

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботи

з дисципліни

**„СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ У МЕТРОЛОГІЇ ТА
ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНІЙ ТЕХНІЦІ“**

для студентів спеціальності

152 „Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка“,

освітня програма

„Якість, стандартизація та сертифікація“

денної й заочної форм навчання

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни „Статистичні методи у метрології та інформаційно-вимірювальній техніці “ для студентів спеціальності 152 „Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка“, денної й заочної форм навчання / Укл.: В. П. Курбацький, А. В. Коротун, Н. І. Павлище. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2021. – 33 с.

Укладачі: В. П. Курбацький, доц., канд. фіз.-матем. наук,
А. В. Коротун, доц., канд. фіз.-матем. наук,
Н. І. Павлище, аспірант

Рецензент: Погосов В. В. , проф., д-р фіз.-матем. наук

Відповідальний за випуск: Коротун А.В., доц., канд. фіз.-матем. наук

Затверджено
на засіданні кафедри
мікро- та наноелектроніки
Протокол №5
від “20” жовтня 2020 р.

Рекомендовано до видання
НМК ФРЕТ
Протокол №3
від “22” жовтня 2020 р.

ЗМІСТ

1 Випадкові події	4
1.1 Основні формули та визначення	4
1.1.1 Елементи комбінаторики	4
1.1.2 Класичне визначення імовірності події	5
1.1.3 Додавання і добуток подій	6
1.2 Приклади розв'язування задач	7
1.3 Задачі для самостійного розв'язування	10
2. Повторні незалежні випробування	13
2.1 Основні формули та визначення	13
2.2 Приклади розв'язування задач	14
2.3 Задачі для самостійного розв'язування	17
3. Випадкові величини	18
3.1 Основні формули та визначення	18
3.2 Приклади розв'язування задач	24
3.3 Задачі для самостійного розв'язування	31

1 ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1 Основні формули та визначення

1.1.1 Елементи комбінаторики.

Правило суми. Якщо деякий об'єкт a можна вибрати m способами, а об'єкт b n способами, причому ніякий вибір a не збігається з жодним з виборів b , то один з об'єктів a або b можна вибрати $m + n$ способами.

Правило добутку. Якщо об'єкт a можна вибрати m способами і при кожному виборі об'єкта a об'єкт b можна вибрати n способами, то вибір пари (a, b) можна здійснити $m \cdot n$ способами.

Перестановками називають сполучення або групи, що складаються з n елементів, які відрізняються між собою тільки порядком розташування. Число всіх можливих перестановок дорівнює $P_n = n!$

Нехай є сукупність з n різних елементів. З цієї сукупності утворимо групи або сполучення з k ($k < n$) різних елементів.

Розміщеннями називають сполучення або сукупності з n різних елементів по k елементів, які відрізняються або складом елементів, або порядком їх розташування у групі. Число всіх можливих розміщень дорівнює $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$.

Комбінаціями називаються сполуки або групи, складені з n різних елементів по k елементів, які відрізняються одна від одної хоча б одним елементом. Число комбінацій

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad (1.1)$$

Перестановки з повтореннями. Якщо серед n елементів є однакові, то перестановки, які утворюються одна з одної переставлянням однакових елементів, нічим не відрізняються, тому кількість різних перестановок буде менша, ніж $n!$ Якщо серед елементів множини, що має n елементів, є n_1 елементів 1-ого типу, n_2 елементів 2-ого типу, ..., n_k елементів k -ого типу ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$), то число всіх перестановок такої множини дорівнює

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (1.2)$$

Розміщення з повтореннями. Розміщенням з повтореннями з n елементів по k (тут можливе ($k > n$)) називається будь-яка впорядкована множина виду $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, де $a_1, a_2, \dots, a_k$ – елементи множини (не обов’язково різні). Число всіх розміщень з повтореннями дорівнює $\overline{A_n^k} = n^k$. Розміщення з повтореннями з n елементів по k називають також впорядкованими k - вибірками з поверненням з n - множини.

Комбінації з повтореннями. Комбінацією з повтореннями з n елементів по k називається будь-яка множина виду $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, де $a_1, a_2, \dots, a_k$ – елементи множини (не обов’язково різні). Число всіх комбінацій з повтореннями з n елементів по k (тут можливе ($k > n$)) дорівнює

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \quad (1.3)$$

1.1.2 Класичне визначення імовірності події

Подією в теорії ймовірностей називають довільний наслідок або результат будь-якого випробування, спостереження, стохастичного експерименту (який можна повторити будь-яку кількість раз) який може наступити (відбутись, здійснитись) або не наступити, тобто результат випробування не можна напевне передбачити.

Імовірністю події A називається відношення числа результатів випробування m , сприятливих до настання події A , до загального числа всіх рівноможливих несумісних елементарних подій n , що утворюють повну групу:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.4)$$

Відотною частотою події A називається відношення числа випробувань m , в яких подія відбулась, до загального числа проведених випробувань n :

$$W(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.5)$$

Імовірність обчислюють з теоретичних міркувань, відносно частоту – після проведення випробування. Відносну частоту або число, близьке до неї, приймають за статистичну імовірність події.

