



STATUS
PUBLISHING COMPANY

Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Запорізька політехніка»

П. К. Штанько, В. Г. Шевченко, О. С. Омельченко, О. М. Поляков

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник



**Запоріжжя
СТАТУС
2020**

УДК 621.01(075)
ББК 30.12я73

П75

П75 Прикладна механіка : навчальний посібник / укл.:
П. К. Штанько, В. Г. Шевченко, О. С. Омельченко,
О. М. Поляков ; за ред. П. К. Штанька. — Запоріжжя : НУ
«Запорізька політехніка», СТАТУС, 2020. — 200 с.
ISBN 978-617-7759-70-5

УДК 621.01(075)
ББК 30.12я73

Рецензент: *В. І. Пожуєв*, професор, д-р фіз.-мат. наук, НУ «ЗП»

Експерт: *Г. Д. Фурсіна*, доцент, канд. тех. наук, НУ «ЗП»

Комп'ютерна графіка: А. Аніміца

Рекомендовано до видання Вченою радою НУ «Запорізька політехніка», протокол № 3/20 від 19 жовтня 2020 р.

© П. К. Штанько 2020
© В. Г. Шевченко 2020
© О. С. Омельченко 2020
© О. М. Поляков 2020

ЗМІСТ

1 ВСТУП. ВИЗНАЧЕННЯ І ОСНОВНІ ЗАДАЧІ КУРСУ.....	8
1.1 Структура механізмів. Основні поняття.....	8
1.2 Класифікація кінематичних пар за числом ступенів волі і числом в'язей.....	12
2 СТРУКТУРНИЙ СИНТЕЗ МЕХАНІЗМУ.....	15
2.1 Узагальнені координати механізму.....	15
2.2 Початкові ланки.....	15
2.3 Число ступенів волі механізму.....	16
2.4 Структурна формула плоских механізмів.....	17
2.5 Пасивні в'язі і зайві ступені волі.....	18
2.6 Побудова і класифікація механізмів.....	18
2.7 Структурний аналіз механізмів.....	21
3 КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ.....	23
3.1 Задачі кінематичного аналізу.....	23
3.2 Аналітичний метод кінематичного дослідження плоского механізму.....	23
3.3 Графоаналітичний метод кінематичного дослідження механізмів.....	27
4 КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕДАЧ.....	32
4.1 Механізми з постійним передаточним відношенням.....	32
4.2 Механізми зі змінним передаточним відношенням.....	39
5 СИЛИ, ЩО ДІЮТЬ У МЕХАНІЗМІ.....	42
5.1 Класифікація сил.....	42
5.2 Сили інерції.....	43
5.3 Сили тертя.....	45
5.4 Визначення реакцій у кінематичних парах.....	49
6 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ.....	55
7 РОЗТЯГАННЯ (СТИСКАННЯ).....	60
7.1 Основні поняття і визначення опору матеріалів.....	60
7.2 Розтягання (стискання).....	63
7.3 Статично невизначувані системи.....	67

7.4 Механічні характеристики матеріалів.....	69
8 ЗСУВАННЯ.....	74
9 КРУЧЕННЯ.....	77
10 ЗГИНАННЯ.....	82
10.1 Типи брусів і опор.....	82
10.2 Епюри поперечних сил і згинаючих моментів.....	83
10.3 Основні диференційні залежності при згинанні.....	89
10.4 Нормальне напруження при чистому згинанні.....	91
11 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ.....	96
11.1 Диференційне рівняння пружної лінії.....	96
11.2 Задача Ейлера.....	97
11.3 Розрахунки на стійкість.....	100
12 ОСНОВНІ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ. ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ.....	107
12.1 Напружений стан в точці.....	107
12.2 Лінійний напружений стан.....	110
12.3 Плоский і об'ємний напружені стани.....	112
12.4 Теорії міцності.....	116
13 СКЛАДНИЙ ОПІР.....	119
13.1 Косе згинання.....	119
13.2 Згинання з розтяганням (стисканням).....	125
13.3 Згинання з крученням.....	128
13.4 Розрахунки на міцність зубчастих передач.....	136
14 ЛАНЦЮГОВІ ТА ПАСОВІ ПЕРЕДАЧІ.....	143
14.1 Розрахунок ланцюгової передачі.....	146
14.2 Пасові передачі.....	148
15 КОНСТРУКЦІЯ І РОЗРАХУНОК ДЕТАЛЕЙ. НЕРОЗ'ЄМНІ З'ЄДНАННЯ.....	157
15.1 Зварні з'єднання.....	157
15.2 Розрахунок зварних з'єднань.....	160
15.3 Заклепочні з'єднання.....	162
16 РОЗ'ЄМНІ З'ЄДНАННЯ.....	167
16.1 Різьбові з'єднання.....	167
16.2 Розрахунок болтів.....	171

17 МУФТИ.....	175
17.1 Кулачкові муфти.....	175
17.2 Фрикційні муфти.....	176
17.3 Самокеровані запобіжні муфти.....	179
17.4 Глухі муфти.....	180
18 ВАЛИ І ОСІ.....	183
18.1 Прямі вали і осі. Конструкції.....	183
18.2 Попередній розрахунок валів.....	184
18.3 Розрахунок на статичне навантаження.....	185
18.4 Розрахунок на витривалість.....	185
18.5 Розрахунок на жорсткість.....	186
18.6 Підшипники кочення.....	187
19 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ВЗАЄМОЗАМІННІСТЬ.....	190
19.1 Взаємозамінність.....	190
19.2 Відомості про розміри.....	190
19.3 Квалітети точності.....	194
19.4 Посадки.....	195
19.5 Системи утворення посадок.....	196
19.6 Вибір посадок.....	197
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	199

1 ВСТУП. ВИЗНАЧЕННЯ І ОСНОВНІ ЗАДАЧІ КУРСУ

Механікою називається область науки, яка вивчає рух і напружений стан елементів машин, будівельних конструкцій, суцільних середовищ під дією прикладених сил.

Механіку прийнято поділяти на теоретичну і прикладну. У теоретичній механіці встановлюються загальні закономірності об'єктів, які вивчаються без зв'язку з їх конкретним застосуванням.

Під терміном прикладна механіка розуміємо ту частину механіки, яка вивчає рух і напружений стан реальних технічних об'єктів та конструкцій, машин, робототехнічних систем і т.і. з урахуванням основних закономірностей, встановлених в теоретичній механіці.

Прикладна механіка машин може також розглядатися як частина загальної області науки – машинознавства, яка вивчає крім механіки теорію проектування і технологію виготовлення машин.

Машинобудування являється домінуючою галуззю, яка забезпечує розвиток інших галузей – енергетики, гірничодобувної промисловості, сільського господарства, хімічної промисловості тощо.

У даному курсі поняття «Прикладна механіка» представлено у більш вузькому змісті, який передбачено навчальною програмою, дати загальні уяви про будову і спосіб дії ланок машин, методах забезпечення їх працездатності при конструюванні, виготовленні і експлуатації і, таким чином, розширити фундамент загальної інженерної підготовки.

1.1 Структура механізмів. Основні поняття

Кожна наукова сфера відрізняється специфічною направленістю, яка визначає об'єкти її вивчення. Для забезпечення взаєморозуміння спеціалістів необхідно знати прийняті визначення об'єктів і термінологію.

Машина – це пристрій, який виконує механічні рухи для

перетворення енергії, матеріалів і інформації з метою заміни або полегшення фізичної та розумової праці людини.

В залежності від основного призначення розрізняють енергетичні, технологічні, транспортні і інформаційні машини.

Енергетичні машини перетворюють будь-який вид енергії у механічну (і навпаки). До них відносяться: електродвигуни, турбіни, двигуни внутрішнього згоряння (ДВЗ), парові машини, електрогенератори.

Машини для перетворення матеріалів поділяються на технологічні і транспортні.

В технологічних машинах під матеріалом розуміємо предмет, який обробляється. Цей предмет може бути у твердому, рідкому чи газоподібному стані. Перетворення матеріалу у них полягає у зміні його розмірів, форми, властивостей або стану. Приклади технологічних машин: металообробні верстати, прокатні верстати, ткацькі верстати, пакувальні машини.

В транспортних машинах під матеріалом розуміємо предмети, які переміщуємо. Приклади транспортних машин: автомобілі, тепловози, літаки, вертольоти, підйомники, крани, транспортери, кораблі.

У тих випадках, коли транспортна машина призначена для перевезення людей під матеріалом розуміють: вагон, кабінку ліфта, шасі автомобіля і т.і.

Інформаційні машини — це машини, що призначені для перетворення, обробки та передачі інформації (ЕОМ, музичні інструменти, апарати зв'язку та інші пристрої передачі, обробки і зберігання інформації). До них належать:

- контрольно-керуючі машини — машини, що перетворюють одержану контрольно-вимірювальну інформацію для керування тією чи іншою машиною або технологічним процесом;

- математичні машини — машини, що перетворюють інформацію у вигляді математичних моделей, які задані у формі чисел та алгоритмів;

- кібернетичні машини — машини, що замінюють або імітують різноманітні механічні, фізіологічні або біологічні процеси, властиві живій природі та оснащені елементами штучного інтелекту.

Механізм – це система тіл, призначених для перетворення рухів одного або декількох твердих тіл у необхідні рухи інших твердих тіл. Якщо до складу механізму крім твердих тіл входять рідини або газоподібні тіла, то механізм називається відповідно гідравлічним або пневматичним.

Із визначення механізму випливає, що не можна називати механізмом пристрій, у якому відсутнє перетворення механічного руху. Наприклад, ротор електродвигуна і підшипники, в яких він обертається не утворюють механізм, бо у цьому випадку взаємодія магнітного поля і провідника з струмом дає необхідний рух без будь-якого перетворення механічного руху. Механізм у електродвигуні з'являється тільки тоді, коли необхідно зменшити кутову швидкість вихідного валу в порівнянні з кутовою швидкістю ротора (електродвигун з вбудованим планетарним редуктором).

Механізм складається із багатьох деталей, тобто окремо виготовлених частин. Рухомо з'єднані між собою частини механізму називаються ланками.

Наприклад, колесо автомобіля складається із ободу, втулки, кришки, декількох болтів, гайок і т.і. Але вся ця сукупність деталей з'єднана між собою так, що їх взаємне розташування не змінюється під час руху автомобіля. Тому при вивченні руху механізму будь-яку сукупність деталей, які не мають між собою відносного руху, можна вважати одним твердим тілом, тобто однією ланкою. Рідини і гази, які входять до складу гідравлічних і пневматичних механізмів не вважаються за ланки.

В залежності від характеру руху і призначення ланки мають певні назви. У кожному механізмі є нерухома ланка, яка називається стояком (ланка 0 на Рис.1.1).

Ланка 1 (Рис.1.1 а, б). яка виконує повний оберт, називається кривошипом; ланка 2, виконує плоскопаралельний рух і називається шатуном; ланка 3 (Рис.1.1, а) знаходиться у коливальному русі,

називається коромислом; ланка 3 (Рис.1.1, б) виконує поступальний рух, це є повзун; ланка 2 (Рис.1.1, в), являється рухомою напрямляючою для повзуна 3 зветься кулісою. Із рухомих виділяємо вхідні та вихідні ланки.

Вхідною (ведучою) називається ланка, якій задається початковий рух, котрий перетворюється механізмом у необхідний рух других ланок.

Вихідною (веденою) називають ланку, яка виконує рух, для виконання якого створено даний механізм.

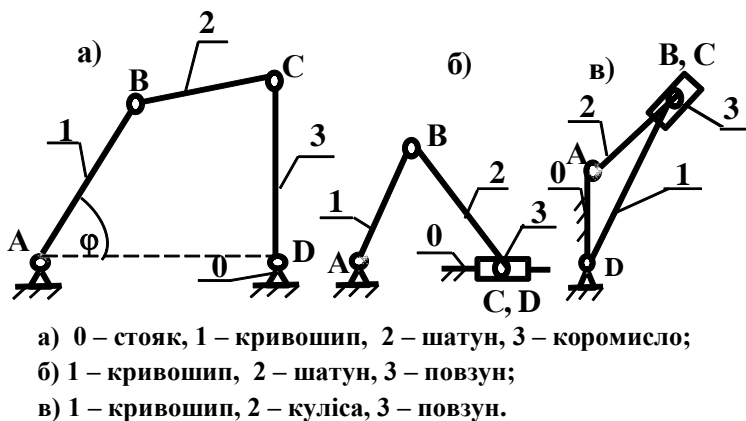


Рисунок 1.1 – Схеми різних механізмів

Як правило у механізмі є один вхід і один вихід. Вхід отримує рух двигуна, а вихід з'єднується з робочим органом машини або покажчиком приладу.

Кінематична пара. Рухоме з'єднання двох стичних ланок називається кінематичною парою.

Елементами кінематичної пари називається сукупність поверхонь, або точок, за допомогою яких відбувається рухоме з'єднання двох ланок, і які обмежують відносний рух цих ланок.

Розрізняють вищі і нижчі кінематичні пари. Кінематичні пари у яких елементами кінематичних пар є лінії або точки називаються

вищими. Якщо елементом пари є поверхня, то такі пари називаються нижчими.

1.2 Класифікація кінематичних пар за числом ступенів волі і числом в'язей

Числом ступенів волі механічної системи називають число незамкнених можливих переміщень системи.

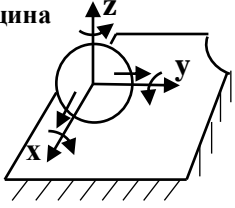

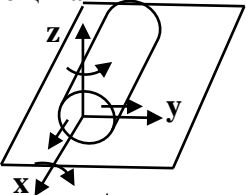

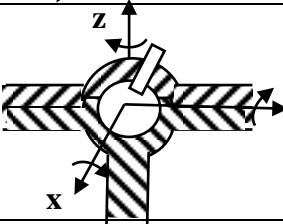

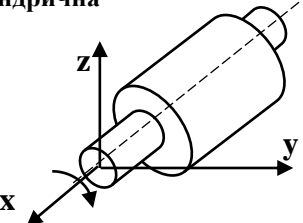

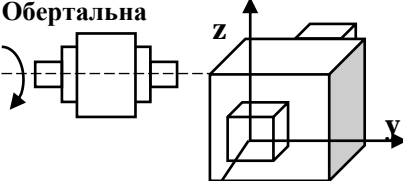
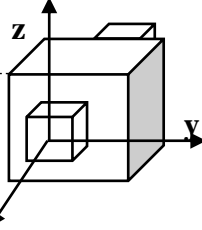


Для твердого тіла, яке вільно рухається у просторі число ступенів волі дорівнює шести: три поступальних можливих переміщення вздовж нерухомих осей координат і три обертальних – навколо цих осей. Для ланок, які входять в кінематичну пару, число ступенів волі у їхньому відносному русі завжди менше шести, бо умова постійного з'єднання ланок кінематичних пар зменшує число незалежних можливих переміщень. За пропозицією В.В. Добровольського всі кінематичні пари поділяються за числом ступенів волі на одно-, дво-, трьох-, чотири-, і п'ятирухомі пари (таблиця 1.1).

Клас кінематичної пари визначається числом накладених в'язів (S). Розрізняють п'ять класів кінематичних пар. Якщо Н – число ступенів волі ланок кінематичної пари, то

$$S < 6 - H. \quad (1.1)$$

Кінематичні ланцюги. Ланки, з'єднані між собою кінематичними парами, утворюють кінематичний ланцюг. Кінематичні ланцюги поділяються на плоскі і просторові. Всі ланки плоского кінематичного ланцюга розміщуються в паралельних площинах і виконують плоский рух.

Таблиця 1.1 – Класифікація кінематичних пар

Приклади кінематичних пар	Умовне позначення	Число в'язів, S	Число ступенів волі, H
<p>Куля-площина</p> 		1	5 0-3, n-2
<p>Циліндра-площина</p> 		2	4 0-3
<p>Сферична</p> 		3	3 0-2, n-2
<p>Циліндрична</p> 		4	2 0-1, n-1
<p>Обертальна</p>  <p>Поступальна</p> 	 	5	1

Оскільки на ланки плоских ланцюгів накладаються три додаткові загальні умови зв'язку, які виключають рух у інших площинах, то в плоскому ланцюзі можуть бути пари тільки четвертого або п'ятого класів. Кінематичні ланцюги поділяються на прості і складні. Простим кінематичним ланцюгом називається ланцюг, у якого кожна ланка входить не більше як у дві кінематичні пари (Рис.1.2, а).

Складним – у якого хоча б одна ланка входить більш ніж у дві кінематичні пари.

Розрізняють кінематичні ланцюги замкнені і розімкнені (відкриті). Розімкненим називається такий кінематичний ланцюг, у якого є ланка, яка входить в одну кінематичну пару (Рис.1.2, а). Замкненим – у якого кожна ланка входить, як найменше, у дві кінематичні пари (Рис.1.2, в).

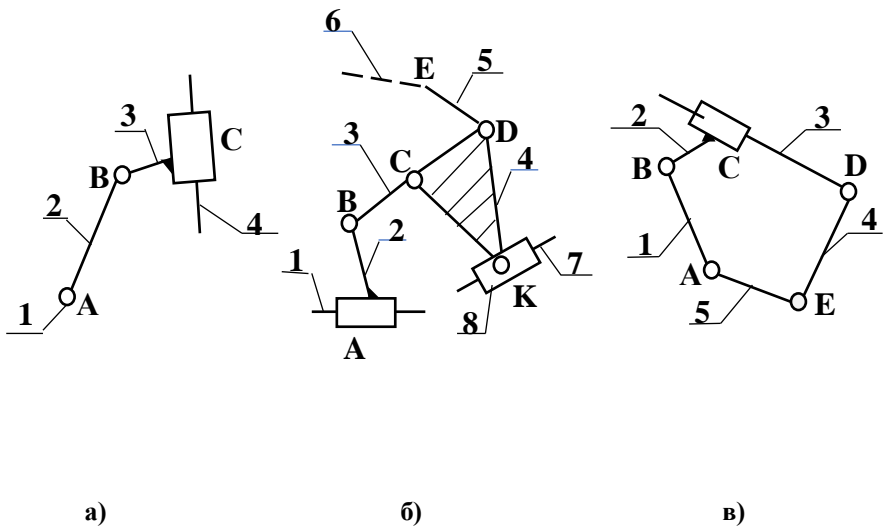
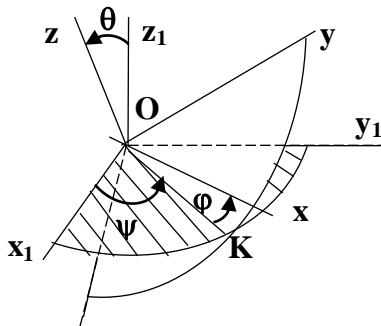


Рисунок 1.2 – Кінематичні ланцюги

2. СТРУКТУРНИЙ СИНТЕЗ МЕХАНІЗМУ

2.1 Узагальнені координати механізму

Положення твердого тіла, що вільно переміщується у просторі повністю визначається шістьма незалежними координатами, за які можна прийняти три координати початку рухомої системи координат x_0, y_0, z_0 , зв'язаних з тілом, і три кута Ейлера, які визначають положення осей рухомої системи координат відносно нерухомої. Лінія ОК, вздовж якої перетинаються площини OXY і Ox_1y_1 , називається лінією вузлів (Рис. 2.1).



Узагальненими координатами механізму називаються незалежні між собою координати (лінійні або кутові), які визначають положення всіх ланок механізму відносно стояка.

Рисунок 2.1 – Кути Ейлера:

Θ - кут нутації.

ϕ – кут власного обертання;

ψ – кут прецесії;

Наприклад, у чотириланковому шарнірному механізмі (Рис. 1.1, а) за узагальнену координату можна прийняти кут повороту кривошипа, оскільки положення ланки 1 визначає положення всіх других рухомих ланок при заданих їх довжинах.

2.2 Початкові ланки

За узагальнені координати механізму можна взяти будь-які координати ланок. Ланка, якій присвоюється одна або декілька

узагальнених координат механізму, називається початковою ланкою. Походження цього терміну пов'язано з тим, що визначення положень усіх ланок механізму починається з визначення положень початкової ланки.

У механізмі з однією узагальненою координатою – одна початкова ланка, а за узагальнену координату звичайно приймають або кутову координату ланки, яка знаходиться у обертальному русі (Рис.2.3, а) або лінійну координату ланки, яка знаходиться у прямолінійному русі (Рис.2.3, б).

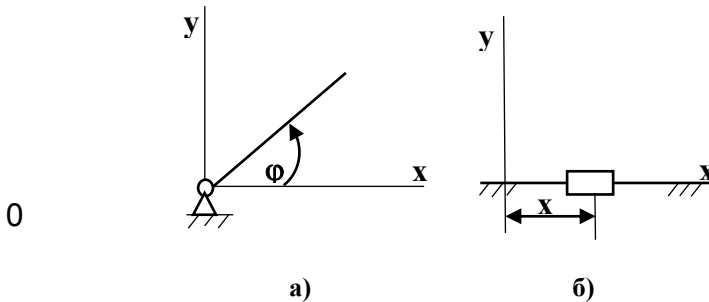


Рисунок 2.2 – Початкові ланки

2.3 Число ступенів волі механізму

Якщо на ланку, яка рухається у просторі не накладено ніяких в'язей, то вона, як відомо, має шість ступенів волі. Тоді, якщо число рухомих ланок кінематичного ланцюга становить n , то загальне число ступенів волі, яким володіє n ланок до їх входження у кінематичні пари, дорівнює $6n$. З'єднання ланок у кінематичні пари накладає різну кількість в'язей на відносний рух ланок, яка залежить від класу пар.

Якщо число пар I класу, в які входять ланки даного кінематичного ланцюга, дорівнює P_1 , число пар II класу – P_2 , число пар III класу – P_3 , число пар IV класу – P_4 і число пар V класу – P_5 , то $6n$ ступенів волі, котрими володіли ланки до їх входження у кінематичні пари, необхідно відрахувати ті ступені волі, які вилучаються

входженням ланок у кінематичні пари. Тоді число ступенів волі кінематичного ланцюга відносно стояка буде дорівнювати:

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1. \quad (2.1)$$

Рівність (2.1) носить назву формули рухомості або структурної формули кінематичного ланцюга загального вигляду. Ця формула була отримана С.П. Сомовим у 1887 році і розвинута А.П. Малишевим у 1923 році, тому носить назву формули Сомова-Малишева.

