання однієї із рівностей: $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$. Жодна з рівностей не виконується, тому функція є ні парна, ні непарна. Графік функції не буде мати ніякої симетрії.

4. Знайдемо асимптоти графіка функції.

У точці $x = 1$ функція має нескінченний розрив:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{e^x}{x-1} = -\infty \quad \text{і} \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{e^x}{x-1} = +\infty.$$

Отже, $x = 1$ – рівняння вертикальної асимптоти.

Знаходимо похилі асимптоти, використавши формулою (1.33), (1.34), (1.35).

Розглянемо випадок, коли $x \rightarrow -\infty$.

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - x} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x-1} - 0 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Маємо рівняння горизонтальної асимптоти $y = 0$, коли $x \rightarrow -\infty$.

Розглянемо випадок, коли $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 - x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \{ \text{За правилом Лопіталля} \} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2 - x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = \infty. \end{aligned}$$

З цього випливає, що похилих і горизонтальних асимптот немає, коли $x \rightarrow +\infty$.

5. Знайдемо екстремуми функції та інтервали монотонності (зростання і спадання) функції.

$$\text{Перша похідна функції: } y' = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Знаходимо критичні точки: $y' = 0$ при $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$; y' не існує при $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$, однак ця точка не належить області визначення функції. Складемо таблицю.

x	$(-\infty; 1)$	$(1; 2]$	2	$[2; \infty)$
y'	-	-	0	+
y	спадає	спадає	extr min	зростає

Для кожного інтервалу з'ясуємо знак першої похідної y' і результат заносимо в таблицю. Точка $x = 2$ є точкою мінімуму.

$$y_{\min} = y(2) = \frac{e^2}{2-1} = e^2 \approx 2,7^2 \approx 7,4.$$

6. Знайдемо точки перегину, інтервали вгнутості та опуклості кривої, яка є графіком функції.

Друга похідна:

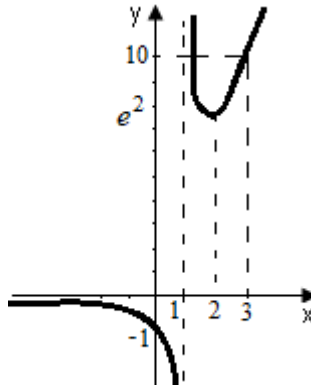
$$y'' = (y')' = \frac{(e^x(x-2) + e^x) \cdot (x-1)^2 - e^x(x-2) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{e^x(x-1)(x^2 - 2x + 1 - 2x + 4)}{(x-1)^4} = \frac{e^x(x^2 - 4x + 5)}{(x-1)^3}.$$

Знаходимо критичні точки: $y'' = 0$ при $e^x(x^2 - 4x + 5) = 0 \Rightarrow \emptyset$;
 y'' не існує при $(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$, однак ця точка не належить області визначення. Точок перегину графіка функції немає. Складемо таблицю.

x	$(-\infty; 1)$	$(1; \infty)$
y''	-	+
y	\cap	\cup

7. За результатами дослідження будемо графік функції. З метою уточнення графіка функції знайдемо $y(3) = \frac{e^3}{2} \approx 10$.



2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Означення 2.1. Якщо кожній впорядкованій парі чисел (x, y) , що належать множині D , поставлено у відповідність за деяким законом певне число z , то кажуть, що на множині D визначено функцію двох змінних x та y .

Позначення: $z = f(x, y)$.

Означення 2.2. Множину D пар значень (x, y) , для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називають *областю визначення функції*, а множину E значень z – *областю значень функції*.

x і y – незалежні змінні. Якщо функція $z = f(x, y)$ задана за допомогою формули, то областю визначення функції є множина всіх тих точок площини, для яких задана формула має зміст. Областю визначення функції може бути вся площина або частина площини, обмежена певними лініями.

