

DOI 10.15421/4224110
УДК 539.3

А. В. Пожуєв¹, канд. фіз.-мат. наук,
В. І. Пожуєв², д-р фіз.-мат. наук

НЕСТАЦІОНАРНА РЕАКЦІЯ ТРЬОХШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ З В'ЯЗКОПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ НА ДІЮ РУХОМОГО НОРМАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Показана можливість розповсюдження принципу відповідності пружної і в'язкопружної задач на динамічні задачі в нестационарній постановці при розрахунку трьохшарових пластин з м'яким в'язкопружним заповнювачем. При цьому звернута увага на те, що сумісні застосування інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа із застосуванням для отримання оригіналів шуканих величин спеціального числового алгоритму дозволяє за однією схемою розглянути випадки, коли залежність між компонентами в'язкопружного матеріалу задається як в диференціальній, так і в інтегральній формі. Проаналізовано вплив швидкості руху навантаження вздовж несучих шарів пластини на її напружено-деформований стан і проведено порівняння з випадком, коли матеріал заповнювача вважається пружним.

Ключові слова: теорія пластин; несучі шари; заповнювач; граничні і початкові умови; трансформанти; оригінали; напруження; переміщення.

Вступ. Вивченню стаціонарних реакцій пластин і оболонок, які взаємодіють з інерційним середовищем (пружним або акустичним), присвячена значна кількість досліджень, зокрема достатньо повний аналіз стану проблеми про рух зі сталою швидкістю навантажень по поверхні таких елементів конструкцій наведено в монографії [8], а також в [4], де розглянуті багат шарові пластини та оболонки, коли рух усіх шарів або частини з них описується динамічними рівняннями теорії пружності. Більш складними є задачі в нестационарній постановці, коли навіть при подальшому русі навантаження зі сталою або змінною швидкістю необхідно враховувати початкові умови і аналізувати перехідні процеси до встановлення стаціонарного режиму. Стан питання детально описано в огляді А. Г. Горшкова [2], а більш пізні дослідження вітчизняних і закордонних авторів наведено в монографії [9].

У даній роботі розглядається трьохшарова пластина в загальному випадку несиметричної за товщиною будови, в якій товщини і механічні характеристики шарів різні, а матеріал заповнювача описується рівняннями теорії в'язкопружності. Пластина є необмеженою і на неї з обох боків діють самоврівноважені нормальні навантаження, які не залежать від координати y і рухаються зі сталою швидкістю, починаючи рух з моменту часу $t = 0$, у додатному напрямку осі x . При такому наванта-

женні в пластині виникає нестационарний плоский деформований стан, при якому переміщення у напрямку осі z відсутні, а усі інші компоненти її напружено-деформованого стану є функціями змінних x, y, t . Зазначимо, що подібна задача в стаціонарній постановці раніше розглядалася в [3], а в нестационарній постановці (у випадку пружного заповнювача) в [10]. Тут вперше застосовується для подібних задач у нестационарній постановці принцип відповідності пружної і в'язкопружної задач (пружно-в'язкопружна аналогія), запропонований у монографії [5], і розповсюджений на задачі в стаціонарній постановці в [3, 11]. Розв'язок отримано сумісним застосуванням інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа з наступним оберненням обох перетворень за спеціальним числовим алгоритмом, який ґрунтується на методах Файлона і зміщених поліномах Лежандра [6, 7], ефективність такого підходу досліджена в монографії [9].

Постановка задачі. Опис моделі. Початок координат обираємо на серединній поверхні пластини, а вісь Oy направляємо вертикально вгору (рис. 1).

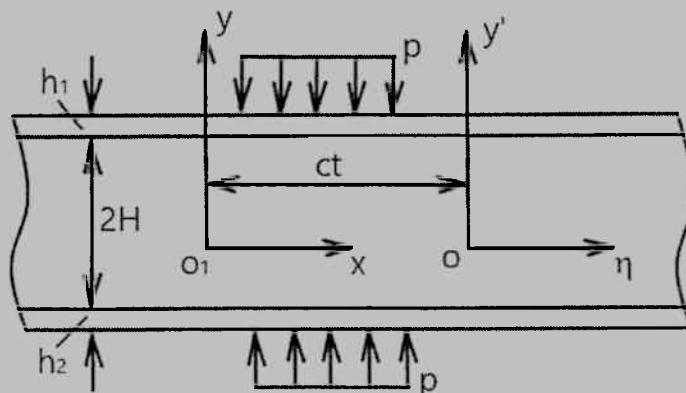


Рис. 1 – Схема задачі

Для опису руху кожного з несучих шарів пластини будемо використовувати рівняння з урахуванням поперечного зсуву та інерції обертання (типу Тимошенка), які з урахуванням реакції з боку заповнювача у випадку жорсткого контакту між обшивками і в'язкопружним заповнювачем можна записати у такому вигляді [1]