2.4 Структурна формула плоских механізмів

Оскільки всі ланки механізму розміщені у одній площині (паралельних площинах), то на них накладаються три в'язі викликані умовою паралельності осей пар.

Якщо на рух всіх ланок механізму в цілому накладено три загальних обмеження, то, очевидно, ці обставини ми повинні урахувати при визначенні ступенів рухомості механізму. Якщо у загальному випадку число ступенів волі рухомих ланок механізму дорівнює $6n$, то для плоского механізму число волі рухомих ланок буде $(6-3)n=3n$.

Відповідно замість $5P_5$ в'язів, які накладаються парами V класу, в цьому механізмі пари V класу будуть накладені $(5-3)P_5=2P_5$ в'язів. Тоді структурна формула механізму буде такою:

$$W = (6 - 3)n - (5 - 3)P_5 - (4 - 3)P_4 - (3 - 3)P_3,$$

а ступінь рухомості плоского механізму буде дорівнювати

$$W = 3n - 2P_5 - P_4. \quad (2.2)$$

Ця формула була виведена П.Л. Чебишевим у 1868 році і носить назву **формули Чебишева**.

2.5 Пасивні в'язі і зайві ступені волі

У формулі (2.2) не відтворені розміри ланок. Спеціальним підбором розмірів ланок можна отримати дійсний ступінь рухомості. Наприклад, у механізмі (Рис.2.3, а) при наявності ланки EF ступінь рухомості $W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0$, але якщо прийняти допоміжні умови, які стосуються розмірів ланок, а саме $AB=|CD|=|EF$ (Рис.2.3, б), то, не дивлячись на те що за підрахунками $W=0$ фактично ступінь волі $W=1$ і механізм буде працювати. При цих умовах ланку EF можна виключити із підрахунків і ступінь волі не зміниться.

Такі ланки, наявність яких не впливає на рухомість механізму, накладають пасивні або надлишкові в'язі і називаються пасивними. У механізми вони вводяться для збільшення жорсткості, кращого розподілення навантаження тощо. Застосування пасивних ланок вимагає високої точності виконання кінематичних пар.

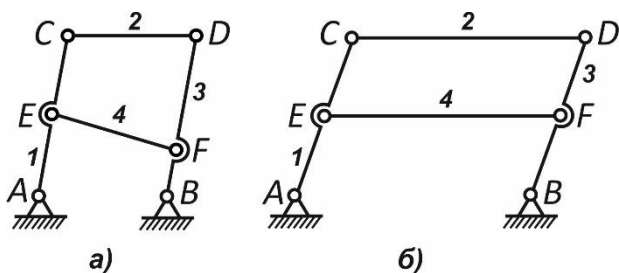


Рисунок 2.3 – Пасивні в'язі

2.6 Побудова і класифікація механізмів

Для зручності вивчення механізмів і розробки загальних методів проектування і розрахунків доцільно механізми класифікувати. Можуть бути використані різні ознаки класифікації: характер руху –

плоскі і просторові; вид кінематичних пар – механізми з вищими і нижчими парами; принцип передачі зусиль – механізми тертя і зачеплення; конструктивні ознаки – шарнірно-важільні, кулачкові, фрикційні, зубчасті, черв'ячні і т.п.

Однією із найбільш поширених класифікацій плоских шарнірних механізмів з парами п'ятого класу являється структурна класифікація запропонована І.І. Артоболовським на основі ідей А.В. Асура.

Основний принцип утворення механізмів був вперше сформульований в 1914 році А.В. Асуром. Ним був запропонований метод утворення механізмів шляхом послідовного нашарування ланцюгів, які входять певними структурними властивостями. Для оволодіння цим методом розглянемо механізм, зображений на Рис.2.4.

Цей механізм має п'ять рухомих ланок ($n=5$), які утворюють сім кінематичних пар п'ятого класу ($P_5=7$). Отже ступінь рухомості механізму $W=3n-2P_5=3 \cdot 5-7 \cdot 2=1$.

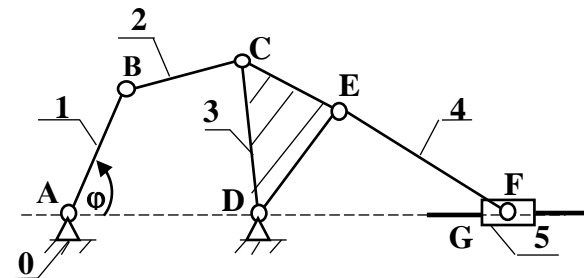


Рисунок 2.4 – Привод конвейєра

Ведучою ланкою призначаємо ланку 1. Тепер механізм буде складатися із ведучої ланки 1, яка володіє одним ступенем волі, стояка 0 і ведених ланок, 2, 3, 4 і 5, які утворюють кінематичний ланцюг. Процес утворення цього механізму можна уявити як послідовне приєднання до ведучої ланки 1 і стояка 0 кінематичного ланцюга із ланок 2 і 3. Отримали чотириланковий механізм ABCD, який має один ступінь рухомості.

Потім до ланки 3 стояка 0 приєднано кінематичний ланцюг, який складається із ланки 4 і повзуна 5. Отримаємо шостиланковий

механізм, який володіє одним ступенем волі $W=1$.

Оскільки після під'єднання ведених ланок 2-5 число ступенів рухомості всього механізму залишилась рівною $W=1$, то, кінематичний ланцюг, який складається із ведених ланок 2, 3, 4 і 5, приєднаних до ведучої ланки 1 і стояка 0, володіє нульовим ступенем рухомості, відносно тих ланок, до яких цей ланцюг приєднався.

Введемо поняття відносно груп Асура. **Групою Асура** будемо називати кінематичний ланцюг з нульовим ступенем рухомості від тих ланок, з якими входять в кінематичні пари вільні елементи його ланок, і не розподіляються на більш прості ланцюги, які мають також нульовий ступінь рухомості.

У наведеному прикладі кінематичний ланцюг BCDEF складається із двох груп Асура:

$$I \text{ BCD} - W = 3n - 2P_5 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$$

$$II \text{ EFG} - W = 3n - 2P_5 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$$

Група, яка складається із двох ланок і трьох кінематичних пар V класу, називається групою II класу, другого порядку (Рис. 2.5). Порядок групи визначається числом елементів ланок, якими група приєднується до основного механізму.

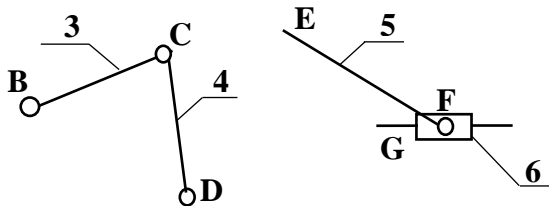


Рисунок 2.5 – Групи Асура

Клас групи Асура вище другого визначається за кількістю кінематичних пар, які утворюють внутрішній контур.

Кінематичний ланцюг EFG, від якого йдуть три ланцюги

(поводки), являє собою складний незамкнений кінематичний ланцюг, це група Асура третього класу, третього порядку (Рис.2.6).

Кінематичний ланцюг, який складається із чотирьох ланок і шести нижчих пар, показаний на Рис 2.7. Ця група окрім двох базисних ланок BCD і EGF має замкнений контур CBEG.

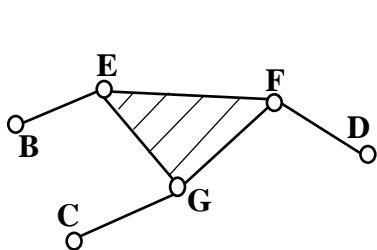


Рисунок 2.6 – Незамкнений кінематичний ланцюг

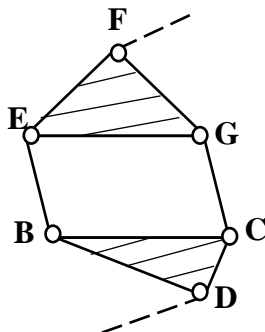


Рисунок 2.7 – Замкнений контур CBEG

2.7 Структурний аналіз механізмів

Структурний аналіз механізмів виконується у наступній послідовності:

- а) визначається кількість рухомих ланок і кінематичних пар, задається назва всім ланкам, визначається клас кінематичних пар;
- б) визначається ступінь волі механізму;
- в) визначається наявність пасивних в'язів і зайвих ступенів волі; ланки, які вносять пасивні в'язи або зайві ступені волі вилучаються;
- г) замінюємо вищі кінематичні пари нижчими;
- д) вилучаємо групи Асура і встановлюємо їх клас і порядок;
- е) записуємо структурну формулу будови механізму і встановлюємо його клас.

Приклад: виконати структурний аналіз механізму привода конвеєра (Рис.2.8, а).

1. Рухомих ланок $n=5$; кінематичних пар V-го класу $P_5=7$.

Назви ланок: 0 – стояк; 1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – коромисло; 4 – шатун; 5 – повзун.

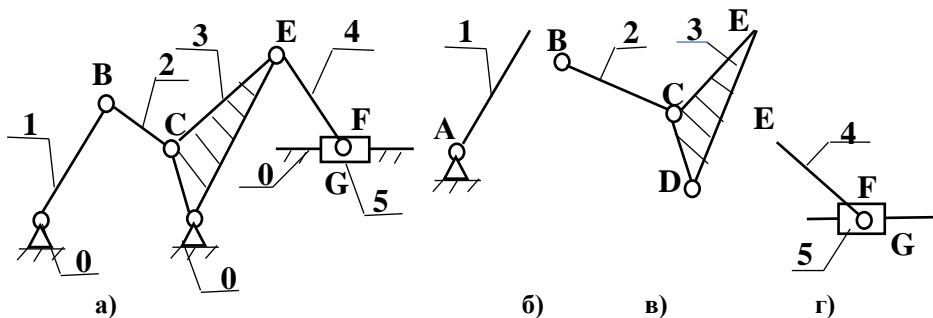


Рисунок 2.8 – Структурний аналіз механізму

2. Зайвих ланок немає. Ступінь рухомості механізму

$$W=3n-2P_5=3 \cdot 5-2 \cdot 7-0=1$$

3. Вищі кінематичні пари відсутні.

4. Вилучимо структурні групи, починаючи із ланок, які найбільше віддалені від ведучої ланки 1. Вилучені групи і порядок їх вилучення показано на Рис.2.8 в, г. Кожна група складається із двох ланок і трьох кінематичних пар п'ятого класу і тому являються групою другого класу і другого порядку.

5. Структурна формула механізму записується так:

$$I_{(0,1)} \leftarrow II_{(2,3)} \leftarrow II_{(4,5)}$$

6. Клас механізму – другий. Клас механізму визначається за найвищим класом груп Асура, що входять до його складу.

3 КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ

3.1 Задачі кінематичного аналізу

Кінематичний аналіз полягає у визначенні руху ланок механізму за заданим рухом початкової ланки.

Основні задачі кінематичного аналізу полягають у визначенні:

- положень ланок, включаючи визначення траєкторій окремих точок ланок;

- кутових швидкостей і прискорень ланок;

- абсолютних швидкостей і прискорень окремих точок ланок.

При розв'язанні цих задач вважаються відомими закони руху початкових ланок і кінематична схема механізму, тобто структурна схема механізму з зазначенням розмірів необхідних для кінематичного аналізу.

Кінематичні дослідження механізмів виконуються чотирма способами: аналітичним, графоаналітичним, графічним та експериментальним.

3.2 Аналітичний метод кінематичного дослідження плоского механізму

У випадках, коли дослідження виконують у великому обсязі і з високою точністю, застосовують аналітичні методи. Впровадження в практику інженерних розрахунків цифрових ЕОМ робить аналітичні методи зручними і широкоживаними. При виборі способу аналітичного дослідження вибирають такий, реалізація алгоритму якого на ЕОМ найбільш проста. Найбільш зручним є метод замкнення векторних контурів. Вхідними даними для реалізації цього методу служать кінематична схема, зображена у прямокутній системі координат, лінійні розміри всіх ланок і аналітична залежність зміни узагальненої координати, яка визначає положення ведучої ланки.

Для прикладу розглянемо кривошипно-повзунний механізм.

Кінематична схема механізму (Рис. 3.1) являє собою замкнений векторний трикутник, рівняння замкненості якого:

$$l_1 + l_2 = l_0. \quad (3.1)$$

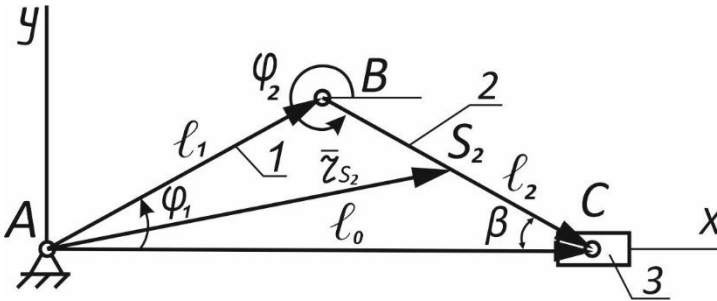


Рисунок 3.1 – Аналітичний метод кінематичного дослідження плоского механізму

Цю умову можна також виразити рівняннями проекцій векторів на осі системи координат XAY у вигляді:

$$\begin{aligned} l_1 \cdot \cos \varphi_1 + l_2 \cdot \cos \varphi_2 &= l_0; \\ l_1 \cdot \sin \varphi_1 + l_2 \cdot \sin \varphi_2 &= 0; \end{aligned} \quad (3.2)$$

де φ_1, φ_2 – кути, які визначають положення ланок, вони відраховуються від додатного напрямку осі X проти ходу годинникової стрілки;

l_1, l_2 – довжини ланок 1 і 2; $l_0 = X_C$ – координата точки C.

У цих рівняннях знаки біля додатків визначаються знаками при тригонометричних функціях. Довжини ланок l_1 і l_2 і кут φ_1 вважаються відомими. Належать визначенню кутові швидкості і прискорення ланок, швидкість і прискорення ланки 3, тобто точки C, а також швидкість і прискорення центра мас ланки 2, точки S_2 .

Із другого рівняння (3.2) визначимо:

$$\sin \varphi_2 = -\sin \beta = -\frac{\ell_1}{\ell_2} \sin \varphi_1; \quad \varphi_2 = \arcsin \left(-\frac{\ell_1}{\ell_2} \sin \varphi \right). \quad (3.3)$$

Враховуючи, що

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2, \quad \frac{d\ell_0}{dt} = \frac{dX_C}{dt} = V_C, \quad (3.4)$$

запишемо похідні за часом рівнянь (3.2):

$$-\ell_1 \sin \varphi_1 \cdot \omega_1 - \ell_2 \sin \varphi_2 \cdot \omega_2 = V_C; \quad (3.5)$$

$$\ell_1 \cos \varphi_1 \cdot \omega_1 + \ell_2 \cos \varphi_2 \cdot \omega_2 = 0. \quad (3.6)$$

Із (3.6) визначимо кутову швидкість ланки 2:

$$\omega_2 = \frac{\ell_1 \cos \varphi_1}{\ell_2 \cos \varphi_2} \cdot \omega_1. \quad (3.7)$$

Для визначення кутового прискорення ланки 2 і прискорення ланки 3 (точки C) продиференціюємо рівняння (3.5) і (3.6) за часом:

$$-\ell_1 \cos \varphi_1 \cdot \omega_1^2 - \ell_1 \sin \varphi_1 \cdot \varepsilon_1 - \ell_2 \cos \varphi_2 \cdot \omega_2^2 - \ell_2 \sin \varphi_2 \cdot \varepsilon_2 = a_c \quad (3.8)$$

$$-\ell_1 \sin \varphi_1 \cdot \omega_1^2 + \ell_1 \cos \varphi_1 \cdot \varepsilon_1 - \ell_2 \sin \varphi_2 \cdot \omega_2^2 + \ell_2 \cos \varphi_2 \cdot \varepsilon_2 = 0. \quad (3.9)$$

Тут

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt}, \quad \varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt}, \quad a_c = \frac{dV_C}{dt}.$$

Із (3.8) визначаємо кутове прискорення ланки 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{-\ell_1 \cos \varphi_1 \cdot \omega_1^2 - \ell_1 \sin \varphi_1 \cdot \varepsilon_1 - \ell_2 \cos \varphi_2 \cdot \omega_2^2}{\ell_2 \sin \varphi_2}. \quad (3.10)$$

Враховуючи, що

$$\cos\varphi_2 = \sqrt{1 - \sin^2\varphi_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2 \sin^2\varphi_1},$$

із першого рівняння (3.2) отримаємо:

$$X_c = \ell_0 = \ell_1 \cos\varphi_1 + \ell_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2 \sin^2\varphi_1}. \quad (3.11)$$

Задаючи вхідні дані для кривошипно-повзунного механізму, обчислюємо за формулами (3.11), (3.7), (3.10), (3.5), (3.8) кінематичні параметри і будуємо відповідно кінематичні діаграми переміщень, швидкості і прискорень повзуна 3, а також діаграми кутової швидкості і кутового прискорення ланки 2.

Швидкості і прискорення центра ваги S_2 визначаються таким чином.

Спочатку визначаємо положення центра ваги:

$$\bar{r}_{S_2} = \bar{\ell}_1 + \frac{\bar{\ell}_2}{2}; \quad X_{S_2} = \ell_1 \cos\varphi_1 + \frac{\ell_2}{2} \cos\varphi_2;$$

$$Y_{S_2} = \ell_1 \sin\varphi_1 + \frac{\ell_2}{2} \sin\varphi_2. \quad (3.12)$$

Диференціюємо двічі рівняння (3.12) за часом і отримаємо проекції швидкості і прискорення центра ваги S_2 на координатні осі.

3.3 Графоаналітичний метод кінематичного дослідження механізмів

Графоаналітичний метод кінематичного дослідження механізму базуються на теоремах про швидкості і прискорення точок в плоскому русі твердого тіла та про складний рух тіла.

Швидкості і прискорення точок ланок механізму можуть визначатися методом планів швидкостей і прискорень.

Планом швидкостей називається діаграма, на якій від певного центра відкладені вектори абсолютних швидкостей точок тіла, а їх кінці замикаються векторами відносних швидкостей.

Планом прискорень називається діаграма, на якій із центра викреслені вектори абсолютних прискорень, а їх кінці замикаються векторами відносних прискорень.

Побудова планів швидкостей і прискорень виконується на основі послідовного складання векторних рівнянь для всіх ланок, які входять в механізм, починаючи з ведучої.

Для прикладу розглянемо побудову планів швидкостей і прискорень шарнірного чотириланкового механізму (Рис.3.2).

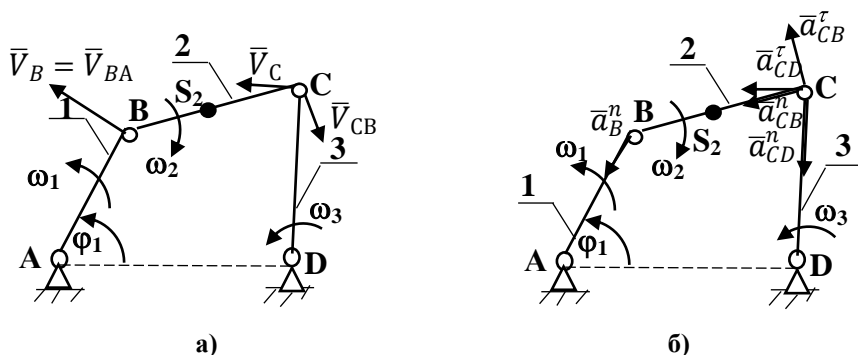


Рисунок 3.2 – Графоаналітичний метод дослідження механізмів

Заданими є: довжини ланок $l_{AB}=l_1$, $l_{BC}=l_2$, $l_{CD}=l_3$ кутова швидкість ланки 1 – $\omega_1 = const$ і узагальнена координата ϕ_1 .

За допомогою планів швидкостей і прискорень визначимо швидкості точок С, S₂ і їх прискорення, а також кутові швидкості і прискорення ланок 2 і 3, тобто ω_2 , ω_3 , ε_2 і ε_3 .

Із теоретичної механіки відомо, що всякий рух незмінної плоскої фігури в її площині можна розкласти на два:

- переносний поступальний рух з довільно вибраною точкою (полюсом) плоскої фігури;
- відносний обертальний рух навколо точки вибраної за полюс.

Тому швидкість будь-якої точки плоскої фігури можна представити як геометричну суму швидкості полюса і швидкості обертання фігури навколо полюса: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$ (Рис.3.2, а). Швидкість точки А нам відома $V_A=0$, швидкість точки В також відома $V_B = \omega_1 \cdot \ell_1, \text{м/с}$.

Тому, приймаючи будь-яку точку площини за полюс плану швидкостей Р, відкладемо від неї вектор швидкості \vec{V}_B (Рис.3.3).

Розглянемо рух ланки 2 відносно ланки 1. Ці ланки утворюють обертальну пару. Тому швидкість точки С складається із швидкості точки \vec{V}_B переносного поступального руху ланки ВС та швидкості \vec{V}_{BC} обертального руху ланки 2 навколо точки В:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}, \quad \vec{V}_{CB} \perp BC. \quad (3.13)$$

Тепер визначимо швидкість точки С, як складову частину ланки 3:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{V}_{CD}, \quad \vec{V}_D=0, \quad \vec{V}_{CD} \perp CD. \quad (3.14)$$

Систему рівнянь (3.13) і (3.14) розв'язуємо графічно у вибраному масштабі $\mu_v \left(\frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right)$ на плані швидкостей (Рис.3.3).

Відкладемо від полюса Р паралельно вектору \vec{V}_B відрізок Рb (мм) і із його кінця проводимо пряму, яка є лінією дії вектору \vec{V}_{BC} перпендикулярно ВС. Далі із полюса Р плану швидкостей паралельно

вектору \vec{V}_C викреслюємо пряму до перетину з вектором \vec{V}_{CB} .