Задача 19. Знайти і побудувати область визначення функції:

$$z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}.$$

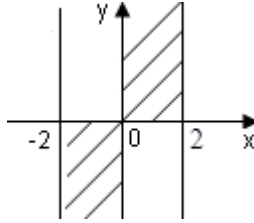
Розв'язання. Функція z є сумою двох функцій. Функція $\arcsin \frac{x}{2}$

визначена при $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$, тобто $-2 \leq x \leq 2$. Функція \sqrt{xy} існує, якщо

$xy \geq 0$, тобто у двох випадках: при $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$ і при $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0. \end{cases}$ Звідки

область визначення всієї функції: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ y \geq 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} -2 \leq x \leq 0, \\ y \leq 0. \end{cases}$

Побудуємо область визначення функції.



2.1. Частині похідні та диференціали функції двох змінних

Означення 2.3. Стала величина A називається *границею функції* $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо кожному довільно малому числу $\varepsilon > 0$ можна поставити у відповідність число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $M(x; y) \in D$, які задовольняють умові

$$\begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta, \\ 0 < |y - y_0| < \delta, \end{cases}$$

виконується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Позначення: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$.

Для функції двох змінних справедливі основні теореми про границі, розглянуті для функції однієї змінної.

Означення 2.4. Функція $z = f(x, y)$ називається *неперервною* в точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо кожному довільно малому числу $\varepsilon > 0$ можна поставити у відповідність число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $M(x; y) \in D$, які задовольняють умові

$$\begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta, \\ 0 < |y - y_0| < \delta, \end{cases}$$

виконується нерівність $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Позначення: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Означення 2.5. 1. Частинним приростом $\Delta_x z$ по змінній x (або частинним приростом $\Delta_y z$ по змінній y) функції $z = f(x, y)$ при переході від точки $(x; y) \in D$ до точки $(x + \Delta x; y) \in D$ (або $(x; y + \Delta y) \in D$) називають

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \quad (\text{або } \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)).$$

2. Повним приростом Δz функції $z = f(x, y)$ при переході від точки $(x; y) \in D$ до точки $(x + \Delta x; y + \Delta y) \in D$ називають

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Означення 2.6. Якщо існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, то її називають *частинною похідною функції $z = f(x, y)$ в точці $(x; y) \in D$ по змінній x* і позначають одним із символів: z'_x , $\frac{\partial z}{\partial x}$, f'_x , $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогічно визначається *частинна похідна функції $z = f(x, y)$ по змінній y* : $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$ і позначається одним із символів: z'_y , $\frac{\partial z}{\partial y}$, f'_y , $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Зауваження.

1. При знаходженні частинних похідних функції $z = f(x, y)$ правила диференціювання і таблиця похідних такі ж самі, як для функції однієї змінної.

2. При знаходженні частинної похідної по певній змінній всі інші змінні вважаємо сталими.

Задача 20. Знайти частинні похідні першого порядку для функції

$$z = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x}} + e^{2x+3y}.$$

Розв'язання. При знаходженні похідної по змінній x змінну y вважаємо сталою:

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{(x+y)'_x \cdot \sqrt[3]{x} - (x+y) \cdot (\sqrt[3]{x})'_x}{(\sqrt[3]{x})^2} + \left(e^{2x+3y} \right)'_x = \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt[3]{x} - (x+y) \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3}}{\sqrt[3]{x^2}} + e^{2x+3y} \cdot 2 = \frac{3x - x - y}{3\sqrt[3]{x^4}} + 2e^{2x+3y} = \\ &= \frac{2x-y}{3\sqrt[3]{x^4}} + 2e^{2x+3y}. \end{aligned}$$

При знаходженні похідної по змінній y змінну x вважаємо сталою:

$$\begin{aligned} z'_y &= \frac{(x+y)'_y \cdot \sqrt[3]{x} - (x+y) \cdot (\sqrt[3]{x})'_y}{(\sqrt[3]{x})^2} + \left(e^{2x+3y} \right)'_y = \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt[3]{x} - (x+y) \cdot 0}{\sqrt[3]{x^2}} + e^{2x+3y} \cdot 3 = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3e^{2x+3y}. \end{aligned}$$

Відповідь: $z'_x = \frac{2x-y}{3\sqrt[3]{x^4}} + 2e^{2x+3y}$, $z'_y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3e^{2x+3y}$.

