

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

Штанько П.К., Шевченко В.Г., Омельченко О.С.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

**Збірник завдань
для розрахунково-графічних робіт**

За редакцією П.К. Штанька

Запоріжжя

2019

ББК 22.2я73
УДК 531 (075.8)
Т33

Теоретична механіка. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт / Укл.: П.К. Штанько, В.Г. Шевченко, О.С. Омельченко / За ред. Штанька П.К. - Запоріжжя: НУ «ЗП», 2019. - 228 с.

ISBN 978-966-2602-32-6

Рецензент: *В.І. Пожуєв*, професор, д-р ф.-м.н., НУ «ЗП»

Експерт: *Г.Д. Фурсіна*, доцент, к.т.н., НУ «ЗП»

Рекомендовано до видання Вченою радою ЗНТУ, протокол № 9 від 15 квітня 2019 р.

© Штанько П.К. 2019
© Шевченко В.Г. 2019
© Омельченко О.С.. 2019

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ	6
1 СТАТИКА	8
1.1 Аксиоми статички. Задачі статички	8
1.2 В'язі та їх реакції	10
1.3 Проекція сили на вісь та площину	14
1.4 Моменти сил	15
1.5 Умови рівноваги різних систем сил	17
1.6 Визначення центра ваги плоскої фігури	20
1.7 Завдання С.1 Визначення реакцій опор твердого тіла, навантаженого плоскою системою сил	22
1.8 Приклад виконання завдання С.1	22
1.9 Завдання С.2 Визначення реакцій опор твердого тіла	28
1.10 Приклад виконання завдання С.2	28
1.11 Завдання С.3 Визначення реакцій опор, в конструкціях, що навантажені довільно розташованими силами	34
1.12 Приклад виконання завдання С.3	34
1.13 Завдання С.4 Центр ваги плоскої фігури	45
1.14 Приклад виконання завдання С.4	49
1.15 Контрольні питання зі статички	51
2 КІНЕМАТИКА	53
2.1 Кінематика точки	54
2.2 Кінематика твердого тіла	55
2.3 Плоскопаралельний рух твердого тіла	56
2.4 Складний рух точки	58
2.5 Завдання К.1 Дослідження руху точки	59
2.6 Приклад виконання завдання К.1	62
2.7 Завдання К.2 Дослідження поступального і обертального рухів твердого тіла	67

1 СТАТИКА

2.7.1	К.2.1	Визначення закону поступального руху тіла	67
2.7.2	К.2.2	Визначення закону обертального руху тіла	67
2.8		Приклад виконання завдання К.2.1	72
2.9		Приклад виконання завдання К.2.2	75
2.10	Завдання К.3	Визначення швидкостей і прискорень точок твердого тіла, що виконує плоский рух	77
2.11		Приклад виконання завдання К.3	82
2.12	Завдання К.4	Кінематичний аналіз багатоланкового механізму	86
2.13		Приклад виконання завдання К.4	91
2.14	Завдання К.5	Визначення абсолютних швидкості та прискорення точки	104
2.15		Приклад виконання завдання К.5	109
2.16	Завдання К.6	Визначення кутових швидкостей ланок планетарного редуктора	113
2.17		Приклад виконання завдання К.6	118
2.18		Перелік контрольних питань з кінематики	122
3	ДИНАМІКА	125
3.1		Закони динаміки. Задачі динаміки	125
3.1.1		Задачі динаміки для вільної точки	127
3.1.2		Задачі динаміки для невільної точки	127
3.2		Робота сили. Потужність	128
3.3		Осьовий момент інерції системи	129
3.4		Загальні теореми динаміки	130
3.5		Принципи механіки	131
3.6	Завдання Д.1	Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки	132
3.7		Приклад виконання завдання Д.1	132
3.8	Завдання Д.2	Застосування основних теорем динаміки для дослідження руху матеріальної точки	139
3.9		Приклад виконання завдання Д.2	147

3.10	Завдання Д.3 Застосування теореми про зміну моменту кількості руху механічної системи для визначення кутової швидкості твердого тіла	149
3.11	Приклад виконання завдання Д. 3	156
3.12	Завдання Д.4 Застосування теореми про зміну кінетичної енергії для вивчення руху механічної системи ...	159
3.13	Приклад виконання завдання Д.4	166
3.14	Завдання Д.5 Застосування принципу Д'Аламбера для визначення реакцій опор при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі	171
3.15	Приклад виконання завдання Д.5	178
3.16	Завдання Д.6 Застосування загального рівняння та рівняння Лагранжа другого роду для дослідження руху механічної системи з одним ступенем вільності	182
3.17	Приклад виконання завдання Д.6	189
3.17.1	Загальне рівняння динаміки	189
3.17.2	Рівняння Лагранжа II-го роду	193
3.18	Перелік контрольних питань з динаміки	197
	ЛІТЕРАТУРА	201
	ДОДАТОК А Титульний лист до завдання	202
	ДОДАТОК Б Відомості з математики	203
	ДОДАТОК В Збірник навчальних програм нормативних дисциплін освітньо-професійної підготовки бакалаврів галузі знань „Машинобудування та матеріалообробка”	217

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Закони та принципи теоретичної механіки широко застосовуються в загально інженерних науках, таких як опір матеріалів, статика споруд, теорія механізмів і машин, деталі машин, а також в інших спеціальних інженерних дисциплінах.

Мета курсу - надати студентам базові знання з загальних методів теоретичних розрахунків, які інженер може використовувати в своїй практичній діяльності.

Успішне вивчення теоретичної механіки потребує не тільки ґрунтовного засвоєння теорії, а й набуття міцних практичних навичок, які здобуваються студентами завдяки самостійному розв'язуванню великої кількості задач із різних розділів теоретичної механіки.

Самостійна робота студентів полягає в опрацюванні теоретичного курсу, у розв'язуванні задач та виконанні в кожному семестрі двох розрахунково-графічних робіт (РГР). В першому семестрі РГР містять задачі з розділів „Статика” та „Кінематика”, в другому семестрі - „Динаміка” та „Аналітична механіка”.

Розрахунково-графічні роботи виконуються на стандартних аркушах формату А4 лише з одного боку аркуша. Сторінки роботи нумеруються, титульний лист є першою сторінкою, яка не нумерується. Розв'язок кожної задачі потрібно починати з нової сторінки.

Розв'язування завдань необхідно супроводжувати короткими поясненнями. За необхідністю хід розв'язування задачі слід ілюструвати кресленням або ескізом, виконаним олівцем, з використанням лінійки, циркуля і транспортиру. Розрахункову схему бажано викреслювати в масштабі, з обов'язковим позначенням необхідних для розрахунку розмірів та величин навантажень.

На останній сторінці слід навести список використаної літератури.

Зразок титульного листка наведено в додатку А.

У кожному із завдань передбачено, як мінімум 30 варіантів. До кожного завдання наводиться приклад з поясненням методики виконання.

При виконанні завдання із статички необхідно дотримуватися такої послідовності дій:

- а) виділити тіло чи вузол, рівновагу якого треба вивчити;
- б) показати задані (активні) сили;
- в) встановити для даного тіла механічні в'язі та на підставі аксіоми про звільнення від в'язей замінити їх силами (реакціями в'язей);
- г) проаналізувати систему сил і впевнитися в тому, що ця система сил статично визначена;
- д) вибрати прямокутну систему координат і записати аналітичні рівняння рівноваги для системи сил;
- е) розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, обчислити згідно з умовою завдання реакції в'язей;
- ж) виконати перевірку визначених реакцій в'язей.

При виконанні завдань з кінематики, слід діяти так:

- а) з'ясувати, рух якої точки або тіла має бути досліджений;
- б) використати відповідні кінематичні величини, що відповідають даному кінематичному процесові;
- в) показати на розрахунковій схемі вектори кінематичних величин (швидкості, прискорення, кутової швидкості, кутового прискорення і т.і.);
- г) у вибраній системі відліку визначити величини, запропоновані відповідним завданням.

Виконання завдання з динаміки матеріальної точки потрібно проводити в такій послідовності:

- а) для точки, рух якої вивчається, показати активні сили, реакції в'язей, сили інерції;
- б) на підставі відповідних законів, теорем і принципів теоретичної механіки скласти необхідні рівняння, що описують рух точки;
- в) із отриманих рівнянь визначити величини, запропоновані завданням.

1 СТАТИКА

1.1 Аксиоми статки. Задачі статки

Статика твердого тіла (статика) - це розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються методи перетворення систем сил в еквівалентні системи і встановлюються умови рівноваги сил, прикладених до твердих тіл.

Основні задачі статки:

- перетворення систем сил, що діють на тверде тіло, в системи їм еквівалентні;
- визначення умов рівноваги систем сил, що діють на тверде тіло;
- визначення положення центра ваги твердих тіл.

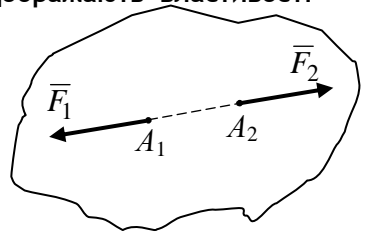
Основні поняття статки:

- сила** - векторна величина, яка є мірою механічної взаємодії матеріальних об'єктів. Її дія на тіло визначається числовим значенням або модулем, напрямком, точкою прикладання;
- система сил** - це сукупність сил, що діють на даний матеріальний об'єкт;
- матеріальна точка** - це тіло, розмірами якого можна знехтувати;
- зрівноважена система сил** - це така система сил, прикладання якої до твердого тіла не порушує його стану;
- рівнодійна системи сил** - це сила, дія якої на тверде тіло еквівалентна заданій системі сил.

Всі тіла в статистиці розглядаються як абсолютно тверді, тобто тіла, для яких відстань між кожними двома точками залишається незмінною під дією сил. В основі статки лежать експериментально і логічно встановлені твердження (аксиоми), які відображають властивості сил, що діють на тверде тіло.

Аксиома 1 (про дві сили).

Дві сили, прикладені до твердого тіла, будуть зрівноважені (еквівалентні нулю) тоді і тільки тоді, коли вони рівні за модулем, діють на одній прямій і спрямовані в протилежні боки (рис. 1.1):



$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \text{ еквівалентна } 0; \vec{F}_1 = -\vec{F}_2; \quad |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|. \quad \text{Рисунок 1.1}$$

Аксіома 2 (про приєднання або вилучення зрівноважених сил).

Не змінюючи системи сил, що діє на тіло, можна приєднувати або вилучати з неї будь-яку зрівноважену систему сил.

Наслідок з аксіом 1 і 2. Не змінюючи дії сили на тіло, точку прикладання сили можна переносити по лінії її дії.

Аксіома 3. (про паралелограм сил).

Дві сили, прикладені до тіла в одній точці, мають рівнодійну, яка прикладена в тій же точці і визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах (рис. 1.2).

Згідно з даною аксіомою система сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) еквівалентна \vec{R} . За правилом додавання векторів рівнодійна дорівнює геометричній сумі цих сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.1)$$

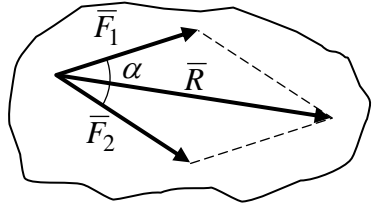


Рисунок 1.2

Модуль рівнодійної визначається за формулою

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos a},$$

де a - кут між векторами \vec{F}_1 і \vec{F}_2 .

Аксіома 4 (про рівність дії та протидії).

Сили взаємодії двох тіл рівні за модулем і спрямовані по одній прямій в протилежні боки (рис. 1.3).

Аксіома 5 (принцип твердіння).

Якщо не абсолютно тверде тіло (тіло, що деформується) перебуває в стані рівноваги, то рівновага його не порушиться коли воно затвердіє.

Принцип твердіння має велике значення при вивченні рівноваги тіл, які деформуються. З цього випливає, що умови рівноваги сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, поширюються на вивчення рівноваги не абсолютно твердих тіл.

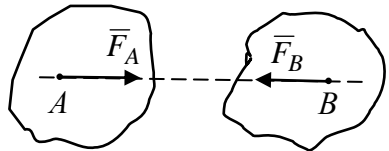


Рисунок 1.3

1 СТАТИКА

Тіла в природі можна поділити на вільні та невільні. Вільними називаються тіла, які під дією системи сил можуть переміщатися в просторі у будь-якому напрямку. Тіло, рух якого в просторі обмежений іншими тілами, називається невільним. Тіла, які обмежують рух даного твердого тіла в просторі, називаються в'язями.

Очевидно, між тілом і в'язями існують механічні взаємодії. Вплив тіла на в'язь називатимемо дією, а вплив в'язі на тіло - протидією. Протидії в'язей називаються *реакціями в'язей*. Реакція в'язей - це сила, з якою в'язь діє на тіло. Вона спрямовується протилежно до напрямку можливого руху тіла.

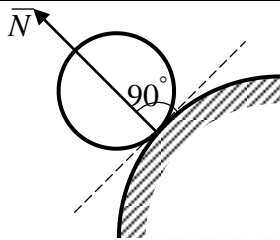
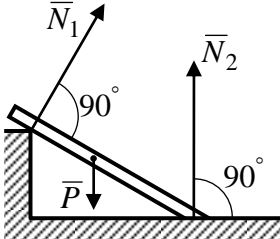
Оскільки в статиці встановлюються умови рівноваги в основному для вільних тіл, то для використання цих умов до невільних тіл слід застосовувати аксіому в'язей.