Отриманий відрізок у прийнятому масштабі дорівнює швидкості точки С. Швидкість точки С визначається із умови:

$$V_C = P_C \cdot \mu_V.$$

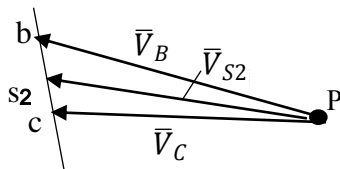


Рисунок 3.3 – План швидкостей

З'єднавши полюс P плану швидкостей з серединою відрізка bc отримаємо у вибраному масштабі швидкість точки S_2 – середини ланки BC. Швидкість точки S_2 і відносно швидкість \vec{V}_{CB} визначається так:

$$V_{S_2} = (Ps_2) \cdot \mu_V \quad V_{CB} = (bc) \cdot \mu_V.$$

Кутові швидкості ланок 2 і 3:

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{\ell_2} = \frac{bc \cdot \mu_V}{\ell_2} \quad \omega_3 = \frac{V_{CD}}{\ell_3} = \frac{V_C}{\ell_3} = \frac{Pc \cdot \mu_V}{CD \cdot \mu_\rho},$$

$$\mu_\rho = \frac{\ell_{AB}}{AB} \quad - \text{ м/мм, масштабний коефіцієнт довжин;}$$

$$\mu_V = \frac{V_B}{P_b} \quad - \text{ мс}^{-1}/\text{мм, масштабний коефіцієнт швидкостей;}$$

$$\mu_a = \frac{a_B^n}{\pi_b} \quad - \text{ мс}^{-2}/\text{мм, масштабний коефіцієнт прискорень.}$$

Будуємо план прискорень за двома векторними рівняннями:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B^n + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^r \quad \bar{a}_C = \bar{a}_D + \bar{a}_{CD}^n + \bar{a}_{CD}^r, \quad (3.15)$$

відповідає прискоренню \bar{a}_{CB} .

Вектор прискорення точки S_2 отримаємо, з'єднавши середину відрізка bc з полюсом π .

Кутові прискорення ланок знаходимо за формулами:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^r}{\ell_2} = \frac{(n_2c) \cdot \mu_a}{\ell_2} ; \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{CD}^r}{\ell_3} = \frac{(n_3c) \cdot \mu_a}{\ell_3}$$

Завдання 1 до виконання РГЗ 1.

Структурний аналіз механізму

Характеристика ланок.

Характеристика кінематичних пар.

Ступінь рухомості механізму.

Визначення класу механізму.

Побудова механізму у заданому і у крайніх положеннях у масштабі $\mu_\ell = \frac{\ell_{AB}}{AB}$, м/мм.

Кінематичне дослідження механізму для двох положень (для одного із крайніх положень і для заданого положення).

Побудова плану швидкостей. Визначення за допомогою плану швидкостей кутових швидкостей ланок механізму і швидкостей окремих точок.

Побудова плану прискорень. Визначити за допомогою плану прискорень кутових прискорень ланок механізму і прискорення окремих точок.

4 КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕДАЧ

У різних машинах і приладах широко застосовуються механізми для відтворення обертального руху з постійним передаточним відношенням між двома по-різному заданими осями.

Такі механізми носять назву механізмів передач обертального руху, або скорочено, механізмів передач.

Найпростішим механізмом передачі з твердими ланками є чотириланковий механізм, який складається із двох рухомих ланок, які входять у дві обертальні і одну вищу пару.

Відношення кутової швидкості однієї ланки до кутової швидкості другої ланки у механізмі з одним ступенем волі називається передаточним відношенням. Взятє за модулем передаточне відношення називається передаточним числом і позначається літерою u .

4.1 Механізми з постійним передаточним відношенням

Прості механізми. Широке застосування у машинах і приладах мають зубчасті механізми (Рис.4.1).

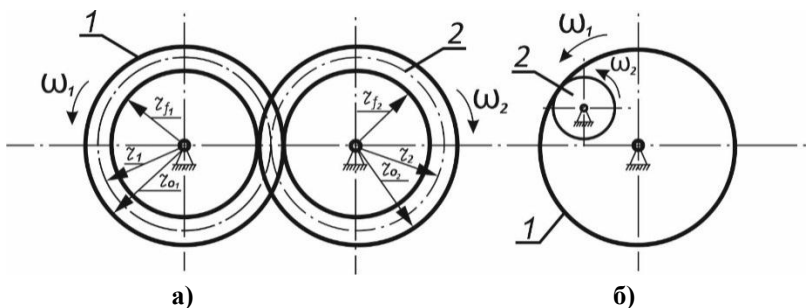


Рисунок 4.1 – Механізми з постійним передаточним відношенням

В теорії механізмів зубчастих передач кола радіусами r_1 і r_2

носять назву початкових кіл; кола радіусами r_{f1} і r_{f2} – називаються колами западин; кола радіусами r_{o1} і r_{o2} – колами виступів, або колами вершин зубців.

Для двох ланок 1 і 2, які обертаються з кутовими швидкостями ω_1 і ω_2 , передаточне відношення визначається:

при зовнішньому зачепленні (Рис.4.1, а)

$$i_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad (4.1)$$

при внутрішньому зачепленні (Рис.4.1, б)

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (4.2)$$

Якщо, рух здійснюється між паралельними осями, то передаточне відношення має знак "плюс", якщо кутові швидкості ланок мають однакову направленість (внутрішнє зачеплення), і знак "мінус", якщо направленість руху протилежна (зовнішнє зачеплення).

Передаточне відношення можна визначити через число зубців, якщо прийняти до уваги співвідношення:

$$2\pi r_1 = Pz_1; \quad 2\pi r_2 = Pz_2; \quad 2r_1 = \frac{P}{\pi}z_1; \quad 2r_2 = \frac{P}{\pi}z_2 \quad (4.3)$$

де P - крок зубців по початковому колу, z – кількість зубців;

$m = \frac{P}{\pi}$ – відношення кроку до числа π називається модулем

зачеплення, мм.

Формула 4.1 з урахуванням формул 4.2 і 4.3 має вигляд:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1} = \pm \frac{D_2}{D_1},$$

де n_1, n_2 - число обертів за хвилину ланок 1 і 2,

D_1, D_2 - діаметри початкових кіл зубчастих коліс.

Рядові зубчасті механізми. Одна ступінь зубчастої передачі може забезпечити передаточне відношення від 1 до 10. При необхідності одержання більшого передаточного відношення застосовують механізми, які складаються із декількох пар коліс, так званих серій коліс.

Серії зубчастих коліс, у яких всі вали коліс обертаються у нерухомих підшипниках, називаються рядовими.

Визначимо передаточне відношення рядового механізму, який складається із трьох пар циліндричних зубчастих коліс (Рис.4.2).

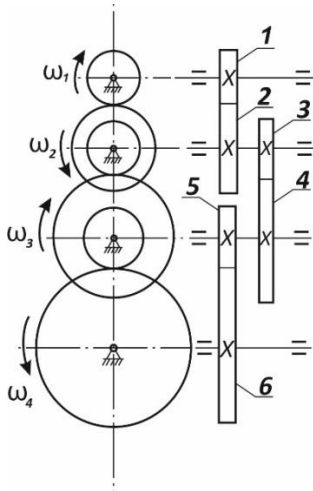


Рисунок 4.2 – Рядовий зубчастий механізм

Колеса 2-3 і 4-5 жорстко пов'язані між собою, тобто обертаються з однаковою кутовою швидкістю ($\omega_2 = \omega_3$; $\omega_4 = \omega_5$). Загальне передаточне відношення механізму $i_{16} = \omega_1 / \omega_6$. Запишемо передаточне відношення для кожної зубчастої пари:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1};$$

$$i_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_3};$$

$$i_{56} = \frac{\omega_5}{\omega_6} = -\frac{z_6}{z_5}.$$

Помножимо праві і ліві частини цих рівнянь:

$$i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{56} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_5}{\omega_6} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = i_{16} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} \cdot \frac{z_6}{z_5}.$$

Отже передаточне відношення рядового зубчастого зачеплення механізму дорівнює добутку передаточних відношень окремих зубчастих пар.

Знак передаточного відношення рядового механізму при парній кількості зовнішніх зачеплень позитивний; при непарній кількості – від'ємний.

$$i = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}$$

$$i = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}$$

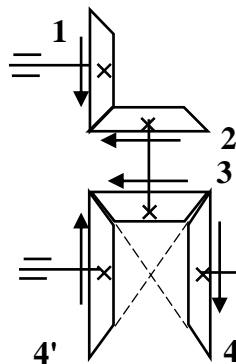


Рисунок 4.3 – Рядовий механізм з конічними колесами

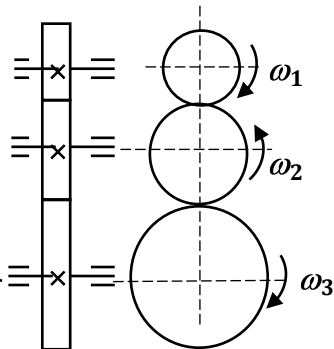


Рисунок 4.4 - Передаточне відношення механізму з паразитними колесами

Для рядових механізмів з конічними колесами знак передаточного відношення визначається за правилом стрілок (Рис.4.3): якщо стрілочка, які визначають напрямок обертання коліс напрямлені однаково, то знак буде «+», якщо протилежно – знак « - ».

Для передачі обертального руху між валами, розташованими на значній відстані, або якщо необхідно змінити напрямок обертання

валів, застосовуються механізми, у яких є колеса ведені по відношенню до попередніх і в той же час вони є ведучими по відношенню до послідуєчих. У техніці такі колеса називають паразитними.

Передаточне відношення механізму з паразитними колесами (Рис.4.4) у відповідності з формулою (4.5):

$$i_{13} = i_{12} \cdot i_{23} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) = \frac{z_3}{z_1},$$

тобто дорівнює відношенню числа зубів останнього веденого колеса до числа зубів першого ведучого.

Отже паразитне колесо не діє на величину передаточного відношення.

Сателітні механізми. Механізми, які мають колеса з рухомими осями, називаються сателітними.

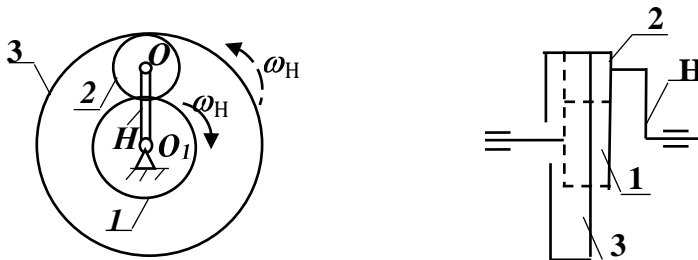


Рисунок 4.5 – Сателітний механізм

У механізмі наведеному на Рис.4.5, зубчасті колеса 1 і 3, осі яких співпадають з основною геометричною віссю механізму, називаються центральними, колесо 2, яке знаходиться у складному русі; навколо власної осі і з власною віссю навколо центральної, називається сателітом. Важіль Н, на якому закріплюється рухома вісь сателіта, називається водило. Центральне колесо і водило являються основними ланками.

Ступінь рухомості механізму, показаного на (Рис.4.5):

$$W=3n - 2P_5 - P_4=3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2=2.$$

Сателітні механізми, ступінь волі яких дорівнює двом, називається диференціальним механізмом.

Для визначення залежності між кутовими швидкостями всіх ланок диференціальної передачі $\omega_1, \omega_2, \omega_H$ скористуємося способом оберненого руху.

Задамо всьому механізму обертальний рух навколо осі O_1 , який має кутову швидкість водила H , але напрямлений в протилежну сторону ($-\omega_H$). Тоді диференціальний механізм перетвориться на механізм з нерухомими осями ($\omega'_H=\omega_H-\omega_H=0$), кутові швидкості рухомих ланок відносно водила дорівнюють: $\omega'_1=\omega_1-\omega_H$; $\omega'_3=\omega_3-\omega_H$

Передаточне відношення такого механізму $i_{13}^{(H)}$. Індекс H означає, що водило зупинене, як при рядовому з'єднанні коліс, визначається формулою:

$$\omega_{13}^H = \frac{\omega'_1}{\omega'_3} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}.$$

У загальному вигляді для диференціального механізму, який складається із k коліс:

$$i_{1k}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_k - \omega_H}. \quad (4.7)$$

Ця формула носить назву **формули Віліса**. Якщо в сателітному механізмі на одне із центральних коліс накласти додаткову кінематичну в'язь (наприклад $\omega_3=0$) отримаємо планетарний механізм, ступінь рухомості якого $W=1$, а формула Віліса має вигляд:

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1H}.$$

За допомогою планетарних механізмів можна отримати дуже велике передаточне відношення при невеликій кількості коліс.

Хвильові передачі. Хвильова передача (Рис.4.6) складається із жорсткого 1, і гнучкого 2 зубчастих коліс і генератора хвиль 3, складених за схемою планетарного редуктора. Вставлений у гнучке колесо генератор хвиль (води́ло) пружно деформує його, із круглого у еліптичне.

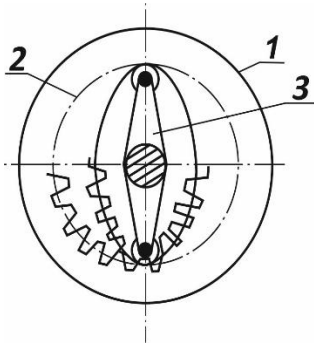


Рисунок 4.6 – Хвильова передача

Число зубців жорсткого z_1 і гнучкого z_2 коліс різне, тому при нерухомому жорсткому колесі за один оберт генератора гнучка ланка повернеться на число кутових кроків $z_1 - z_2$. Оскільки передача обертання виконується у механізмі, який має рухомі осі, то кінематичне співвідношення у таких механізмах визначаються за формулою Віліса при $\omega_H = \omega_3$.

Якщо нерухомим є гнучке колесо 2 ($\omega_2 = 0$) передаточне відношення між генератором хвиль 3 і жорстким колесом 1 з урахуванням, що $i_{12}^{(3)} = \frac{z_2}{z_1}$;

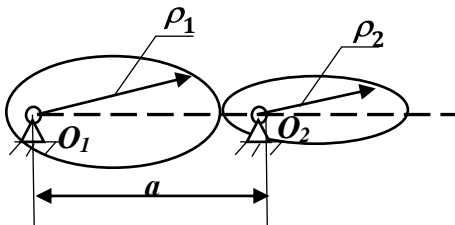
$$i_{13}^{(2)} = 1 - \frac{z_2}{z_1}; \quad i_{31}^{(2)} = \frac{1}{1 - z_2/z_1} = \frac{z_1}{z_1 - z_2}. \quad (4.8)$$

Якщо нерухомим є жорстке колесо 1, передаточне відношення між генератором хвиль 3 і гнучким колесом 2:

$$i_{32}^{(1)} = \frac{z_2}{z_2 - z_1}. \quad (4.9)$$

4.2 Механізми із змінним передаточним відношенням

Некруглі колеса. У машинобудуванні механізми з некруглими колесами застосовуються для передачі руху зі змінним передаточним відношенням, при невеликих кутових швидкостях і з паралельним розміщенням осей. Найбільш вживаними є некруглі колеса, центроїди яких мають форму еліпса (Рис.4.7) .



При їх проектуванні необхідно дотримуватись умови, щоб додатак двох будь-яких спряжених радіусів-векторів дорівнював міжосьовій відстані:

$$\rho_1 + \rho_2 = a. \quad (4.10)$$

Рисунок 4.7 – Схема механізму з некруглими колесами

Кулачкові механізми. Кінематичний аналіз кулачкового механізму зводиться до визначення швидкості штовхача V_2 при заданій кутовій швидкості кулачка ω_1 . Користуємося при цьому графічним або аналітичним методами. Використовуємо аналітичний метод кінематичного дослідження. Встановимо кулачок так, щоб штовхач займав крайнє положення A_0 (Рис. 4.8). Проведемо осі координат X і Y через центр обертання кулачка O і з'єднаємо початок координат O з точкою A профілю кулачка, яка розміщується на максимальній відстані від центра O , радіусом-вектором ρ_0 .

Позначимо полярний кут AOA_0 через β . Під час обертання кулачка на кут φ точка A прийме положення A' . Відстань $A_0A=S$ є переміщення штовхача .

зубців колеса, яких бракує;

- визначити передаточне відношення між вхідною і вихідною ланками;
- визначити число ступенів у передачі (число ступенів дорівнює числу нерухомих осей мінус одиниця);
- знайти передаточне відношення кожного ступеня;
- визначити передаточне відношення між вхідною і вихідною ланками;
- визначити кутову швидкість вихідної ланки.

5 СИЛИ, ЩО ДІЮТЬ У МЕХАНІЗМІ

5.1 Класифікація сил

У загальному випадку всі сили, що діють у механізмі, поділяються на зовнішні, які задаються, і внутрішні реакції в'язів. До заданих відносимо сили рушійні, корисного опору, сили ваги ланок і шкідливого опору. Реакції в'язів можна розкласти на нормальні і дотичні складові.

Рушійні сили і моменти. Сили прикладені до ведучої ланки і напрямлені в сторону переміщення точок їх прикладання, або якщо напрям їх дії утворює з напрямом переміщення гострі кути, називаються рушійними. У механізмах машин це зусилля F , яке діє на, поршень (наприклад, тиск газів у ДВЗ), або момент рушійних сил M_{PC} (у електродвигунах - рушійний момент ротора, який залежить від швидкості обертання останнього).

Сили корисного опору F_{KO} . У робочих машинах ці сили з'являються під час виконання технологічного процесу: при різанні і штампуванні металу, підйому вантажів і т.д. Отже це сили, які прикладені до виконавчих ланок механізму і напрямлені проти переміщень точок їх прикладання або складають з напрямком переміщень тупі кути (призначення механізму полягає у подоланні дії цих сил).

Сили інерції ланок. Ці сили обумовлені масою і рухом ланок з прискоренням. Робота, яка виконується силами інерції, може бути позитивною, від'ємною і рівною нулю.

Сили шкідливого опору. До них відносяться сили тертя, які виникають при відносному русі елементів кінематичних пар (кп), на подолання яких затрачається допоміжна робота зверх тієї, яка необхідна для подолання сил корисного опору.

Реакції. Сили, які виникають у кінематичних парах при роботі механізму, називаються реакціями. Дотичні складові цих сил (сили тертя) умовно відносяться до сил, які задаються.

Сили ваги ланок. Ці сили можуть виконувати позитивну (центр ваги ланок опускається), від'ємну (центр ваги ланок піднімається) роботу. Робота сил ваги дорівнює нулю, якщо центр ваги ланок рухається горизонтально або залишається нерухомим. При циклічному русі робота цих сил за цикл дорівнює нулю.

5.2 Сили інерції

Під час визначення зусиль у кінематичних парах і характеру руху механізму оперують статично еквівалентними системами і розподілені сили інерції зводять до однієї рівнодіючої \bar{F}_i (головний вектор сили інерції), яка прикладається у центрі ваги ланки, і до рівнодіючої пари сил з моментом \bar{M}_i (головний момент сили інерції):

$$\bar{F}_i = -m\bar{a}_s; \quad (5.1)$$

$$\bar{M}_i = -J_s\bar{\varepsilon}, \quad (5.2)$$

де m – маса всієї ланки, кг; \bar{a}_s – повне прискорення центра ваги ланки, м/с²; $\bar{\varepsilon}$ – кутове прискорення ланки, с⁻²; J_s – момент інерції ланки відносно центра мас, кгм².

Знак мінус у формулах (5.1) і (5.2) показує, що сила інерції \bar{F}_i напрямлена в сторону протилежну прискоренню \bar{a}_s , а момент сили інерції \bar{M}_i – протилежно кутовому прискоренню ланки $\bar{\varepsilon}$.

Поступальний рух ланки. Всі точки ланки мають однакове прискорення яке дорівнює прискоренню центра мас, а кутове прискорення ε дорівнює нулю. Отже, при поступальному русі ланки діє тільки сила інерції $\bar{F}_i = -m\bar{a}_s$, прикладена в центрі мас.

Ланка знаходиться у обертальному русі. У обертальному русі навколо осі, яка проходить через центр мас, прискорення центра мас \bar{a}_s дорівнює нулю і сила інерції \bar{F}_i також дорівнює нулю. Якщо ланка обертається нерівномірно ($\varepsilon \neq 0$), то на ланку буде діяти момент сили інерції, який визначається за формулою (5.2). При обертанні ланки з кутовим прискоренням ε навколо осі, яка не збігається з центром мас,

на ланку буде діяти сила $\bar{F}_1 = -m\bar{a}_s$ і момент сили інерції $\bar{M}_1 = -J_s \varepsilon$.

Замінюючі маси. У деяких випадках зручно масу ланки умовно замінити декількома масами, зосередженими у заздалегідь вибраних точках. Умова такої заміни полягає у еквівалентності сил інерції ланки і його фіктивній системі мас, яка його замінює: сума мас m_i , розміщених у точках заміни, повинна дорівнювати масі ланки m , сума статичних моментів відносно центра мас повинне дорівнювати нулю. Сума моментів інерції зосереджених мас відносно осі, яка проходить через центр мас, повинна дорівнювати моменту інерції ланки J_s відносно тієї ж осі:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + \dots + m_k &= m ; \\ m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + \dots + m_k \bar{r}_k &= 0 \\ m_1 \bar{r}_1^2 + m_2 \bar{r}_2^2 + \dots + m_k \bar{r}_k^2 &= J_s , \end{aligned} \quad (5.3)$$

де $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_k$ – радіуси-вектори точок заміщення.

Заміна ланок еквівалентною системою, яка відповідає всім умовам (5.3), називається динамічним заміщенням мас; якщо виконуються тільки перші дві умови (5.3), то це буде статичне заміщення мас. Останнє заміщення спрощує задачу і дає можливість виконати заміщення двома масами, розміщеними в центрах шарнірів (Рис.5.1):

$$m_B = m \frac{c}{b+c} , \quad m_C = m \frac{b}{b+c}$$

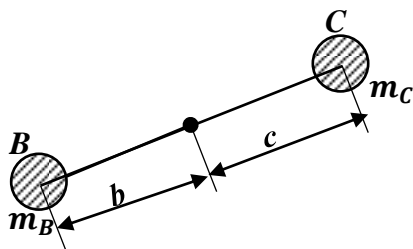


Рисунок 5.1 – Замінюючі маси

5.3 Сили тертя

Тертя являє собою явище опору відносному переміщенню, яке виникає між двома тілами в зонах дотику поверхонь по дотичній до них.

Розрізняють тертя ковзання і тертя кочення. Тертя ковзання має місце при відносному русі двох тіл, швидкості яких в точках дотику різні.