Нехай функція $z = f(x, y)$ має скінчену частинну похідну по змінній x : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = f'_x(x, y)$. Тоді $\Delta_x z = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, де $\alpha \rightarrow 0$, коли $\Delta x \rightarrow 0$. Вираз $f'_x(x, y) \cdot \Delta x$ називається *головною частиною частинного приросту* $\Delta_x z$ по змінній x функції $z = f(x, y)$.

Означення 2.7. Частинним диференціалом по змінній x функції

$z = f(x, y)$ називається головна частина частинного приросту $\Delta_x z$, пропорційна приросту змінної x і позначають $d_x z = f'_x(x, y) \cdot dx$.

Аналогічно визначається *частинний диференціал по змінній y функції* $z = f(x, y)$, тобто $d_y z = f'_y(x, y) \cdot dy$.

Означення 2.8. Повним диференціалом функції $z = f(x, y)$ називається головна частина повного приросту функції, лінійна відносно Δx та Δy : $dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y$.

Враховуючи, що $\Delta x = dx$ і $\Delta y = dy$, матимемо

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy. \quad (2.1)$$

Задача 21. Знайти повний диференціал функції

$$z = 5x^2y^3 - 4x + 2y - 3.$$

Розв'язання. Повний диференціал функції знаходимо за формулою (2.1). Знайдемо перші частинні похідні: $z'_x = 10xy^3 - 4$, $z'_y = 15x^2y^2 + 2$. Тоді повний диференціал функції

$$dz = (10xy^3 - 4)dx + (15x^2y^2 + 2)dy.$$

Відповідь: $dz = (10xy^3 - 4)dx + (15x^2y^2 + 2)dy$.

Нехай задано рівняння $F(x, y, z) = 0$. Припустимо, що воно не може бути розв'язано відносно функції z , тобто маємо неявно задану функцію $z = f(x, y)$.

Теорема 2.1 (про існування та диференційовність неявно заданої функції двох змінних).

Якщо виконуються такі умови:

1) функція $F(x, y, z)$ і її похідні $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$ визначені та неперервні в паралелепіпеді:

$$G = \{(x, y, z): x_0 - a \leq x \leq x_0 + a; y_0 - b \leq y \leq y_0 + b; z_0 - c \leq z \leq z_0 + c\};$$

$$2) F(x_0, y_0, z_0) = 0;$$

$$3) F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

то існує околі точки $(x_0; y_0; z_0)$, в якому рівняння $F(x, y, z) = 0$ визначає неявну функцію $z = f(x, y)$, неперервну та диференційовану в околі точки $(x_0; y_0)$ і таку, що $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Тоді частинні похідні неявної функції $z = f(x, y)$ визначаються за формулами:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}. \quad (2.2)$$

Аналогічні формули можна застосувати для неявної функції $y = f(x)$, заданої рівнянням $F(x, y) = 0$. Матимемо

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}. \quad (2.3)$$

Задача 22. Знайти для функції, що задана неявно:

а) $\sin(xyz) + \sqrt{x + y + z} = 0$ похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$,

б) $xy^3 + \ln y + x^2 = 0$ похідну першого порядку $\frac{dy}{dx}$.

Розв'язання. а) $\sin(xyz) + \sqrt{x + y + z} = 0$. Частинні похідні функції заданої неявно знаходимо за формулами (2.2). Маємо рівняння $F(x, y, z) = 0$, де $F(x, y, z) = \sin(xyz) + \sqrt{x + y + z}$. Знайдемо похідні функції $F(x, y, z)$ по змінних x , y , z і підставимо у формулу:

$$F'_x = \cos(xyz) \cdot (yz) + \frac{1}{2\sqrt{x + y + z}} = \frac{2yz \cdot \cos(xyz) \cdot \sqrt{x + y + z} + 1}{2\sqrt{x + y + z}},$$

$$F'_y = \cos(xyz) \cdot (xz) + \frac{1}{2\sqrt{x + y + z}} = \frac{2xz \cdot \cos(xyz) \cdot \sqrt{x + y + z} + 1}{2\sqrt{x + y + z}},$$

$$F'_z = \cos(xyz) \cdot (xy) + \frac{1}{2\sqrt{x+y+z}} = \frac{2xy \cdot \cos(xyz) \cdot \sqrt{x+y+z} + 1}{2\sqrt{x+y+z}}.$$