Аксіома про в'язі (принцип звільнення від в'язей).

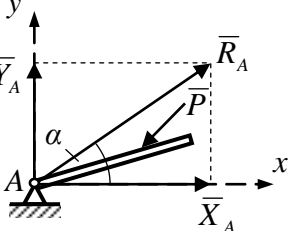
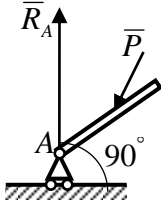
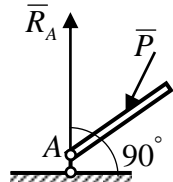
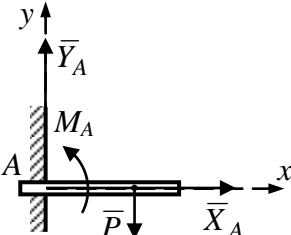
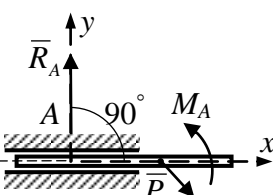
Не змінюючи кінематичного стану тіла, всяке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути в'язі, а їх дію замінити реакціями в'язей.

1.2 В'язі та їх реакції

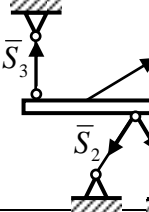
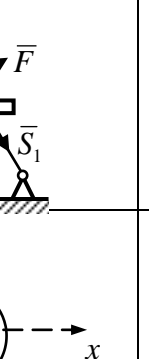
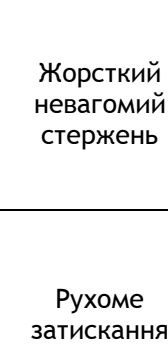
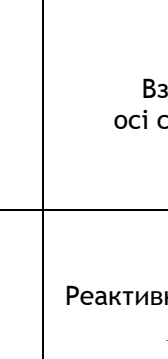
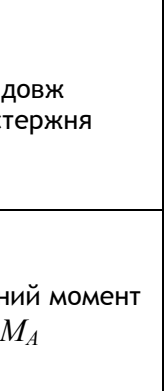
Таблиця 1.1

№ з/ч	Вид в'язі	Найменування	Напрямок дії реакції
1.		Гладка поверхня (без тертя)	По загальній нормалі до поверхонь стичних тіл у точці контакту
2.		Контакт тіл у точці (без тертя)	По нормалі до поверхні

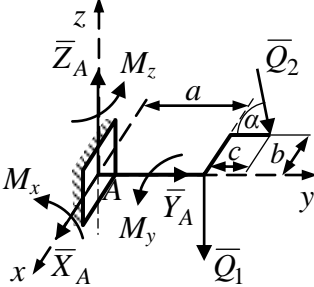
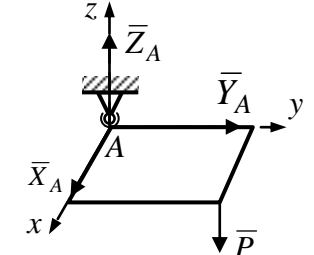
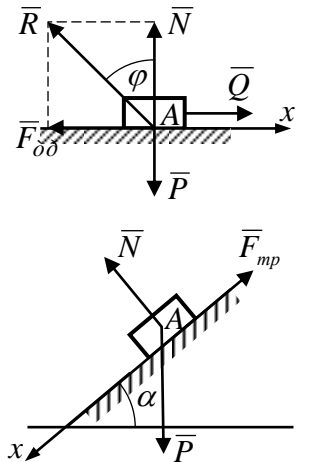
Продовження таблиці 1.1

№ з/ч	Вид в'язі	Найменування	Напрямок дії реакції
3.		Шарнірно нерухома опора	Реакцію \bar{R}_A розділяють на дві складові - проєкції на осі координат x і y
4.		Шарнір на рухомій опорі	Перпендикулярно до опорної поверхні
5.		Шарнірно рухома опора	Перпендикулярна до опорної поверхні
6.		Жорстке защемлення	Дві взаємно перпендикулярні складові \bar{X}_A і \bar{Y}_A та реактивний момент M_A
7.		Ковзне защемлення	Перпендикулярно опорній поверхні. Реактивний момент M_A у площині xy

Продовження таблиці 1.1

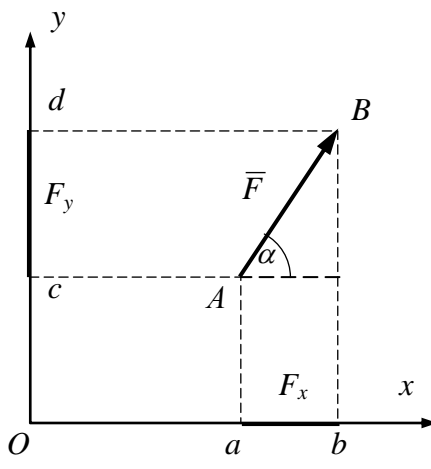
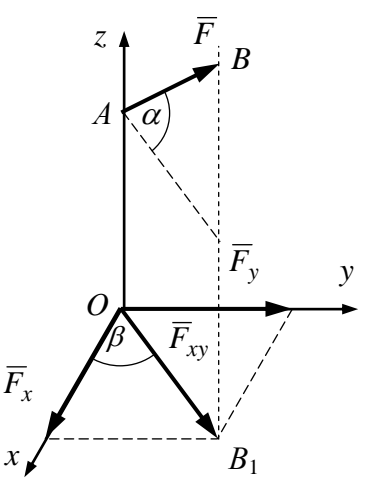
№ з/ч	Вид в'язі	Найменування	Напрямок дії реакції
8.		Жорсткий невагомий стержень	Вздовж осі стержня
9.		Рухоме затискання	Реактивний момент M_A
10.		Гнучка нерозтяжна нитка	Вздовж нитки до точки підвісу
11.		Сферичний шарнір	Загальну реакцію \bar{R} розкладають на складові $\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z$
12.		Підп'ятник A та підшипник B	Загальні реакції \bar{R}_A і \bar{R}_B розкладають на складові $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ та \bar{X}_B, \bar{Y}_B

Продовження таблиці 1.1

№ з/ч	Вид в'язі	Найменування	Напрямок дії і реакції
13.		Жорстке просторове защемлення	Реакцію защемлення розділяють на три складові сили $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$, спрямовані вздовж осей, та три реактивні моменти M_x, M_y, M_z відносно осей координат x, y, z
14.		Сферичний нерухомий шарнір A	Реакцію розділяють на три складові $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$, спрямовані вздовж осей координат x, y, z
15.		Шорстка поверхня	Реакція тертя ковзання направлена в бік, протилежний напрямку руху тіла і має максимальне значення $F_{mp.max} = f \cdot N,$ де f - коефіцієнт тертя ковзання; N - нормальна реакція

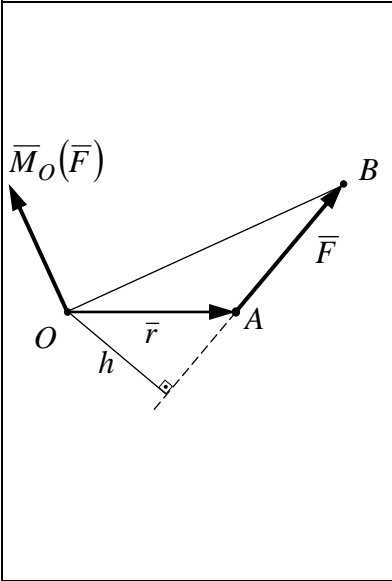
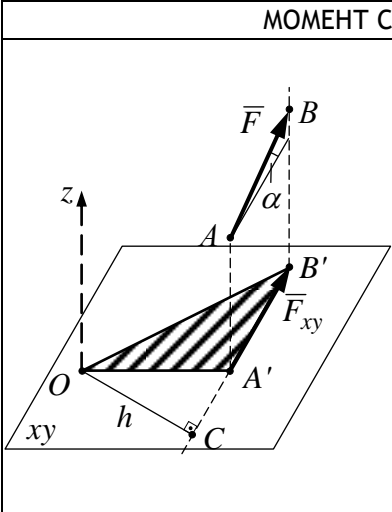
1.3 Проекція сили на вісь та площину

Таблиця 1.2

1	ПРОЕКЦІЯ СИЛИ НА ВІСЬ	
	$F_x = F \cdot \cos \alpha;$ $F_y = F \cdot \sin \alpha$	<p>Проекція сили на вісь є величина алгебраїчна</p>
2	ПРОЕКЦІЯ СИЛИ НА ПЛОЩИНУ;	
	$\overline{F}_{xy} = \overline{OB}_1;$ $F_x = F_{xy} \cdot \cos \beta = F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta;$ $F_y = F_{xy} \cdot \sin \beta = F \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta$	<p>Проекція сили на площину є величина векторна</p>

1.4 Моменти сил

Таблиця 1.3

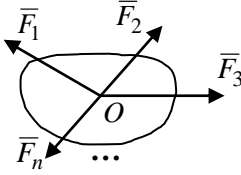
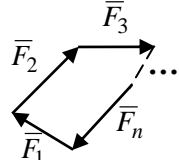
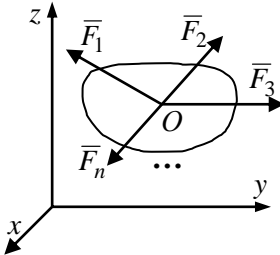
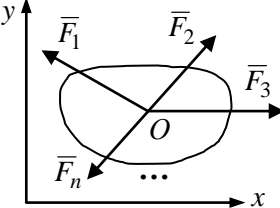
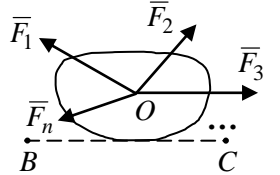
МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ	
	<p>1 <i>Векторний момент сили \vec{F} відносно точки O</i></p> $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ <p>Векторний момент $\vec{M}_O(\vec{F})$ прикладається у точці O і спрямовується перпендикулярно до площини, яка проходить через силу і точку O в той бік, звідки сила намагається повертати тіло проти ходу годинникової стрілки.</p> <p>2 <i>Алгебраїчний момент сили \vec{F} відносно точки O</i></p> $M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h,$ <p>де h - плече сили (найкоротша відстань від точки до лінії дії сили).</p>
МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ОСІ	
	<p>1 <i>Момент сили \vec{F} відносно осі</i></p> <p>– це алгебраїчний момент проєкції сили \vec{F} на площину xy, перпендикулярну до цієї осі відносно точки перетину осі з площиною xy</p> $M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h = \pm F \cdot \cos \alpha \cdot h$ <p>2 <i>Момент сили \vec{F} відносно осі дорівнює нулю у двох випадках:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – лінія дії сили перетинає вісь; – сила паралельна до осі.

Продовження таблиці 1.3

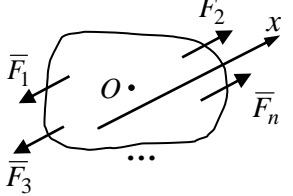
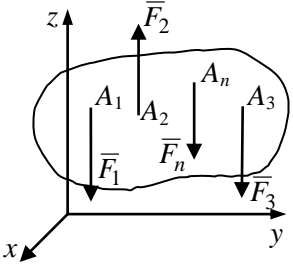
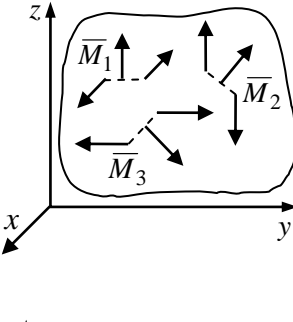
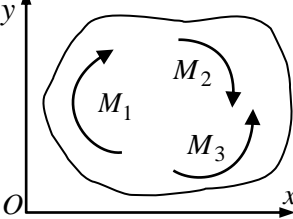
ПАРА СИЛ І ЇЇ МОМЕНТ	
	<p>1 <i>Векторний момент пари сил</i></p> $\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{M}(\vec{F}, \vec{F}') = \vec{M}_A(\vec{F}') = \\ &= \vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{AB} \times \vec{F}' = \vec{BA} \times \vec{F} \end{aligned}$ <p>Модуль векторного моменту M дорівнює</p> $M = F \cdot d.$ <p>Векторний момент \vec{M} пари сил спрямовується перпендикулярно до площини дії пари сил так, щоб з кінця цього вектора можна було спостерігати намагання пари сил обертати тіло проти ходу годинникової стрілки. Вектор \vec{M} є вільним вектором.</p>
	<p>2 <i>Алгебраїчний момент пари сил</i></p> $M = \pm F \cdot d.$
МОМЕНТИ СИЛИ ВІДНОСНО ОСЕЙ КООРДИНАТ	
	$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ $\vec{m}_O(\vec{F}) = m_x(\vec{F})\vec{i} + m_y(\vec{F})\vec{j} + m_z(\vec{F})\vec{k}$ $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ $\left. \begin{aligned} m_x(\vec{F}) &= yF_z - zF_y \\ m_y(\vec{F}) &= zF_x - xF_z \\ m_z(\vec{F}) &= xF_y - yF_x \end{aligned} \right\},$ <p>де x, y, z - координати точки A; F_x, F_y, F_z - проєкції \vec{F} на осі x, y, z</p>

1.5 Умови рівноваги різних систем сил

Таблиця 1.4

СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ			
1. Векторна умова рівноваги	$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$		Рівнодійна системи збіжних сил дорівнює нулю
2. Геометрична умова рівноваги	$\vec{R} = 0$		Силувий багатокутник при рівновазі системи сил є замкнутим
3. Аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил	$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$ $\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$		Осі координат вибрані довільно
4. Аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил	$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$		Осі координат вибрані довільно у площині дії сил
5. Рівняння моментів для плоскої системи збіжних сил	$\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_{ix}) = 0$ $\sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_{iy}) = 0$		Точки B і C лежать на одній прямій з точкою O, в якій перетинаються лінії дії сил
6. Теорема про три непаралельні сили	Якщо вільне тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.		