Тертя кочення виникає у вищих кінематичних парах, швидкості яких у точках дотику однакові за величиною і напрямком.

За станом поверхневого шару і наявності мастила між елементами кінематичних пар розрізняють: тертя без мастила, воно виникає при відсутності на поверхнях тертя мастильного матеріалу; граничне тертя – при наявності на поверхнях тертя шару рідини, властивості якого відрізняються від об'ємних; рідинне тертя, при якому виникає явище опору відносному переміщенню між двома тілами, розділеними шаром рідини, в якому виявляються її об'ємні властивості.

Тертя ковзання. Сила тертя – це сила опору відносному руху переміщення двох тіл. Вона прикладена в зонах дотику і напрямлена в сторону, протилежну можливому напрямку відносної швидкості.

Між силою тертя і нормальною складовою зовнішніх сил N , яка діє на поверхню тіл 1 і 2 (Рис. 5.2) існує залежність, яку з достатньою для практики точністю можна представити **формулою Кулона** $F \leq fN$,

де f – коефіцієнт тертя, який визначається експериментальним шляхом в залежності від різних умов контакту ланок.

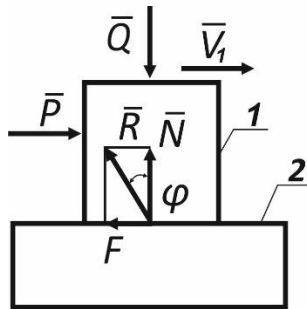


Рисунок 5.2. – Схема сил в поступальній парі

Розглянемо тертя при відносному русі двох ланок: повзуна 1 і напрямляючої 2 (Рис.5.2), притиснутих один до другого силою Q . Експериментально доведено, що для приведення в дію повзуна 1, потрібна сила, більше тієї, яка забезпечує рівномірний рух повзуна. У зв'язку з цим розрізняють граничну силу, яка відповідає початку відносного руху, названу силою тертя спокою $\bar{F}_{\text{сп}}$ і силу опору, яка виникає під час руху – силу тертя, руху \bar{F} . Тому слід розрізнити коефіцієнт тертя спокою:

$$f_{\text{сп}} = \frac{F_{\text{сп}}}{N} \quad (5.6)$$

і коефіцієнт тертя руху

$$f = \frac{F}{N} \quad (5.7)$$

Частіше всього $f_{\text{сп}} > f$. Дію на повзун сил \bar{F} і \bar{N} замінюємо їх рівнодіючою \bar{R} , тоді коефіцієнт тертя дорівнює тангенсу кута φ між напрямляючими сил \bar{R} і \bar{N} , який називається кутом тертя.

Якщо до ланки 1 прикласти силу \bar{Q} під кутом $\alpha < \varphi$ то складова $Q_i = Q \sin \alpha$, яка намагається зрушити ланку 1 відносно ланки 2,

виявиться менше граничної сили тертя і тому руху не буде.

$$F_{\text{сп}} = f_{\text{сп}} \cdot N = tg\varphi_{\text{сп}} \cdot N = tg\varphi_{\text{сп}} \cdot Q \cdot \cos\alpha > Q\sin\alpha.$$

Тільки коли $\alpha = \varphi_{\text{сп}}$, настає рівність $Q_{\tau} = F_{\text{сп}}$ і рух стає можливим.

Коефіцієнт тертя залежить від трьох груп факторів:

- а) матеріалу поверхонь тертя, виду мастила і плівки на поверхні;
- б) конструкції кінематичної пари – розмірів поверхонь і геометричного обмеження;
- в) режиму роботи – температури, швидкості, навантаження.

Із збільшенням швидкості руху коефіцієнт тертя у більшості випадків зменшується (до визначеної величини).

Таблиця 5.1 – Значення коефіцієнтів тертя ковзання

Матеріали поверхонь тертя	k	спокую		руху	
		без мастила	з мастилом	без мастила	з мастилом
Сталь – сталь	0,003 - 0,005	0,15	0,1 - 0,12	0,15	0,05 - 0,1
Сталь – чавун		0,2 - 0,3	-	0,16	0,05 - 0,15
Сталь – бронза		0,15 - 0,2	0,1 - 0,15	0,15 - 0,18	0,07 - 0,15
Сталь – пластмаса		0,25	0,1 - 0,15	-	-
Чавун – бронза		-	-	0,15 - 0,2	0,7 - 0,15

Тертя кочення. Опір руху під час кочення обумовлено ефектом молекулярного зчеплення на площині контакту кочення, пружністю реальних матеріалів і тертям при відносному ковзанні поверхонь в межах навантаженого контакту, які обумовлені різницею кривизни тіл кочення і пружними мікропереміщеннями в межах контактної поверхні.

У вищій кінематичній парі, утвореній ланками 1 і 2 (Рис.5.3, а) у статичному стані під навантаженням \bar{Q} виникає внаслідок деформації площина контакту CD, по якій діє тиск, розподілений за певним законом (Рис.5.3, б). При цьому рівнодіюча його $\bar{N}=\bar{Q}$ проходить через точку А.

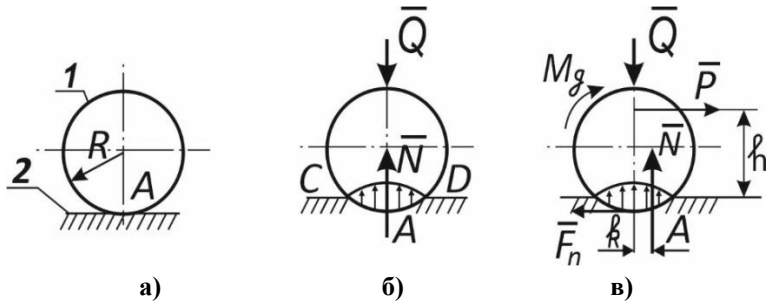


Рисунок 5.3 – Тертя кочення

Досвід показує, що для перекочування ланки 1 до неї необхідно прикласти рушійний момент M_g (Рис.5.3, в) . Це зумовлено тим, що при перекочуванні ланки 1 питомі тиски перерозподіляються так, щоб загальна реакція \bar{N} у напрямку переміщення на деяку величину k , внаслідок чого виникають моменти опору кочення $M_{тр}=k \cdot N$. При рівномірному коченні сума моментів всіх сил, які діють на ланку 1, буде дорівнювати нулю.

$$M_g - M_{тр} = M_g - kN = M_g - kQ = 0.$$

Якщо ланка 1 перекочується під дією сили \bar{P} , то в зоні дотику катка з опорною площиною виникає сила тертя ковзання \bar{F}_n , напрямлена протилежно силі \bar{P} , граничне значення якої (сила тертя спокою) згідно з формулою (5.6):

$$F_n = f_n \cdot N = f_n \cdot Q.$$

В цьому випадку для рівномірного кочення необхідно додержуватись умови:

$$M_g = P \cdot h = Q \cdot k \quad \text{і} \quad P < F_n = f_n \cdot Q \quad \text{тобто} \quad Q \cdot \frac{k}{h} < f_n \cdot Q,$$

звідки $f_n > \frac{k}{h}$.

При чистому ковзанні необхідно:

$$P = F_n = f_n \cdot Q \quad \text{і} \quad M_g = P \cdot h < Q \cdot k, \quad \text{тобто} \quad f_n Q h < Q \cdot k,$$

звідки $f_n = \frac{k}{h}$.

Одночасне кочення і ковзання можливе якщо

$$f_n = \frac{k}{h}.$$

Значення коефіцієнту тертя кочення визначається дослідним шляхом: для пари сталь – сталь $k = 0,003 - 0,005$ см; для пари загартована сталь – загартована сталь $k = 0,001$ см.

Втрати на тертя кочення значно менші, ніж на тертя ковзання. Тому у більшості механізмів конструкції виконуються так, щоб тертя ковзання замінити тертям кочення.

5.4 Визначення реакцій у кінематичних парах

Реакції у кінематичних парах (КП). Визначення реакцій зводиться до пошуку її величини, напрямку і точки прикладання. У першому наближенні реакції в КП визначаються без урахування сил тертя. У обертальній парі (Рис.5.4, а) лінія дії реакції \bar{R}_{12} проходить через вісь обертання: невідомими залишаються величина і напрямок реакції. У поступальній парі лінія дії реакції \bar{R}_{12} нормальна до поверхні напрямляючої (Рис.5.4, б): невідомими залишаються величина і точки прикладання. Отже, під час визначення реакцій необхідно відшукати

дві невідомі у кожній парі.

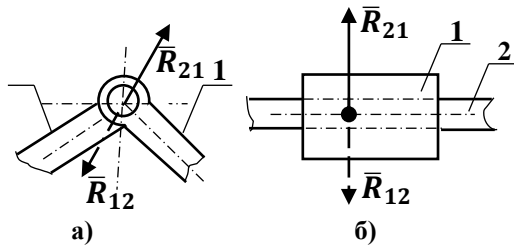


Рисунок 5.4 – Реакції в кінематичних парах

Якщо число пар p 'ятого класу у механізмі P_5 , то число невідомих дорівнює $2P_5$ і якщо n – число рухомих ланок – число рівнянь рівноваги дорівнює $3n$. Механізм статично визначений при умові $2P_5=3n$. Одержана рівність співпадає із структурною формулою групи Асура. Отже групи Асура є статично визначеними, а під час пошуку реакцій у кінематичних парах механізму можна розглядати рівновагу кожної групи Асура окремо.

В основу метода визначення реакцій прийнято принцип Д'Аламбера, у відповідності з яким динамічна система умовно зводиться до статичної шляхом приєднання сил інерції і для розв'язання задачі використовуються рівняння рівноваги статички:

$$(\sum \bar{P}_i + \bar{G}_i + \sum \bar{Q}_i) + \bar{F}_{ui} = 0,$$

де $\sum \bar{P}_i$ – сума всіх зовнішніх сил, які діють на i – ту ланку;

\bar{G}_i – сила ваги i - тої ланки;

$\sum \bar{Q}_i$ – сума силової взаємодії з боку інших ланок на i –ту ланку;

\bar{F}_{ui} – сила інерції i –тої ланки.

Визначення реакцій у кінематичних парах механізмів виконується у наступній послідовності:

1. Механізм розподіляємо на групи Асура, які викреслюємо у масштабі;

2. До ланок у відповідних точках прикладаємо всі задані сили і моменти (сили інерції, сили ваги, сили корисного опору, т.д.);

3. До зовнішніх пар кожної групи прикладаємо сили, які замінюють дію відкинутих ланок сусідніх груп.

Визначення реакцій необхідно почати з групи, найбільш віддаленої від ведучої ланки, поступово переходячи до послідуєчих груп, а закінчувати дослідженням ведучої ланки.

Група Асура другого класу. Для прикладу визначимо реакції у кінематичних парах другого класу (Рис.5.5, а). Дію всіх заданих сил на ланки 2 і 3 зображаємо рівнодіючими силами \bar{P}_2 і \bar{P}_3 , і моментами M_2 і M_3 , які вміщують також сили інерції \bar{F}_{12} і \bar{F}_{13} і моменти сил інерції M_{12} , M_{13} .

Дію на ланки групи відкинутих ланок замінюємо реакціями ланок: \bar{R}_{12} , яка проходить через центр обертальної пари В, і \bar{R}_{43} напрямленої перпендикулярно до напрямляючої 4 пари D. Під дією всіх цих сил група знаходиться у рівновазі.

Задаючись довільним напрямком реакції \bar{R}_{12} , розкладемо її на дві складові: нормальну \bar{R}_{12}^n , напрямлену вздовж ВС і перпендикулярно до неї дотичну складову \bar{R}_{12}^t . Складемо рівняння моментів всіх сил діючих на ланку 2 відносно центра обертання пари С, визначимо \bar{R}_{12}^t :

$$\sum M_{ck} = -\bar{R}_{12}^t \cdot \ell_{BC} + M_C(\bar{P}_2) + M_2 = 0,$$

звідки

$$\bar{R}_{12}^t = \frac{M_C(\bar{P}_2) + M_2}{\ell_{BC}}.$$

Величину і напрямком реакцій \bar{R}_{43} і \bar{R}_{12}^n знаходимо із розгляду рівняння рівноваги групи:

$$\bar{R}_{12}^t + \bar{R}_{12}^n + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{R}_{43} = 0,$$

яке розв'язуємо графічним шляхом за допомогою плану сил (Рис. 5.5, б), побудованого у повному масштабі сил μ_F (Н/мм).

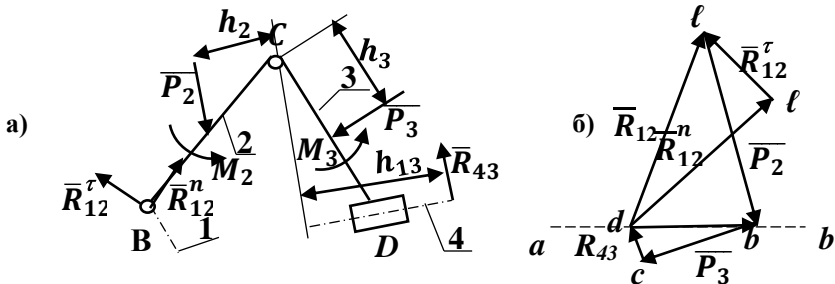


Рисунок 5.5 - Визначення реакцій в кінематичних парах

Побудова плану починається з відкладання всіх відомих сил, прикладених до ланки 2, початок плану в точці l . Потім додаються вектори відомих сил, що діють на ланку \bar{P}_2 , \bar{P}_3 , лініями дії сил \bar{R}_{43} і \bar{R}_{12}^n замикаємо багатокутник.

Значення сил \bar{R}_{12}^n і \bar{R}_{43} визначаємо із умови:

$$R_{12}^n = |dl| \cdot \mu_F ; R_{43} = |cd| \cdot \mu_F .$$

Точку прикладання сили \bar{R}_{43} можемо визначити, склавши рівняння моментів сил, що діють на ланку 3 відносно точки С:

$$\sum_1^k M_{Ck} = -M_C(\bar{P}_3) + M_3 + R_{43} \cdot h_{43} = 0,$$

звідки

$$R_{43} = \frac{M_C(\bar{P}_3) - M_3}{h_{43}}.$$

Величину реакції \bar{R}_{23} (\bar{R}_{32}) у внутрішній кінематичній парі С можна визначити із розгляду рівноваги будь-якої ланки групи, наприклад третьої:

$$\sum \bar{F} = \bar{P}_3 + \bar{R}_{43} + \bar{R}_{23} = 0.$$

За цим рівнянням на побудованому плані сил (Рис.5.5, б) визначимо величину і напрямок реакції, за модулем реакція дорівнює:

$$R_{23} = |db| \cdot \mu_F.$$

Кінестатика ведучої ланки. Зрівноважувальна сила і момент. Ведуча ланка не є групою Асура, і не може знаходитись у рівновазі під дією прикладених сил, тому для її зрівноваження необхідно прикладати зрівноважувальний момент або силу. Величина зрівноважувальної сили або моменту залежить від способу приведення ведучої ланки у рух.

Наприклад, якщо вал електродвигуна безпосередньо з'єднаний з валом ланки 1, то вона зрівноважується моментом; якщо обертання виконується через зубчасту або фрикційну передачу, то на ланку діє зрівноважувальна сила.

Лінія дії і точка прикладання сили \bar{F}_{3p} залежить від механізму приводу.

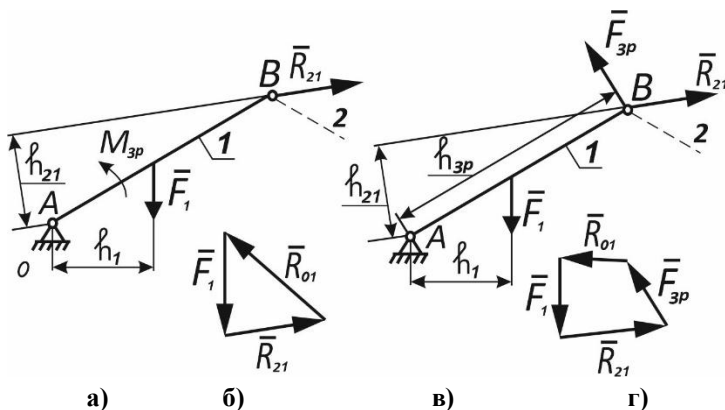


Рисунок 5.6 – Визначення зрівноважувальних сил та моменту

Величина і напрямок зрівноважувального моменту M_{3P} , (Рис.5.6, а), визначається із умови рівноваги ланки 1:

$$-F_1 \cdot h_1 - R_{21} \cdot h_{21} + M_{3P} = 0,$$

звідки

$$M_{3P} = F_1 \cdot h_1 + R_{21} \cdot h_{21}.$$

Згідно з III аксіомою статички $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$.

При цьому величина реакції \bar{R}_{01} визначається за планом сил (Рис.5.6, б), який задовольняє умову:

$$\bar{F}_1 + \bar{R}_{21} + \bar{R}_{10} = 0.$$

Якщо урівноважувальний момент співпадає за напрямком з кутовою швидкістю ланки, то він є рухаючим, а якщо проти руху – гальмівним.

Якщо ланка 1 урівноважується силою \bar{F}_{3P} (рис.5.6,в), лінія дії якої відома, то величина її:

$$F_{3P} = \frac{F_1 \cdot h_1 + R_{21} \cdot h_{21}}{h_{3P}}.$$

Величина реакції \bar{R}_{01} у цьому випадку визначається із рівняння рівноваги:

$$\bar{F}_1 + \bar{R}_{21} + \bar{F}_{3P} + \bar{R}_{01} = 0,$$

яке розв'язуємо графічно (Рис. 5.6, г).

6 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

До геометричних характеристик поперечного перерізу бруса відносяться: площа, осьові і полярні моменти інерції, осьові і полярні моменти опору, а також статичні моменти і відцентрові моменти інерції перерізу.

Розглянемо деякі перерізи, віднесені до довільної системи координат x, y (Рис.6.1, а).

Введемо позначення:

A – площа перерізу; dA – елементарна частина площі;

X_C, Y_C – координати центра ваги;

ρ – радіус-вектор елемента dA ; C – центр ваги перерізу A .

Площа перерізу визначається за формулою:

$$A = \int_A dA.$$

Статичний момент площі A відносно координатних осей визначимо за формулами:

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA. \quad (6.1)$$

Звідси, за відомими площею і її статичними моментами, координати центра ваги площі A знайдемо у вигляді:

$$X_C = \frac{S_y}{A}; \quad Y_C = \frac{S_x}{A}. \quad (6.2)$$

Осьові моменти інерції площі A знаходимо за виразом:

$$J_x = \int_A y^2 dA ; J_y = \int_A x^2 dA . \quad (6.3)$$

Полярний момент інерції площі А визначаємо за формулою:

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA \quad \text{або} \quad J_\rho = J_x + J_y . \quad (6.4)$$

Відцентровим моментом інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей x і y називається інтеграл:

$$J_{xy} = \int_A xy dA . \quad (6.5)$$

Розмірність моментів інерції - $[м^4]$. Осьові моменти інерції завжди позитивні, центробіжні моменти інерції можуть бути позитивними, від'ємними або дорівнювати нулю (якщо хоча б одна із осей є віссю симетрії перерізу).

Осі, які проходять через центр ваги перерізу С, називаються **центральною**. Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, а осьові моменти інерції становляться екстремальними називаються **головними**.

Головні центральні моменти інерції виражаються так:

$$J_{\max/\min} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{x_c y_c}^2} . \quad (6.6)$$

Відзначимо, що моментні характеристики перерізів визначають інтегруванням тільки для перерізів простої форми. Для визначення моментних характеристик перерізів складної форми поперечні перерізи визначають у вигляді суми перерізів, для яких геометричні

характеристики відомі.

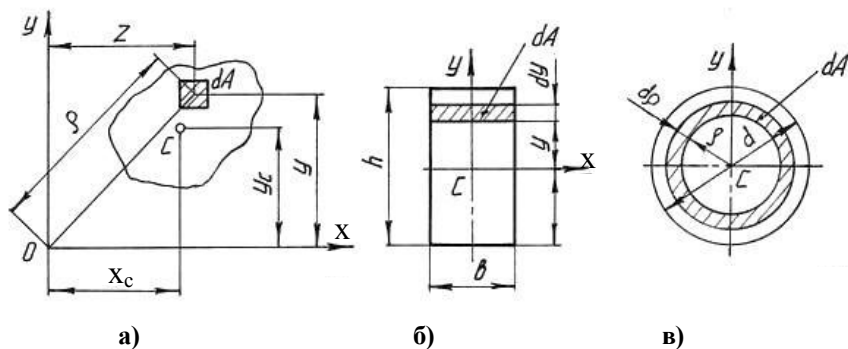


Рисунок 6.1 – Визначення геометричних характеристик плоских перерізів

На Рис.6.1, б показано прямокутний переріз із сторонами b і h . У даному випадку форма елементарної площадки найбільш зручна у вигляді смужки товщиною dy або dx , відповідно.

Отже

$$J_x = \int_0^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}; J_y = \frac{hb^3}{12}. \quad (6.7)$$

Для круглого перерізу (рис.6.1, в) за побудовою:

$$x = r \cdot \cos\varphi; y = r \cdot \sin\varphi.$$

Враховуючи це, знаходимо:

$$J_x = J_y = \int_{-\pi}^{\pi} y^2 dA = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (6.8)$$

Осьовий і полярний моменти опору перерізу визначаємо за наступними формулами:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}; W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{\max}} . \quad (6.9)$$

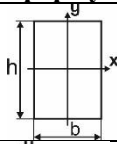
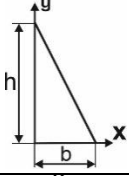
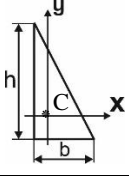
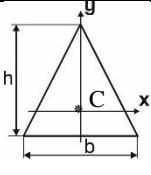
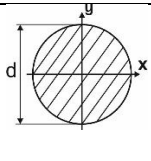
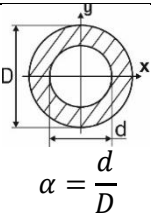
Для прямокутного перерізу h і шириною b :

$$W_x = \frac{bh^2}{6} . \quad (6.10)$$

Для круглого перерізу діаметром d :

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} . \quad (6.11)$$

Таблиця 6.1 - Геометричні характеристики простих перерізів

Форма перерізу	A	J_x	J_{yc}	J_{xy}	J_p	W_x	W_y	W_p
	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0		$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{hb^2}{6}$	
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{h^2b^2}{2}$				
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$	$\frac{h^2b^2}{72}$				
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$	0		$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{hb^2}{24}$	
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$		0	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$	
	$\frac{\pi d^2}{4} \cdot (1 - \alpha^2)$	$\frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4)$		0	$\frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$	$\frac{\pi d^3}{32} (1 - \alpha^4)$	$\frac{\pi d^3}{16} (1 - \alpha^4)$	

7 РОЗТЯГАННЯ (СТИСКАННЯ)

7.1 Основні поняття і визначення опору матеріалів

Як було вказано раніше, кожна ланка механізму складається із однієї або декількох частин, навантажених різними силами і моментами. Для забезпечення нормальної роботи, ланка, а отже і деталі, із яких вона складається, повинні задовольняти вимогам міцності, жорсткості і стійкості.