1.1.3 Додавання і добуток подій

Імовірність появи однієї з двох несумісних подій A і B , байдуже якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \quad (1.6)$$

Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \quad (1.7)$$

Умовною імовірністю $P_B(A)$ називають імовірність події A , обчислену за умови, що подія B уже наступила:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}. \quad (1.8)$$

Дві події називаються *незалежними*, якщо імовірність появи однієї з них не впливає на імовірність настання чи не настання іншої події, тобто $P_B(A) = P(A)$, $P_A(B) = P(B)$. Якщо події A і B незалежні, то імовірність їх сумісної появи дорівнює добутку їх імовірностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.9)$$

Декілька подій називаються *незалежними в сукупності* (або просто незалежними), якщо незалежні кожні дві з них і незалежні ко-

жна подія і всі можливі добутки решти. Імовірність сумісної появи декількох подій, незалежних в сукупності, дорівнює

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n). \quad (1.10)$$

Імовірність суми сумісних подій. Імовірність появи хоч би однієї з двох сумісних подій дорівнює $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Для трьох сумісних подій A , B і C імовірність суми дорівнює

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \quad (1.11)$$

1.2 Приклади розв'язування задач

Приклад 1.2.1. При встановленні в механізм бракованої деталі і при перевірці її дієздатності весь механізм вийшов з ладу. Визначити умову, при якій буде економічно вигідно проводити поштучний контроль таких деталей, якщо відомо, що вартість контролю кожної з них після їх виготовлення M грн., вартість всього механізму N грн., ймовірність виготовлення бракованої деталі p і в механізм входить одна з цих деталей.

Чи буде економічно вигідно проводити поштучний контроль деталей, якщо собівартість механізму 2 грн., вартість контролю кожної деталі 1 коп., а а) ймовірність виготовлення бракованої деталі 0,01; б) ймовірність виготовлення бракованої деталі 0,001?

Розв'язок

Ймовірність бракованої деталі дорівнює $p = \frac{m}{n}$, де m – кількість бракованих деталей, n – кількість усіх таких деталей у механізмі. $n = \frac{m}{p}$, за умовою $m=1$, отже $p = \frac{1}{n}$.

Оскільки вартість контролю однієї деталі дорівнює M , то вартість перевірки всього механізму $S = n \times M = \frac{M}{p}$. Умовою економічної доцільності проведення контролю є виконання нерівності $S < N$, або $p > \frac{M}{N}$.

а) $S = \frac{1}{0.01} = 100 < 200$. Отже, контроль проводити вигідно.

б) $S = \frac{1}{0.001} = 1000 > 200$. Контроль проводити невигідно.

Відповідь: $p > M / N$; а) вигідно; б) не вигідно.

Приклад 1.2.2. Товариство з N чоловік сідає за круглий стіл. Знайдіть ймовірність того, що дві певні особи виявляться поруч.

Розв'язок

Обчислимо ймовірність шуканої події A за класичним визначенням ймовірності: $P(A) = \frac{m}{n}$, де n – загальна кількість способів, якими можна розмістити N людей, дорівнює числу перестановок з N елементів: $n = N!$

Обчислимо число способів m , сприятливих для настання події A . Двох людей можна розмістити поруч $2N$ способами, решту $N - 2$ людей можна розмістити $(N - 2)!$ способами. Отже, $m = 2N(N - 2)!$, так що

$$P(A) = \frac{2N(N - 2)!}{N!} = \frac{2}{N - 1}.$$

Відповідь: $\frac{2}{N - 1}$.

Приклад 1.2.3. Серед N виробів знаходиться M бракованих. Навмання беруть n_1 виробів. Яка ймовірність того, що серед них є більше, ніж m_1 бракованих виробів?

Розв'язок

Представимо подію $A = (k > m_1)$ як суму несумісних подій (k – кількість бракованих виробів):

$$P(A) = P(k = m_1 + 1) + P(k = m_1 + 2) + \dots + P(k = n_1) = \\ = \frac{C_M^{m_1+1} C_{N-M}^{n_1-m_1-1}}{C_N^{n_1}} + \frac{C_M^{m_1+2} C_{N-M}^{n_1-m_1-2}}{C_N^{n_1}} + \dots + \frac{C_M^{n_1} C_{N-M}^0}{C_N^{n_1}} = \sum_{s=1}^{n_1-m_1} \frac{C_M^{m_1+s} C_{N-M}^{n_1-m_1-s}}{C_N^{n_1}}.$$

Відповідь: $\sum_{s=1}^{n_1-m_1} \frac{C_M^{m_1+s} C_{N-M}^{n_1-m_1-s}}{C_N^{n_1}}.$

Приклад 1.2.4. Для підвищення надійності приладу від дублюється другим таким самим приладом. Надійність кожного з них дорівнює p . При виході з ладу першого приладу відбувається миттєве перемикавання на другий. Знайти надійність: а) цієї системи приладів; б) системи, якщо пристрій перемикавання працює з надійністю p_1 .

Розв'язок

а) Надійність системи з двох приладів дорівнює ймовірності того, що буде працювати хоч би один прилад

$$P(A) = 1 - (1-p)(1-p) = 1 - (1-p)^2.$$

б) Імовірність роботи основного приладу p , ймовірність роботи дубльованого приладу $p_1 p$. Тоді надійність системи дорівнює ймовірності настання хоч би однієї з двох подій:

$$P(A) = 1 - (1-p)(1-p_1 p).$$

Відповідь: а) $1 - (1-p)^2$; б) $1 - (1-p)(1-p_1 p)$.

Приклад 1.2.5. Вимірювальний пристрій складається з двох приладів. Ймовірність безвідмовної роботи k -ого приладу за певний період часу дорівнює $1 - \alpha_k$ ($k = 1, 2$). Знайдіть ймовірність p того, що обидва прилади будуть працювати: а) якщо неполадки виникають незалежно; б) якщо нічого невідомо про залежність між неполадками цих приладів.