Продовження таблиці 1.4

ПАРАЛЕЛЬНІ СИЛИ			
<p>7. Аналітичні умови рівноваги плоскої системи паралельних сил</p>	$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ $\sum_{i=1}^n M_O(\bar{F}_i) = 0$		<p>Точка O вибрана довільно у площині дії сил, а вісь x - паралельна до лінії дії цих сил</p>
<p>8. Аналітичні умови рівноваги просторової системи паралельних сил</p>	$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$ $\sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i) = 0$ $\sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i) = 0$		<p>Вісь Oz паралельна до лінії дії сил</p>
ПАРА СИЛ			
<p>9. Векторна умова рівноваги</p>	$\sum_{i=1}^n \bar{M}_i = 0$		<p>Осі координат вибрані довільно</p>
<p>10. Аналітичні умови рівноваги просторової системи пар сил</p>	$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0$ $\sum_{i=1}^n M_{iy} = 0$ $\sum_{i=1}^n M_{iz} = 0$		
<p>11. Аналітичні умови рівноваги плоскої системи пар сил</p>	$\sum_{i=1}^n M_i = 0$		<p>Осі координат лежать у площині дії пар сил</p>

Продовження таблиці 1.4

ДОВІЛЬНА ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ			
12. I форма	$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$ $\sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i) = 0$		Осі координат і точка O вибрані у площині дії сил
13. II форма	$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ $\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0$ $\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0$		Точки A, B і вісь x взяті у площині дії сил, причому пряма AB не перпендикулярна до осі x
14. III форма	$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0$ $\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0$ $\sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0$		Точки A, B, C знаходяться у площині дії сил і не лежать на одній прямій
ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ			
15. Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил	$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$ $\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) = 0$ $\sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) = 0; \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) = 0$		Осі координат проведені довільно
16. Векторні умови рівноваги	$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$ $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0$	Для рівноваги довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент дорівнювали нулю	

1.6 Визначення центра ваги плоскої фігури

Найбільш вживаним способом визначення центра ваги плоскої фігури є уявний поділ однорідного твердого тіла на скінчене число частин, положення центра ваги кожної із яких відомо, або легко може бути визначено.

Для однорідної пластини розміщеної у площині Oxy центр ваги визначаємо за формулами

$$X_C = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n S_k \cdot x_k; \quad Y_C = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n S_k \cdot y_k, \quad (1.2)$$

де S - площа всієї пластини;

S_k - площі її частин;

x_k, y_k - координати центрів ваги виділених частин.

Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги лежить відповідно в площині симетрії, на осі симетрії, або в центрі симетрії.

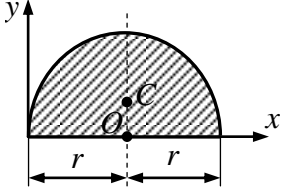
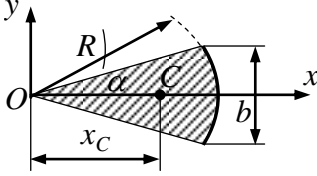
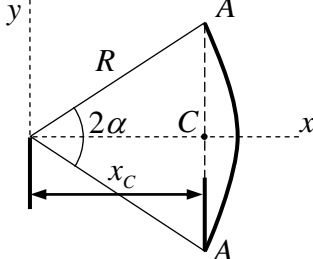
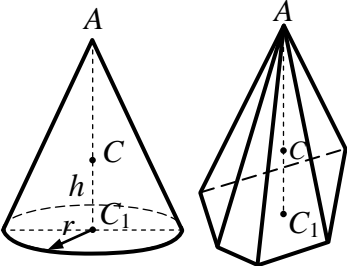
Центр ваги пластини, яка має вирізи, визначаємо за методом доповнення. Для знаходження координат X_C, Y_C доповнюємо площу пластини до повної, а потім віднімаємо із отриманої площі площу вирізаної частини. При цьому площа частини, яка віднімається, повинна братися із знаком мінус.

Для полегшення виконання завдання наведемо центри ваги деяких однорідних фігур (таблиця 1.5).

Таблиця 1.5

Фігура		Координати центра ваги
Площа трикутника		$y_C = \frac{1}{3} h_a; \quad X_C = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3),$ <p>де x_1, x_2, x_3 - координати вершин O, A, B.</p> $S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$

Продовження таблиці 1.5

Площа півкруга		$X_C = r; \quad Y_C = \frac{4r}{3\pi}; \quad S = \frac{\pi r^2}{2}$
Площа сектора круга		$X_C = \frac{2R \cdot \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{R^2 b}{3S}$ $S = \alpha R^2$
Дуга кола		<p>Центр ваги C знаходиться на осі симетрії Cx:</p> $y_C = 0; \quad x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$
Об'єм піраміди або конуса		<p>Центр ваги розміщений на лінії, яка з'єднує вершину A піраміди або конуса з центром ваги C_1 основи:</p> $CC_1 = \frac{1}{4} AC_1.$ <p>Об'єм кругового конуса (кк):</p> $V_{кк} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h_{кк} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h_{кк}.$ <p>Об'єм піраміди (п):</p> $V_n = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h_n.$ <p>$h_{кк}$, h_n – висота конуса і піраміди відповідно.</p>

1.7 Завдання С.1. Визначення опорних реакцій в балках, навантажених плоскою довільною системою сил

Для горизонтально розташованих балок AB (рис.1.5 ... 1.7), навантажених зосередженою силою \bar{F} , рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q та парою сил, момент якої дорівнює M , визначити:

- реакції опор A і B , шарнірно закріплених балок (рис. 1.5);
- опорні реакції в жорсткому закріпленні консольної балки (рис. 1.6);
- реакції стержнів 1, 2, 3 (рис. 1.7).

Числові дані для розрахунків взяти з табл. 1.6.

1.8 Приклад виконання завдання С.1

Задача 1. Визначити реакції шарнірно-нерухомої опори A і шарнірно-рухомої опори C балки AB (рис. 1.4, а), якщо на неї діють:

- зосереджені сили \bar{F} і \bar{G} ;
- рівномірно розподілене навантаження q ;
- пара сил з моментом M ;
- $F=5$ кН, $G=10$ кН, $q=0.5$ кН/м, $M=8$ кН·м, $\alpha=30^\circ$.

Розміри ділянок: $a=2$ м, $b=1$ м, $l=1$ м.

Точки прикладання сил і момента показані на рис. 1.4, а.

Розв'язок. Викреслюємо схему у масштабі 0.1 м/мм, замінюємо рівномірно розподілену силу з інтенсивністю q , рівнодійною \bar{Q} за модулем $Q=q \cdot a=0.5 \cdot 2=1.0$ кН.

Зосереджену силу \bar{Q} прикладаємо в середині ділянки AE . Дію в'язей (опор) на балку замінюємо їх реакціями: в опорі A - \bar{X}_A і \bar{Y}_A , в опорі C - \bar{R}_C (рис. 1.4, б).

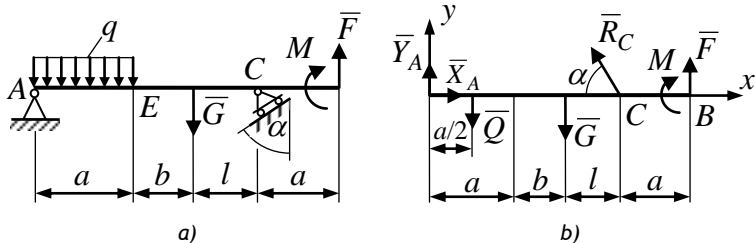


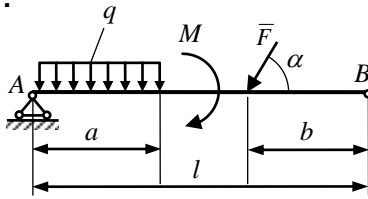
Рисунок 1.4

Таблиця 1.6

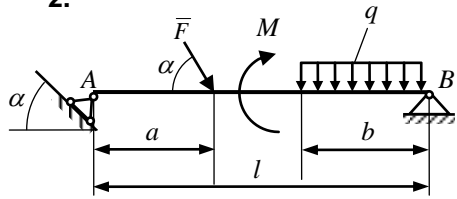
Схема	F , кН	q , кН/м	M , кНм	l , м	a , м	b , м	α , рад
1	10	8	8	7	4	3	$\pi/6$
2	12	7.5	7.5	7.5	4	3	$\pi/4$
3	14	7	7	8	4	3	$\pi/3$
4	16	6.5	6.5	8.5	3	2	$\pi/6$
5	18	6	6	9	3	2	$\pi/4$
6	20	5.5	5.5	9.5	3	2	$\pi/3$
7	22	5	5	10	2	2.5	$\pi/6$
8	24	4.5	4.5	10.5	2	2.5	$\pi/4$
9	26	4	4	11	2	3.5	$\pi/3$
10	28	3.5	3.5	11.5	2	3.5	$\pi/6$
11	10	5	8	7	2	3	$\pi/6$
12	12	6	7.5	7.5	0	3	$\pi/4$
13	14	7	7	8	0	3	$\pi/3$
14	16	8	6.5	8.5	3	2	$\pi/6$
15	18	9	6	9	3	0	$\pi/4$
16	20	10	5.5	9.5	3	0	$\pi/3$
17	22	5.5	5	10	2	0	$\pi/6$
18	24	4.5	4.5	10.5	2	2.5	$\pi/4$
19	26	4	4	11	2	0	$\pi/3$
20	28	3.5	3.5	11.5	0	3.5	$\pi/6$
21	10	2	5	4	1	0	$\pi/6$
22	14	4	10	6	3	0	$\pi/4$
23	16	6	6	4	0	1	$\pi/3$
24	20	1	12	12	8	0	$\pi/6$
25	22	1.5	4	5	2	0	$\pi/4$
26	24	3	8	4	2	0	$\pi/3$
27	18	5	2	6	3	3	$\pi/6$
28	12	7	9	8	0	1	$\pi/4$
29	26	10	3	10	6	0	$\pi/3$
30	28	2.5	4	11	0	6	$\pi/6$

1 СТАТИКА

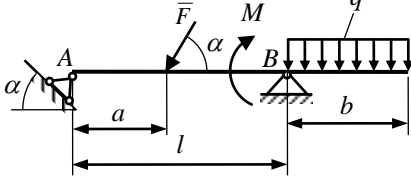
1.



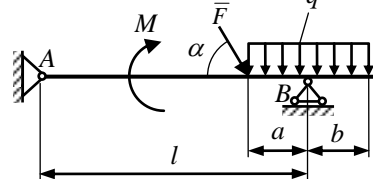
2.



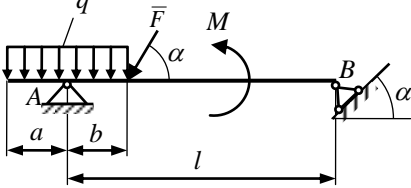
3.



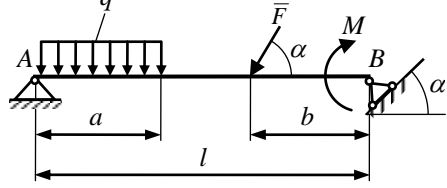
4.



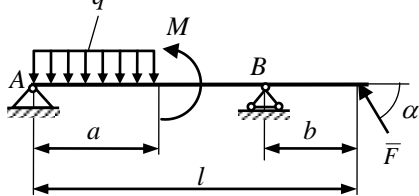
5.



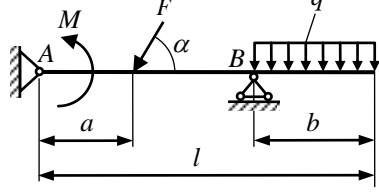
6.



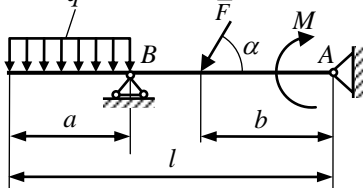
7.



8.



9.



10.