Під **міцністю** розуміємо здатність конструкції, її частин і деталей витримувати граничне навантаження без руйнування.

Під **жорсткістю** розуміємо здатність конструкції і її елементів протистояти навантаженням у відношенні деформації: під дією заданих навантажень деформація не повинна перевищувати граничні величини.

Стійкістю називається здатність конструкції і її деталей зберігати початкову форму рівноваги.

Зусилля, що діють на деталі механізму, поділяють на зовнішні навантаження і внутрішні сили пружності. Зовнішні навантаження поділяють на об'ємні і поверхневі. До об'ємних відносять сили ваги, інерції і електромагнітні сили. Поверхневі навантаження поділяють на розподілені і зосереджені. **Зосередженим** називається навантаження, що діє на площину малої величини в порівнянні з загальними розмірами деталі і умовно рахуємо прикладеною у точці. Зосереджене навантаження вимірюється одиницями сили (ньютон, Н). **Розподілені навантаження** можуть прикладатися до поверхні або до лінії і вимірюються одиницями погонного навантаження (Н/м). Крім того, зовнішні навантаження поділяють на задані сили і реакції опор.

Внутрішні сили пружності являють собою сили міжмолекулярної взаємодії, які виникають під час дії на пружне тіло зовнішніх навантажень. Урахувати всю різноманітність силових факторів, в також всі особливості конструкції під час розрахунків на міцність неможливо. Тому під час розрахунків враховуються лише головні фактори і замість реальної конструкції розглядають її спрощений

прототип, який називається розрахунковою схемою.

При дослідженні деформованого стану пружних тіл приймаються наступні гіпотези і принципи:

1. Однорідність матеріалу – незалежність його властивостей, від величини виділеного із тіла об'єму;
2. Ізотропність – властивості тіла в усіх напрямках однакові;
3. Неперервність – речовина суцільно заповнює об'єм деталі;
4. Принцип незалежності дії сил – деформації і зусилля, що виникають в пружному тілі, вважають незалежними від порядку прикладання зовнішніх сил;
5. Принцип Сен-Венана – особливості прикладання зовнішніх сил до пружного тіла проявляються на відстанях, які не перевищують розмірів поверхонь, до яких прикладені ці сили;
6. Принцип початкових розмірів – під час складання рівнянь рівноваги тіло розглядається як недеформоване.

Одним із основних завдань розрахунків на міцність є з'ясування характеру і величини внутрішніх сил пружності, діючих у навантаженій деталі.

Для цього використовується **метод перерізів**, який полягає у наступному. Умовно перетинаємо тіло, на яке діють сили $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ (Рис.7.1, а) площиною АВ. Оскільки тіло під дією вказаних сил знаходиться у рівновазі, то у рівновазі знаходяться і кожна його частина, розміщена по одну сторону від перерізу. Відкинемо умовно праву частину і розглянемо умову рівноваги залишеної лівої частини (Рис. 7.1, б).

Для того щоб залишена частина знаходилась у рівновазі, на поверхні перерізу повинні діяти сили, еквівалентні дії правої частини на ліву. Такими силами є внутрішні сили пружності, розподілені по перерізу АВ. Отже з допомогою метода перерізів внутрішні сили пружності переводяться у розряд зовнішніх сил і визначення їх стає можливим за допомогою відповідних теорем статики.

Система сил пружності може бути зведена до однієї сили \bar{F} - головного вектору внутрішніх сил пружності і одного моменту \bar{M} -

головного моменту цих сил.

Головний вектор \bar{F} і головний момент \bar{M} розкладемо на складові по осях координат (Рис. 7.1, б):

$$\bar{F} = \bar{N}_x + \bar{Q}_y + \bar{Q}_z ; \quad \bar{M} = \bar{M}_x + \bar{M}_y + \bar{M}_z. \quad (7.1)$$

Складова \bar{N}_x називається **нормальною силою**, яка викликає деформацію розтягання або стискання. Складові \bar{Q}_y і \bar{Q}_z , які намагаються зсунути одну частину тіла відносно другої, називаються поперечними силами.

Складова \bar{M}_x головного моменту скручує тіло і називається крутильним моментом. Моменти \bar{M}_y і \bar{M}_z згинають тіло відповідно у площинах xoz і xoy і називаються **згинаючими моментами**. Визначення \bar{F} і \bar{M} або їх складових є одним із основних завдань розрахунків на міцність. Вони визначаються із рівнянь статyki:

$$\begin{aligned} \sum F_{xk} &= 0 ; \quad \sum F_{yk} = 0 ; \quad \sum F_{zk} = 0 ; \\ \sum M_{xk} &= 0 ; \quad \sum M_{yk} = 0 ; \quad \sum M_{zk} = 0 . \end{aligned} \quad (7.2)$$

Інтенсивність розподілення внутрішніх сил пружності по перерізу називається **напруженням** і вимірюється одиницями механічного напруження (Па (H/m^2), МПа (H/mm^2)). Розглянемо у деформованому тілі довільний переріз з нормаллю n (Рис. 7.2).

Виділимо біля точки M невелику площину dA . Якщо рівнодіюча сил пружності, діючих по цій площині буде $d\bar{P}$, то повне напруження \bar{P}_n у точці M на площині з нормаллю n :

$$\bar{P}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta A}. \quad (7.3)$$

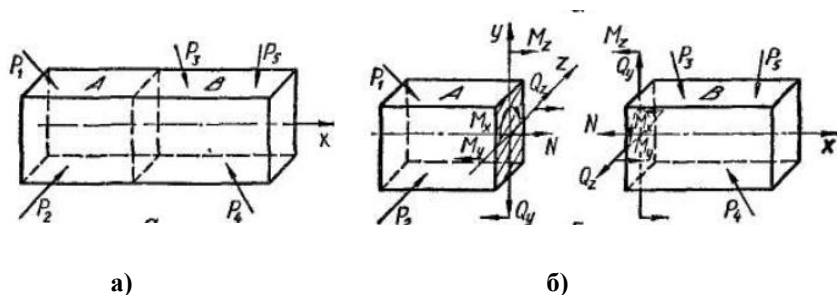


Рисунок 7.1 – Метод перерізів

7.2 Розтягання (стискання)

Центральне розтягання (стискання) прямого бруса. Бруси і стержні. Деформацію розтягання (стискання) вивчають на **брусах** або стержнях – тілах, які відрізняються від інших тим, що у них один розмір значно більше двох інших. У залежності від форми геометричної осі розрізняють прямолінійні і криволінійні бруси. **Стержнем** називають тонкий і довгий брус з прямолінійною віссю. Розміри і форма поперечних перерізів стержнів можуть бути постійними або змінними (Рис.7.2).

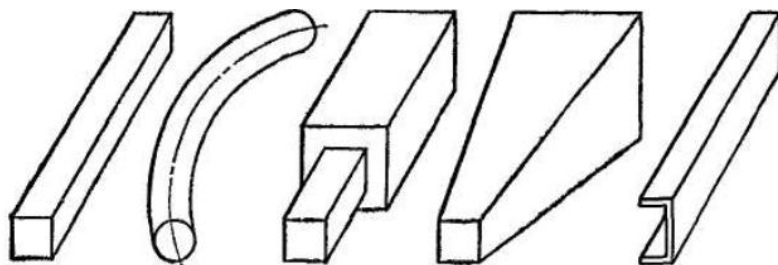


Рисунок 7.2 – Види брусів

Розтягання стержня виникає тоді, коли до його кінців прикладені сили, направлені вздовж його осі у протилежні боки. Висновки, які відносяться до деформації центрального розтягу,

частіше всього застосовуються і до центрального стиску. Суттєва різниця цих деформацій спостерігається при вивченні руйнування різних матеріалів, а також при дослідженні довгих і тонких стержнів, для яких стиск супроводжується, як правило, вигином.

Закон Гука. Дослідимо спочатку випадок, коли прямолінійний брус постійного поперечного перерізу площиною A розтягується рівномірно розподіленими навантаженнями інтенсивності q , прикладеними на його торцях (Рис.7.3, а).

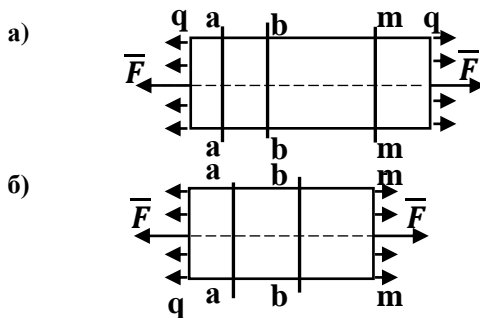


Рисунок 7.3 - До гіпотези плоских перерізів

Рівнодіючі розподілені зусиль $F = q \cdot A$ напрямлені паралельно геометричній осі і прикладені в центрах ваги торцевих перерізів.

Для такої деформації брусів практикою підтверджується гіпотеза плоских перерізів – **гіпотеза Бернуллі**, у відповідності з якою, перерізи які були плоскими до деформації залишаються плоскими і після деформації. Поперечні перерізи $a - a$, $b - b, \dots, m - m$ після деформації лише змістяться поступально один відносно іншого. У зв'язку з цим можна припустити, що напруження будуть розподілені рівномірно по будь-якому плоскому перерізу ($\sigma_x = \text{const}$). Розглянемо рівновагу частини стержня, яка знаходиться зліва від перерізу $m - m$ (Рис. 7.3, б). На виділену частину по перерізу $m - m$ діють внутрішні сили пружності, рівнодіючою яких є нормальна сила N_x , а також рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q на

лівому торці, яка називається рівнодіючою \overline{F} .

Із умови рівноваги виділеної частини маємо, що $N_x=F$, а оскільки $\sigma_x = \text{const}$ отримуємо, $\sigma_x = N_x/A$.

При центральному розтяганні навантаженнями $q = \text{const}$ циліндричний стержень довжиною ℓ отримує абсолютне подовження $\Delta\ell = \ell_1 - \ell$ (Рис.7.4). Відношення абсолютного подовження до початкової довжини бруса називається **відносною повздовжньою деформацією** або **відносним подовженням** (скороченням).

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta\ell}{\ell}. \quad (7.4)$$

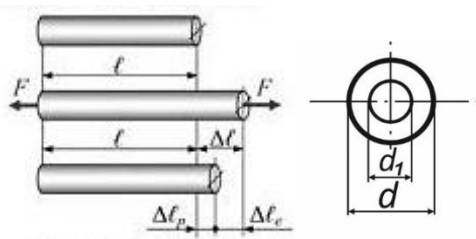


Рисунок 7.4 - Зміна розмірів бруса при центральному розтяганні

Розтягання стержня супроводжується зменшенням його поперечних розмірів. Відношення абсолютного звуження $\Delta d = d - d_1$ до початкового розміру поперечного перерізу d називається відносною поперечною деформацією $\varepsilon'_x = \frac{\Delta d}{d}$. Відношення відносної поперечної деформації до подовжньої, взяте за абсолютною величиною, тобто

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'_x}{\varepsilon_x} \right| \quad (7.5)$$

є сталою для даного матеріалу і називається **коефіцієнтом Пуассона**. Для сталі $\mu = 0,24 \dots 0,3$; для чавуну $\mu = 0,23 \dots 0,27$.

В результаті дослідів над деформаціями пружних тіл встановлено, що діючі напруження пропорційні відносній деформації. Ця умова називається **законом Гука**:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x, \quad (7.6)$$

де E – коефіцієнт пропорційності, який називається модулем пружності першого роду (модуль пружності при розтяганні – стисканні). Він характеризує пружні властивості матеріалу. Для сталі $E = 200 \dots 210$ ГПа; для чавунів $E = 115 \dots 160$ ГПа. Якщо у (7.5) підставити значення σ_x і ε_x із (7.1), (7.2), то отримуємо іншу формулу запису **закону Гука**:

$$\Delta \ell = \frac{N \ell}{E \cdot A}. \quad (7.7)$$

Добуток EA називають жорсткістю бруса при розтяганні (стисканні).

Формула міцності. При розрахунках на міцність деталі, яка працює на розтягання або стискання, виникає питання: яке значення σ можна вважати безпечним? Очевидно, що ці напруження повинні бути менше деякого небезпечного $\sigma_{нб}$, при якому виникає можливість руйнування деталі або порушується умова нормальної її експлуатації. Найбільше безпечне значення напруження називається **допустимим напруженням** і позначається $[\sigma]$. Тоді **умова міцності при розтяганні** (стисканні) буде мати вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma], \quad (7.8)$$

де N_{\max} – максимальне значення нормальної сили.

Допустиме напруження визначається у частинах від небезпечного:

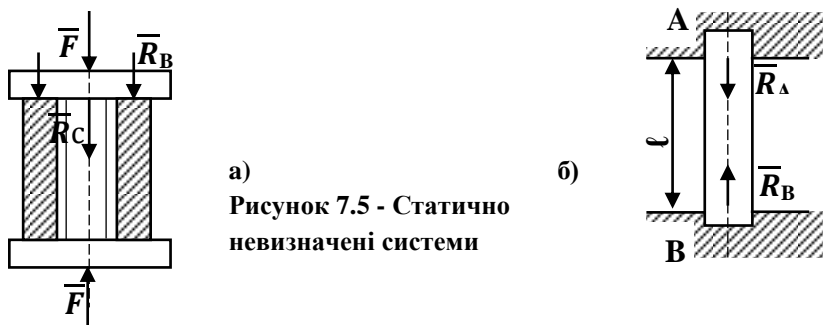
$$[\sigma] = \frac{\sigma_{нб}}{n}, \quad (7.9)$$

де n - коефіцієнт запасу (безпеки).

7.3 Статично невизначувані системи

Послідовність розв'язку задачі. Статично невизначуваною називається система, у якої невідомих внутрішніх сил більше тієї кількості рівнянь, яке дає статика у відношенні до даної задачі. Визначення зусиль у статично невизначених конструкціях можлива лише при врахуванні деформацій, які виникають у цих конструкціях.

Порядок розв'язку статично невизначуваних задач розглянемо на прикладі деформації стержня і втулки (із різних матеріалів) затиснутих між двома жорсткими плитами (Рис.7.5, а).



а)
Рисунок 7.5 - Статично невизначені системи

1. Умовно відкинемо закріплення, які викликають появу «зайвих» реакцій опор. Дію відкинутих закріплень заміщуємо прикладеними невідомими реакціями.

У розглядуваному прикладі реакцію стержня позначимо R_C , втулки R_B .

2. Для отриманої основної системи складаємо рівняння статички:

$$\sum P_x = R_B + R_C - F = 0. \quad (7.10)$$

3. Як додаткові рівняння залучаємо рівняння сумісності деформацій, рівняння переміщень, які відтворюють фізичні умови деформації системи.

Загальне число рівнянь статички і рівнянь спільності повинно дорівнювати кількості невідомих реакцій. У зв'язку з тим, що під дією зовнішніх сил втулка і стержень отримують однакові скорочення рівняння спільності $\Delta \ell_B = \Delta \ell_C$ при використанні формули Гука:

$$\frac{R_B \cdot \ell_B}{E_B \cdot A_B} = \frac{R_C \cdot \ell_C}{E_C \cdot A_C}.$$

Розв'язавши це рівняння разом з рівнянням (7.10), отримаємо:

$$R_B = \frac{F}{1 + \frac{E_C \cdot A_C}{E_B \cdot A_B}}, \quad R_C = \frac{F}{1 + \frac{E_B \cdot A_B}{E_C \cdot A_C}}.$$

За знайденими зусиллями R_B і R_C далі визначимо напруження і деформації, як вказано вище.

Температурні напруження. Зміна температури елементів статично невизначеної системи призводить до появи у них температурних напружень. Якщо стержень початкової довжини ℓ мав можливість вільно розширятися і його температура змінюється від t_1 до t_2 , то температурне подовження $\Delta \ell_t$ можна підрахувати за формулою

$$\Delta \ell_t = \alpha \cdot \ell \cdot (t_2 - t_1), \quad (7.11)$$

де α – коефіцієнт лінійного температурного розширення стержня.

Розглянемо напруження, які виникають у стержні довжиною ℓ , затиснутого з кінців (Рис.7.5, б) при температурі t_1 , в разі підвищення температури до t_2 . При підвищенні температури виникають реакції \bar{R}_A

і \bar{R}_B , які перешкоджають подовженню стержня. Рівняння рівноваги $\sum F_x = 0$, тобто $R_A - R_B = 0$, отже $R_A = R_B$.

Рівняння спільності деформацій складаємо із наступних міркувань. Якби опори А не було, то під дією підвищення температури стержень подовжився б на величину $\Delta\ell_t$. Але реакція R_A стискає стержень на величину $\Delta\ell_A$. Очевидно $\Delta\ell_t - \Delta\ell_A = 0$.

За законом Гука

$$\Delta\ell_A = \frac{R_A \cdot \ell}{E \cdot A},$$

отже з врахуванням (7.9):

$$\alpha\ell(t_2 - t_1) = \frac{R_A \ell}{(E \cdot A)} \quad \text{і} \quad R_A = \alpha EA(t_2 - t_1),$$

звідки температурне напруження:

$$\sigma = \frac{R_A}{A} = \alpha E(t_2 - t_1). \quad (7.12)$$

7.4 Механічні характеристики матеріалів

Основні характеристики металів. При розрахунках на міцність деталей механізмів необхідно знати механічні характеристики матеріалів: міцність, пружність яка характеризується модулем пружності першого роду E і коефіцієнтом Пуассона μ , твердість (здатність даного тіла протистояти проникненню в нього другого тіла шляхом пружного або пластичного деформування або шляхом руйнування частини поверхні тіла), пластичність (яка характеризує здатність матеріалу давати залишкову деформацію).

Механічні характеристики визначаються на спеціальних машинах і приладах при випробуванні зразків, виготовлених із даного матеріалу. Розрізняють випробування на міцність, стискання, згинання,

зсув, кручення і т.д. Більшість механічних характеристик прямо або побічно можна визначити за випробуваннями на розтягання, які проводяться для металів у відповідності зі стандартом 1497-84.

Випробування на розтягання. На розтягання випробовуються зразки (Рис.7.6) які мають робочу частину довжиною ℓ і головки, які призначені для закріплення у захватах випробувальної машини.

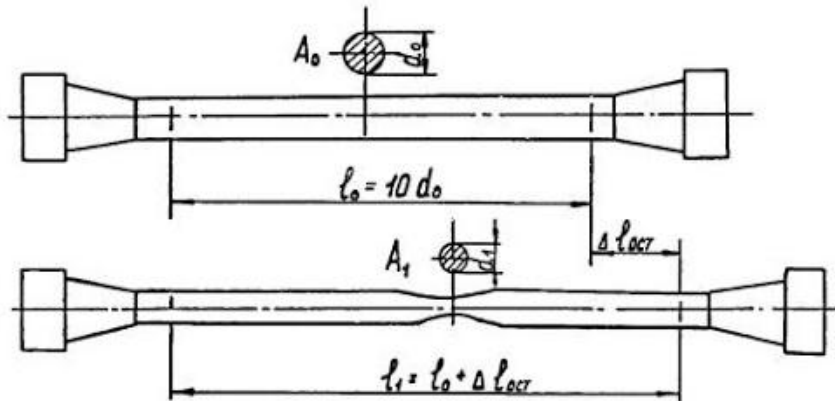


Рисунок 7.6 – Зразок для випробування на розтягання

Подовження визначається на початковій розрахунковій довжині ℓ_0 зразка. Частіше всього використовуються циліндричні зразки. Відношення розрахункової довжини до початкового діаметру ℓ_0/d_0 у «довгих» зразків прийнято рівним 10, у «коротких» $\ell_0/d_0 = 5$. Застосовуються також зразки прямокутного перерізу. Розрахункова довжина їх ℓ_0 пов'язана з початковою площиною поперечного перерізу A_0 такими ж залежностями, як і у циліндричних зразків:

$$\ell_0 = 11,3\sqrt{A_0} \text{ – довгі зразки і } \ell_0 = 5,65\sqrt{A_0} \text{ – короткі зразки.}$$

Діаграма розтягання. Під час випробувань на розтягання отримують залежність подовження $\Delta \ell$ від навантаження F у вигляді діаграми розтягання. На (Рис.7.7) наведена діаграма для маловуглецевої сталі. Діаграми мають ряд характерних точок. На ділянці ОА діаграма прямолінійна – розтягання відбувається у

відповідності закону Гука.

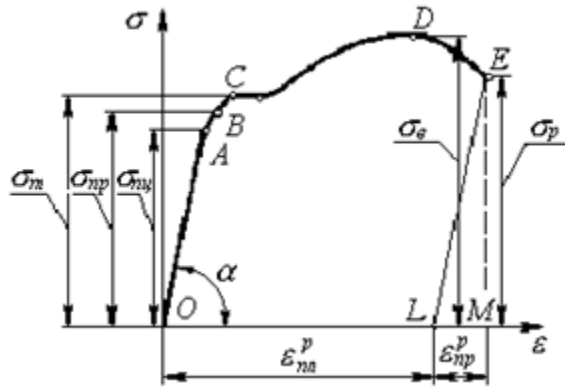


Рисунок 7.7 - Діаграма розтягання для маловуглецевої сталі

При подальшому збільшенні навантаження, прямо-пропорційність між F і Δl порушується, але зразок зберігає пружні властивості включно до точки B . За цією точкою виникають вже помітні залишкові деформації. Починаючи з точки C подовження зразка відбувається без помітного збільшення зовнішнього навантаження. Матеріал, як говорять, «пливе». Під час плину відбувається перебудова кристалічних решіток матеріалу зразка, він стає більш міцним. Ця ділянка називається площадкою текучості.