$$\frac{4G_k h_k}{1-\nu_k} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x^2} - q_{xk}(x,t) = 2\rho_k h_k \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} \quad (k=1,2),$$

$$2\beta_k^2 G_k h_k \left(\frac{\partial^2 \omega_k}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \right) - q_{yk}(x,t) = 2\rho_k h_k \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial t^2} \pm p_k(x,t), \quad (1)$$

$$\frac{4 G_k h_k^2}{3(1-\nu_k)} \frac{\partial^2 \alpha_k}{\partial x^2} + 2\beta_k^2 G_k \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x} - \alpha_k \right) - q_{xk}(x,t) = \frac{2}{3} \rho_k h_k^2 \frac{\partial^2 \alpha_k}{\partial t^2}.$$

Тут індекс $k=1$ відноситься до верхнього несучого шару, а 2 — до нижнього; α_k — кут повороту поперечного перерізу зовнішнього шару;

β_k^2 – зсувний коефіцієнт Тимошенка; $q_{yk}(x, t)$, $q_{xk}(x, t)$ – нормальні і дотичні напруження, які діють на поверхнях розділу несучих шарів і заповнювача.

Рівняння руху в'язкопружного заповнювача запишемо у такому вигляді

$$\sigma_{ij,j}(x, y, t) = \rho_c \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \quad (i, j = x, y). \quad (2)$$

Залежність між компонентами тензорів напружень та деформацій для в'язкопружного матеріалу у випадку диференціальних операторів подається таким чином [5]

$$\begin{aligned} Q_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{ij} &= Q_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon \cdot \delta_{ij} + Q_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_{ij}; \\ Q_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) &= \sum_{k=0}^{n_0} \left(a_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right); \quad Q_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \sum_{k=0}^{n_0} \left(b_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right); \\ Q_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) &= \sum_{k=0}^{n_0} \left(c_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера; a_k , b_k , c_k – параметри, які характеризують в'язкопружний матеріал.

Співвідношення між деформаціями та переміщеннями мають вигляд

$$2\varepsilon_{ij}(t) = u_{i,j}(t) + u_{j,i}(t) \quad (i, j = x, y). \quad (4)$$

Граничні умови на бокових поверхнях заповнювача у випадку жорсткого контакту з обшивками мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= q_{y1}, \quad \sigma_{xy} = q_{x1}, \\ U_x &= U_1 + h_1 \alpha_1, \quad U_y = \omega_1 \quad (y = H), \\ \sigma_{yy} &= -q_{y2}, \quad \sigma_{xy} = -q_{x2}, \\ U_x &= U_2 - h_2 \alpha_2, \quad U_y = \omega_2 \quad (y = -H). \end{aligned} \quad (5)$$

Якщо вважати контакт ковзним, то замість (5) треба записувати такі умови

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= q_{y1}, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad U_y = \omega_1 \quad (y = H), \\ \sigma_{yy} &= -q_{y2}, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad U_y = \omega_2 \quad (y = -H). \end{aligned} \quad (6)$$

Принцип відповідності пружної та в'язкопружної задачі. Перейдемо в рівняннях (1) – (6) до рухомої системи координат, поклавши $\eta = (x - ct)/H$, де c – стала швидкість руху нормального навантаження по верхньому і нижньому несучих шарах, і будемо вважати, що задані зусилля, шукані переміщення і напруження у всіх шарах задовольняють умовам існування перетворень Лапласа по t і Фур'є по η . Тоді, застосовуючи вказані перетворення у такому вигляді

$$\Phi^L(\eta, y_*, p) = \int_0^{\infty} \Phi(\eta, y_*, \tau) e^{-p\tau} d\tau; \quad (7)$$

$$\Phi^{LF}(\xi, y_*, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^L(\eta, y_*, p) \cdot e^{i\xi\eta} d\eta, \quad (8)$$

де $y_* = y/H$, $\tau = c_S t/H$, $c_S = \sqrt{G_c/\rho_c}$,

замість (2), (3) у просторі зображень отримаємо такі співвідношення

$$\sigma_{ij,j}^0 = -\rho_c \frac{c^2}{H^2} (\xi^2 + p^2) \mu_i^0; \quad (9)$$

$$\sigma_{ij}^0 = \lambda(c, p, \xi) \delta_{ij} \varepsilon^0 + 2\mu(c, \xi, p) \varepsilon_{ij}^0. \quad (10)$$