Розв'язок

а) Нехай подія C означає безвідмовну роботу обох приладів, тобто першого – подія A і другого – подія B . Отже, $C = AB$, і оскільки події A і B незалежні,

$$P(C) = P(A)P(B) = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2).$$

б) Згідно формули ймовірності суми двох сумісних подій ймовірність того, що хоч би один прилад буде працювати, дорівнює $P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, і оскільки $P(A + B) \geq 0$, то $P(AB) \leq P(A) + P(B)$, аналогічно $P(\bar{A} \cdot \bar{B}) \leq P(\bar{A}) + P(\bar{B})$.

$$P(C) = 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B}) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) = 1 - \alpha_1 - \alpha_2.$$

Відповідь: а) $p = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)$; б) $p \geq 1 - \alpha_1 - \alpha_2$.

1.3 Задачі для самостійного розв'язування

1.3.1. Знайдіть ймовірність того, що при трьох кидках грального кубика шістька випаде не менше одного разу.

Відповідь: 0,42.

1.3.2. В конверті серед 100 фотокарток знаходиться одна розшукувана. З конверту навмання витягують 10 карток. Знайдіть ймовірність того, що серед них виявиться потрібна.

Відповідь: $\frac{1}{10}$.

- 1.3.3. Серед N виробів знаходиться M бракованих. Навмання беруть n_1 виробів. Яка ймовірність того, що серед них є m_1 бракованих виробів ($m_1 < M$) ?

Відповідь: $\frac{C_M^{m_1} C_{N-M}^{n_1-m_1}}{C_N^{n_1}}.$

- 1.3.4. Знайдіть ймовірність того, що дні народження 12 чоловік припадуть на різні місяці року.

Відповідь: 0,0000537.

- 1.3.5. Обчисліть імовірність неповернення позичальником кредиту банку у визначений договором термін (кредитний ризик щодо позичальника), якщо фахівцями банку було встановлено, що: а) позичальник погасить узятую позику після її пролонгації і в терміни пролонгації в повному обсязі з ймовірністю 0,17; б) позика буде винесена на прострочення після того, як вона була пролонгована, з ймовірністю 0,06; в) позика буде винесена на прострочення відразу після закінчення терміну дії кредитного договору, тобто без пролонгації, з ймовірністю 0,01.

Відповідь: 0,24.

- 1.3.6. Позичальник може не повернути кредит банку при впливі хоч би одного з таких чинників ризику: галузевому (переорієнтація економіки, зменшення попиту на продукцію даної галузі); системному (зміни в економічній системі, які можуть негативно вплинути на фінансовий стан позичальника, гаранта, страховика); форс-мажорному (землетруси, повені, катастрофи, смерчі, страйки, військові дії); суб'єктивному (репутація позичальника, гаранта, страховика в діловому світі, їх відповідальність і готовність виконати взяті зобов'язання); юридичному (недоліки в складанні та оформленні кредитного договору, гарантійного листа, договору страхування). Визначте імовірність неповернення кредиту банку, якщо задані ймовірності кожного з чинників ризику.

- 1.3.7. Спрощена система контролю виробів складається з двох незалежних перевірок. В результаті k -тої перевірки ($k = 1, 2$) виріб, який задовольняє стандарту, забраковується з ймовірністю β_k , а бракований виріб приймається з ймовірністю α_k . Виріб приймається, якщо він пройшов обидві перевірки. Знайдіть

ймовірність подій: а) бракований виріб буде прийнято; б) виріб, який задовольняє стандарту, буде забраковано.

Відповідь: а) $\alpha_1\alpha_2$; б) $1 - (1 - \beta_1)(1 - \beta_2)$.

- 1.3.8. Багаторазово вимірюють деяку фізичну величину. Ймовірність того, що при зчитування показів приладу допущена помилка, дорівнює p . Знайдіть найменше число вимірювань, яке необхідно провести, щоб з ймовірністю $P > \alpha$ можна було очікувати, що хоча б один результат вимірювань виявиться невірним.

Відповідь: $n \geq E \left[\frac{\log(1 - \alpha)}{\log(1 - p)} \right]$, де $E[N]$ – ціла частина числа

N .

2 ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

2.1 Основні формули та визначення

Нехай при незмінних умовах проводяться послідовні повторні випробування, в результаті яких можуть бути два можливі наслідки (дві елементарні події A і $\bar{A}$): певна подія A відбувається і не відбувається $\bar{A}$. Оскільки ймовірність події A в кожному випробуванні не залежить від наслідку (результату) інших випробувань, то такі випробування називають *незалежними*. Якщо в кожному незалежному випробуванні ймовірність настання події A одна й та сама і дорівнює p і не залежить від номера випробування, то такі випробування називаються *схемою Бернуллі*.

Ймовірність того, що в n повторних незалежних випробуваннях подія A відбувається k разів, знаходиться за формулою Бернуллі

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (2.1)$$

де $q = 1 - p$. Очевидно, що

$$\sum_{k=0}^n P_n(k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1. \quad (2.2)$$

Число k_0 , при якому при заданому n відповідає максимальна біномна ймовірність $P_n(k_0)$, називається *найімовірнішим числом* появи події A . Найімовірніше число k_0 задовольняє системі нерівностей $np - q \leq k_0 \leq np + q$. Якщо число $np - q$ неціле, то є одне значення k_0 , якщо $np - q$ ціле, то таких значень є два, які будуть відрізнятися між собою на 1.

Якщо n достатньо велике, то користуватися формулою Бернуллі досить складно. Тому в такому випадку використовують зручні наближені (асимптотичні) формули, які дають малі відносні похибки.