Далі для збільшення подовження Δl необхідно збільшити зовнішню силу F . Але при цьому співвідношення між F і Δl закону Гука не відповідає. По досягненню на діаграмі точки D на зразку утворюється так звана «шийка» – місцеве зменшення перерізу. «Шийка» швидко розвивається. При цьому значення зовнішнього навантаження зменшується. Хоча напруження зростає і в точці E відбувається розрив зразка.

Діаграму розтягання звичайно перебудовують у більш зручну систему координат σ_x і ϵ_x . Форма діаграми при цьому не змінюється. Найбільше напруження до якого матеріал відповідає закону Гука,

називається **границею пропорційності** $\sigma_{\text{пц}}$. **Границею пружності** $\sigma_{\text{пр}}$ називається найбільше напруження, до якого матеріал не отримує значних остаточних деформацій. **Границя текучості** – напруження при якому відбувається зростання деформації без помітного збільшення сили F . **Границя міцності** $\sigma_{\text{в}}$ – відношення максимальної сили F , яку витримує зразок, до його початкової площини поперечного перерізу.

Визначення допустимого напруження. Визначення величини допустимого напруження являється однією з важливих задач розрахунків на міцність. Як витікає із визначення $[\sigma] = \sigma_{\text{нб}}/n$, допустиме напруження отримують як частину величини напруження $\sigma_{\text{оп}}$, яке відповідає небезпечному стану матеріала, $\sigma_{\text{нб}}$ визначається під час механічних випробувань. Для того щоб уникнути залишкових деформацій, за величину $\sigma_{\text{нб}}$ для пластичних матеріалів приймають границю текучості $\sigma_{\text{т}}$. У цьому випадку коефіцієнт запасу називають коефіцієнтом запасу по границі текучості $n_{\text{т}}$. Тому $[\sigma] = \sigma_{\text{т}}/n_{\text{т}}$.

Для крихких матеріалів (чавун, високовуглецеві загартовані сталі і др.) за $\sigma_{\text{нб}}$ приймають границю міцності $\sigma_{\text{в}}$, а під n розуміють коефіцієнт запасу за границею міцності, тому $[\sigma] = \sigma_{\text{в}}/n_{\text{в}}$.

Твердість. Для визначення твердості матеріалу використовують методи Брінелля, Роквелла і Віккерса.

Числом твердості за **Брінеллем** називається відношення навантаження F , з яким вдавлюють загартовану кульку у шліфовану поверхню зразка до площини A отриманого при цьому відбитка:

$$HB = \frac{F}{A}$$

У відповідності з стандартом застосовують кульки діаметром 2,5, 5 і 10 мм. Мінімальна товщина випробуваного зразка повинна бути не менша за десятикратну глибину відбитку.

За методом Роквелла про твердість уявляють по різниці глибин

на які проникає алмазний конус або сталеві кульки діаметром $1,5 \times 75$ мм під дією двох послідовних навантажень (попереднього і загального). Для визначення числа твердості застосовують дві шкали. За шкалою *B* при вдавлюванні сталеві кульки число твердості позначається HRB. Для більш твердих матеріалів за шкалою *C* число твердості позначається HRC (якщо вдавлюється алмазний конус).

Число твердості за Віккерсом $HV = \frac{F}{A}$ - є відношення навантаження *F*, яке вдавлює алмазну піраміду у поверхню зразка, до площі бокової поверхні отриманого пірамідального відбитку.

8 ЗСУВАННЯ

Деформації зсування. Дотичні напруження викликають кутові деформації, так зване зсування. Вони характеризуються викривленням прямого кута між двома взаємно перпендикулярними волокнами, взятими у деформованому тілі. Розглянемо плоский елемент BCDE (Рис.8.1) пружного тіла, яке знаходиться під дією сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, який зазнав кутової деформації. **Абсолютне зсування** елементарного відрізка CD відносно відрізка BE, який знаходиться від нього на малій відстані h , буде $CC_1=a$.

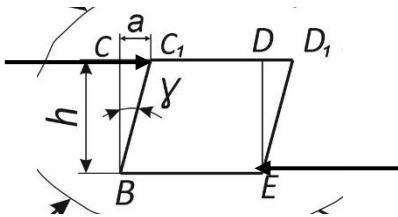


Рисунок 8.1 – Визначення абсолютного та відносного зсувів елемента деформованого тіла

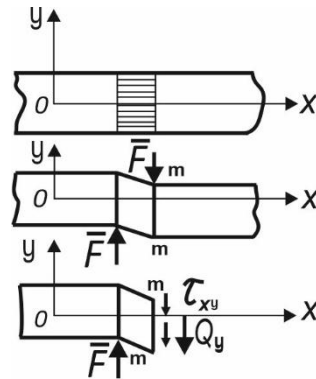


Рисунок 8.2 – Сили пружності в брусі при зсуванні

Відносним зсуванням називається відношення a/h . Оскільки деформації дуже малі і практично не змінюють попередніх розмірів тіла, то

$$\frac{a}{h} = \operatorname{tg} \gamma = \gamma, \quad (8.1)$$

де γ – відносний кут зсуву.

Закон Гука при зсуванні. Нехай на брусок (Рис.8.2) з площею поперечного перерізу A діють сили зсування F . Скористаємося методом перерізів. Умовно відкинемо частину бруса, яка знаходиться поруч від

перерізу $m-m$. Дію відкинutoї частини на залишену замінимо силами пружності τ_{xy} , діючими у перерізі $m-m$.

Рівнодіюча цих сил є поперечна сила Q_y . Умова рівноваги залишеної частини має вигляд:

$$\sum F_{yi} = F - Q_y = 0, \quad (8.2)$$

звідки $Q_y = F$. Оскільки можна вважати, що дотичні напруження τ_{xy} напрямлені вертикально і по перерізу розподіляються рівномірно, їх значення:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y}{A} = \frac{F}{A}. \quad (8.3)$$

Відносна деформація і напруження при зсуванні пов'язані законом Гука:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad (8.4)$$

де G – коефіцієнт пропорційності, який називається модулем пружності другого роду (модулем зсуву).

У загальному вигляді відношення між модулем зсування, модулем пружності першого роду E і коефіцієнтом Пуассона μ виражається формулою:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (8.5)$$

Для сталі $G = 77 \dots 85$ ГПа, для чавуну сірого $G = 45$ ГПа. **Закон Гука при зсуванні**, приймаючи до уваги вирази (8.1 і 8.3) можна записати у вигляді:

$$a = \frac{Q_y \cdot h}{G \cdot A}.$$

Добуток GA називається **жорсткістю бруса** при зсуванні.

Умова міцності. Для розрахунків на зрізання умова міцності має вигляд:

$$\tau_{xy \max} = \frac{Q_y \max}{A} \leq [\tau_{cp}], \quad (8.6)$$

де $[\tau_{cp}]$ – допустиме напруження на зрізання. Воно вибирається частіше всього як частина допустимого напруження на розтягання:

$$[\tau_{cp}] = (0,5 \dots 0,6) \cdot [\sigma].$$

9. КРУЧЕННЯ

Деформації. Під дією на стержень пари сил, площини дії яких перпендикулярні до осі стержня, відбувається деформація кручення. Спостерігаючи характер спотворення сітки прямокутників, накреслених на боковій поверхні круглого стержня, можна побачити, що контури поперечних перерізів під час деформації залишаються плоскими, відстань між ними не змінюється, початкові прямолінійні утворюючі перетворюються у гвинтові лінії (Рис. 9.1). Радіуси перерізів при деформації залишаються прямолінійними.

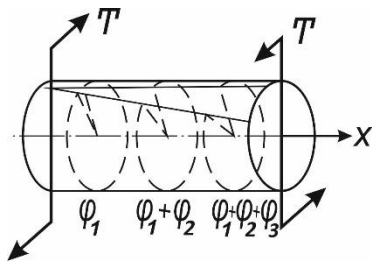


Рисунок 9.1 – Схема деформації при крученні круглого бруса

Поперечні перерізи залишаються плоскими, тільки повертаються навколо осі один відносно другого на деякий кут $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ і т.д. Двома суміжними перерізами виділимо елемент деформованого бруса радіусом r у вигляді диску товщиною dx (Рис. 9.2). На поверхні елемента розглянемо елементарний прямокутник $abcd$. Виділений елементарний прямокутник зазнає деформацію зсування: aa' – абсолютне зсування і $\frac{aa'}{dx} = \operatorname{tg} \gamma_{xt} \approx \gamma_{xt}$ – відносне зсування (кут зсування).

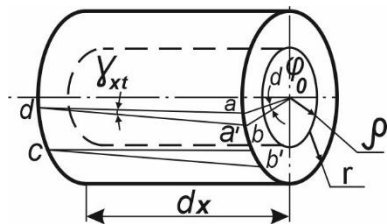


Рисунок 9.2 – До визначення абсолютного та відносного зсування при крученні

Із (Рис.9.2) виходить, що $aa' = r d\varphi$. Тоді $\gamma_{xt} = \frac{rd\varphi}{dx}$. Для прямокутника, виділеного всередині бруса на циліндрі радіусом ρ , по аналогії запишемо:

$$\gamma_{xt} = \frac{\rho d\varphi}{dx}. \quad (9.1)$$

Напруження. У відповідності з законом Гука при зсуві можна записати:

$$\tau_{xt} = \sigma \cdot \gamma_{xt} = G \frac{\rho d\varphi}{dx}. \quad \dots \quad (9.2)$$

Як видно із виразу 9.2, по даному перерізу дотичні напруження змінюються лінійно від нуля у центрі перерізу до максимальних на поверхні бруса (Рис.9.3, б):

$$\tau_{xt \max} = \frac{rd\varphi}{dx} G. \quad (9.3)$$

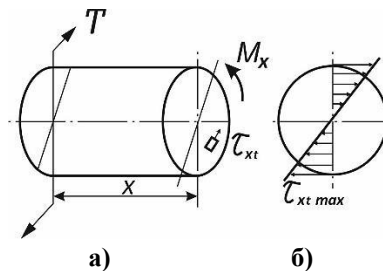


Рисунок 9.3 – Напруження при крученні круглого бруса

Скористуємося методом перерізів і розглянемо рівновагу частини бруса довжиною x (Рис.9.3, а), яка лежить ліворуч від перерізу. Складемо рівняння рівноваги у формі $\sum M_{xi} = 0$. Момент T зовнішньої крутильної пари зрівноважується крутильним моментом M_x внутрішніх сил пружності, розподілених у поперечному перерізі: $-T + M_x = 0$. Крутильний момент M_x дорівнює сумі моментів відносно

подовжньої осі елементарних дотичних сил пружності:

$$M_x = \int_A \rho \tau_{xt} dA.$$

Після підстановки значення τ_{xt} із формули (9.3) отримаємо:

$$M_x = \frac{d\varphi}{dx} G \int_A \rho^2 dA \quad \text{або} \quad M_x = G \frac{d\varphi}{dx} J_\rho, \quad (9.3')$$

де

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA$$

– полярний момент інерції поперечного перерізу стержня. Для круглого перерізу діаметром d полярний момент інерції

$$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Для кільцевого перерізу з зовнішнім діаметром d внутрішнім d_0 полярний момент інерції:

$$J_\rho = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_0^4).$$

Із формули (9.3') витікає:

$$G \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{J_\rho}. \quad (9.4)$$

Після підстановки значення для $G \frac{d\varphi}{dx}$ у вираз (9.2), отримаємо:

$$\tau_{xt} = \frac{M_x \cdot \rho}{J_\rho}, \quad (9.5)$$

де M_x – крутильний момент у даному перерізі, чисельно дорівнює сумі моментів всіх сил, що діють по один бік від перерізу відносно

подовжньої осі;

ρ – відстань від точки, у якій необхідно визначити напруження, до центру ваги перерізу;

J_ρ – полярний момент інерції перерізу.

Умова міцності. Із формули (9.4) маємо, що дотичні напруження у перерізі змінюються по лінійному закону. Відповідно:

$$\tau_{xt} = \frac{M_{x \max} \cdot \rho_{\max}}{J_\rho} = \frac{M_{x \max}}{W_\rho} \leq [\tau], \quad (9.6)$$

де W_ρ – полярний момент опору перерізу, м³.

Для круга:

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{\max}} = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{32d} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Момент зовнішньої крутильної пари через потужність і частоту обертання визначається так:

$$T = 9,55 \frac{N}{n} \text{ (кН} \cdot \text{м)}, \quad (9.7)$$

де N – потужність, кВт; n – частота обертання, об/хв.

Із виразу 9.7 можна знайти відносний кут закручування:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GJ_\rho},$$

де GJ_ρ – жорсткість бруса при крученні.

Полярний кут повороту φ одного перерізу відносно другого розташованого від нього на відстані ℓ , отримаємо, інтегруючи вираз:

$$d\varphi = \frac{M_x dx}{GJ_\rho}$$

у границях від 0 до φ і від 0 до ℓ :

$$\varphi = \frac{M_x \ell}{GJ_\rho}. \quad (9.8)$$

Із виразу (9.8) отримаємо **умову жорсткості**:

$$\varphi_{max} = \frac{M_x \max \ell}{GJ_\rho} \leq [\varphi], \quad (9.9)$$

де $[\varphi]$ – допустимий кут закручування на довжині ℓ стержня.

Діаметр поперечного перерізу визначають із умови міцності і жорсткості і приймають більший.

10 ЗГИНАННЯ

10.1 Типи брусів і опор

Плоске згинання. Розглянемо брус циліндричної форми з прямолінійною віссю. Брус зазнає плоского згинання, якщо сили і моменти, які згинають брус, розташовані у площині, яка проходить через його подовжню вісь і одну із головних центральних осей інерції перерізу. Горизонтальний брус, який закріплено на опорах і зазнає деформації згинання, називається балкою.

Розрізняють статично визначувані і статично невизначувані бруси. Існує три типи статично визначених брусів: шарнірно закріплений (Рис. 10.1, а), консольний (Рис.10.1, б) і консоль (Рис.10.1, в). На (Рис.10.1, г) наведена схема статично невизначуваного двох прольотного бруса.

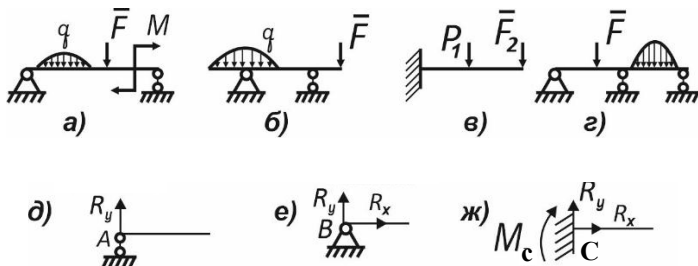


Рисунок 10.1 – Розрахункові схеми та опорні закріплення брусів при згинанні

Опорні реакції. Розрізняють три види основних типів опор:

1. Шарнірно-рухома опора А (Рис.10.1, д) може сприймати вертикальне навантаження, в цій опорі виникає тільки вертикальна реакція \bar{R}_y ;

2. Шарнірно нерухома опора В (Рис.10.1, е) сприймає вертикальні і горизонтальні зусилля, в ній виникають горизонтальні і

вертикальні реакції \bar{R}_x і \bar{R}_y ;

3. Жорстке затиснення С (Рис.10.1,ж) сприймає вертикальне, горизонтальне і опорний момент – реакції \bar{R}_x , \bar{R}_y і M_R .

Під дією зовнішніх навантажень у місцях защемлення бруса виникають опорні реакції. Для визначення опорних реакцій у статично визначеному брусі досить скласти три рівняння статики. Для статично невизначеного бруса додають рівняння сумісності деформацій.

10.2 Епюри поперечних сил і згинаючих моментів

Згинаючий момент. Розглянемо брус (Рис.10.2, а) який знаходиться під дією чотирьох сил величиною F . Брус знаходиться у рівновазі. Визначимо внутрішні сили пружності, які діють по довільному перерізу $m - m$ на ділянці ВС.

Застосуємо метод перерізів. Якщо знехтувати силами ваги, то рівняння рівноваги для частини бруса, яка знаходиться ліворуч від перерізу $m - m$ (Рис.10.2, б), запишуться у вигляді:

$$\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0; \sum M_{io} = 0;$$

$$\text{Звідки} \quad N_x = 0, Q_y = 0, F \cdot a - M_z = 0. \quad (10.1)$$

де N_x і Q_y – проекції головного вектора внутрішніх сил пружності на осі x і y відповідно;

M_z – момент внутрішніх сил пружності, що діють по перерізу з боку правої частини бруса на ліву.

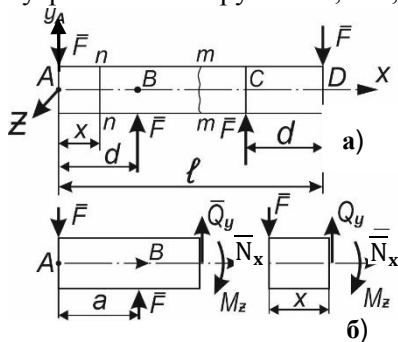
З третього рівняння системи (10.1), витікає, що внутрішні сили пружності, що діють по поперечному перерізу, розташованому на ділянці ВС, повинні зводитись до моменту, рівного за величиною моменту $F \cdot a$ зовнішніх сил, що діють з одного боку від розглянутого перерізу.

Момент внутрішніх сил пружності відносно нейтральної осі oz , що проходить через центр ваги розглянутого перерізу, чисельно

дорівнює моменту зовнішніх сил, прикладених до бруса по одну сторону від даного перерізу відносно цієї ж осі, називається **згинаючим моментом**.

Отже на ділянці ВС згинаючі моменти, які діють у різних перерізах, чисельно дорівнюють одному і тому ж значенню $F \cdot a$. Навантаження бруса двома рівними моментами, що діють в одній центральній площині і прикладені з його кінців, називається **чистим згинанням**.

Поперечна сила. Інакше положення буде на ділянках бруса АВ і СД. Проведемо переріз $n - n$ на ділянці АВ. На частину бруса, що лежить ліворуч від цього перерізу, з боку відкинутої частини діють внутрішні сили пружності, які, як відомо, зводяться до згинаючого



моменту M_z і поперечної сили Q_y (Рис.10.2, б). Умова рівноваги для цього випадку приймають вигляд:

$$\begin{cases} -F + Q_y = 0, \\ F \cdot x - M_z = 0 \end{cases} \quad N_x = 0 \quad (10.2)$$

Рисунок 10.2 – Згинальний момент та поперечна сила при згинанні

Отже, для перерізу $n - n$, довільно взятого на ділянці АВ, внутрішні сили пружності зводяться до згинаючого моменту $M_z = F \cdot x$ і рівнодіючої внутрішніх сил $Q_y = F$.

Рівнодіюча внутрішніх сил пружності, діючих у даному перерізі, чисельно рівна сумі проєкцій на вертикальну вісь усіх зовнішніх сил, що діють по одну сторону перерізу і називається **поперечною (перерізуючою) силою**. Далі поперечну силу і згинаючий момент будемо позначати Q_y і M_z . Якщо у довільному перерізі бруса спільно діють Q_y і M_z , то вид навантаження у цьому випадку називається **поперечним згинанням**.

Поперечна сила Q_y повертає відрізану частину балки за

годинниковою стрілкою (Рис.10.3, а).

Згинальний момент M діє так, що верхні волокна балки укорочуються, а нижні подовжуються (Рис.10.3, б).

Ці напрямлення вважаються додатними.

Поперечна сила Q в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх навантажень (крім зосереджених моментів), діючих по один бік від перерізу, що розглядається.

Згинальний момент M дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх зовнішніх навантажень відносно точки перерізу, що діють по один бік перерізу.

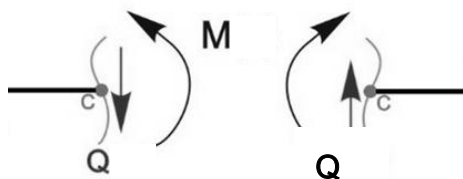


Рисунок 10.3 - Правила знаків для згинального моменту та поперечної сили

Побудова епюр. Графіки зміни поперечних сил і згинаючих моментів вздовж центральної осі бруса називаються **епюрами**. Побудову епюр поперечних сил і згинаючих моментів у більшості випадків починають з визначення реакцій опор.

Визначивши реакції, брус розбивають на ділянки, в подовж яких навантаження однорідне. Для кожної ділянки складають загальні рівняння для Q і M для чого розглядають довільний переріз в границях даної ділянки, і будують епюри, задаючи аргументу x довільне значення в межах тієї ж ділянки.

Приклад 1.

Порядок побудови епюр розглянемо на прикладі шарнірно закріпленого бруса, навантаженого зосередженою силою (Рис.10.4, а):

Реакції опор балок відносяться до зовнішніх навантажень. Тому

побудову епюр починають з визначення реакцій опор. Так як на балку діє плоска паралельна система сил, використовуємо два рівняння рівноваги $\sum M_{Ai} = 0$; $\sum M_{Bi} = 0$. Третє рівняння має значення перевірного.