Тут $\lambda(c, p, \xi), \mu(c, \xi, p)$ – комплексні для в'язкопружного матеріалу коефіцієнти Ламе, які залежать від швидкості руху навантаження, характеристик матеріалу заповнювача, параметрів перетворень Фур'є і Лапласа, і визначаються за такими формулами

$$\begin{aligned} \lambda(c, p, \xi) &= Q_1^0(c, p, \xi) / Q_0^0(c, p, \xi); \\ \mu(c, p, \xi) &= Q_2^0(c, p, \xi) / 2Q_0^0(c, p, \xi); \end{aligned} \quad (11)$$

$$Q_0^0 = \sum_{k=0}^{n_0} a_k \left(-\frac{c}{H}\right)^k (p - i\xi)^k, \quad Q_1^0 = \sum_{k=0}^{n_0} b_k \left(-\frac{c}{H}\right)^k (p - i\xi)^k, \quad (12)$$

$$Q_2^0 = \sum_{k=0}^{n_0} c_k \left(-\frac{c}{H}\right)^k (p - i\xi)^k.$$

Відповідним чином у просторі зображень перетворюються (4) і граничні умови (5), (6).

Легко бачити, що якщо провести описаний вище перехід до рухомої системи координат і застосувати подвійне інтегральне перетворення Фур'є – Лапласа до рівнянь руху, закону Гука, співвідношень Коші і

граничних умов для пружного матеріалу з тією ж густиною, що і розглянутий тут в'язкопружний заповнювач, то у просторі зображень прийдемо до подібної задачі, якщо у перетвореному за Фур'є – Лапласа законі Гука замість λ і μ підставити комплексні коефіцієнти Ляме, які обчислюються згідно з (11). Тому розв'язок нестационарної задачі про дію рухомого навантаження на трьохшарову пластину з в'язкопружним заповнювачем можна отримати на основі принципу відповідності [5], згідно з яким у просторі зображень у формулах для трансформант переміщень і напружень в заповнювачі треба замінити коефіцієнти Ляме комплексними коефіцієнтами, а потім у просторі оригіналів знайти розв'язок задачі, застосувавши обернені перетворення Фур'є і Лапласа. Зазначимо, що головним обмеженням при застосуванні даного принципу є вимога, щоб не змінювалися граничні умови в даному випадку в рухомій системі координат.

Варто зазначити, що як вже відзначалося в [11], принцип відповідності працює і в тому випадку, коли залежність між компонентами тензора напружень і деформацій в'язкопружного матеріалу (аналог закону Гука для пружного середовища) задається в інтегральній формі. Зокрема, для одного з видів такої залежності комплексні коефіцієнти Ляме знаходяться за формулами

$$\lambda(c, p, \xi) = \lambda_0 \left[1 - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau} e^{i(c\xi - ip)\tau} d\tau d\eta \right]; \quad (13)$$

$$\mu(c, p, \xi) = \mu_0 \left[1 - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) e^{-p\tau} e^{i\xi\eta c} d\tau d\eta \right],$$

де $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ – ядра в'язкопружних операторів, які залежать від швидкості об'ємної та зсувної релаксації.

Таким чином, при використанні принципу відповідності механічні властивості в'язкопружного матеріалу можуть задаватися в достатньо загальному вигляді. Оскільки навіть у випадку пружного матеріалу сумісне обернення перетворень Фур'є і Лапласа проводиться чисельно на основі спеціального алгоритму [9], тому немає необхідності застосовувати обмежені частинні моделі в'язкопружних тіл для різного роду спрощень формул виду (11) або (13).

Розв'язання задачі у просторі зображень. Розглянемо спочатку випадок ковзного контакту між обшивками і заповнювачем, коли граничні умови записуються у вигляді (6). Тоді $q_{xk}(x, t) = 0$, і у просторі зображень система, яку отримуємо із (1), розглядається так, що із останніх двох рівнянь маємо вираз для трансформант нормальних навантажень, які передаються на заповнювач у такому вигляді

$$q_{yk}^0(\xi, p) = \pm p_k^0(\xi, p) - G_k A_k(\xi, p) \omega_k^0; \quad (14)$$

$$A_k(\xi, p) = 2\chi_k \left(\beta_k^2 \gamma_k \xi^2 + \rho_k^* p^2 - \beta_k^2 \xi \gamma_k (1 - \nu_k) R_k(\xi, p) \right); \quad (15)$$

$$R_k(\xi, p) = \frac{3\beta_k^2 \xi \gamma_k}{2\gamma_k \xi^2 \chi_k^2 + (1 - \nu_k) (\rho_k^* \chi_k^2 p^2 + 3\chi_k^2 \gamma_k)}; \quad (16)$$

$$\chi_k = \frac{h_k}{H}, \quad \gamma_k = \frac{G_k}{G}, \quad \rho_k^* = \frac{\rho_k}{\rho},$$

де знак “-” відповідає $k = 1$, знак “+” – $k = 2$.