Коли n достатньо велике, а ймовірність p події настільки мала, що число np невелике (звичайно $p \leq 0.1$, $npq \leq 10$), тобто для подій,

що рідко трапляються, використовують *асимптотичну формулу Пуассона*.

Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні при необмеженому збільшенні числа випробувань n змінюється таким чином, що $np = \lambda$, $\lambda = \text{const}$, то ймовірність того, що подія A з'явиться k разів в n випробуваннях, обчислюється за формулою Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (2.3)$$

Для використання формули Пуассона немає необхідності знати окремо числа n і p , а лише їх добуток λ .

Потоком подій називається послідовність подій, які настають в випадкові моменти часу. *Найпростішим* (пуассонівським) називають потік подій, який має такі властивості: а) стаціонарності; б) відсутності післядії; в) ординарності.

Інтенсивністю потоку λ називають середнє число подій, які з'являються за одиницю часу. Імовірність появи k подій найпростішого потоку за час тривалістю t визначається за формулою

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (2.4)$$

2.2 Приклади розв'язування задач

Приклад 2.2.1. Проводиться випробування пристрою. При кожному випробуванні пристрій виходить з ладу з ймовірністю 0.1. Після першого виходу з ладу він ремонтується, після другого – визнається непридатним. Знайти ймовірність того, що пристрій повністю вийде з ладу точно при шостому випробуванні.

Розв'язок

Нехай подія A полягає у повному виході пристрою з ладу. $A = A_1 A_2$, де A_1 – подія, яка полягає в тому, що в п'яти випробуваннях

пристрій виходить з ладу один раз, A_2 – подія, яка означає вихід з ладу пристрою в шостому випробуванні.

$$P(A) = P(A_1)P(A_2) = C_5^1 p^1 (1-p)^{5-1} \cdot p = 5 \cdot 0,1 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1 = 0,03281.$$

Відповідь: 0,03281.

Приклад 2.2.2. В екзаменаційному білеті п'ять запитань. На кожне запитання дано три можливі відповіді, серед яких необхідно вибрати одну правильну. Яка ймовірність того, що шляхом простого відгадування вдасться відповісти щонайменше на чотири запитання?

Розв'язок

Ймовірність p вгадати правильну відповідь на одне питання з трьох $\frac{1}{3}$, ймовірність не вгадати

$$q = 1 - p = \frac{2}{3}.$$

Шукана подія A дорівнює сумі несумісних подій $A = A_4 + A_5$, де A_4 – відгадані чотири правильні відповіді з п'яти, A_5 – відгадані всі п'ять відповідей. Отже, $P(A) = P(A_4) + P(A_5)$. Проводимо обчислення за формулою Бернуллі:

$$P(A) = C_5^4 p^4 q^{5-4} + C_5^5 p^5 q^{5-5} = \frac{10}{243} + \frac{1}{243} = 0,04527.$$

Відповідь: 0,04527.

Приклад 2.2.3. Середня густина хвороботворних мікробів в одному кубічному метрі повітря дорівнює 100. Береться на пробу 2 дм³ повітря. Знайти ймовірність того, що в ньому буде виявлено хоча б один мікроб.

Розв'язок

I спосіб. Ймовірність того, що в 1 дм^3 повітря знаходиться мікроб, дорівнює $p = \frac{100}{1000} = 0.1$. Тоді ймовірність шуканої події A з використанням формули Бернуллі дорівнює

$$P(A) = P(k \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - C_2^0 p^0 (1-p)^{2-0} = 1 - (1-p)^2 = 0,19.$$

II спосіб. Згідно формули Пуассона, оскільки $\lambda = np = 2 \cdot 0.1 = 0.2$,

$$P(A) = P(k \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-0.2} = 0,1813.$$

Незважаючи на те, що наближена формула Пуассона використовується тоді, коли n велике і $p \leq 0.1$, порівняння результатів, обчисленого за нею і за формулою Бернуллі, показує непогану узгодженість.

Відповідь: 0,19.

Приклад 2.2.4. Скільки талановитих студентів повинно навчатися в магістратурі, якщо імовірність мати хоч би одного талановитого студента в магістратурі є не меншою 0,995?

Розв'язок

$$P(A) = P(k \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda},$$

де $\lambda = np$ – середнє число появи події в n випробуваннях.

За умовою задачі $P(A) = 1 - e^{-\lambda} \geq 0,995$, звідки $e^{-\lambda} \geq 200$. Після логарифмування отримуємо $\lambda \geq 5,298$, і оскільки число студентів ціле, то $\lambda \geq 6$.

Відповідь: ≥ 6 .

2.3 Задачі для самостійного розв'язування

2.3.1. В результаті систематичного контролю якості виготовлених деталей встановлено, що середній відсоток браку становить 5%. Скільки виготовлених деталей потрібно взяти, щоб найімовірніше число якісних серед них складало 60 шт.?

Відповідь: 62,63.

2.3.2. Гральний кубик підкидають n раз. Обчисліть імовірність того, що шістька не випаде жодного разу.

Відповідь: $\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

2.3.3. Ймовірність попадання в ціль при кожному пострілі 0,001. Знайти ймовірність попадання в ціль двох і більше куль, якщо число пострілів 5000.

Відповідь: 0,9596.

2.3.4. На телефонну станцію протягом години поступає n викликів. Ймовірність появи виклику протягом будь-якого інтервалу часу, тривалість якого менше години, залежить лише від довжини цього інтервалу, пропорційна їй і не залежить від початку інтервалу. Вважаючи виклики незалежними, знайдіть ймовірність того, що протягом проміжку часу t (менше години) станція отримає m викликів.