Тоді частинні похідні заданої функції:

$$z'_x = -\frac{2yz \cdot \cos(xyz) \cdot \sqrt{x+y+z} + 1}{2xy \cdot \cos(xyz) \cdot \sqrt{x+y+z} + 1},$$

$$z'_y = -\frac{2xz \cdot \cos(xyz) \cdot \sqrt{x+y+z} + 1}{2xy \cdot \cos(xyz) \cdot \sqrt{x+y+z} + 1};$$

б) $xy^3 + \ln y + x^2 = 0$. Похідну функції заданої неявно знаходимо за формулою (2.3). Маємо рівняння $F(x, y) = 0$, де $F(x, y) = xy^3 + \ln y + x^2$. Знайдемо похідні функції $F(x, y)$ по змінних x , y і підставимо у формулу:

$$F'_x = y^3 + 2x, \quad F'_y = 3xy^2 + \frac{1}{y} = \frac{3xy^3 + 1}{y}.$$

$$y'_x = -\frac{y^3 + 2x}{3xy^3 + 1} = -\frac{y^4 + 2xy}{3xy^3 + 1}.$$

Відповідь: а) $z'_x = -\frac{2yz \cdot \cos(xyz) \cdot \sqrt{x+y+z} + 1}{2xy \cdot \cos(xyz) \cdot \sqrt{x+y+z} + 1},$

$$z'_y = -\frac{2xz \cdot \cos(xyz) \cdot \sqrt{x+y+z} + 1}{2xy \cdot \cos(xyz) \cdot \sqrt{x+y+z} + 1};$$

б) $y'_x = -\frac{y^4 + 2xy}{3xy^3 + 1}.$

Розглянемо знаходження похідних першого порядку для складеної функції двох змінних.

а) Нехай функція $z = f(x, y)$ залежить від двох змінних x та y , кожна з яких, в свою чергу, є функцією змінної t : $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Тоді

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (2.4)$$

б) Нехай функція $z = f(x, y)$ і $y = y(x)$. Тоді

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (2.5)$$

в) Нехай функція $z = f(x, y)$ і $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (2.6)$$

Задача 23. Знайти першу похідну складної функції а) $z = \cos \frac{x}{y}$,

де $x = t^2 - 3t$, $y = \sqrt[5]{t^2 + 1}$; б) $z = x^3 y - 4xy^2 + \sqrt{xy}$, де $y = \sqrt[3]{3x^2 + 4}$;

в) $z = x^2 y - xy^3$, де $x = u^2 v + 4$, $y = uv^3 - 3$.

Розв'язання. а) $z = \cos \frac{x}{y}$, де $x = t^2 - 3t$, $y = \sqrt[5]{t^2 + 1}$. Для

знаходження похідної застосуємо формулу (2.4). Знайдемо похідні:

$$z'_x = -\sin \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}, \quad z'_y = -\sin \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{y^2} \cdot \sin \frac{x}{y}, \quad x'_t = 2t - 3,$$

$$y'_t = \frac{1}{5} (t^2 + 1)^{-4/5} \cdot 2t.$$

Підставимо їх у формулу:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{y} \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot (2t - 3) + \frac{x}{y^2} \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \frac{2}{5} t \cdot (t^2 + 1)^{-4/5}.$$

б) $z = x^3 y - 4xy^2 + \sqrt{xy}$, де $y = \sqrt[3]{3x^2 + 4}$. Для знаходження похідної застосуємо формулу (2.5). Знайдемо похідні:

$$z'_x = 3x^2y - 4y^2 + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}, \quad z'_y = x^3 - 8xy + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}, \quad y'_x = \frac{1}{3}(3x^2 + 4)^{-2/3} 6x.$$

Підставимо їх у формулу:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= 3x^2y - 4y^2 + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \left(x^3 - 8xy + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{1}{3} (3x^2 + 4)^{-2/3} 6x = \\ &= 3x^2y - 4y^2 + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + 2x \cdot \left(x^3 - 8xy + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \right) \cdot (3x^2 + 4)^{-2/3}. \end{aligned}$$