Згідно з принципом відповідності спочатку розглянемо заповнювач як пружне середовище, а потім врахуємо, що коефіцієнти Ляме λ і μ для в'язкопружного матеріалу будуть не константами, а визначаються за формулами (11) або (13). У переміщеннях рух заповнювача описується такими динамічними рівняннями

$$c_S^2 \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \right) + (c_P^2 - c_S^2) \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}; \quad (17)$$

$$c_S^2 \left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} \right) + (c_P^2 - c_S^2) \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2},$$

де у в'язкопружному випадку треба використовувати такі формули

$$c_S^2(c, p, \xi) = \frac{\mu(c, p, \xi)}{\rho}, \quad c_P^2(c, p, \xi) = \frac{\lambda(c, p, \xi) + 2\mu(c, p, \xi)}{\rho}. \quad (18)$$

Зазначимо, що c_p, c_s – комплексні величини, аналогами яких у випадку пружного середовища є швидкості розповсюдження хвиль розтягу-стискання та зсуву в заповнювачі.

Для інтегрування рівнянь (17) вводимо хвильові потенціали за формулами

$$U_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad U_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (19)$$

Після підстановки (19) в (17) отримуємо два хвильових рівняння

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{c_S^2}{c_P^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2}; \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}.$$

У просторі зображень за Фур'є – Лапласом рівняння (20) приймають такий вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi^0}{dy^2} - \lambda_1 \phi^0 = 0; , \quad \frac{d^2 \psi^0}{dy^2} - \lambda_2 \psi^0 = 0; \quad (21) \\ \lambda_1 = \xi^2 + \frac{c_S^2}{c_p^2} p^2; \quad \lambda_2 = \xi^2 + p^2. \end{aligned}$$

Розв'язки рівнянь (21) записуємо в такому вигляді

$$\begin{aligned} \phi^0 = C_1 e^{y\sqrt{\lambda_1}} + C_2 e^{-y\sqrt{\lambda_1}}; \quad (22) \\ \psi^0 = C_3 e^{y\sqrt{\lambda_2}} + C_4 e^{-y\sqrt{\lambda_2}}. \end{aligned}$$

Підставляючи (22) в перетворені у просторі зображень залежності (19), знаходячи потім трансформанти напружень і підставляючи залежності (14) разом з трансформанами переміщень і напружень у заповнювачі в граничні умови (6), приходимо у просторі зображень до системи рівнянь відносно $C_1 \div C_4$. Ця система розв'язується за допомогою методу Крамера, причому її коефіцієнти виражаються так

$$\{C_1 \div C_4\} = \frac{p_1^0}{G \det \|a_{ij}\|} \left\{ \Delta_1 e^{-\sqrt{\lambda_1}}, \Delta_2 e^{-\sqrt{\lambda_1}}, -i\Delta_3 e^{-\sqrt{\lambda_2}}, -i\Delta_4 e^{-\sqrt{\lambda_2}} \right\}; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2\xi\sqrt{\lambda_1}, & a_{12} &= -2\xi\sqrt{\lambda_1} e^{-2\sqrt{\lambda_1}}, & a_{13} &= -(\lambda_2 + \xi^2), \\ a_{14} &= -(\lambda_2 + \xi^2) e^{-2\sqrt{\lambda_2}}, & a_{21} &= n_1 + A_1\sqrt{\lambda_1}, \\ a_{22} &= (n_1 - A_1\sqrt{\lambda_1}) e^{-2\sqrt{\lambda_1}}, & a_{23} &= -(A_1 + 2\sqrt{\lambda_2})\xi, \\ a_{24} &= \xi(2\sqrt{\lambda_2} - A_1) e^{-2\sqrt{\lambda_1}}, & a_{31} &= 2\xi\sqrt{\lambda_1} e^{-2\sqrt{\lambda_1}}, \\ a_{32} &= -2\xi\sqrt{\lambda_1}, & a_{33} &= -(\lambda_2 + \xi^2) e^{-2\sqrt{\lambda_2}}, & a_{34} &= -(\lambda_2 + \xi^2), \\ a_{41} &= (n_1 - A_2\sqrt{\lambda_1}) e^{-2\sqrt{\lambda_1}}, & a_{42} &= n_1 + A_2\sqrt{\lambda_1}, \\ a_{43} &= (A_2 - 2\sqrt{\lambda_2}) e^{-2\sqrt{\lambda_2}}, & a_{44} &= (A_2 + 2\sqrt{\lambda_2})\xi, \\ n_1 &= 2(\lambda_1(1-\nu) - \nu\xi^2)/(1-2\nu). \end{aligned}$$

Визначники Δ_j знаходяться з $\det \|a_{ij}\|$ шляхом заміни j -го стовпчика стовпчиком $\{0, -1, 0, -\varepsilon\}$, де $\varepsilon = p_2^0/p_1^0$.