Відповідь: $P_t(m) = \frac{(nt)^m}{m!} e^{-nt}$, t виражено в годинах.

2.3.5. При роботі деякого приладу у випадкові моменти часу виникають неполадки. Потік неполадок можна вважати простим. Середнє число неполадок за добу дорівнює двом. Потрібно визначити ймовірність того, що: а) за дві доби не буде жодної неполадки; б) за добу виникне хоча б одна неполадка; в) за тиждень роботи приладу виникне не більше трьох неполадок.

Відповідь: а) 0,0183; б) 0,8647; в) 0,000474.

2.3.6. Пристрій складається з великого числа незалежно працюючих елементів з однаковою (дуже малою) ймовірністю відмови кожного елементу за час T . Знайдіть середнє число елементів, що не спрацювали за час T , якщо ймовірність того, що за цей час відмовить хоча б один елемент, дорівнює 0,98.

Відповідь: 4.

3 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

3.1 Основні формули та визначення

Випадковою величиною називається величина, яка в результаті випробувань може приймати те чи інше значення, причому наперед невідомо, яке саме. Випадкові величини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх можливі значення відповідними малими літерами. Наприклад: $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Дискретною називають випадкову величину, якщо значення, які вона може набувати з певними ймовірностями, утворюють скінченну або зчисленну множину. Вона характеризується значеннями і відповідними ймовірностями: $p_i = P(X = x_i)$.

Неперервною називають випадкову величину, які може прийняти всі значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між можливими значеннями x_i і їх ймовірностями p_i .

Очевидно, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Дві випадкові величини називаються **незалежними**, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яке значення має друга величина.

Добутком незалежних випадкових величин X та Y називають випадкову величину XY , можливі значення якої дорівнюють всеможливим добуткам xu , причому $P(XY = xu) = P(X = x)P(Y = u)$.

Сумою випадкових величин X та Y називають випадкову величину $X + Y$, можливі значення якої дорівнюють всеможливим суммам $x + u$, причому

$$P(X + Y = x + u) = P(X = x)P(Y = u), \quad (3.1)$$

якщо X та Y незалежні, а для залежних величин

$$P(X + Y = x + u) = P(X = x)P_{X=x}(Y = u). \quad (3.2)$$

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називають

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (3.3)$$

Математичне сподівання приблизно дорівнює середньому арифметичному спостережних значень випадкової величини: $M(X) \approx \bar{X}$.

Для двох незалежних випадкових величин X та Y

$$M(XY) = M(X)M(Y), \quad M(X+Y) = M(X) + M(Y). \quad (3.4)$$

Дисперсією випадкової величини X називають величину

$$D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right). \quad (3.5)$$

Її можна обчислити за формулою

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \quad (3.6)$$

Для двох незалежних випадкових величин X та Y ,

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y). \quad (3.7)$$

Середнє квадратичне відхилення визначається співвідношенням

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (3.8)$$

Нехай проводиться серія з n незалежних випробувань, в кожному з яких імовірність настання події A одна й та сама і дорівнює p . Кількість випробувань k , в яких відбувається подія A , є дискретною випадковою величиною X , математичне сподівання якої $M(X) = np$, дисперсія $D(X) = np(1-p)$.

Інтегральною функцією або функцією розподілу називають функцію $F(x)$, таку що $F(x) = P(X < x)$.

Область визначення функції розподілу – множина всіх дійсних чисел, область значень – відрізок $[0,1]$. $F(x)$ – неспадна функція, тобто $F(x_2) \geq F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a). \quad (3.9)$$

Диференціальна функція або щільність ймовірності $f(x)$ визначається співвідношенням $f(x) = F'(x)$. Знаючи щільність розподілу $f(x)$, можна обчислити інтегральну функцію розподілу $F(x)$ за формулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (3.10)$$

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде значення з інтервалу (a, b) , дорівнює

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.11)$$

Очевидно, що $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Модю $Mo(X)$ для неперервної випадкової величини X називають таке її можливе значення, при якому існує максимум густини розподілу.

Медіаною $Me(X)$ неперервної випадкової величини X називають таке її можливе значення, для якого виконується рівність

$$P(X < Me(X)) = P(X > Me(X)) = \frac{1}{2}. \quad (3.12)$$

Оскільки $P(X < Me(X)) = F(Me(X))$, то

$$F(Me(X)) = \frac{1}{2}. \quad (3.13)$$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини X знаходиться за формулою

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx. \quad (3.14)$$

Дисперсія неперервної випадкової величини X дорівнює

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2. \quad (3.15)$$

Дискретна випадкова величина X називається **рівномірно** - розподіленою, якщо всі ймовірності її настання рівні і визначаються за формулою

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \text{ де } x_i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.16)$$

Дискретна випадкова величина X розподілена за **геометричним законом**, якщо її ймовірності утворюють геометричну прогресію з першим членом p і знаменником q ($0 < q < 1$), тобто $p, pq, pq^2, \dots$, так що $P(X = x_i) = pq^{x_i-1}$.

Дискретна випадкова величина має **гіпергеометричний розподіл**, якщо її ймовірності визначаються законом

$$P(X = x_i) = \frac{C_M^{x_i} C_{N-M}^{n-x_i}}{C_N^n}, \quad (3.17)$$

де $x_i = 0, 1, 2, \dots, \min(M, n)$.