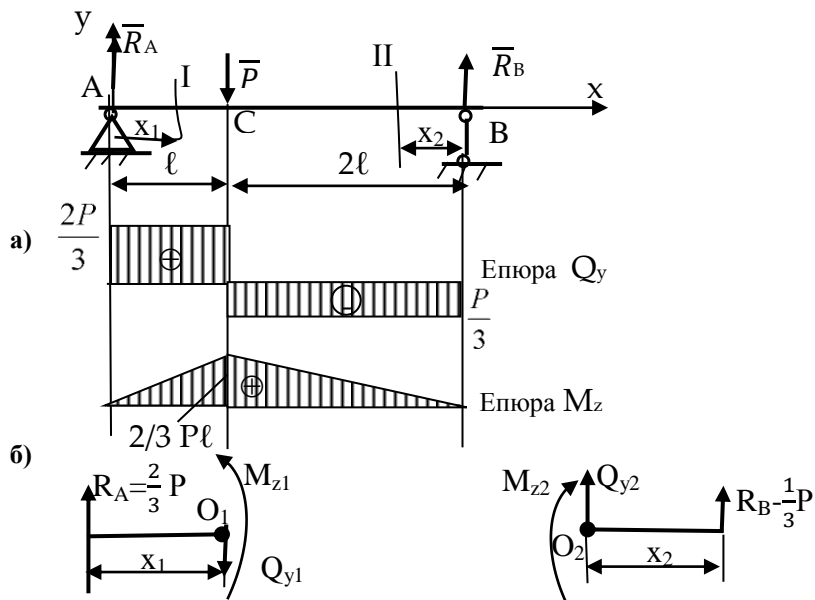


Рисунок 10.4 - Побудова епюр внутрішніх зусиль шарнірно закріпленого бруса

Порядок визначення реакцій опор:

1. Вибирають систему координатних осей

2. Вибирають напрямки невідомих реакцій і складають рівняння статки (Рис.10.4, а):

$$1) \sum M_{Ai} = 0;$$

$$2) \sum M_{Bi} = 0;$$

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad R_B \cdot 3l - P \cdot l = 0 \quad R_B = \frac{P \cdot l}{3l} = \frac{P}{3};$$

$$\sum M_{Bi} = 0 \quad -R_A \cdot 3l + P \cdot 2l = 0 \quad R_A = \frac{2}{3} P.$$

3) $\sum P_{yi} = 0$ - за цим рівнянням здійснюється перевірка вірності визначення реакцій.

$$\sum P_{yi} = 0; \quad R_A - P + R_B = 0 \quad \frac{2}{3}P - P + \frac{P}{3} = 0.$$

Після визначення і перевірки реакцій опор, використовуючи метод перерізів, розподіляють балку на ділянки визначають внутрішні зусилля Q_y і M_z по ділянках (Рис.10.4 б, в). Вирішуємо разом рівняння $\sum P_{yi} = 0$ та $\sum M_i = 0$.

I ділянка $0 \leq x_1 \leq \ell$

$$\sum P_{yi} = 0 \quad Q_y - R_A = 0 \quad Q_y = R_A = \frac{2}{3}P$$

$$\sum M_{O1i} = 0 \quad M_{z1} - R_A \cdot x_1 = 0 \quad M_{z1} = R_A \cdot x_1 = \frac{2}{3}P \cdot x_1$$

$$\text{При } x_1=0 \quad M_z=0; \quad \text{при } x_1=\ell \quad M_{z1}=\frac{2}{3}P\ell$$

II ділянка $0 \leq x_2 \leq 2\ell$

$$\sum P_{yi} = 0 \quad Q_y + R_B = 0 \quad Q_y = -R_B = -\frac{1}{3}P$$

$$\sum M_{O2i} = 0 \quad M_{z2} - R_B \cdot x_2 = 0 \quad |M_{z2} = R_B \cdot x_2 = \frac{1}{3}P \cdot x_2$$

$$\text{При } x_2=0 \quad M_{z2}=0; \quad \text{при } x_2=2\ell \quad M_{z2}=\frac{1}{3}P \cdot 2\ell = \frac{2}{3}P\ell$$

Відкладаємо отримані значення Q_y і M_z на епюрах (в довільно вибраному масштабі) (див. Рис. 10.4 а).

Приклад: 2

Порядок побудови епюр розглянемо на прикладі консольної балки. Так як на балку діє плоска паралельна система сил, то в опорі А виникає тільки вертикальна реакція \bar{R}_A і опорний момент M_A . Оскільки балка консольна, то можлива побудова епюр без визначення

опорних реакцій. Починаючи з вільного кінця, розподіляємо балку на ділянки і складаємо рівняння рівноваги для кожної ділянки:

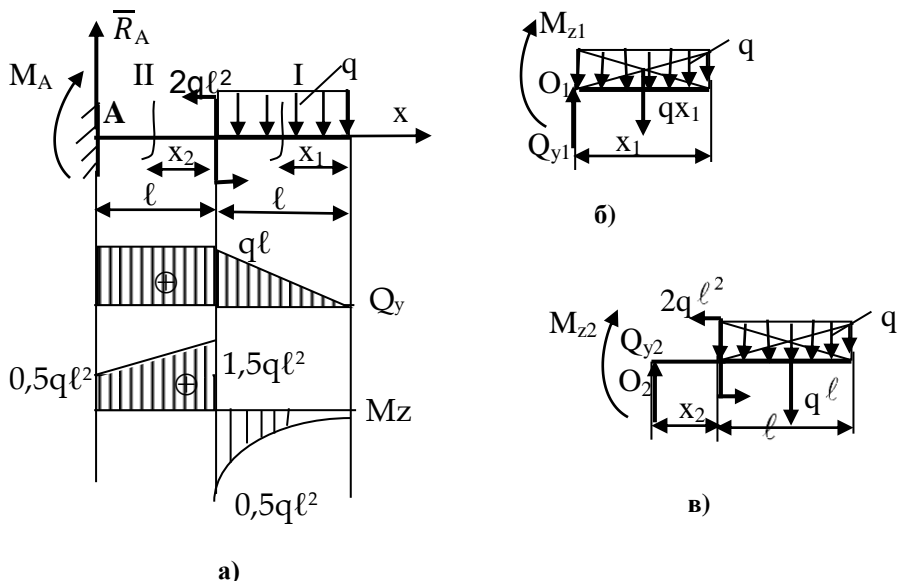


Рисунок 10.5 - Побудова епюр внутрішніх зусиль консольної балки

I ділянка $0 \leq x_1 \leq l$

Замінюємо розподілене навантаження на ділянці x_1 , на рівнодійну. Вона дорівнює qx_1 і прикладена на середині ділянки x_1 .

$$\text{Тоді: } \sum P_{yi} = 0 \quad Q_{y1} - q \cdot x_1 = 0 \quad Q_{y1} = q \cdot x_1$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad Q_{y1} = 0; \quad \text{При } x_1 = l \quad Q_{y1} = ql$$

$$\sum M_{O1i} = 0 \quad M_{z1} + qx_1 \frac{x_1}{2} = 0 \quad |M_{z1} = -q \frac{x_1^2}{2} .$$

$$\text{При } x_1=0 \quad M_{z1}=0; \quad \text{при } x_1=l \quad M_{z1} = -\frac{ql^2}{2} .$$

Треба зазначити, що оскільки x_1 в цьому рівнянні в квадраті, то епора буде у вигляді квадратної параболи (Рис.10.5, б).

II ділянка $0 \leq x_2 \leq l$

На другій ділянці навантаження розподілене на довжині ℓ , то рівнодійна цього навантаження дорівнює $q\ell$ і прикладена в середині I ділянки. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum P_y = 0 \quad Q_y - q\ell = 0 \quad Q_y = q\ell$$

$$\sum M_{O2i} = 0$$

$$M_{x2} - 2q\ell^2 + q\ell\left(\frac{\ell}{2} + x_2\right) = 0 \quad M_{x2} = 2q\ell^2 - q\ell\left(\frac{\ell}{2} + x_2\right)$$

При $x_2=0$ $M_{x1}=2q\ell^2$; при $x_2=\ell$ $M_{x2}=0,5q\ell^2$.

В цьому рівнянні x_2 входить в першій степені, тому епюра буде лінійною.

По отриманим значенням Q_y і M_z будуємо епюри (див. рис. 10.5, в).

В якості перевірки можна скласти наступні рівняння рівноваги :

$$\sum P_y = 0 \quad R_A - q\ell = 0 \quad R_A = -q\ell.$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_A + 2q\ell^2 - q\ell 1,5\ell = 0 \quad M_A = 0,5 q\ell^2.$$

що підтверджується побудованою епюрою.

10.3 Основні диференційні залежності при згинанні

Зв'язок між згинаючим моментом і поперечною силою.
Розглянемо поперечне згинання бруса навантаженого зосередженою силою (Рис.10.4). У перерізі взятому на відстані x від лівої опори, у межах другої ділянки діють поперечна сила і згинаючий момент:

$$Q_y = R_A - F; \quad M_{z/x} = R_A \cdot x - F(x - a). \quad (10.3)$$

Для перерізу, взятого на відстані $x+dx$ від лівої опори, запишемо так:

$$Q_{y/z+dz} = R_A - F,$$

$$M_{z/x+dx} = M_z + dM_z = R_A(x + dx) - F(x + dx - a) \quad (10.4)$$

Із рівнянь (10.3) і (10.4) знаходимо:

$$dM_z = M_{z/x+dx} - M_{z/x} = R_A dx - F dx; \quad dM_z = (R_A - F) dx.$$

Звідси маємо:

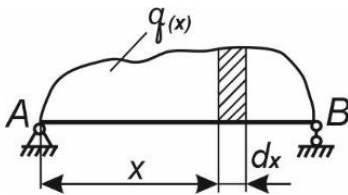
$$Q_y = \frac{dM_z}{dx}. \quad (10.5)$$

Зв'язок між поперечною силою і розподіленим навантаженням. Нехай у бруса АВ з розподіленим навантаженням інтенсивністю $q(x)$ (Рис.10.6) поперечна сила у довільному перерізі, взятому на відстані x від лівого кінця бруса, дорівнює Q_y . Тоді у перерізі з абсцисою $x+dx$ поперечна сила дорівнює Q_y+dQ_y .

Оскільки

$$dQ_y = q(x) dx, \quad q(x) = \frac{dQ_y}{dx}. \quad (10.6)$$

Якщо продиференціювати по x рівняння (10.5), то, з урахуванням (10.6) отримаємо:



$$q(x) = \frac{d^2 M}{dx^2}. \quad (10.7)$$

Рисунок 10.6 - До згинання бруса під дією розподіленого навантаження довільної інтенсивності

Рівняння (10.5 і 10.7) являються основними диференціальними залежностями при згинанні. Цю залежність можна використати як засіб контролю під час побудови епюр поперечних сил і згинаючих

моментів.

10.4 Нормальне напруження при чистому згинанні

Деформації. Брус постійного поперечного перерізу (рис.10.7,в) навантажимо зовнішнім моментом M_ρ , прикладеним до торців. Під їх дією брус зігнеться: його верхні волокна скоротяться, а нижні подовжають (Рис.10.7, б). В середній частині по висоті бруса знаходиться шар волокон, який не буде змінювати свою довжину – нейтральний. Положення цього шару NN заздалегідь невідоме. Лінія пересічення нейтрального шару з поперечним перерізом бруса називається **нейтральною віссю** або лінією.

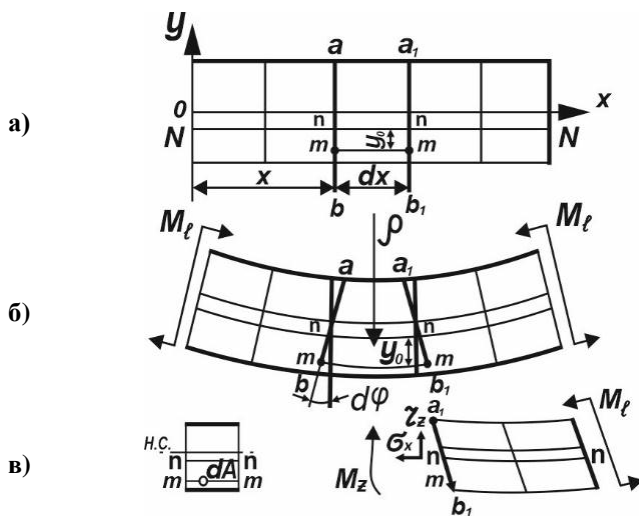


Рисунок 10.7 - Напруження при чистому згинанні

При згинанні справедлива гіпотеза плоских перерізів Бернуллі: перерізи, які були плоскими до деформації, залишилися плоскими і після деформації і лише повертаються відносно

відповідних нейтральних ліній.

Площинами, перпендикулярними до осі Ox , виділимо елемент бруса довжиною dx і розглянемо волокно $n - n$, розміщене у нейтральній площині, і волокно $m - m$ на відстані y_0 від $n - n$. До деформації $mn = nm = dx$. Під час деформації перерізи ab і a_1b_1 , повернулися одне від одного відносно другого на кут $d\varphi$. Нехай радіус кривизни нейтрального шару дорівнює ρ , тоді радіус кривизни волокон $m - m$ буде $\rho + y_0$. Після деформації волокно $n - n$ збереже свою довжину незмінною: $nn = dx = \rho d\varphi$, а волокно $m - m$ подовжиться: $mm = (\rho + y_0)d\varphi$.

Абсолютне подовження волокна:

$$\Delta dx = (\rho + y_0)d\varphi - \rho d\varphi = y_0 d\varphi.$$

Відносне подовження цього волокна:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{nn} = \frac{y_0 d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y_0}{\rho}. \quad (10.8)$$

Напруження. Умовно відкинемо частину бруса, яка лежить ліворуч від перерізу a_1b_1 і розглянемо рівновагу залишеної правої частини (Рис.10.7, в). По перерізу a_1b_1 буде діяти напруження, яке можна розкласти на нормальне σ_x і дотичне τ_{xy} складові. По елементарній площині dA діє нормальна сила $\sigma_x dA$, момент якої відносно нейтральної осі буде $\sigma_x y_0 dA = dM$. Оскільки поперечна сила при чистому згині дорівнює нулю і, приймаючи до уваги, що сила яка знаходиться у площині перерізу, не дає моменту відносно якоїсь осі, яка знаходиться у цій же площині, дотичні напруження τ_{xy} повинні дорівнювати нулю і у подальшому розгляді чистого згинання не враховуються. Запишемо рівняння рівноваги для правої частини бруса:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{xi} = \int_A \sigma_x dA = 0, \\ \sum M_{zi} = - \int_A \sigma_x y_0 dA + M_\ell = 0, \end{array} \right. \quad (10.9)$$

де y_0 – відстань від центра ваги площадки до осі.

Перше із рівнянь (10.9) дає

$$\int_A \sigma_x dA = 0.$$

У відповідності з законом Гука, враховуючи (10.8),

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \frac{y_0}{\rho}, \quad (10.10)$$

отже

$$\int_A \sigma_x dA = \int_A E \frac{y_0}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y_0 dA = 0, \text{ тобто } \int_A y_0 dA = 0.$$

Вираз $\int_A y_0 dA$ є статичним моментом площі перерізу відносно

нейтральної осі. Але статичний момент площі дорівнює нулю тільки відносно осі, яка проходить через центр ваги перерізу, отже нейтральна, лінія $n_1 - n_1$ також повинна проходити через центр ваги перерізу.

У відповідності з другим рівнянням (10.9) зовнішній момент виявляється рівним згинаючому моменту від дії нормальних напружень:

$$M_z = M_\ell = \int_A \sigma_x y dA \quad \text{або} \quad M_z = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E J_z}{\rho}, \quad (10.11)$$

де

$$J_z = \int_A y^2 dA$$

– осьовий момент інерції перерізу відносно нейтральної осі z.

У відповідності з виразом (10.11) запишемо:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E J_z}. \quad (10.12)$$

Тоді на базі виразу (10.10)

$$\sigma_x = E \frac{y}{\rho} = \frac{M_z \cdot y}{J_z}, \quad (10.13)$$

де M_z – згинаючий момент у заданому перерізі бруса;

y – відстань від точки, у якій визначається нормальне напруження, до нейтральної осі.

Умова міцності. Із формули (10.13) видно, що нормальне напруження по висоті перерізу змінюється по лінійному закону і, відповідно:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z \max \cdot Y_{max}}{J_z} = \frac{M_z \max}{W_z} \leq [\sigma], \quad (10.14)$$

де $W_z = \frac{J_z}{Y_{max}}$ – осьовий момент опору перерізу, м³;

для прямокутного перерізу $h \times b$, $W_z = \frac{bh^2}{6}$; для круга $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$;

$(h \times b)$ – розмір прямокутного перерізу.

Для прокатних профілів значення W_z наведені в таблиці [10, т.1]

11 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

11.1 Диференційне рівняння пружної лінії

Бруси, які застосовуються у інженерних спорудах, повинні мати не тільки достатню міцність, але і достатню жорсткість. Допустимі прогини встановлюються нормами. Форму зігнутої осі бруса можна визначити за допомогою виразу для кривизни [15]:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Підставляючи сюди значення $1/\rho$ із формули (10.12),

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z},$$

отримаємо

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \pm \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (11.1)$$

Оскільки для бруса постійного перерізу $J_z = const$, то права частина рівняння (10.1) залежить тільки від M_z . Якщо функція M_z відома, то диференційне рівняння (11.1) можна використати для визначення пружної лінії бруса. Рівняння це нелінійне і неоднорідне другого порядку. Інтегрування його пов'язане з великими труднощами. Але це рівняння можна спростити, якщо врахувати, що для більшості конструкцій максимальний прогин, звичайно складає дуже малу частину прольоту ℓ : $y_{max} \ll (0,003 \dots 0,002)\ell$

Отже кут повороту перерізу $\varphi(x)$ буде малий у порівнянні з одиницею $\left[\varphi(x) = \frac{dy}{dx} \ll 1\right]$ і вже зовсім мізерно мала у порівнянні з одиницею величина $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. Тоді можна покласти:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2y}{dx^2}$$

і задача пошуку рівняння пружної лінії зведеться до пошуку функції $y(x)$ із диференційного рівняння:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{M_z}{EJ_z}.$$

Якщо $M_z > 0$ кривизни $\frac{1}{\rho} > 0$; якщо $M_z = 0$ кривизна:

$$\frac{1}{\rho} = 0.$$

Отже, для прийнятої системі координат у правій частині диференційного рівняння необхідно поставити знак плюс:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_z}{EJ_z}, \quad (11.2)$$

де EJ_z – жорсткість бруса при згинанні;

$$J_z = \int_A y^2 dA$$

– момент інерції всього перерізу відносно нейтральної осі z .

11.2 Задача Ейлера

Критична сила. Розглянемо стержень з площею поперечного перерізу A (Рис.11.1), який стискається повздовжньою силою \bar{F} , лінія дії якої співпадає з геометричною віссю стержня. Якщо сила F невелика, то стержень буде зазнавати рівномірний тиск з напруженням

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

. Прикладаючи, крім того, невелику поперечну силу, можемо провокувати згин стержня, і він буде знаходитись у рівновазі, залишаючись зігнутим. Після зняття поперечної сили стержень стане знову прямолінійним. Стан, у якому знаходиться стержень під дією невеликої сили F , є **стійка рівновага**.

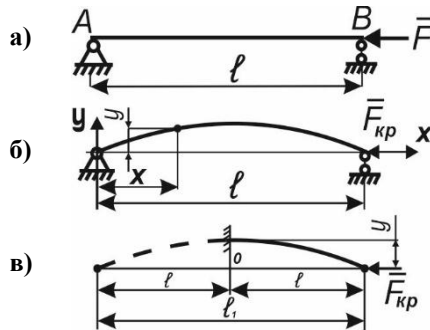


Рисунок 11.1 – Стійкість стиснутих стержнів

Якщо збільшити силу F , то після досягнення нею деякого значення рівновага стержня стає байдужою. Найменше значення осьової стискаючої сили, при якій стає рівноможливим дві форми рівноваги стержня (прямолінійна і криволінійна, безкінечно близькі одне до другої), називається **критичною силою**. У цьому випадку, коли величина сили досягла значення критичної, стержень знаходиться у стані нестійкої рівноваги. При цьому дія малої поперечної сили виведе стержень із рівноваги, виникає раптовий поперечний вигин його і руйнування.

Шарнірно закріплений стержень. Нехай стержень знаходиться у рівновазі, зберігаючи вигнуту форму під дією на нього критичної сили $\bar{F}_{кр}$ (Рис.11.1, б). У перерізі, що знаходиться на відстані x від початку координат, діє згинаючий момент:

$$M_z = -F_{\text{кр}} \cdot y. \quad (11.3)$$

Диференційне рівняння пружної лінії на основі виразу (11.2):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F_{\text{кр}} \cdot y}{EJ_z}, \quad (11.4)$$

звідки

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0, \quad (11.5)$$

де

$$k^2 = \frac{F_{\text{кр}}}{EJ_z}.$$

Диференційне рівняння (11.5) є лінійним однорідним другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Розв'язок рівняння (11.5) отримаємо у вигляді:

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \quad (11.6)$$

Довільні сталі C_1 і C_2 знаходимо із умови закріплення кінців стержня:

при $x = 0$, $y = 0$ і, відповідно, $C_1 = 0$;

при $x = \ell$, $y = 0$, $C_2 \sin k\ell = 0$.

Якщо $C_2 = 0$, то для рівняння (10.6) отримаємо тривіальний розв'язок: $y = 0$. Цей розв'язок відповідає рівновазі не викривленого стержня. Якщо $C_2 \neq 0$, то повинно бути $\sin k\ell = 0$. Але ця умова можлива тоді, коли $k\ell = 0; \pi, 2\pi, 3\pi \dots$.

Отже рівновага має місце коли

$$\ell \sqrt{\frac{F_{\text{кр}}}{EJ_z}} = 0; \pi; 2\pi; 3\pi; \dots$$

Перша умова $\left(\ell \cdot \sqrt{\frac{F_{\text{кр}}}{EJ_z}} = 0 \right)$ дає тривіальне рішення: $F_{\text{кр}} = 0$.

Друга умова $\left(\ell \cdot \sqrt{\frac{F_{\text{кр}}}{EJ_z}} = \pi \right)$ призводить до формули Ейлера

для визначення критичної сили:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_z}{\ell^2}. \quad (11.7)$$

11.3 Розрахунки на стійкість

Вплив умов закріплення. При зміні умов закріплення величина критичної сили змінюється. Із схеми (Рис.11.1, в), на якій зображено стержень довжиною ℓ , закріплений одним кінцем, і його дзеркальне відображення, видно, що критичну силу для даного випадку можна визначити за формулою (11.7), якщо замість ℓ в неї підставити $\ell_1 = 2\ell$

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_z}{4\ell^2} = \frac{\pi^2 EJ_z}{(2\ell)^2}. \quad (11.10)$$

Як бачимо, при зміні умов закріплення змінюється числовий множник біля ℓ^2 у знаменнику правої частини (11.7).