Після визначення $C_1 \div C_4$ знаходимо трансформанти переміщень і напружень в довільній точці заповнювача у різні моменти часу, а також прогини, перерізувальну силу і згинальний момент у кожному зовнішньому шарі, наприклад, для нормального напруження трансформанта записується таким чином

$$\sigma_z^0 = p_1^0 \sigma(\xi, p, y), \quad (24)$$

$$\text{де } \sigma(\xi, p, y) = \frac{1}{\det \|a_{ij}\|} \left[n_1 \left(\Delta_1 e^{y\sqrt{\lambda_1}} + \Delta_2 e^{-y\sqrt{\lambda_1}} \right) e^{-\sqrt{\lambda_1} y} - 2\xi\sqrt{\lambda_2} \left(\Delta_3 e^{y\sqrt{\lambda_2}} - \Delta_4 e^{-y\sqrt{\lambda_2}} \right) e^{-\sqrt{\lambda_2} y} \right].$$

У випадку жорсткого контакту між обшивками та заповнювачем, використовуючи граничні умови (5), отримуємо для трансформант навантажень, які передаються на заповнювач замість (14) – (16), такі залежності

$$q_{xk}^0 = -G t_k(\xi, p) U_k^0, \quad \alpha_k^0 = \frac{-i^3 \beta_k^2 \xi \gamma_k}{S_k} \omega_k^0 + \frac{3 t_k}{2 S_k} U_k^0, \quad (25)$$

$$q_{yk}^0 = \mp p_k^0 - 2G \eta_k d_k \omega_k^0 + 3i G \beta_k^2 \xi \gamma_k \eta_k \frac{t_k}{S_k} U_k^0; \\ t_k(\xi, p) = \frac{2 \eta_k \left[2 \gamma_k \xi^2 + \rho_k^* p^2 (1 - \nu_k) \right]}{1 - \nu_k}; \quad (26)$$

$$S_k(\xi, p) = \rho_k^* \eta_k^2 p^2 + 3 \beta_k^2 \gamma_k + \frac{2 \gamma_k \xi^2 \eta_k^2}{1 - \nu_k}; \quad (27)$$

$$d_k(\xi, p) = \beta_k^2 \gamma_k \xi^2 + \rho_k^* p^2 - \frac{2 \beta_k^4 \xi^2 \gamma_k^2}{S_k(\xi, p)}.$$

Подальше розв'язування у просторі зображень проводиться аналогічно випадку ковзного контакту, і ми приходимо до формул виду (23), але, зрозуміло, з іншими елементами визначників, які тут не наведено.

Числовий приклад і аналіз результатів. В якості прикладу розрахунки проведені для випадку, коли в початковий момент часу до обох несучих шарів пластини одночасно прикладаються самоврівноважені нормальні зусилля, які рівномірно розподілені на однакових ділянках скінченної довжини $2l$, які потім рухаються вздовж обшивок з однаковою

швидкістю c . Аналітично такі навантаження описуються наступним чином

$$p_1(x,t) = p_2(x,t) = p(x,t) = \frac{p_0}{2l} h(x,t,l); \quad (28)$$

$$h(x,t,l) = \begin{cases} 1, & ct-l \leq x \leq ct+l \\ 0, & x < ct-l \cup x > ct+l. \end{cases}$$

Якщо перейти тут до безрозмірних параметрів і застосувати до (28) перетворення Лапласа і Фур'є, будемо мати такі трансформанти заданих навантажень

$$p^0(\xi, p) = \frac{p_0 f(p)}{\sqrt{2\pi H(p - i\xi M_S)}}; \quad f(p) = \frac{M_S}{l_* p} (e^\alpha - e^{-\alpha}); \quad (29)$$

$$\alpha = \frac{p_0 l_*}{M_S}; \quad l_* = \frac{l}{H}; \quad M_S = \frac{c}{c_S}.$$

Підставляючи (29) у формули виду (24) і застосовуючи зворотні перетворення Фур'є і Лапласа, остаточний розв'язок задачі отримуємо у вигляді подвійних невластних інтегралів з комплексними підінтегральними функціями. Ці інтеграли обернення не є особливими, і для їх наближеного знаходження застосовується спеціальний алгоритм, який детально описано в [9]. Суть цього алгоритму полягає в наступному. Інтеграли оберненого перетворення Фур'є для різних значень параметра перетворення Лапласа p знаходяться за допомогою числового методу Файлона [7]. Потім для побудови оригіналів застосовується метод числового обернення перетворення Лапласа за допомогою зміщених поліномів Лежандра [6]. Надійність отримуваних результатів перевірялась шляхом обчислювальних експериментів.