в) $z = x^2y - xy^3$, де $x = u^2v + 4$, $y = uv^3 - 3$. Для знаходження похідної застосуємо формулу (2.6). Знайдемо похідні:

$$z'_x = 2xy - y^3, \quad z'_y = x^2 - 3xy^2, \quad x'_u = 2uv, \quad x'_v = u^2, \quad y'_u = v^3, \quad y'_v = 3uv^2.$$

Підставимо їх у формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (2xy - y^3) \cdot 2uv + (x^2 - 3xy^2) \cdot v^3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (2xy - y^3) \cdot u^2 + (x^2 - 3xy^2) \cdot 3uv^2.$$

Відповідь: а) $\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{y} \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot (2t - 3) + \frac{x}{y^2} \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \frac{2}{5} t \cdot (t^2 + 1)^{4/5};$

б) $\frac{dz}{dx} = 3x^2y - 4y^2 + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + 2x \cdot \left(x^3 - 8xy + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \right) \cdot (3x^2 + 4)^{-2/3};$

в) $\frac{\partial z}{\partial u} = (2xy - y^3) \cdot 2uv + (x^2 - 3xy^2) \cdot v^3,$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (2xy - y^3) \cdot u^2 + (x^2 - 3xy^2) \cdot 3uv^2.$$

Частинні похідні першого порядку z'_x , z'_y функції двох змінних $z = f(x, y)$ в свою чергу є функціями двох змінних. Їх можна диференціювати.

Означення 2.9. Частинними похідними другого порядку функції

$z = f(x, y)$ називаються похідні:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \quad (2.7)$$

Означення 2.10. Частинні похідні другого порядку z''_{xy} і z''_{yx} називають *мішаними похідними другого порядку*.

При цьому $z''_{xy} = z''_{yx}$, тобто $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Означення 2.11. Диференціалом другого порядку називається диференціал від диференціала першого порядку, а саме:

$$d^2 z = d(dz) = d(z'_x dx + z'_y dy). \quad (2.8)$$

Тоді

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2. \quad (2.9)$$

Аналогічно можна отримати формулу для диференціала n -го порядку:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z. \quad (2.10)$$

Задача 24. Довести, що функція $z = xy + \ln(x+y)$ задовольняє рівнянню $z''_{xy} - z''_{yy} = 1$.

Розв'язання. Знайдемо перші частинні похідні заданої функції:

$$z'_x = y + \frac{1}{x+y} \quad \text{і} \quad z'_y = x + \frac{1}{x+y}. \quad \text{Тоді} \quad z''_{xy} = 1 - \frac{1}{(x+y)^2} \quad \text{і}$$

$$z''_{yy} = -\frac{1}{(x+y)^2}. \quad \text{Підставимо знайдені похідні другого порядку в}$$

задане рівняння:

$$1 - \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} = 1 \Rightarrow 1 \equiv 1.$$

Отримали тотожність.

Відповідь: функція задовольняє заданому рівнянню.

2.2. Деякі застосування частинних похідної функції двох змінних

Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

Нехай задано поверхню $F(x, y, z) = 0$. Точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ належить цій поверхні і функція $F(x, y, z)$ диференційовна в ній, причому частинні похідні функції в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ одночасно не дорівнюють нулю.

Означення 2.12. Дотичною площиною до поверхні в точці M_0 називається площина, яка містить усі дотичні до кривих, проведених на поверхні через точку M_0 .

Розглянемо дотичну площину до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці M_0 . Нормальний вектор дотичної площини в точці M_0 має координати: $\vec{n} = (F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0))$. Тоді рівняння дотичної площини до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці M_0 обчислюється за формулою:

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0. \quad (2.11)$$

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, то поклавши $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, можна застосувати наведені вище формули.

$$F'_x(M_0) = f'_x(x_0, y_0), \quad F'_y(M_0) = f'_y(x_0, y_0), \quad F'_z(M_0) = -1.$$

Тоді рівняння дотичної площини в точці M_0 матиме вигляд

$$f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - (z - z_0) = 0, \quad (2.12)$$

Означення 2.13. *Нормаллю до поверхні в точці M_0 називають прямою, яка проходить через цю точку перпендикулярно до дотичної площини в точці M_0 .*

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то рівняння нормалі, яка проходить через точку M_0 , має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (2.13)$$

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, то рівняння нормалі в точці M_0 , має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (2.14)$$

Екстремум функції двох змінних

Означення 2.14. Точка $M_0(x_0; y_0)$ є *точкою локального максимуму функції $z = f(x, y)$* , якщо значення функції в цій точці є найбільшим у деякому околі точки M_0 .