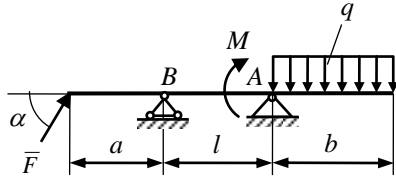
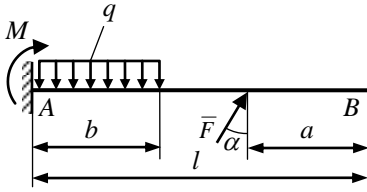
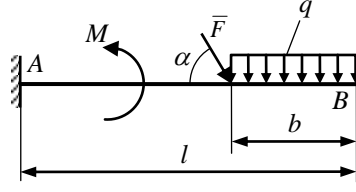


Рисунок 1.5

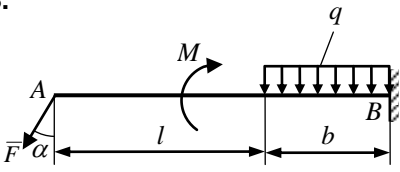
11.



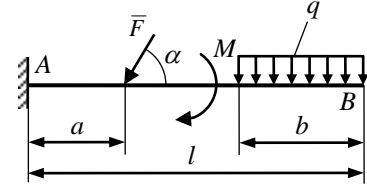
12.



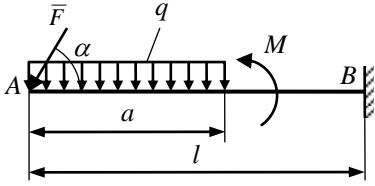
13.



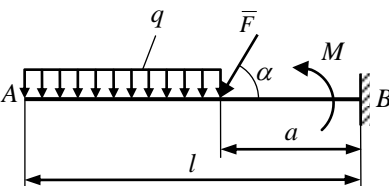
14.



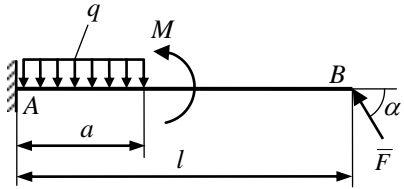
15.



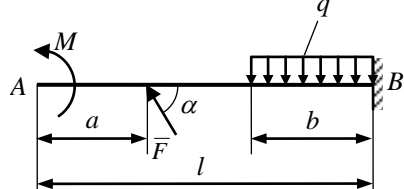
16.



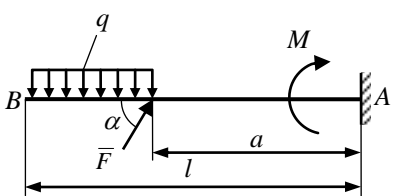
17.



18.



19.



20.

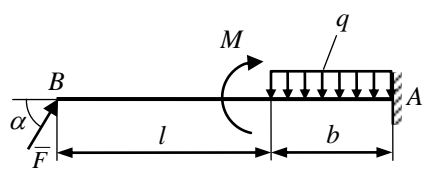
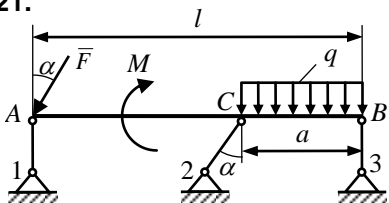


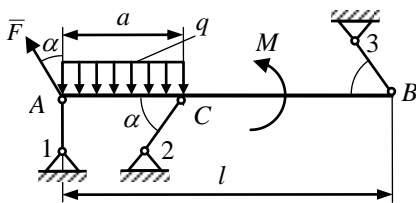
Рисунок 1.6

1 СТАТИКА

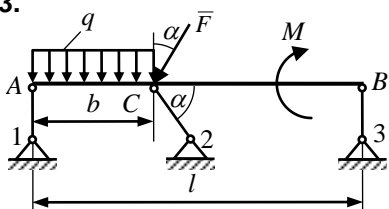
21.



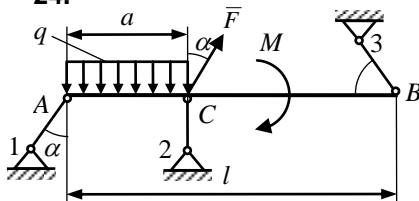
22.



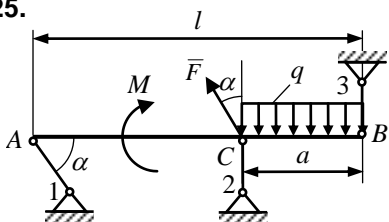
23.



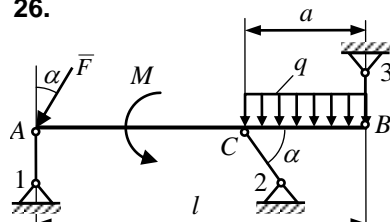
24.



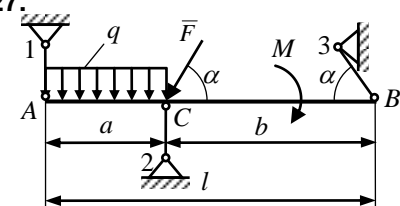
25.



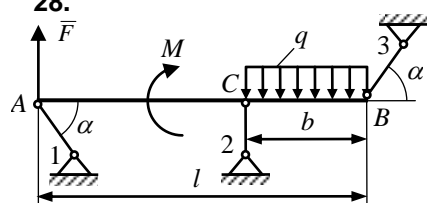
26.



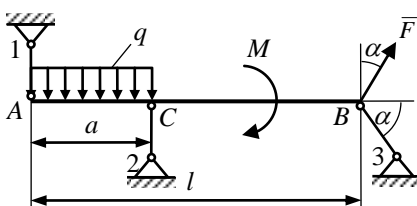
27.



28.



29.



30.

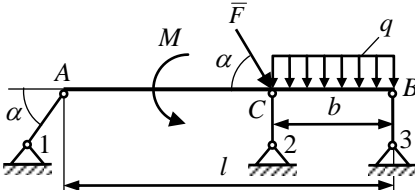


Рисунок 1.7

Точки прикладання вказаних реакцій і їх напрямки відомі. Невідомими величинами залишаються модулі реакцій X_A , Y_A і R_C .

Для визначення невідомих реакцій застосуємо основну форму рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0,$$

або другу форму умов рівноваги в такій послідовності

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_C(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0.$$

Вибираємо основну форму рівноваги і знаходимо

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0;$$

$$-Q \cdot a/2 - G(a+b) + R_C \cdot \sin \alpha \cdot (a+b+l) - M + F(a+b+l+a) = 0$$

;

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - R_C \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - Q - G + R_C \cdot \sin \alpha + F = 0.$$

З цих рівнянь знаходимо

$$R_C = \frac{Q \cdot 1 + G \cdot 3 + M - F \cdot 6}{4 \cdot \sin 30^\circ} = \frac{1 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 8 - 5 \cdot 6}{4 \cdot 0.5} = 4.5 \text{ кН};$$

$$X_A = R_C \cdot \cos \alpha = 4.5 \cdot 0.866 = 3.89 \text{ кН};$$

$$Y_A = Q + G - R_C \cdot \sin \alpha - F = 1 + 10 - 4.5 \cdot 0.5 - 5 = 3.75 \text{ кН}.$$

1 СТАТИКА

Реакції X_A , Y_A і R_C мають додатний знак, це означає що напрямком на схемі цих сил відповідає їх дійсним напрямкам.

Для перевірки правильності розв'язку задачі запишемо рівняння моментів всіх сил, що діють на балку AB відносно точки B

$$\sum m_B(\bar{F}_i) = 0; \quad -M - Y_A \cdot 6 + Q \cdot 5 + G \cdot 3 - R_C \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 = 0;$$
$$-8 - 3.75 \cdot 6 + 1 \cdot 5 + 10 \cdot 3 - 4.5 \cdot 0.5 \cdot 2 = 0.$$

Висновок: перевірка показує, що реакції визначені вірно.

Відповідь: $X_A=3.9$ кН; $Y_A=3.75$ кН; $R_C=4.5$ кН.

1.9 Завдання С.2. Визначення реакцій опор твердого тіла

Визначити реакції опор бруса, якщо на нього діють:

- зосереджені сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 ;
- пара сил з моментом M ;
- рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю q .

Виконати перевірку знайдених рішень.

Схеми навантаження наведені на рисунках 1.8 ... 1.10, числові дані для розрахунку - в таблиці 1.7.

1.10 Приклад виконання завдання С.2

Визначити реакції опор криволінійного бруса, якщо на нього діють:

- зосереджені сили $F_1=2$ Н і $F_2=4$ Н;
- пара сил з моментом $M=5$ Н·м;
- рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю $q=2$ Н/м.

Навантаження бруса, а також розміри ділянок бруса (в метрах) показано на рис. 1.11, причому, $a=3$ м, $c=4$ м, $b=3$ м, $\alpha=30^\circ$, $\beta=60^\circ$.

Виконати перевірку визначених реакцій опор бруса.

Таблиця 1.7

№ варіанта	Сили, Н		Момент, Н·м	Розподіл навантаження, Н/м	Розміри, м			Кути, град.	
	F_1	F_2	M	q	a	b	c	α	β
1	2	1	3	2	1.0	1.5	1.0	45	30
2	4	2	4	2	1.0	1.5	1.5	45	45
3	10	20	40	3	4.0	1.0	2.0	30	-
4	2	3	5	2	1.5	1.0	1.0	45	30
5	4	2	10	1	2.0	1.0	2.0	45	30
6	4	2	10	4	1.0	2.0	2.0	45	60
7	5	4	8	2	1.0	1.0	1.0	30	60
8	3	2	6	3	3.0	2.0	2.0	45	-
9	4	2	12	2	2.0	1.0	2.0	45	60
10	10	20	20	10	1.0	2.0	4.0	60	45
11	20	10	20	2	3.0	2.0	3.0	45	30
12	3	4	5	1	2.0	4.0	3.0	30	60
13	6	8	8	2	1.0	3.0	1.0	-	30
14	5	4	10	3	1.0	2.0	2.0	60	60
15	2	4	8	2	4.0	4.0	3.0	-	30
16	10	20	40	10	2.0	2.0	3.0	45	30
17	4	2	5	2	3.0	2.0	2.0	45	-
18	4	6	10	1	2.0	1.0	3.0	30	60
19	8	4	5	3	3.0	2.0	2.0	30	45
20	4	3	8	2	3.0	1.0	3.0	30	60
21	2	5	6	3	1.0	3.0	2.0	60	45
22	8	4	6	2	3.0	2.0	2.0	60	30
23	4	2	12	4	3.0	1.0	2.0	30	45
24	4	2	8	1	4.0	2.0	2.0	30	-
25	4	5	12	2	1.0	2.0	1.0	60	45
26	4	2	10	2	2.0	2.0	1.0	45	30
27	4	5	8	2	2.0	3.0	3.0	60	30
28	20	10	50	5	1.0	2.0	1.0	-	30
29	40	40	30	10	1.0	2.0	2.0	30	30
30	3	4	5	3	2.0	3.0	1.5	-	60