Результати отримані для окремого випадку лінійних диференціальних операторів в (3), коли залежність напруження-деформація мають такий вигляд

$$\left(\Omega + \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{ij} = \lambda_m^e \left(\tau_1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon \cdot \delta_{ij} + 2\mu_m^e \left(\tau_2 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_{ij}, \quad (30)$$

де Ω – величина, обернена часу релаксації для нормальних і дотичних напружень; τ_1, τ_2 – величини, обернені до часу поновлення одновісної деформації і деформації зсуву відповідно; λ_m^e, μ_m^e – ефективні константи Ляме.

Як відзначено в [12], модель (30) є найбільш простою і такою, яка включає чотири основні властивості в'язкопружної поведінки матеріалу, а саме миттєву пружність, повзучість, релаксацію напружень і повернення деформації при повзучості.

Розрахунки проведені для таких значень безрозмірних параметрів: $\beta_2 = 2/3$, $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\rho_1^* = \rho_2^* = 5$, $\varepsilon = 1$, $\dot{l} = 0,1$. На рис. 2 наведено розподіл безрозмірних нормальних переміщень верхнього несучого шару, причому крива 1 відповідає пружному заповнювачу при $M_S = 0,2$, $\tau = 3$, а крива 2 – в'язкопружному, коли $\tau_1^* = \tau_1/\Omega = 0,25$, $\tau_2^* = \tau_2/\tau_1 = 2$.

На рис. 3 показано розподіл нормальних напружень за товщиною заповнювача в різні моменти часу в точці $x^* = M_S \tau$, причому для кривих 1 і 3 – заповнювач пружний і відповідно $\tau = 0,5$ і $\tau = 3,0$, а криві 2 і 4 відповідають в'язкопружному заповнювачу.