Означення 2.15. Точка $M_0(x_0; y_0)$ є *точкою локального мінімуму функції $z = f(x, y)$* , якщо значення функції в цій точці є найменшим у деякому околі точки M_0 .

Теорема 2.2 (*необхідні умови екстремуму*). Якщо в точці $M_0(x_0; y_0)$ диференційована функція $z = f(x, y)$ має екстремум, то її частинні похідні першого порядку в цій точці рівні нулю:

$$z'_x = 0, \quad z'_y = 0. \quad (2.15)$$

Зауваження. Функція може мати екстремум в точках, де хоча б одна з частинних похідних не існує.

Означення 2.16. Точка, в якій частинні похідні першого порядку функції $z = f(x, y)$ рівні нулю, тобто, $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, називається *стаціонарною точкою функції* $z = f(x, y)$.

Означення 2.17. Стаціонарні точки і точки, в яких хоча б одна частинна похідна не існує, називаються *критичними точками*.

В критичних точках функція може мати екстремум, а може і не мати. Рівність нулю частинних похідних є необхідною, але не є достатньою умовою існування екстремуму.

Нехай функція $z = f(x, y)$ в деякому околі критичної точки $M_0(x_0; y_0)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно.

Теорема 2.3 (*достатні умови екстремуму*). Нехай функція $z = f(x, y)$ в деякому околі критичної точки $M_0(x_0; y_0)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Якщо

$$\Delta(x_0; y_0) = f''_{xx}(x_0; y_0) \cdot f''_{yy}(x_0; y_0) - (f''_{xy}(x_0; y_0))^2 > 0, \quad (2.16)$$

то функція $z = f(x, y)$ має екстремум в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Якщо $\Delta(x_0; y_0) > 0$ і $f''_{xx}(x_0; y_0) < 0$, то функція має *максимум* в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Якщо $\Delta(x_0; y_0) > 0$ і $f''_{xx}(x_0; y_0) > 0$, то функція має *мінімум* в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Якщо $\Delta(x_0; y_0) < 0$, то точка $M_0(x_0; y_0)$ не екстремальна.

Якщо $\Delta(x_0; y_0) = 0$, то необхідне додаткове дослідження.

Задача 25. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $2z = x^2 + y^2$ в точці $M_0(1; -2; 2,5)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння поверхні в неявному вигляді: $F(x, y, z) = 0$. У нашому випадку $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z$.

Знайдемо частинні похідні в точці M_0 :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_0} = 2x|_{M_0} = 2, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_0} = 2y|_{M_0} = -4, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_0} = -2.$$

Підставимо в рівняння (2.11) знайдені значення похідних. Матимемо рівняння дотичної площини:

$$2(x-1) - 4(y+2) - 2(z-2,5) = 0 \Rightarrow 2x - 4y - 2z - 5 = 0.$$

Рівняння нормалі знайдемо за формулою (2.13):

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2,5}{-2}.$$

Відповідь: дотична площина $2x - 4y - 2z - 5 = 0$,

$$\text{нормаль } \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2,5}{-2}.$$

Задача 26. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 + 20y^2 + z^2 - 28 = 0$ при $x_0 = 2, y_0 = 1$.

Розв'язання. Знайдемо z_0 , підставивши $x_0 = 2, y_0 = 1$ у рівняння поверхні: $4 + 20 + z_0^2 - 28 = 0 \Rightarrow z_0^2 = 4, z_0 = \pm 2$. Маємо дві точки $M_1(2; 1; 2)$ і $M_2(2; 1; -2)$.