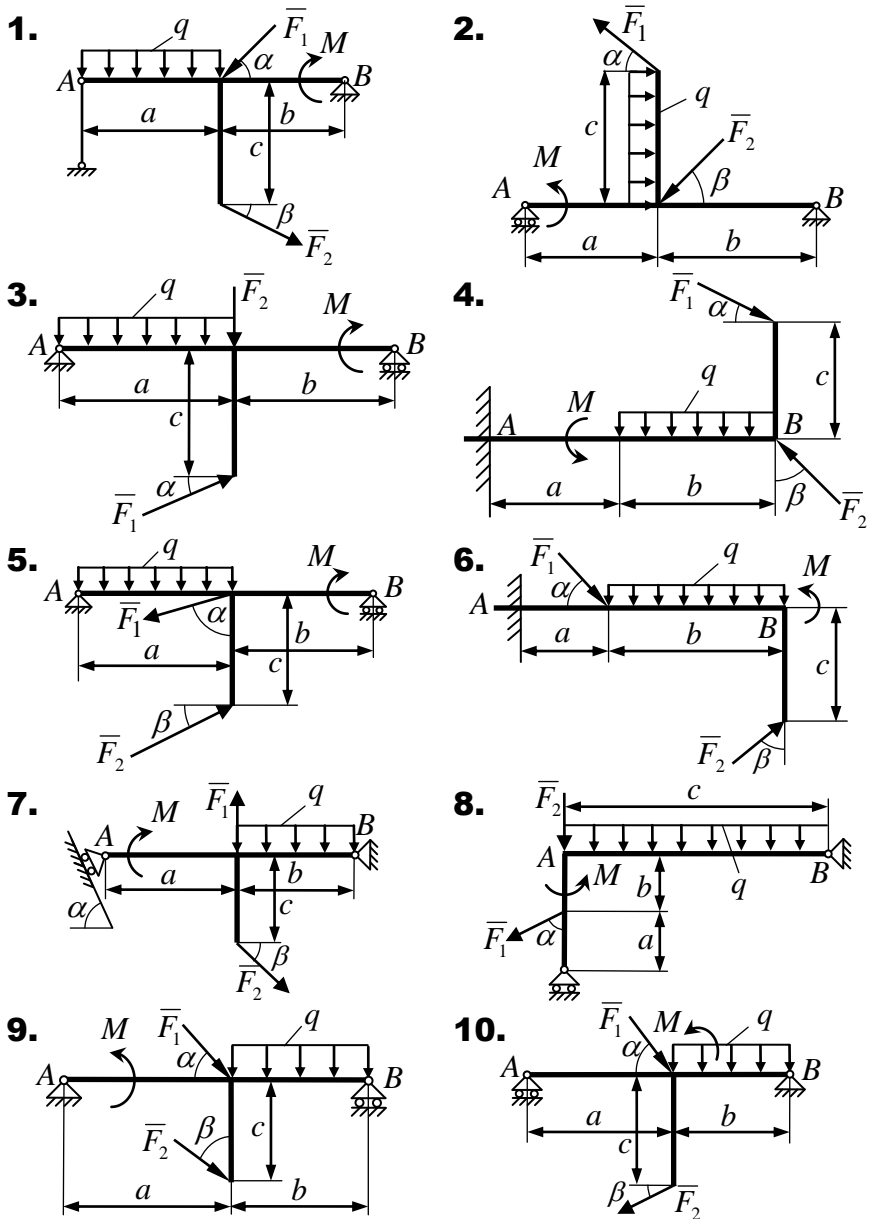


Рисунок 1.8

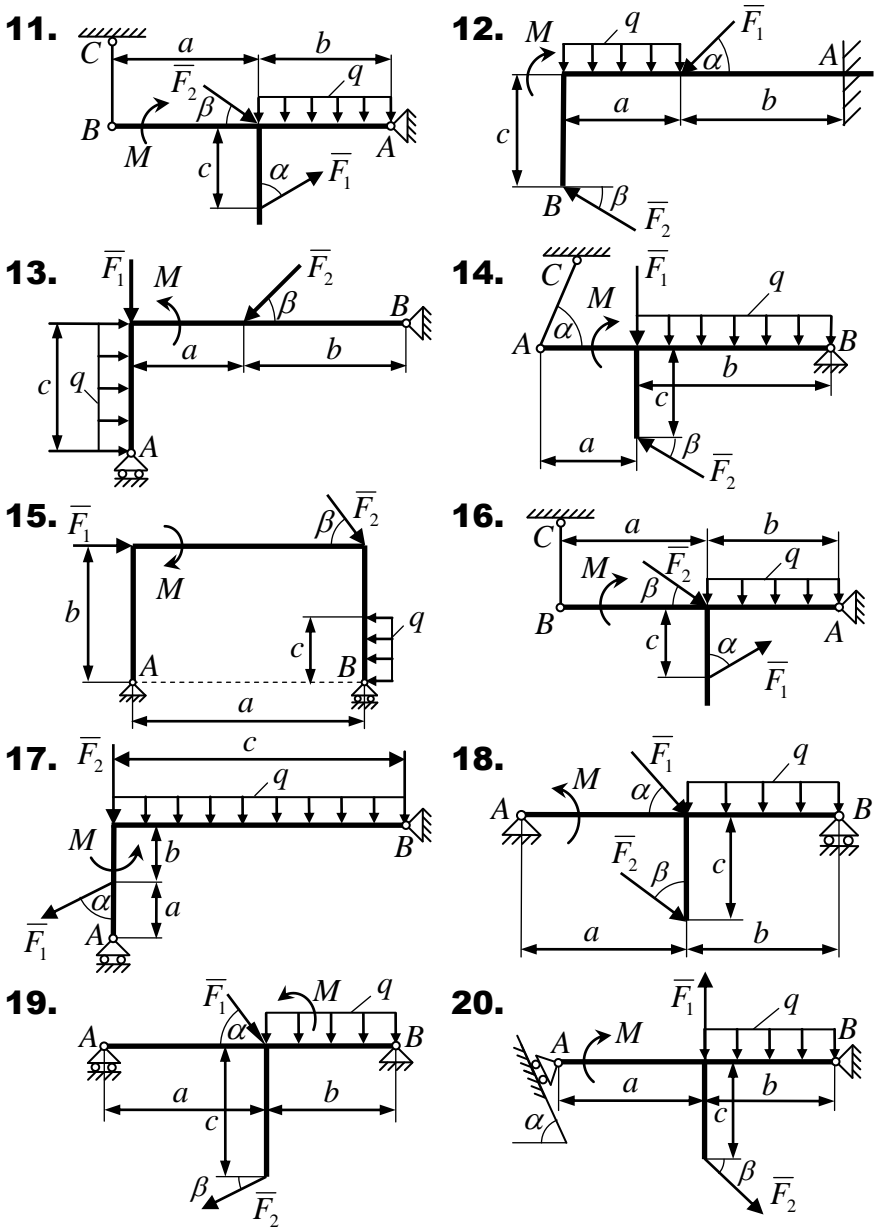


Рисунок 1.9

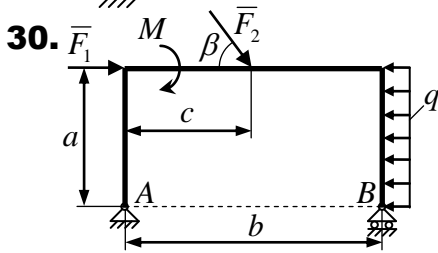
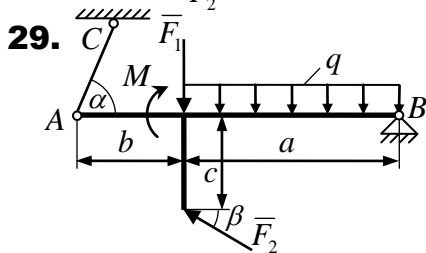
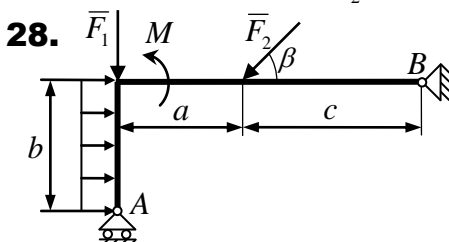
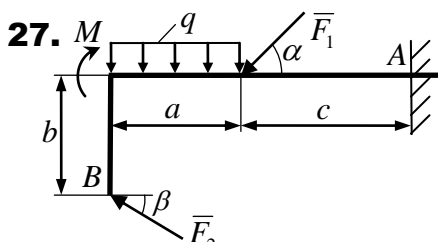
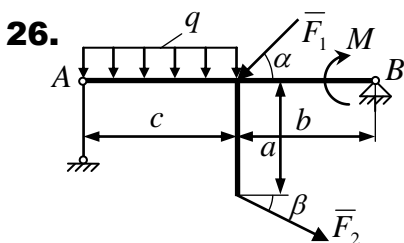
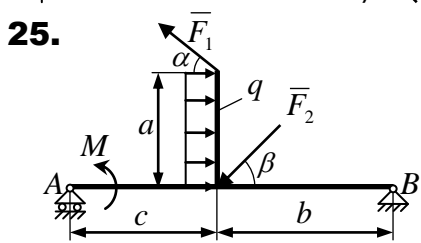
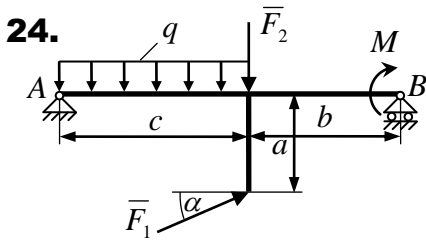
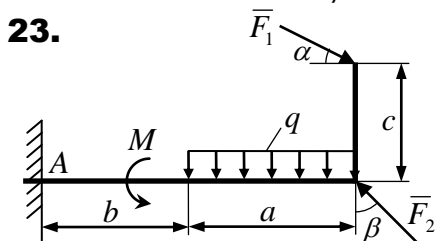
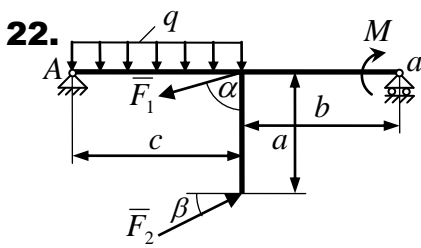
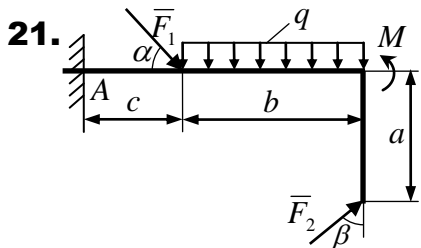


Рисунок 1.10

Розв'язок.

За вихідними даними креслимо у масштабі задану схему (рис. 1.11).

Показуємо на схемі активні сили та моменти, звільняємо (умовно) брус від в'язей, прикладаємо до нього відповідні реакції в'язей \bar{Y}_A , \bar{X}_B , \bar{Y}_B .

Рівномірно розподілене навантаження q замінюємо зосередженою силою

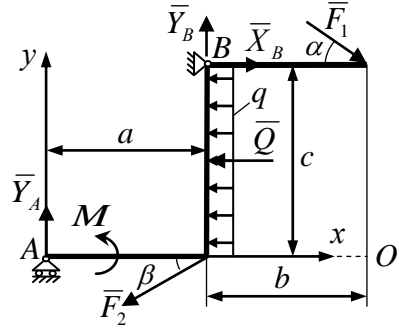


Рисунок 1.11

$$Q = q \cdot c = 2 \cdot 4 = 8 \text{ Н.}$$

Розглядаємо брус як тверде тіло, яке знаходиться у рівновазі під дією активних сил і реакцій в'язей.

Для визначення невідомих реакцій \bar{Y}_A , \bar{X}_B , \bar{Y}_B запишемо рівняння рівноваги

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_B + F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \beta - Q = 0; \quad (1.3)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_B - F_1 \sin \alpha - F_2 \sin \beta = 0; \quad (1.4)$$

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad -Y_A \cdot a + M - F_1 \sin \alpha \cdot b - F_2 \cos \beta \cdot c - Q \cdot \frac{c}{2} = 0; \quad (1.5)$$

Із рівняння (1.3) визначимо реакцію X_B

$$\begin{aligned} X_B &= Q - F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta = \\ &= 8 - 2 \cos 30^\circ + 4 \cos 60^\circ = 8.268 \approx 8.27 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Із рівняння (1.5) визначимо реакцію Y_A

$$Y_A = \frac{1}{a} \left(M - F_1 \sin \alpha \cdot b - F_2 \cos \beta \cdot c - Q \cdot \frac{c}{2} \right) = -7.333 \text{ Н.}$$

Із рівняння (1.4) визначимо реакцію Y_B

1 СТАТИКА

$$Y_B = -Y_A + F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta = -7.33 + 2 \sin 30^\circ + 4 \sin 60^\circ = 11.797 \text{ Н.}$$

Для перевірки правильності визначення реакцій запишемо рівняння моментів всіх сил, прикладених до бруса, відносно точки O

$$\sum M_O(\bar{F}_k) = 0;$$

$$\begin{aligned} -Y_A(a+b) + M + F_2 \sin \beta \cdot b - X_B \cdot c - F_1 \cos \alpha \cdot c - Y_B b + Q \frac{c}{2} = \\ = 7.333 \cdot 6 + 5 + 4 \cdot 0.866 \cdot 3 + 8 \cdot 2 - 11.797 \cdot 3 - \\ - 8.268 \cdot 4 - 2 \cdot 0.866 \cdot 4 = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: $X_B=8.268 \text{ Н}; Y_B=11.797 \text{ Н}; Y_A=-7.333 \text{ Н.}$

Висновок: перевірка показує, що реакції визначені вірно.

1.11 Завдання С.3. Визначення реакцій опор в конструкціях, що навантажені довільно розташованими силами

На конструкції, які знаходяться в рівновазі, діють:

- сили \bar{P} , \bar{G} і \bar{T} (варіанти 16, 18);

- розподілене навантаження q .

На деякі конструкції діє пара сил з моментом M .

Сила \bar{P} - вага тіла або активна сила (варіанти 4, 5, 11, 14, 16, 18, 24, 27, 28). Сила \bar{G} розташована в площині, вказаній на схемі, її положення визначається кутом θ .

Визначити реакції опор і зусилля у невагомих важелях.

Схеми конструкцій наведені на рисунку 1.12 ... 16, а необхідні для розрахунків числові дані - в таблицях 1.8, 1.9.

Варіант завдання задає викладач.

1.12 Приклад виконання завдання С.3

Визначити реакції сферичного нерухомого шарніра A , підшипника B та нерозтяжної нитки CE однорідної прямокутної рами вагою $G=200 \text{ Н}$, якщо кути $\angle ACE = \angle BAC = 30^\circ$ (рис. 1.17).