Дискретна випадкова величина X розподілена за **пуассонівським** законом, якщо її ймовірності визначаються формулою Пуассона

$$P(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}, \quad x_i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad \lambda = np.$$

$$M(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda, \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \quad (3.18)$$

Біномним називають розподіл ймовірностей, що визначається формулою Бернуллі

$$P(X = x_i) = C_n^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i}, \quad x_i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad M(X) = np, \\ D(X) = np(1-p). \quad (3.19)$$

Неперервна випадкова величина X називається **рівномірно** розподіленою, якщо на інтервалі, де визначена випадкова величина, щільність розподілу має постійне значення:

$$f(x) = \begin{cases} c = \text{const}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (3.20)$$

Інтегральна функція $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Ймовірність попадання X в інтервал (α, β) дорівнює $P(\alpha < x < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$. $M(X) = \frac{a+b}{2}$, $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Неперервна випадкова величина розподілена за **експоненціальним** законом, якщо її густина розподілу має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

де λ – додатна стала.

Інтегральна функція експоненціального розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \quad (3.23)$$

Нормальним називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини, якщо її густина розподілу описується формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.24)$$

де $a = M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

Нормованим називають нормальний розподіл з параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$. Інтегральна функція нормального розподілу

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz, \quad (3.25)$$

нормованого розподілу

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (3.26)$$

Отже, $F(x) = F_0((x-a)/\sigma)$. Враховуючи те, що інтегральна функція Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ затабульована, то для знаходження значень $F_0(x)$ можна скористатися формулою $F_0(x) = 0,5 + \Phi(x)$.

Щільність нормального розподілу $f(x)$ описується кривою Гаусса. У точці $x=a$ вона має максимум, який дорівнює $1/\sqrt{2\pi}\sigma$. Точки $x = a \pm \sigma$ є точками перегину. Зміна математичного сподівання a приводить лише до зсуву кривої вздовж осі X без зміни форми. Із зростанням σ крива стає більш пологою, тобто максимум функції спадає (рис. 3.1).

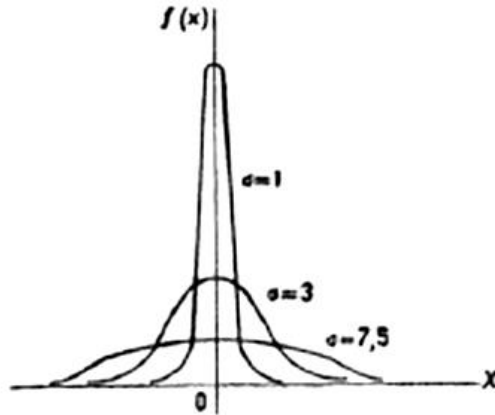


Рисунок 3.1 –

Ймовірність попадання в заданий інтервал (α, β) визначається за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \quad (3.27)$$

Ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X за абсолютною величиною менше наперед заданого малого додатного числа δ , дорівнює

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma). \quad (3.28)$$

Зокрема, $P(|X - a| < \sigma) = 0.68268$, $P(|X - a| < 2\sigma) = 0.95450$,
 $P(|X - a| < 3\sigma) = 0.99730$.

Правило трьох сигм. Якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищує потроєне середнє квадратичне відхилення.

3.2 Приклади розв'язування задач

Приклад 3.2.1. Дискретна випадкова величина X має тільки два можливі значення x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Ймовірність того, що X прийме значення x_1 , дорівнює 0.2. Знайти закон розподілу X , знаючи, що $M(X) = 2.6$ та $\sigma(X) = 0.8$.

Розв'язок

Ймовірність значення x_2 дорівнює $p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0.2 = 0.8$.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 = 2.6;$$

$$\sigma^2(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 - M^2(X) = 0.8^2.$$

Підставляючи задані значення, отримуємо систему

$$\begin{cases} 0.2x_1 + 0.8x_2 = 2.6; \\ 0.2x_1^2 + 0.8x_2^2 = 7.4, \end{cases}$$

з якої знаходимо рівняння для x_2 : $5x_2^2 - 26x_2 + 33 = 0$. Його корені $x_2 = 3$; 2.2. Їм відповідають значення $x_1 = 1$; 4.2. Оскільки за умовою задачі $x_1 < x_2$, то остаточно маємо $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.8$.

Приклад 3.2.2. Знайдіть дисперсію дискретної випадкової величини X – кількості появу події A в двох незалежних випро-

буваннях, якщо ймовірності появи події в цих випробуваннях однакові і відомо, що $M(X) = 0.9$.

Розв'язок

Згідно умови задачі $n = 2$, $M(X) = 0.9$. Використаємо формулу математичного сподівання для повторних незалежних випробувань:

$$M(X) = np,$$

або

$$0.9 = 2p,$$

звідки $p = 0.45$. Тоді

$$D(X) = np(1-p) = 2 \cdot 0.45(1-0.45) = 0.495.$$

Відповідь: 0,495.

Приклад 3.2.3. Три стрільці виконують по чотири постріли. Ймовірність влучення кожного з пострілів для першого становить 0.8, для другого 0.9, для третього 0.85. Знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення загального числа пробойн у мішені.

Розв'язок

Нехай X_i – число пробойн у мішені, зроблене i -тим стрільцем, $i = 1, 2, 3$; X – загальне число пробойн. Тоді $X = \sum_{i=1}^3 X_i$. Отже, математичне сподівання $M(X) = \sum_{i=1}^3 M(X_i)$.

Користуючись формулою для повторних незалежних випробувань, отримуємо $M(X) = \sum_{i=1}^3 n_i p_i = 4(0.8 + 0.9 + 0.85) = 10.2$.