У нашому випадку $F(x, y, z) = x^2 + 20y^2 + z^2 - 28$. Знайдемо перші частинні похідні функції $F(x, y, z)$ в точках M_1 і M_2 .

$$\text{Маємо } \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 40y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z. \text{ Тоді}$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_1} = 4, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_1} = 40, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_1} = 4,$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_2} = 4, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_2} = 40, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_2} = -4.$$

Для точки $M_1(2; 1; 2)$ дотична площина і нормаль мають рівняння:

$$4(x-2) + 40(y-1) + 4(z-2) = 0 \Rightarrow x + 10y + z - 14 = 0,$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{10} = \frac{z-2}{1}.$$

Для точки $M_2(2; 1; -2)$ дотична площина і нормаль мають рівняння:

$$4(x-2) + 40(y-1) - 4(z+2) = 0 \Rightarrow x + 10y - z - 14 = 0,$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{10} = \frac{z+2}{-1}.$$

Відповідь: для $M_1(2; 1; 2)$ дотична площина $x + 10y + z - 14 = 0$,

$$\text{нормаль } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{10} = \frac{z-2}{1};$$

для $M_2(2; 1; -2)$ дотична площина $x + 10y - z - 14 = 0$,

$$\text{нормаль } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{10} = \frac{z+2}{-1}.$$

Задача 27. Дослідити на екстремум функцію $z = 8x^3 + y^3 - 6xy + 5$.

Розв'язання. Область визначення функції – вся площина: $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$.

Щоб знайти екстремум функції необхідно знайти критичні точки, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

Знаходимо частинні похідні функції: $z'_x = 24x^2 - 6y$,
 $z'_y = 3y^2 - 6x$. Розв'яжемо систему: $\begin{cases} 24x^2 - 6y = 0, \\ 3y^2 - 6x = 0. \end{cases}$

Розв'язок системи $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x_2 = 0,5, \\ y_2 = 1. \end{cases}$ Маємо дві точки: $M_1(0; 0)$

і $M_2(0,5; 1)$. Обидві точки належать області визначення.

У кожній точці знайдемо

$$\Delta(x_0; y_0) = z''_{xx}(x_0; y_0) \cdot z''_{yy}(x_0; y_0) - (z''_{xy}(x_0; y_0))^2.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку даної функції:

$$z''_{xx} = 48x, \quad z''_{yy} = -6, \quad z''_{xy} = 6y.$$

Досліджуємо на екстремум точку $M_1(0; 0)$. Обчислимо значення других частинних похідних у цій точці:

$$z''_{xx}(0; 0) = 0, \quad z''_{yy}(0; 0) = -6, \quad z''_{xy}(0; 0) = 0.$$

Тоді $\Delta(0; 0) = 0 - (-6)^2 = -36 < 0$. В точці $M_1(0; 0)$ екстремуму немає.

Досліджуємо на екстремум точку $M_2(0,5; 1)$. Обчислимо значення других частинних похідних у цій точці:

$$z''_{xx}(0,5; 1) = 24, \quad z''_{yy}(0,5; 1) = -6, \quad z''_{xy}(0,5; 1) = 6.$$

Тоді $\Delta(0,5; 1) = 24 \cdot 6 - (-6)^2 = 108 > 0$. В точці $M_2(0,5; 1)$ екстремум існує. Оскільки $z''_{xx}(0,5; 1) > 0$, то в точці $M_2(0,5; 1)$ функція має мінімум.

Обчислимо значення заданої функції в точці $M_2(0,5; 1)$

$$z_{\min} = z(0,5; 1) = 8 \cdot (0,5)^3 + 1^3 - 6 \cdot 0,5 \cdot 1 + 5 = 4.$$

Відповідь: $z_{\min} = z(0,5; 1) = 4$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика : Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников та ін. – К. : Техніка, 2007. – 600 с.
2. Вища математика : Підручник / В. А Домбровський та ін. ; за редакцією М. І. Шинкарика. – Тернопіль : Видавництво Карп'юка, 2003 – 480 с.
3. Вища математика : Підручник : У 2 кн. – 2-ге вид. перероб. і доп. – К. : Либідь, 2003. – Кн. 1. Основні розділи. – Основні розділи / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін. ; за ред. Г. Л. Кулініча. – 400 с.
4. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
5. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах. Алгебра - Вектори : навчальний посібник / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. – К. : Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.
6. Шкіль М. І. Вища математика : підручник для студ. ВНЗ. : у 2-х кн. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – К. : Либідь, 2010. – Кн. 1. – 592 с.