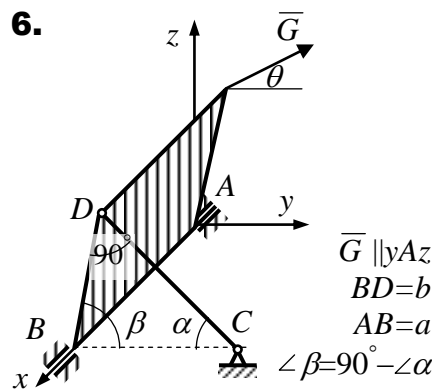
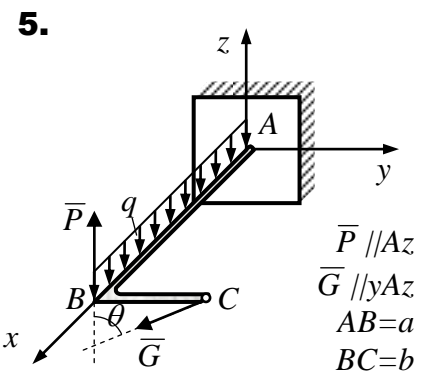
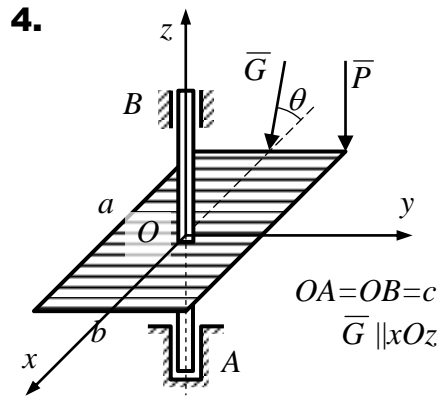
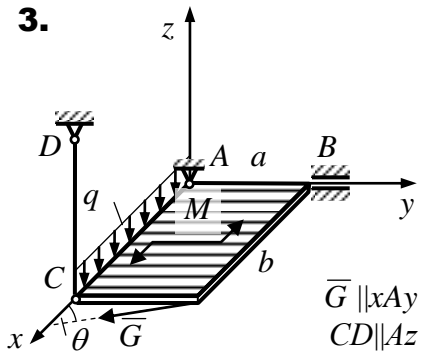
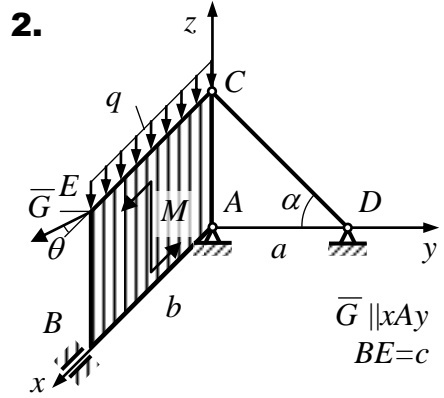
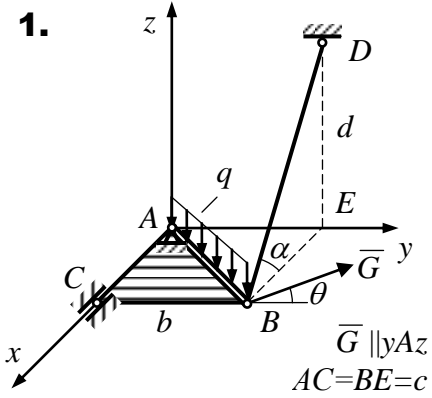


Рисунок 1.12

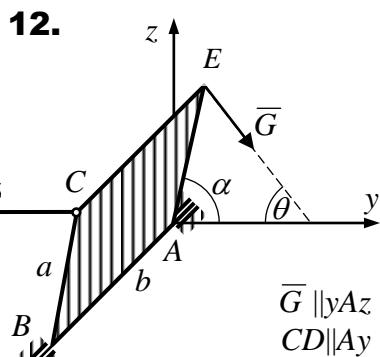
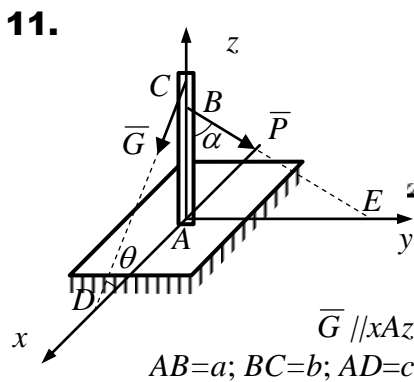
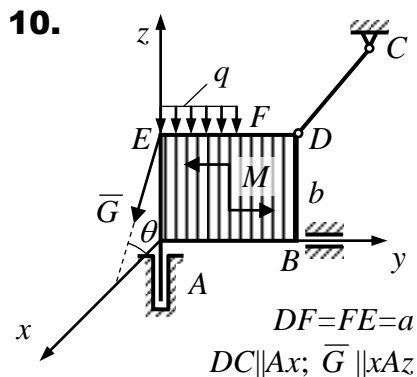
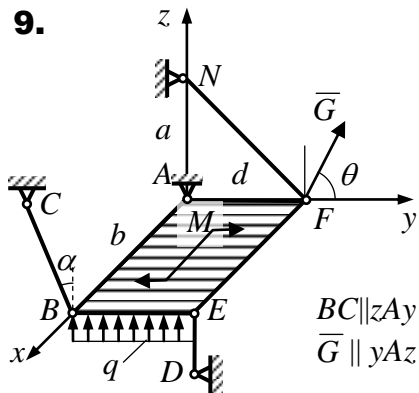
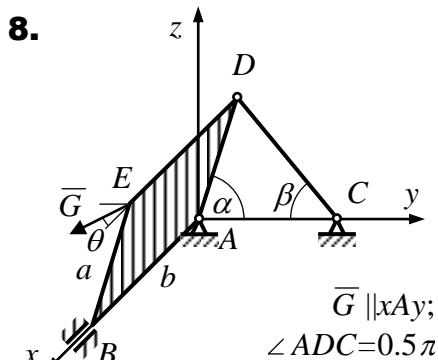
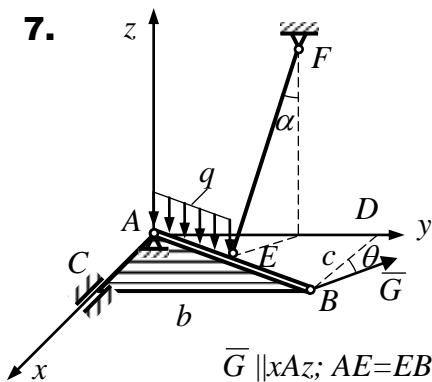
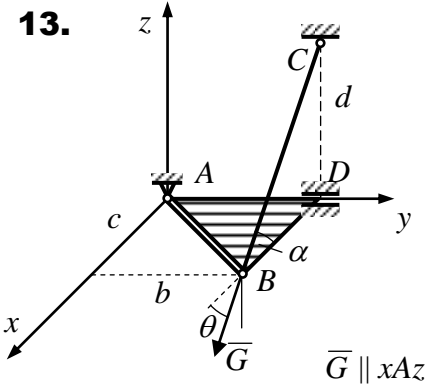
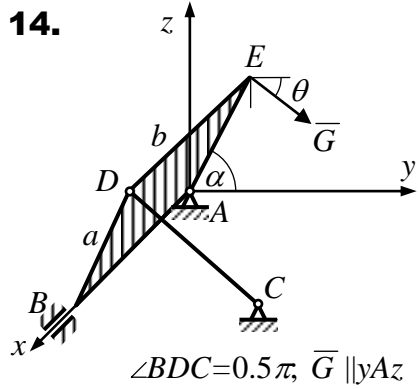


Рисунок 1.13

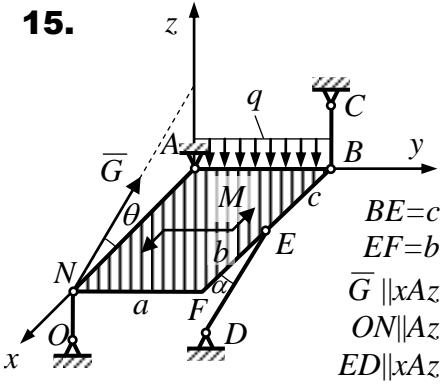
13.



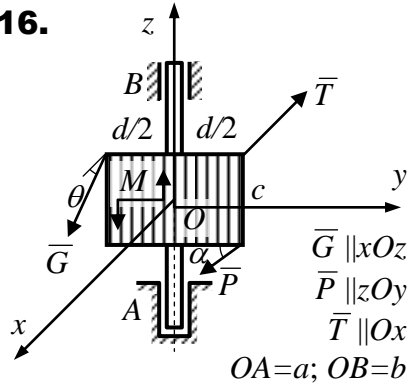
14.



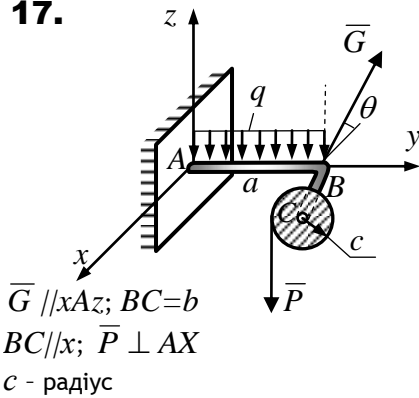
15.



16.



17.



18.

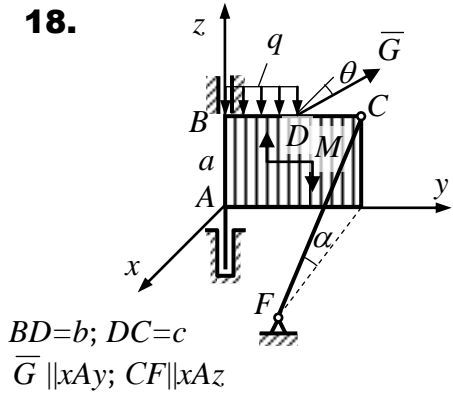
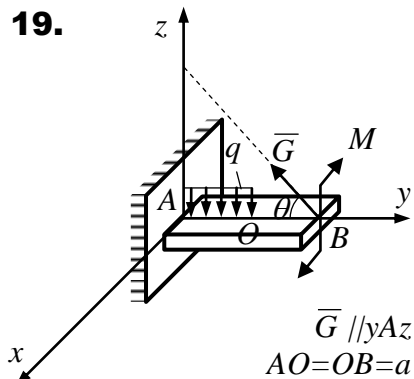
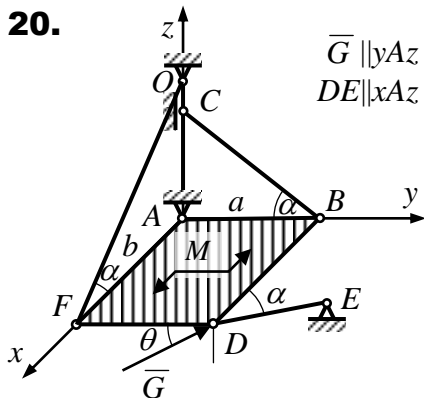


Рисунок 1.14

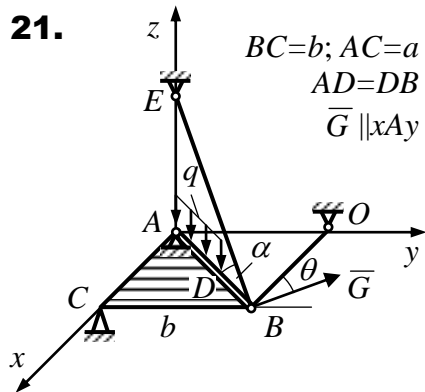
19.



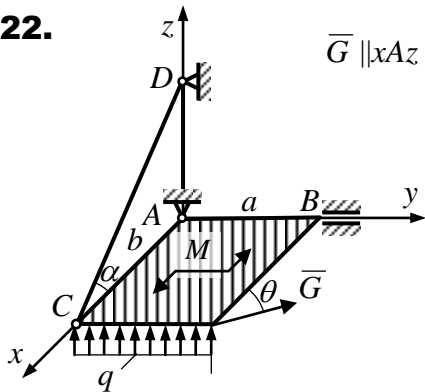
20.



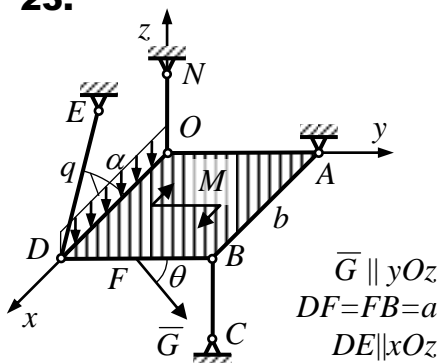
21.



22.



23.



24.

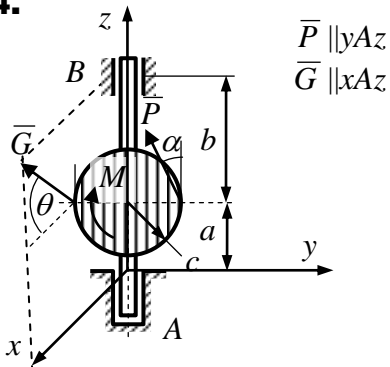
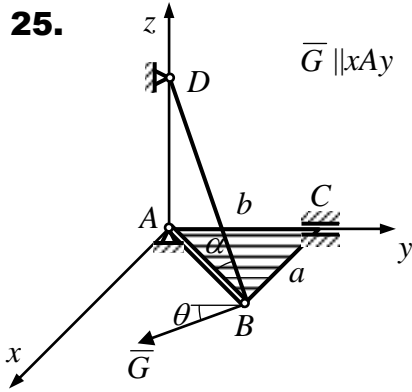
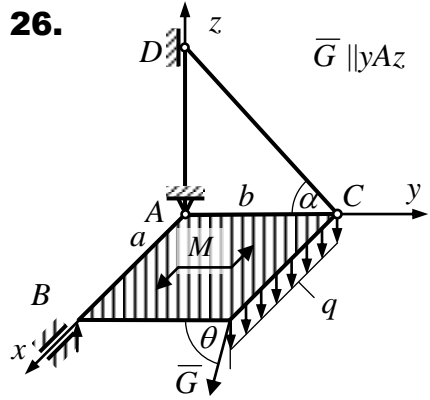


Рисунок 1.15

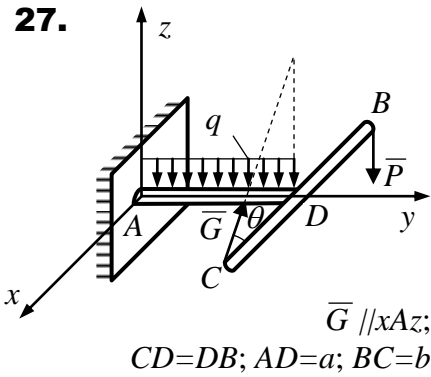
25.