Дисперсія

$$D(X) = \sum_{i=1}^3 n_i p_i (1 - p_i) = 4(0.8 \cdot 0.2 + 0.9 \cdot 0.1 + 0.85 \cdot 0.15) = 1.51;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1.51} = 1.23.$$

Відповідь: $M(X) = 10.2$; $\sigma(X) = 1.23$.

Приклад 3.2.4. Студент пам'ятає, що щільність показникового розподілу має вигляд $f(x) = Ce^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$, але він забув, чому дорівнює стала C . Потрібно знайти C .

Розв'язок

Оскільки $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, то $C = 1/I$,

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Таким чином, $C = \lambda$.

Відповідь: $C = \lambda$.

Приклад 3.2.5. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x < 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайдіть ймовірність того, що в результаті 4 незалежних випробувань величина X рівно 3 рази прийме значення, що належить інтервалу $(0,25; 0,75)$.

Розв'язок

Обчислимо спочатку ймовірність того, що випадкова величина попадає в заданий інтервал:

$$p = P(0,25 \leq X \leq 0,75) = F(0,75) - F(0,25) = 0,75^2 - 0,25^2 = 0,5.$$

Нехай подія A полягає в тому, що в 4 незалежних випробуваннях очікуваний результат має місце 3 рази. Обчислимо ймовірність цієї події за формулою Бернуллі:

$$P(A) = C_4^3 p^3 (1-p) = \frac{4!}{3!(4-3)!} 0,5^3 \cdot 0,5 = 0,25.$$

Відповідь: 0,25.

Приклад 3.2.6. Ймовірність того, що телефон-автомат спрацює невір-но при опусканні монет, дорівнює 0.02. Скласти закон розподілу числа помилкової роботи автомата при 200 спробах з'єднання з абонентом. Знайти ймовірність того, що буде не менше двох невірних з'єднань.

Розв'язок

Невірних (помилкових) з'єднань може бути від 0 до 200. Оскільки ймовірність помилки $p = 0.02 \ll 0.1$ дуже мала, $\lambda = np = 200 \cdot 0.02 = 4 < 10$, то використаємо формулу Пуассона

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Отже,

$$P(X = 0) = P_{200}(0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-4}, \quad P(X = 1) = P_{200}(1) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = 4e^{-4}.$$

Далі,

$$P_{200}(m \geq 2) = 1 - P_{200}(0) - P_{200}(1) = 1 - 5e^{-4} = 0,90542.$$

Відповідь: $P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, $\lambda = np$; $P_{200}(m \geq 2) = 0.90542$.

Приклад 3.2.7. Ціна поділки шкали вимірювального пристрою 0.2. Покази пристрою округлюються до найближчого цілого числа. Знайти ймовірність того, що при вимірюванні буде зроблена похибка: а) менша 0.04; б) більша 0.05.

Розв'язок

Похибку закруглення відліку можна розглядати як випадкову величину X , яка розподілена рівномірно в інтервалі між двома сусідніми поділками a і b . Щільність розподілу

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{0.2} = 5.$$

а) Нехай A – описана подія. При відліку буде зроблена похибка менша 0.04, якщо: 1) покази приладу округлені до попередньої з двох сусідніх поділок, наприклад, до 0, так що $X \in (0; 0.04)$ – подія A_1 ; 2) покази округлені до наступної поділки, так що $X \in (0.16; 0.2)$ – подія A_2 . $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$ як сума ймовірностей несумісних подій.

$$P(A) = P(0 < X < 0.04) + P(0.16 < X < 0.2) = 5 \int_0^{0.04} dx + 5 \int_{0.16}^{0.2} dx = 0.4.$$

б) Похибка відліку перевищить 0.05, якщо вона буде знаходитись в інтервалі $(0.05; 0.15)$. Ймовірність такої події дорівнює

$$P(0.05 < X < 0.15) = 5 \int_{0.05}^{0.15} dx = 0.5.$$

Відповідь: а) 0.4; б) 0.5.

Приклад 3.2.8. Проводяться випробування двох незалежно працюючих один від одного приладів. Час T безвідмовної роботи кожного приладу має експоненціальний розподіл, щільність ймовірності кожного з яких має такий вигляд:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}, & t \geq 0; \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що за час t_0 : а) обидва прилади не вийдуть з ладу; б) хоча б один прилад вийде з ладу.

Розв'язок

а) Шукана ймовірність $P(A)$ – це ймовірність того, що протягом часу t_0 будуть безвідмовно працювати перший прилад – подія A_1 і другий прилад – подія A_2 . Тоді $P(A) = P(A_1)P(A_2)$, оскільки ці події незалежні. Спочатку знайдемо

$$P_1(t \leq t_0) = F_1(t_0) = \int_0^{t_0} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt = 1 - e^{-\lambda_1 t}.$$

Аналогічно, $P_2(t \leq t_0) = F_2(t_0) = 1 - e^{-\lambda_2 t}$.

Далі, $P(A_1) = 1 - P_1(t \leq t_0) = e^{-\lambda_1 t}$, $P(A_2) = 1 - P_2(t \leq t_0) = e^{-\lambda_2 t}$.

Остаточно, $P(A) = e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$.

б) Нехай $P(\bar{A})$ – ймовірність шуканої події.
 $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t_0}$.

Відповідь: а) $e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t_0}$; б) $1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t_0}$.

Приклад 3.2.9. Випадкові похибки вимірів підлягають нормальному закону розподілу з середнім квадратичним відхиленням 20 мм і математичним сподіванням 0 мм. Знайти ймовірність того, що з 3 незалежних вимірів похибка хоча б одного не перевищить за абсолютною величиною 4 мм.