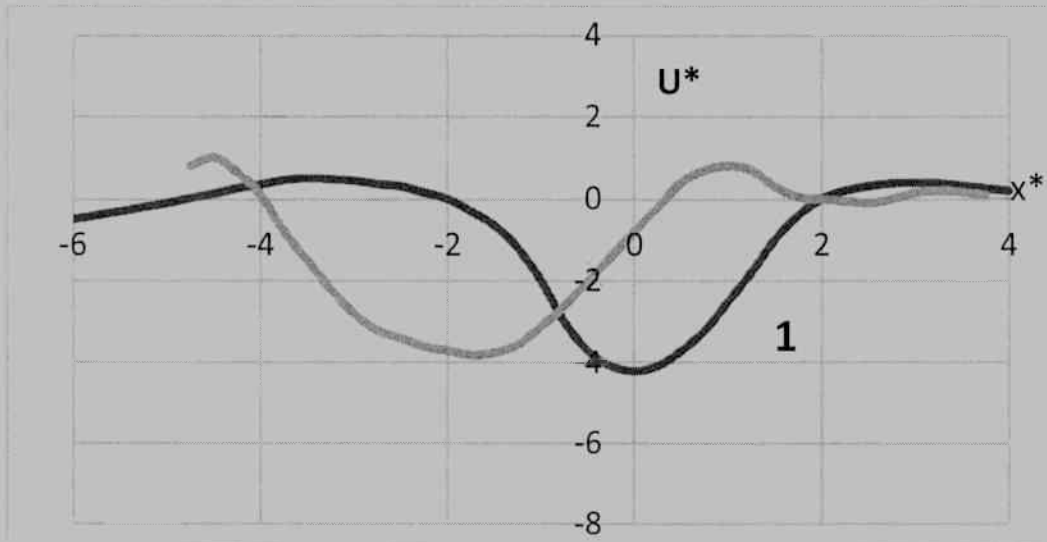


Рис. 2 – Розподіл переміщень

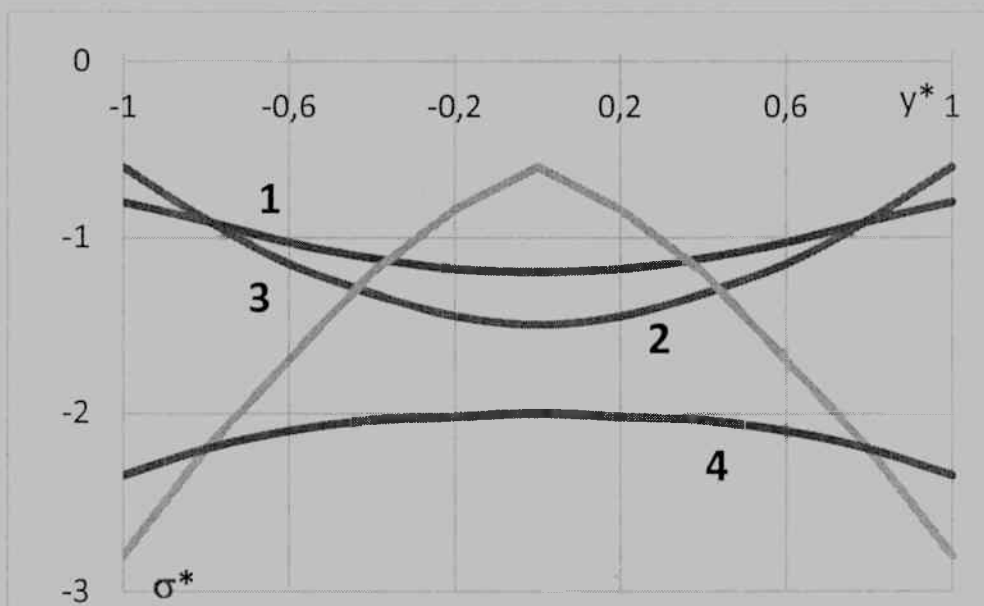


Рис. 3 – Розподіл нормальних напружень

Зазначимо, що для порівняно невисоких швидкостей руху навантаження і достатньо великому проміжку часу від моменту його прикладення в'язкопружність менше впливає на картину напружено-деформованого стану, але зі збільшенням відносної швидкості цей вплив зростає, особливо на передньому фронті (передній хвилі), тобто перед навантаженням. З точки зору математичних обчислень для в'язко-

пружного заповнювача розрахунки проводяться однаково для усіх режимів руху навантаження, у той час як для пружного матеріалу середнього шару пластини при $c > c_s$ інтеграли обернення стають особливими і необхідно знаходити нулі в знаменниках підінтегральних функцій і застосовувати спеціальні підходи до знаходження оригіналів шуканих величин.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Вольмир А.С.** Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. **Горшков А.Г.** Нестационарное взаимодействие пластин и оболочек со сплошными средами. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1981. № 4. С. 177–189.
3. **Горшков А.Г., Пожуев В.И.** Действие подвижной нагрузки на трехслойную пластину с вязкоупругим наполнителем. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1989. № 5. С. 169–174.
4. **Горшков А.Г., Пожуев В.И.** Стационарные задачи динамики многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1992. 224 с.
5. **Кристенсен Р.** Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1977. 338 с.
6. **Крылов В.И., Скобля Н.С.** Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 223 с.
7. **Крылов В.И., Шульгина Л.Т.** Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1966. 370 с.
8. **Пожуев А.В., Пожуев В.И.** Вільні хвилі та стаціонарне деформування елементів конструкцій, які взаємодіють з інерційним середовищем. Запоріжжя: Кругозір, 2016. 248 с.
9. **Пожуев А.В., Пожуев В.И.** Нестационарні процеси в пластинах і оболонках, які взаємодіють з тривимірним пружним середовищем. Запоріжжя: Кругозір, 2015. 228 с.
10. **Пожуев В.И., Полякова Н.П.** Нестационарная реакция трехслойной пластины на действие подвижной нагрузки. // Прикладная механика. 1991. Т. 27. № 9. С. 71–77.
11. **Пожуев В.И.** Стационарная реакция системы цилиндрическая оболочка – вязкоупругий наполнитель на действие подвижной нагрузки // Прикладная механика. 1986. Т. 22. № 5. С. 27–34.
12. **Grouned Pascal J., Garnet H., Pifko A.** Effect of embedding medium viscoelasticity on the transient response to plane waves of arbitrarily thick circular cylinders // J. Appl. Mech. Trans. ASME. Ser. E. 1967. Vol. 34. № 2. P. 365–372.

UDC 539.3

*A. V. Pozhuyev¹, PhD (Phys.-Math.),
ORCID ID: 0000-0002-4083-5139*

*V. I. Pozhuev², Dr. Sci. (Phys.-Math.),
ORCID ID: 0000-0002-9163-7888*

NON-STATIONARY RESPONSE OF A THREE-LAYER PLATE WITH VISCOELASTIC FILLER TO THE ACTION OF A MOVING NORMAL LOAD

The possibility of extending the principle of correspondence between elastic and viscoelastic problems to dynamic problems in a non-stationary formulation in the calculation of three-layer plates with a soft viscoelastic filler is shown. At the same time, attention is drawn to the fact that the combined use of integral Fourier and Laplace transforms with the use of a special numerical algorithm to obtain the originals of the sought quantities allows one to consider cases when the dependence between the components of the viscoelastic material is determined both in differential and integral form. The influence of the speed of load movement along

the bearing layers of the plate on the stress-strain state of the plate is analyzed and a comparison is made with the case when the filler material is considered elastic.

Keywords: plate theory; load-bearing layers; filler; boundary and initial conditions; transformants; originals; stresses; displacements.