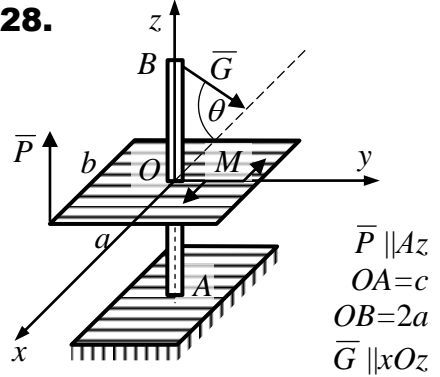
26.



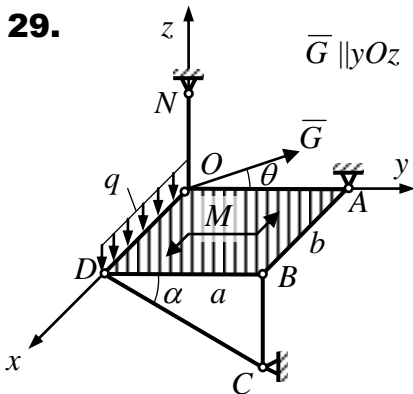
27.



28.



29.



30.

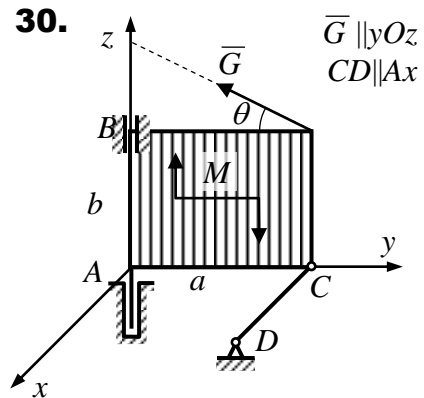


Рисунок 1.16

Таблиця 1.8

№ вар.	P , кН	G , кН	q , кН/м	M , кН·м	α , град	Розміри, м			Вид накладених в'язів і місця їх розташування				
						a	b	c	d	стержень	сфер. шарнір, підп'ятник	підшипник	жорстка в'язь
1	2	3	2		45		4	4	4	BD	в точці A	в точці C	
2	3	4	2	10	45	3	4	2		CD	в точці A	в точці B	
3	4	5	2	10		3	6			CD	в точці A	в точці B	
4	5	6				6	2	3			в точці A	в точці B	
5	6	7	2			4	6						в точці A
6	7	8			30	4	4			CD		в точках A і B	
7	8	9	2		45		6	4		EF	в точці A	в точці C	
8	9	10			60	5	6			DC	в точці A	в точці B	
9	10	9	2	10	30	4	3		3	BC, ED, FN	в точці A		
10	9	8	2	10		2	2			DC	в точці A	в точці B	
11	8	7			60	4	2	6					в точці A
12	7	6			60	3	4			DC		в точках A і B	
13	6	5			45		3	4	4	CB	в точці A	в точці D	
14	5	4			30	2	4			DC	в точці A	в точці B	
15	4	3	2	10	60	4	4	5		BC, ED, ON	в точці A		

Продовження таблиці 1.8

№ вар.	P , кН	G , кН	q , кН/м	M , кН·м	α , град	Розміри, м				Вид накладених в'язів і місця їх розташування			
						a	b	c	d	стержень	сфер. шарнір, підп'ятник	підшипник	жорстка в'язь
16	3	2		10	45	2	3	1	1		в точці A	в точці B	
17	2	1	2			4	4	2					в точці A
18	1	2	2	10	45	3	2	2		CF	в точці A	в точці B	
19	2	3	2	10		3							в точці A
20	3	4		10	45	4	6			DE, CB, OF	в точці A		
21	4	5	2		60	4	3			BO, BE	в точці A		
22	5	6	2	10	30	4	2			DC	в точці A	в точці B	
23	6	7	2	10	45	2	4			ON, BC, DE	в точці A		
24	7	8		10	45	2	3	1			в точці A	в точці B	
25	8	9			30	3	4			DB	в точці A	в точці C	
26	9	10	2	10	45	2	4			DC	в точці A	в точці B	
27	10	10	2			3	4						в точці A
28	9	8		10		5	5	3					в точці A
29	8	7	2	10	30	4	3			CD, BC, ON	в точці A		
30	7	6		10		4	5			DC	в точці A	в точці B	

Таблиця 1.9

№ вар.	P , кН	G , кН	q , кН/м	M , кН·м	α , град	Розміри, м				Вид накладених в'язів і місця їх розташування				
						a	b	c	d	стержень	сфер. шарнір, підп'ятник	підшипник	жорстка в'язь	
1	3	4	4		45		3	4	4		BD	в точці A	в точці C	
2	4	5	4	8	45		2	2	4		CD	в точці A	в точці B	
3	5	6	4	10			6	2			CD	в точці A	в точці B	
4	6	7					2	6	3			в точці A	в точці B	
5	7	8	4				6	4						в точці A
6	8	9			60		4	4			CD		в точках A і B	
7	9	10	4		30			4	6		EF	в точці A	в точці C	
8	10	11			45		6	5			DC	в точці A	в точці B	
9	11	12	4	8	60		4	3		2	BC, ED, FN	в точці A		
10	12	12	4	8	—		2	2			DC	в точці A	в точці B	
11	12	11			45		2	4	6					в точці A
12	11	10			30		4	3			DC		в точках A і B	
13	10	9			45			1	3	3	BC	в точці A	в точці D	
14	9	8			45		4	2			DC	в точці A	в точці B	
15	8	7	4	8	30		4	2	5		BC, ED, ON	в точці A		

Продовження таблиці 1.9

№ вар.	P , кН	G , кН	q , кН/м	M , кН·м	α , град	Розміри, м				Вид накладених в'язів і місця їх розташування			
						a	b	c	d	стержень	сфер. шарнір, підп'ятник	підшипник	жорстка в'язь
16	7	6		8	60	3	2	1	1		в точці A	в точці B	
17	6	5	4			3	3	2					в точці A
18	5	4	4	8	30	4	3	4		CF	в точці A	в точці B	
19	3	2	4	10									в точці A
20	2	1		8	60	6	4			DE, CB, OF	в точці A		
21	1	1	4		45	3	4			BO, BE	в точці A		
22	1	2	4	8	60	4	2			DC	в точці A	в точці B	
23	2	3	4	8	30	4	2			ON, BC, DE	в точці A		
24	2	3		8	30	1	3	1			в точці A	в точці B	
25	3	4			60	4	3			BD	в точці A	в точці C	
26	4	5	4	8	30	4	2			DC	в точці A	в точці B	
27	5	6	4			4	3						в точці A
28	6	7		8		6	6	4					в точці A
29	7	8	4	8	60	3	4			CD, BC, ON	в точці A		
30	8	9		8		5	4			CD	в точці A	в точці B	

1 СТАТИКА

Розв'язування.

Викреслюємо задану схему (рис. 1.17). Показуємо на схемі активні сили, звільняємо раму від в'язей, прикладаємо замість опор відповідні реакції в'язей.

Розглядаємо раму як тверде тіло, яке перебуває у рівновазі під дією активної сили \bar{G} і реакцій в'язей $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Z}_B, \bar{T}$.

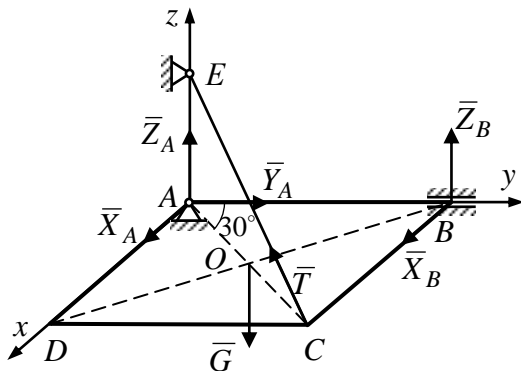


Рисунок 1.17

Для визначення невідомих реакцій запишемо рівняння рівноваги

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B - T \cos 30^\circ \sin 30^\circ = 0; \quad (1.6)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - T \cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (1.7)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad Z_A + Z_B + T \sin 30^\circ - G = 0; \quad (1.8)$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) = 0; \quad Z_B \cdot AB - G \cdot AB/2 + T \sin 30^\circ \cdot AB = 0; \quad (1.9)$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) = 0; \quad -T \cdot \sin 30^\circ \cdot AD + G \cdot AD/2 = 0; \quad (1.10)$$

$$\sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k) = 0; \quad -X_B \cdot AB = 0. \quad (1.11)$$

Із рівнянь (1.11) і (1.10) маємо

$$X_B = 0; \quad T = \frac{G}{2 \sin 30^\circ} = \frac{200}{2 \cdot 0.5} = 200 \text{ Н.}$$

Із рівнянь (1.7) і (1.9) знаходимо:

$$Y_A = T \cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 200 \cdot 0.866 \cdot 0.866 = 150 \text{ Н;}$$

$$Z_B = G/2 - T \sin 30^\circ = 200/2 - 200 \cdot 0.5 = 0.$$

Із (1.6) і (1.8)

$$X_A = T \cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ - X_B = 200 \cdot 0.866 \cdot 0.5 - 0 = 86.6 \text{ Н;}$$

$$Z_A = -T \sin 30^\circ + G - Z_B = -200 \cdot 0.5 + 200 - 0 = 100.$$

Відповідь: $X_A = 86.6 \text{ Н;}$ $X_B = 0;$
 $Y_A = 150 \text{ Н;}$ $Z_B = 0;$
 $Z_A = 100 \text{ Н;}$ $T = 200 \text{ Н.}$

1.13 Завдання С.4. Центр ваги плоскої фігури

Для плоских фігур, зображених на рис. 1.18 ... 1.20, визначити положення центра ваги при $R=a$; $r=a/2$.

Числові дані для розрахунку взяти з таблиці 1.10.

Таблиця 1.10

Схема	a , см	Схема	a , см	Схема	a , см
1	12	11	10	21	8
2	24	12	20	22	10
3	36	13	30	23	12
4	42	14	40	24	14
5	54	15	50	25	18
6	68	16	60	26	24
7	72	17	70	27	30
8	86	18	80	28	34
9	98	19	90	29	40
10	20	20	100	30	42

1 СТАТИКА

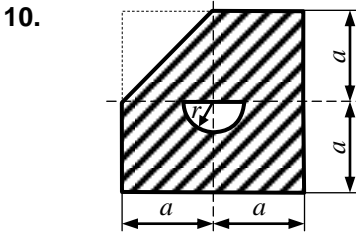
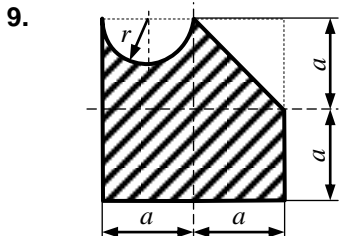
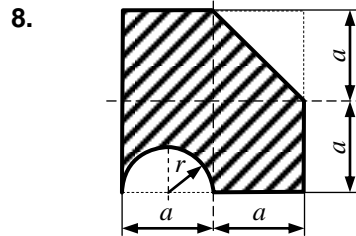
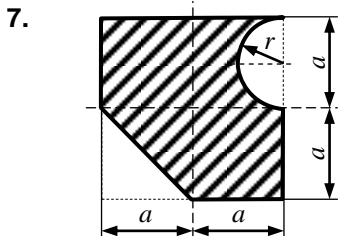
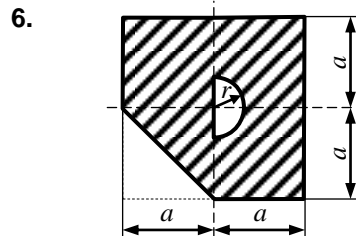
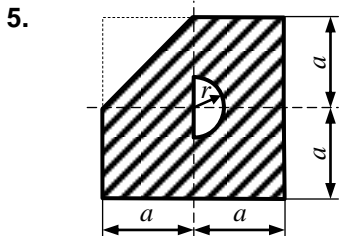
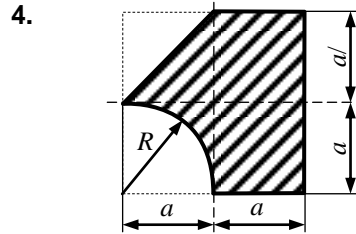
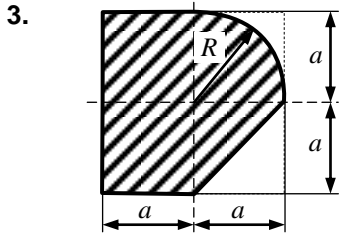
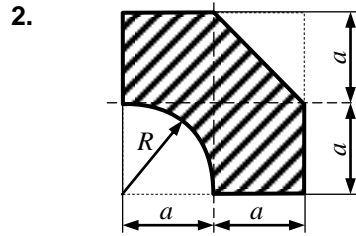
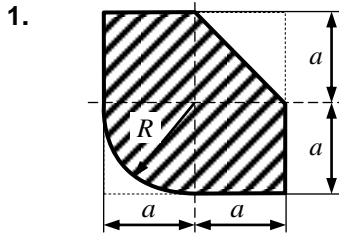