Розв'язок

Нехай подія A полягає в тому, що в 3 незалежних вимірах похибка хоча б одного не перевищить δ . Згідно умови задачі $M(X) = 0$,

$\sigma(X) = 20$, $\delta = 4$. Спочатку необхідно обчислити ймовірність того, що відхилення похибки X не перевищить δ :

$$P(|X| \leq 4) = 2\Phi(4/20) = 2 \cdot 0.0793 = 0.1586.$$

Таким чином, $p = 0.1586$, $n = 3$.

$$P(A) = 1 - C_3^0 p^0 (1-p)^3 = 1 - (1-p)^3 = 1 - (1-0.1586)^3 = 0.40433.$$

Відповідь: 0.40433.

Приклад 3.2.10. При 10000 підкиданнях монети тризуб випав 5400 разів. Чи слід вважати, що монета несиметрична?

Розв'язок

Число випробувань $n = 10000$. Ймовірність випадання тризуба в кожному підкиданні монети $p = 0.5$. Тоді математичне сподівання числа випадань тризуба дорівнює $M(X) = np = 5000$, дисперсія

$$D(X) = np(1-p) = 2500, \quad \text{середньоквадратичне відхилення}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 50.$$

Враховуючи, що число випробувань велике, можна припустити, що X – число випадань тризуба – розподілене за нормальним законом, якщо монета симетрична. Перевіримо цю гіпотезу, застосувавши правило «трьох σ ». Оскільки $3\sigma = 150 < X - M(X) = 400$, то гіпотеза нормального розподілу не підтверджується. Звідси випливає, що монета несиметрична.

Відповідь: так.

3.3 Задачі для самостійного розв'язування

3.3.1. Проводяться незалежні випробування з однаковою ймовірністю появи події A в кожному випробуванні. Знайти ймовірність появи події A , якщо дисперсія числа появ події в 3 незалежних випробуваннях дорівнює 0.63.

Відповідь: 0.3 або 0.7.

3.3.2. Кидають n гральних кісток. Знайти математичне сподівання таких кидків, в кожному з яких випадає m шісток, якщо загальне число кидків N .

$$\text{Відповідь: } M(X) = n C_n^m \left(\frac{1}{6}\right)^m \left(\frac{5}{6}\right)^{n-m}.$$

3.3.3. Випадкова величина X має розподіл

X	-1	-0.5	-0.1	0	0.1	0.2	0.5	1.0	1.5	2
P	0.005	0.012	0.074	0.102	0.148	0.231	0.171	0.160	$\frac{0.08}{1}$	$\frac{0.01}{6}$

$$\text{Обчисліть } P\left(|X| \leq \frac{1}{2}\right).$$

Відповідь: 0.738.

3.3.4. Випадкова величина X задана щільністю ймовірності (розподіл Лапласа) $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Знайти математичне сподівання величини X .

Відповідь: 0.

3.3.5. Випадкова величина X задана щільністю ймовірності (розподіл Лапласа) $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Знайти дисперсію величини X .

Відповідь: 2.

3.3.6. Випадкова величина X в інтервалі $(3, 5)$ задана щільністю розподілу $f(x) = -(3/4)x^2 + 6x - 45/4$, поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти моду, математичне сподівання і медіану.

Відповідь: $M(X) = Mo(X) = Me(X) = 4$.

3.3.7. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_0^3}{x^3}, & x \geq x_0 \ (x_0 > 0); \\ 0, & x < x_0. \end{cases}$$

Знайдіть математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

$$\text{Відповідь: } M(X) = \frac{3}{2}x_0; \ D(X) = \frac{3}{4}x_0^2; \ \sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}x_0.$$

- 3.3.8. Гральний кубик кидають n раз. Нехай X – число появ шістки. Обчислити: а) розподіл X ; б) $M(X)$; в) $D(X)$.

$$\text{Відповідь: а) } P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}; \text{ б) } \frac{1}{6}n; \text{ в) } \frac{5}{36}n.$$

- 3.3.9. Автобуси деякого маршруту йдуть чітко за розкладом. Інтервал руху 5 хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підходить до зупинки, буде чекати автобус менше 3 хв.

Відповідь: 0.6.

- 3.3.10. Годинникова стрілка електричного годинника рухається стрибками в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в даний момент часу годинник покаже час, який відрізняється від істинного не більше, ніж на 20 с.

$$\text{Відповідь: } \frac{2}{3}.$$

- 3.3.11. Час T безвідмовної роботи двигуна автомобіля розподілений за експоненціальним законом. Відомо, що середній час безвідмовної роботи між технічним обслуговуванням дорівнює 100 годинам. Визначити ймовірність безвідмовної роботи двигуна за 80 годин.

Відповідь: 0.5507.

- 3.3.12. Час T виявлення цілі локатором розподілений за експоненціальним законом. Знайти ймовірність того, що ціль буде виявлена за час від 5 до 15 с після початку пошуку, якщо середній час виявлення цілі 10 с.

Відповідь: 0.3834.

- 3.3.13. Функція розподілу неперервної випадкової величини X (час безвідмовної роботи деякого пристрою) $f(x) = 1 - e^{-\frac{x}{T}}$, $x \geq 0$. Знайти ймовірність безвідмовної роботи пристрою за час $x \geq T$.

Відповідь: $\frac{1}{e}$.

- 3.3.14. Зріст дорослих чоловіків є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Нехай математичне сподівання її дорівнює 175 см, а середньоквадратичне відхилення 6 см. Визначити ймовірність того, що хоча б один з випадково вибраних п'яти чоловіків буде мати зріст від 170 до 180 см.

Відповідь: 0.98913.