Introduction. Stationary and non-stationary dynamic problems of interaction of plates and cylindrical shells with a three-dimensional elastic inertial medium under the action of moving loads have been considered quite fully in monographs [4, 8, 9]. Considerably less attention has been paid to problems when the body with which such elements of thin-walled structures interact has viscoelastic properties. At present, only the stationary reaction of the plate (shell) – viscoelastic filler system has been considered in works [3, 11]. It was shown that in such a formulation, results can be obtained using the correspondence principle or elastic-viscoelastic analogy. The question of the ability to implement this principle in non-stationary problems with initial conditions remained open.

Main results. A three-layer plate of unlimited dimensions is considered, when the dynamic equations of thin plates of the Timoshenko type are applied for the load-bearing layers, and the lightweight filler is viscoelastic. At some point in time, a self-balanced normal load begins to move along the load-bearing layers with a constant velocity. In the paper, the case is first considered when the dependence between the components of the stress and strain tensors for a viscoelastic material is written in differential form.

In all equations of motion of the skins and the filler, a transition to a moving coordinate system is performed by means of the Galilean transformation, after which the Laplace transformation in time and the Fourier transformation in the spatial coordinate are simultaneously applied. In the image space, we obtain the same dependencies as in the case of an elastic filler. Now the Lamé coefficients will not be real values, but complex ones. According to the correspondence principle, the algorithm for further solution is similar to the elastic case with the above-mentioned replacement of the Lamé coefficients. Note that we will come to the same conclusion if the integral form is used to describe the viscoelastic material, rather than the differential one.

As an example, numerical results are given, which are obtained using a special algorithm for the joint inversion of the integral Laplace and Fourier transforms, based on the Failon method and shifted Legendre polynomials. They are obtained for the case when, at the initial moment of time, self-balanced normal forces are simultaneously applied to both bearing layers of the plate, uniformly distributed over identical sections of finite length, then moving with the same constant speed. The case of linear differential operators for recording the viscoelastic properties of the filler was considered.

$$\left(\Omega + \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{ij} = \lambda_m^e \left(\tau_1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon \cdot \delta_{ij} + 2\mu_m^e \left(\tau_2 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_{ij}$$

As the obtained results showed, for comparatively low speeds of load movement and a sufficiently large time interval from the initial moment, viscoelasticity does not fundamentally change the picture of the stress-strain state in comparison with an elastic filler. However, with an increase in speed, this influence increases, especially in front of the load.

REFERENCES

1. **Volmir A.S.** Nonlinear dynamics of plates and shells. M.: Nauka, 1972. 432 p. (in Russian).
2. **Gorshkov A.G.** Non-stationary interaction of plates and shells with continuous media. // Izv. Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of a rigid body. 1981. No. 4. P. 177-189. (in Russian).
3. **Gorshkov A.G., Pozhuev V.I.** Action of a moving load on a three-layer plate with a viscoelastic filler. // Izv. Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of a rigid body. 1989. No. 5. P. 169-174. (in Russian).
4. **Gorshkov A.G., Pozhuev V.I.** Stationary problems of the dynamics of multilayer structures. M: Mashinostroenie, 1992. 224 p. (in Russian).
5. **Christensen R.** Introduction to the theory of viscoelasticity. M: Mir, 1977. 338 p. (in Russian).
6. **Krylov V.I., Skoblyya N.S.** Approximate Fourier transform methods and inversion of the Laplace transform. M.: Nauka, 1974. 223 p. (in Russian).
7. **Krylov V.I., Shulgina L.T.** Reference book on numerical integration. M: Nauka, 1966. 370 p. (in Russian).
8. **Pozhuyev A.V., Pozhuev V.I.** This is the case of stationary deformation of structural elements that interact with the inertial medium. Zaporizhzhya: Krugozir, 2016. 248 p. (in Ukrainian).
9. **Pozhuyev A.V., Pozhuev V.I.** Nonstationary processes in plates and shells that interact with a trivial spring medium. Zaporizhzhya: Krugozir, 2015. 228 p. (in Ukrainian).
10. **Pozhuev V.I., Polyakova N.P.** Non-stationary response of a three-layer plate to the action of a moving load. // Applied Mechanics. 1991. Vol. 27. No. 9. P. 71-77. (in Russian).
11. **Pozhuev V.I.** Stationary reaction of the cylindrical shell – viscoelastic filler system to the action of a moving load. // Applied Mechanics. 1986. Vol. 22. No. 5. P. 27-34. (in Russian).
12. **Grouned Pascal J., Garnet H., Pifko A.** Effect of embedding medium viscoelasticity on the transient response to plane waves of arbitrarily thick circular cylinders // J. Appl. Mech. Trans. ASME. Ser. E. 1967. Vol. 34. № 2. P. 365-372.

¹Запорізький національний університет,
Запоріжжя, Україна

²Національний університет
«Запорізька політехніка»,
Запоріжжя, Україна

Надійшла до редколегії 30.08.2024