Рисунок 1.18

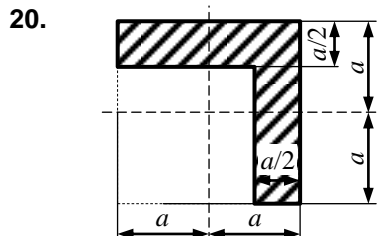
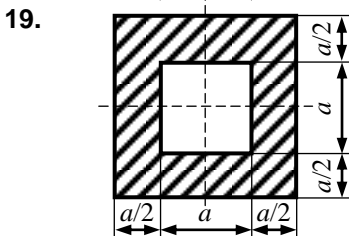
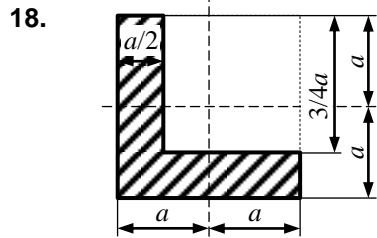
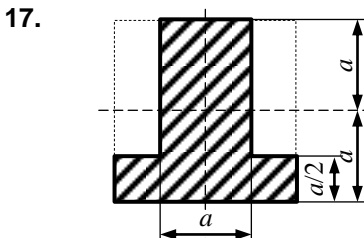
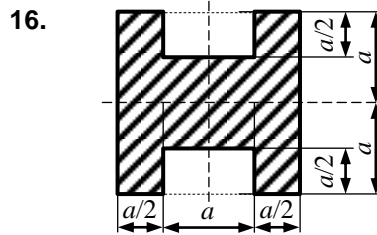
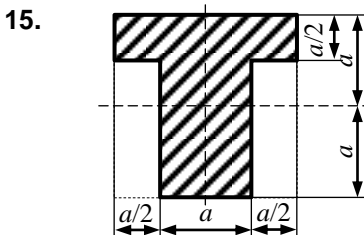
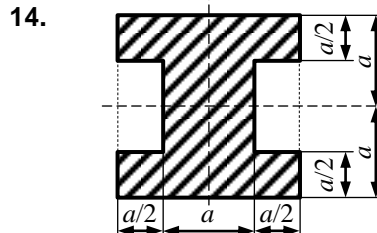
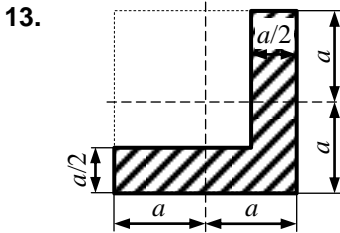
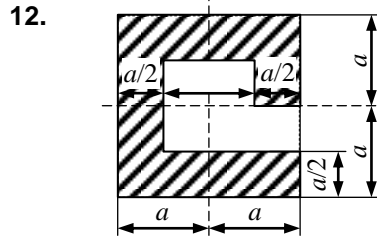
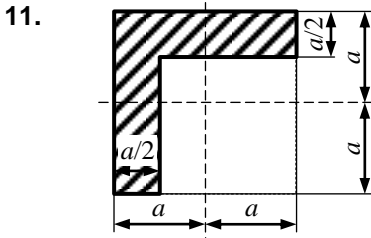


Рисунок 1.19

1 СТАТИКА

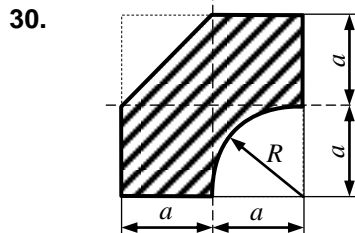
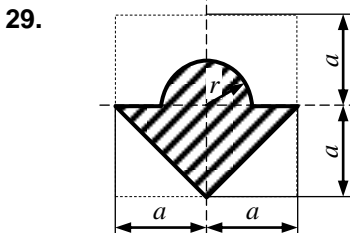
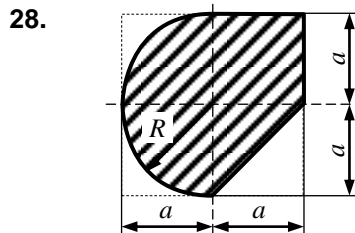
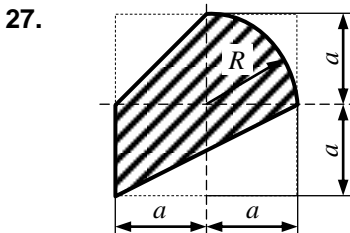
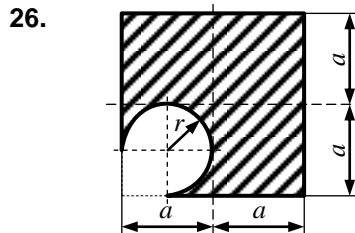
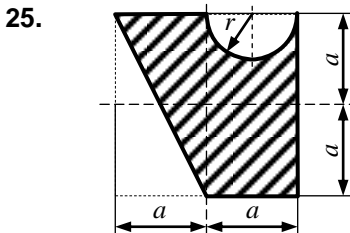
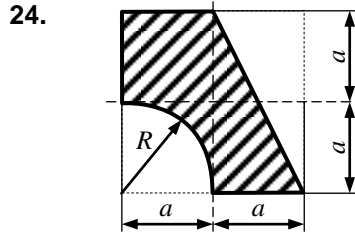
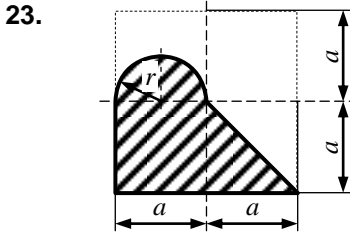
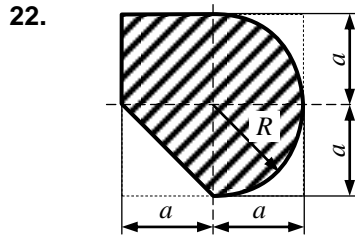
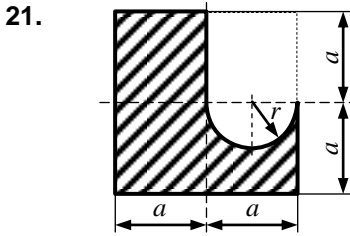


Рисунок 1.20

1.14 Приклад виконання завдання С.4

Визначити координати центра ваги плоскої фігури, показаної на рисунку 1.21, якщо $a=40$ см, $r=a/2=20$ см.

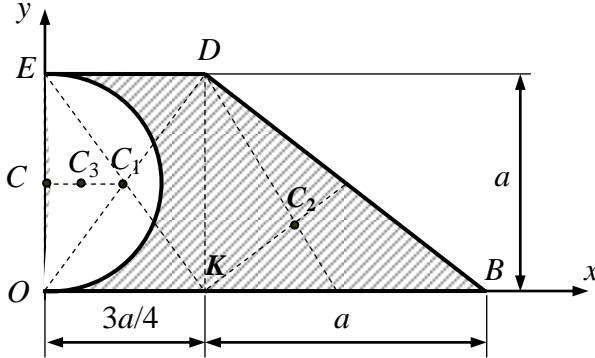


Рисунок 1.21

Розв'язок.

Координати центра ваги площі визначимо за формулами

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^n (S_i x_i)}{\sum_{i=1}^n S_i}; \quad Y_C = \frac{\sum_{i=1}^n (S_i y_i)}{\sum_{i=1}^n S_i},$$

де X_C, Y_C - координати центра ваги площі $OBDE$;

S_i - площа елементарної частини фігури;

x_i, y_i - координати центрів ваги елементарних площ;

S - площа фігури $OBDE$.

Розіб'ємо плоску фігуру на частини, центри ваги яких відомі, а саме на прямокутник $OKDE$, трикутник KBD і півкруг радіусом r . Площу півкруга, яку потрібно вирізати з площі фігури, вважаємо від'ємною.

Площа прямокутника $OKDE$

$$S_1 = a \cdot \frac{3a}{4} = 40 \cdot 30 = 1200 \text{ см}^2.$$

1 СТАТИКА

Площа трикутника KBD

$$S_2 = \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} \cdot 40^2 = 800 \text{ см}^2.$$

Площа півкруга радіусом r

$$S_3 = \left(\frac{\pi \cdot r^2}{2} \right) = \frac{\pi \cdot a^2}{2 \cdot 4} = 200\pi = 628 \text{ см}^2.$$

Центри ваги цих частин плоскої фігури, мають такі координати:

– прямокутник $OKDE$

$$x_1 = 15 \text{ см}; \quad y_1 = 20 \text{ см};$$

– трикутник

$$x_2 = \frac{3}{4} a + \frac{1}{3} a = 1.083a = 43.32 \text{ см}; \quad y_2 = \frac{1}{3} a = \frac{40}{3} = 13.3 \text{ см};$$

– півкруг

$$x_3 = \frac{2r \sin(\pi/2)}{3 \cdot \pi/2} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 20}{3\pi} = 8.5 \text{ см}; \quad y_3 = 20 \text{ см}.$$

Обчислюємо координати центра ваги плоскої фігури

$$X_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 - S_3 x_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{1200 \cdot 15 + 800 \cdot 43.33 - 628 \cdot 8.5}{1200 + 800 - 628} = 34.49 \text{ см};$$

$$X_C = 34.5 \text{ см};$$

$$Y_C = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 - S_3 y_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{1200 \cdot 20 + 800 \cdot 13.3 - 628 \cdot 20}{1200 + 800 - 628} = 16.11 \text{ см};$$

$$Y_C = 16.11 \text{ см}.$$

Відповідь: $X_C = 34.5 \text{ см}; Y_C = 16.11 \text{ см}.$

1.15 Контрольні питання зі статyki

1. Що називають статикою ?
2. Що називають матеріальною точкою і абсолютно твердим тілом ?
3. Поняття сили. Якими параметрами визначається сила ?
4. Поняття рівнодійної системи сил.
5. Еквівалентні системи сил.
6. Зовнішні і внутрішні сили.
7. Аксиоми статyki. Аксиома в'язей.
8. Механічні в'язі та їх реакції.
9. Задачі статyki.
10. Що називають системою збіжних сил ?
11. Рівнодійна системи збіжних сил.
12. Проекції сили на вісь і площину.
13. Аналітичний спосіб визначення рівнодійної.
14. Геометрична умова рівноваги системи збіжних сил.
15. Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил.
16. Теорема про три непаралельні сили.
17. Момент сили відносно центра (точки).
18. Додавання двох паралельних сил.
19. Пара сил. Момент пари сил.
20. Еквівалентність пар сил.
21. Додавання пар сил, що лежать в одній площині.
22. Головний вектор і головний момент довільної плоскої системи сил.
23. Як визначаються модуль і напрям головного вектора ?
24. Теорема про паралельне перенесення сили.
25. Зведення плоскої системи сил до заданого центра (основна теорема статyki).
26. Окремі випадки зведення плоскої системи сил.

1 СТАТИКА

27. Теорема Варіньона про момент рівнодійної.
28. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил і плоскої системи паралельних сил.
29. Розподілені навантаження (рівномірне, за лінійним законом, по дузі кола).
30. Сила тертя ковзання. Закони Кулона.
31. Кут і конус тертя.
32. Коли настає явище заклинювання ?
33. Рівновага системи тіл. Статично визначені і статично невизначені задачі.
34. Момент сили відносно точки (центра) як вектор і як векторний добуток.
35. Момент пари сил як вектор.
36. Момент сили відносно осі. Коли момент сили відносно осі дорівнює нулю ?
37. Залежність між моментами сили відносно осі та центра на цій осі.
38. Головний вектор та головний момент просторової системи сил.
39. Зведення просторової системи сил до заданого центра.
40. Геометричні та аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил.
41. Умови рівноваги паралельних сил і пар сил в просторі.
42. Як визначити модуль і напрям рівнодійної системи паралельних сил, направлених в один бік і в протилежні боки ?
43. Що називають центром системи паралельних сил і центром ваги тіла ?
44. Координати центра системи паралельних сил та центра ваги тіла.
45. Центр ваги об'єму, площі, лінії.
46. Методи знаходження центра ваги тіл.
47. Центр ваги фігур, які мають площину, вісь або центр симетрії.
48. Інтегральні формули визначення координат центра ваги тіла.
49. Центр ваги площі трикутника, дуги кола, площі кругового сектора.