Оскільки при втраті стійкості прямолінійної форми рівноваги згин завжди має місце у площині найменшої жорсткості EJ_{min} , то нейтральною лінією служить та із головних центральних осей інерції, для яких момент інерції поперечного перерізу мінімальний (J_{min}). Тоді формула Ейлера в загальному вигляді:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{(\mu\ell)^2}, \quad (11.11)$$

де μ – характеризує умову закріплення кінців стержня (Рис.11.2):

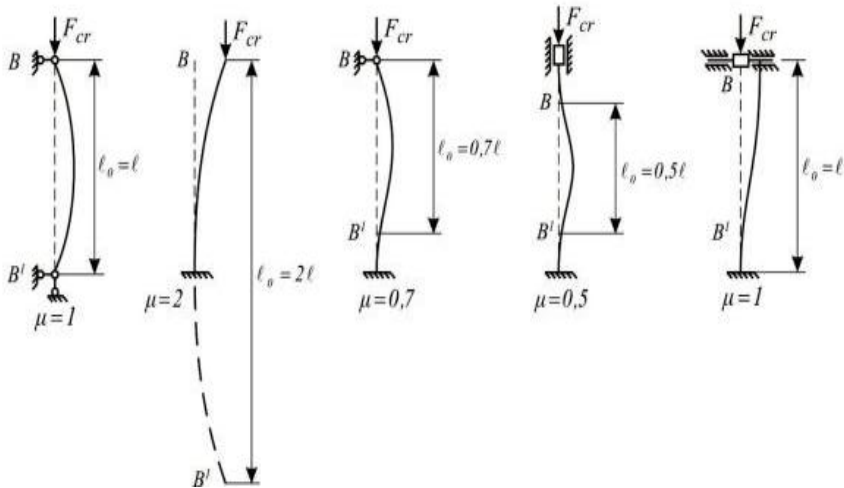


Рисунок 11.2 – Залежність μ від умов закріплення

Добуток $\mu\ell$ називається **зведеною довжиною стержня**. Критичне напруження знайдемо, поділивши критичну силу на площу поперечного перерізу A :

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_Z}{(\mu\ell)^2 A} = \frac{\pi^2 E i_{min}}{(\mu\ell)^2}, \quad (11.12)$$

де $i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$ – мінімальний радіус інерції.

Умови застосування формули Ейлера. При доведенні формули Ейлера було використано диференційне рівняння зігнутої осі стержня, справедливе тільки в межах дії закону Гука.

Звідси виходить, що формула Ейлера також справедлива тільки у тому випадку, якщо втрата стійкості відбувається при напруженні $\sigma_{кр}$, яке менше границі пропорційності $\sigma_{пц}$. Умову справедливості формули Ейлера можна представити у вигляді $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$. Підставляючи у цю

нерівність значення $\sigma_{кр}$ із (11.12), отримаємо:

$$\left(\frac{i_{min}}{\mu\ell}\right)^2 \leq \frac{\sigma_{пц}}{\pi^2 E}.$$

Відношення $\mu\ell/i_{min} = \lambda$ називається **гнучкістю стержня**.
Отже, **граничне значення гнучкості**:

$$\lambda_{гр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \quad (11.13)$$

Умова (11.13) визначає границі застосування формули Ейлера. При гнучкості стержня, менше граничного значення $\lambda_{гр}$, формулою Ейлера користуватися неможливо.

Формулою (11.12) можна користуватися при умові, що гнучкість стержня, яка визначена за виразом:

$$\lambda = \mu\ell \sqrt{\frac{A}{J_{min}}} \quad (11.14)$$

задовольняє нерівність:

$$\lambda_{кр} \leq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}},$$

тобто при $\lambda > \lambda_{кр}$ втрата стійкості проходить у границях пропорційності матеріалу і формулою Ейлера (11.12) користуватися можливо.

Практичні методи розрахунків. Використання коефіцієнту φ . Наведені вище співвідношення відносяться до випадку втрати стійкості у пружній області, тобто справедливі за умови, що аж до досягнення

критичного стану максимальне напруження не перевищує границі пропорційності ($\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$).

Якщо $\sigma_{кр} > \sigma_{пц}$, то втрата стійкості проходить у границях пропорційності.

Послідовність розрахунків не стійкість:

1. Визначаємо гнучкість за формулою (11.14) і граничну критичну гнучкість, за формулою (11.13).

2. Якщо $\lambda > \lambda_{кр}$, то розрахунок виконується за формулами (11.11) і (11.12).

3. При гнучкості, яка задовольняє умову $\lambda < \lambda_{кр}$, критичне напруження наближено може бути знайдене за формулою:

$$\sigma_y = \varphi[\sigma], \quad (11.15)$$

де φ – коефіцієнт зниження допустимого напруження $[\sigma]$, залежить від матеріалу стержня і гнучкості λ .

Нормами будівельного проектування передбачено значення коефіцієнта, наведене у таблиці 11.1 (див. табл. 39, довідник [14]).

4. Перевіряємо умову стійкості стиснутого стержня за формулою:

$$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma]. \quad (11.16)$$

За заданим коефіцієнтом запасу стійкості $n_{ст}$ визначаємо величину допустимого зовнішнього навантаження:

$$F \leq [F] = \frac{F_{кр}}{n_{ст}} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu \ell)^2 n_{ст}}. \quad (11.17)$$

Звідки мінімальний осьовий момент інерції:

$$J_{min} = \frac{F \cdot n_{ст} (\mu \ell)^2}{\pi^2 E}. \quad (11.18)$$

Таблиця 11.1 – Значення коефіцієнтів ϕ для деяких матеріалів

Гнучкість	Сталь			Чавун	
	Ст. 0	Ст. 5	15ХСНД	C4 15-32	C4 24-44
	Ст. 2			C4 12-28	
	Ст. 3			C4 18-36	
	Ст. 4			C4 21-40	
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95
20	0,97	0,95	0,95	0,91	0,87
30	0,95	0,93	0,93	0,81	0,75
40	0,92	0,90	0,90	0,69	0,60
50	0,89	0,84	0,83	0,57	0,43
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23
80	0,75	0,66	0,63	0,26	0,18
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14
100	0,60	0,50	0,45	0,16	0,12
110	0,52	0,43	0,39		
120	0,45	0,38	0,33		
130	0,40	0,32	0,29		
140	0,36	0,28	0,25		
150	0,32	0,27	0,23		
160	0,29	0,24	0,21		
170	0,26	0,21	0,19		
180	0,23	0,19	0,17		
190	0,21	0,17	0,15		
200	0,19	0,15	0,13		

Для того, щоб із (11.16) знайти площу поперечного перерізу A , необхідно знати величину коефіцієнта ϕ в залежності від гнучкості λ . Але для визначення гнучкості потрібно знати розміри перерізу. У зв'язку з цим задачу розв'язуємо методом послідовного наближення. Спочатку за наближеними значеннями коефіцієнта зменшення напружень ϕ_1 визначаємо площу перерізу, потім, приймаючи форму перерізу, отримуємо величину i_{min} за знайденими значеннями i_{min} і λ визначаємо ϕ_1^* . Якщо ϕ_1^* , виявляється близьким до значення ϕ_1 , то розрахунок на цьому закінчується. У протилежному випадку розрахунок повторюємо, доки вхідні і отримані значення коефіцієнта ϕ

не виявляться досить близькими.

Формула Ясинського. У випадку неможливості застосування формули Ейлера ($\lambda < \lambda_{кр}$) критичне напруження визначається за емпіричними формулами, складеними Ф.С. Ясинським на базі досліджень наведених рядом дослідників:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda. \quad (11.19)$$

У цій формулі залежність критичного напруження від гнучкості лінійна; a і b – коефіцієнти, які визначаються дослідним шляхом, постійні для даного матеріалу.

Таблиця 11.2 – Значення коефіцієнтів a та b

Матеріал	a , МПа	b , Мпа	λ_0	$\lambda_{кр}$
Сталь:				
Ст2	264	0,7	60	105
Ст3	310	1,14	60	100
20, Ст4	328	1,15	40	96
45	449	1,67	52	85
Дюралюміній Д16 Т	406	1,83	30	83
Сосна, ялина	29,3	0,194		70

При деякому значенні гнучкості σ_K , визначене за формулою (10.19) стає рівним границі текучості σ_T (для пластичного матеріалу), або границі міцності σ_B (для крихких матеріалів). Тоді гнучкість обчислюємо за формулою:

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_T}} \text{ або } \lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_B}}.$$

Отже в залежності від гнучкості стиснуті стержні умовно поділяють на три категорії (Рис.11.3):

1. Стержні великої гнучкості ($\lambda \geq \lambda_{кр}$), для яких розрахунок на

стійкість ведеться за формулою Ейлера і залежність $\sigma_{кр}$ від λ - гіперболічна:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\text{гіпербола Ейлера}).$$

2. Стержні середньої гнучкості ($\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_{кр}$), які розраховуються за формулою Ясинського (11.19). Для них залежність $\sigma_{кр}$ від гнучкості λ лінійна:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda.$$

3. Стержні малої гнучкості ($\lambda < \lambda_0$), які розраховуються не на стійкість, а на міцність. Для них критичне напруження вважається постійним $\sigma_{кр} = \sigma_T$ або $\sigma_{кр} = \sigma_B$.

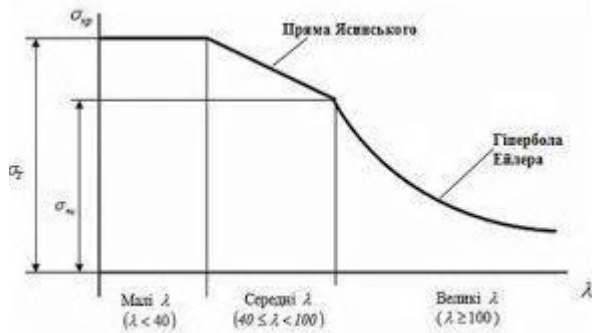


Рисунок 11.3 – Використання методів розрахунку стійкості

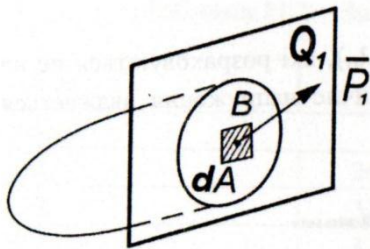
12 ОСНОВНІ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ. ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

12.1 Напружений стан в точці

Відповідно до гіпотези безперервності матеріалів, кожна точка бруса оточена великою кількістю інших точок. Внаслідок дії зовнішніх сил, між точкам виникають внутрішні сили взаємодії. Ці сили утворюють напруження в точці.

Для того, щоб охарактеризувати напруження в деякій точці навантаженого тіла, проведемо через дану точку переріз площиною Q_1 (Рис.12.1). Величина і напрям повного напруження P_1 у точці перерізу залежить від величини і напрямку рівнодіючої на елементарній площадці внутрішніх сил dA , яка в свою чергу визначається через діючі на тіло зовнішні зусилля.

Повне напруження в точці змінюється за величиною і напрямком залежно від орієнтації перерізу, проведеного через цю точку. Оскільки через одну точку можна провести безліч площин, то в ній буде і безліч значень напружень.



Сукупність напружень, які виникають на безлічі площадок, що перетинають брус в досліджуваній точці, називається напруженим станом у цій точці.

Рисунок 12.1 – Повне напруження у точці перерізу

Проводячи аналіз напруженого стану, в області досліджуваної точки вирізають нескінченно малий паралелепіпед. Вектори напружень $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$, що діють на гранях виділеного паралелепіпеда, повністю характеризують напружений стан у цій точці (Рис.12.2).

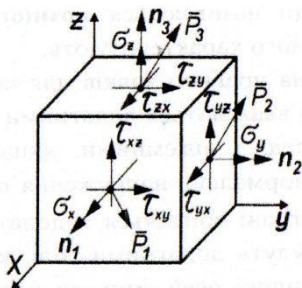


Рисунок 12.2 – Напружений стан елементарного нескінченно малого паралелепіеда

Розглянемо проекції повних напружень $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ на напрямки осей x, y, z (Рис.12.2). Проекція напруження \bar{P}_1 на вісь x , паралельну нормалі n_1 , називається нормальним напруженням і позначається σ_x .

Аналогічно проекції \bar{P}_1 і \bar{P}_2 на осі y і z відповідно утворюють нормальні напруження σ_y і σ_z .

Проекція напруження \bar{P}_1 на осі y і z утворює дотичні напруження, які позначають відповідно τ_{xy} і τ_{xz} . Таким чином, дотичні напруження позначаються двома індексами.

Перший індекс означає вісь, яка паралельна нормалі до грані з розглянутим напруженням, другий індекс – вісь, яка паралельна даному дотичному напруженню. Аналогічно проекції напружень \bar{P}_2 і \bar{P}_{21} на відповідні осі утворюють дотичні напруження $\tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$.

Отже, на гранях паралелепіеда, виділеного в області досліджуваної точки навантаженого тіла, діють дев'ять проекцій напружень. Ці проекції називаються **компонентами напруженого стану** в точці і цілком його характеризують.

Звернемо увагу на **правило знаків** для компонентів напружень. Нормальні напруження вважаються додатними, якщо вони розтягують виділений паралелепіед, і від'ємними, якщо стискають його. На рис.12.2 всі показані нормальні напруження $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ додатні. Якщо

зовнішня нормаль до грані збігається з додатним напрямом осі, то дотичні напруження будуть додатними тоді, коли вони збігаються з додатним напрямком інших осей системи координат, відносно яких вони паралельні. На Рис.12.2 всі дотичні напруження на відомих трьох гранях мають знак «плюс».

З умови рівноваги виділеного паралелепіпеда випливає, що на взаємно перпендикулярних гранях дотичні напруження, які напрямлені до спільного ребра, рівні за абсолютною величиною (Рис.12.2), тобто:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{zy} = \tau_{yz}; \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (12.1)$$

Рівності (12.1) відображають **закон парності дотичних напружень**. Отже із дев'яти компонентів напружень незалежними є лише шість. Якщо змінюється орієнтація системи координат, а відповідно, і орієнтація паралелепіпеда, компоненти напружень на його гранях також змінюють значення і знак. Існує і таке положення паралелепіпеда, при якому на гранях відразу всі дотичні напруження дорівнюють нулю.

Нормальні напруження на гранях такого паралелепіпеда називаються **головними** і позначаються $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а площадки, що відповідають цим граням – головними площадками. У теорії пружності доведено, що головні напруження є екстремальними і між ними існує співвідношення:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (12.2)$$

Так якщо одне з головних напружень дорівнює 70 МПа, а два інші відповідно 100 і -130 МПа, то їх обов'язково слід позначати так: $\sigma_1 = 100$ МПа; $\sigma_2 = 70$ МПа; $\sigma_3 = -130$ МПа. Неважко побачити, що напружений стан можна характеризувати головними напруженнями. В цьому разі можливі випадки, коли одне чи два головні напруження дорівнюють нулю. У зв'язку з цим розрізняють **три види напружених станів у точці**:

1) якщо тільки одне із головних напружень відмінне від нуля, то напружений стан у точці називається лінійним або одновісним;

2) якщо тільки одне із головних напружень дорівнює нулю, то напружений стан у такій точці називається плоским, або двовісним;

3) якщо всі три головні напруження відмінні від нуля, то такий напружений стан називається об'ємним, або тривісним.

Розглянемо більш детально кожний з трьох видів напруженого стану в точці.

12.2 Лінійний напружений стан

Лінійний напружений стан має місце в точках стержня, який розтягують або стискають поздовжньою силою. Розглянемо стержень призматичної форми з площею поперечного перерізу F_0 , навантажений зосередженими розтягуючими силами \bar{P} (Рис. 12.3). Нормальне напруження в будь-якій точці цього перерізу, в тому числі і в точці В, визначається за отриманою раніше формулою:

$$\sigma = \frac{P}{F_0}. \quad (12.3)$$

Дотичні напруження на всіх гранях дорівнюють нулю.

Оскільки на гранях паралелепіпеда відсутні діючі напруження, то нормальні напруження тут будуть головними, і відповідно до формули (12.2) отримаємо:

$$\sigma_1 = \sigma = \frac{P}{F_0}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0,$$

тобто кожна точка виділеного паралелепіпеда перебуває в лінійному або плоскому напруженому стані.

Розглянемо, як розподілені напруження на площині нахиленого перерізу. Для цього проведемо площину, нормаль n_α до якої з віссю паралелепіпеда утворює кут α (Рис.12.4). На нахиленій площині повне

напруження P_α , зумовлене силою \bar{P} , можна визначити за формулою:

$$P_\alpha = \frac{P}{F_\alpha}. \quad (12.4)$$

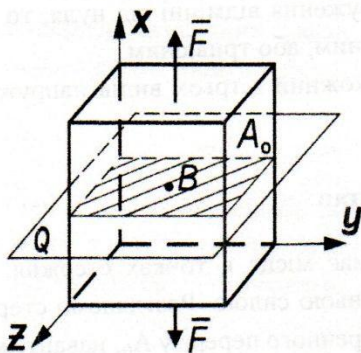


Рисунок 12.3 - Лінійний напружений стан

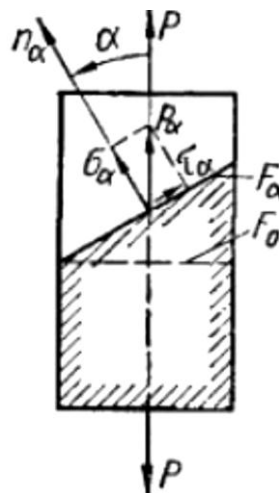


Рисунок 12.4 – Напруження на площині нахиленого перерізу

Оскільки площина F_α зв'язана з F_0 співвідношенням:

$$F_\alpha = \frac{F}{\cos \alpha},$$

то

$$\sigma_\alpha = \frac{P}{\cos \alpha \cdot F_0} = \sigma_1 \cdot \cos \alpha, \quad (12.5)$$

де враховано, що

$$\frac{P}{F_0} = \sigma_1.$$

Проекція повного напруження P_α на нормаль n_α утворює нормальне напруження $\sigma_\alpha = P_\alpha \cdot \cos \alpha$, або на підставі (12.5)

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha . \quad (12.6)$$

Із збільшенням кута α від 0 до 90° напруження σ зменшується від значення $\sigma_{\alpha} = \sigma_1$ при $\alpha=0$ і до нуля при $\alpha=90^\circ$. Отже, найбільше значення нормального напруження маємо на головній площадці, де $\sigma_2 = \sigma_1 = \sigma_{max}$ (при $\alpha=0^\circ$). Проекція напруження P_{α} на площадку F_{α} утворює на ній дотичне напруження τ_{α} , яке можна визначити за формулою $\tau_{\alpha} = P_{\alpha} \cdot \sin \alpha$ або згідно з (12.5).

$$\tau_{\alpha} = \sigma_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha . \quad (12.7)$$

Відповідно до формули (12.7) найбільші дотичні напруження виникають на площадці з $\sin 2\alpha = 1$, тобто для якої $2\alpha = 90^\circ$ і $\alpha = 45^\circ$.

Тобто, на площадці, нормаль до якої з напрямом поздовжньої осі утворює кут 45° , дотичні напруження досягають найбільших значень

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2} . \quad (12.8)$$

При стисканні головні напруження мають значення:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\frac{P}{F_0} .$$

Тоді напружений стан у точці стержня визначається, як і при розтяганні, формулами 12.6 і 12.7, лише в них замість σ_1 необхідно підставити σ_3 .

12.3 Плоский і об'ємний напружені стани

Розглянемо спочатку плоский напружений стан. Для цього в області досліджуваної точки умовно виріжемо елемент і розмістимо його так, як показано на Рис.12.5. Нехай на бічних гранях виділеного елемента діють головні напруги σ_1 і σ_2 . Знайдемо нормальні і дотичні напруження на площині, нормаль n до якої з напрямом x (або σ_1)

утворює кут α_1 , а з віссю y або σ_2 – кут α_2 . В подальшому викладі будемо називати її α – площадкою. На цій площадці діють нормальні σ_α і дотичні τ_α напруження, які залежать від σ_1 та σ_2 . Згідно з принципом суперпозиції за формулою (12.6):

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2. \quad (12.9)$$

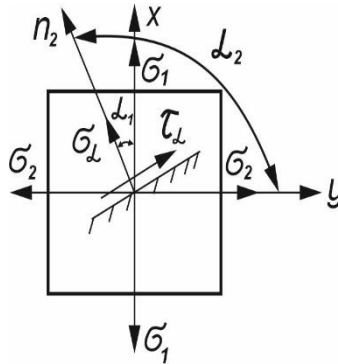


Рисунок 125 – Плюсний напружений стан

Оскільки $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$, а $\cos(\alpha_1 + 90^\circ) = -\sin \alpha$, то опускаючи індекс у позначені кута, рівняння (12.9) переписуємо у вигляді:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha. \quad (12.10)$$

Міркуючи аналогічно, з допомогою формули (12.7) визначимо дотичну напругу на α – площадці; знаючи, що $\alpha_1 = \alpha$:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (12.11)$$

Користуючись формулами (12.10) і (12.11), знайдемо нормальні і дотичні напруження на площині, перпендикулярній до α – площадки.

Позначимо таку площину β – площадкою (рис.12.6), а нормальні і дотичні напруження на ній відповідно σ_β і τ_β . Тоді за формулою (12.10) отримаємо:

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cdot \cos^2 \beta + \sigma_2 \cdot \sin^2 \beta.$$

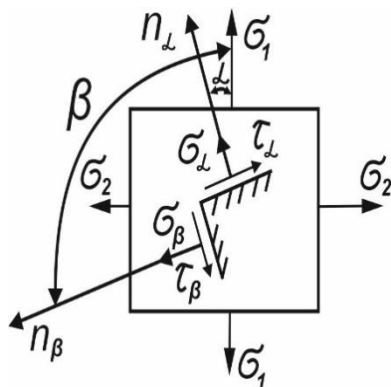


Рисунок 12.6 – Плоский напружений стан з компонентами напружень

А оскільки $\beta = \alpha + 90^\circ$, то після підстановки отримаємо:

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha. \quad (12.12)$$

Аналогічно одержимо розрахункову формулу для дотичних напружень:

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (12.13)$$

Очевидно, якщо додати формули (12.10 і 12.12), то одержимо $\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2$. Таким чином, при повороті елемента навколо осі, перпендикулярної площині рисунка, сума нормальних напружень на взаємно перпендикулярних гранях залишається сталою.

Порівнюючи формули (12.11) і (12.13), помічаємо, що $\tau_\alpha = -\tau_\beta$, тобто підтверджується закон парності дотичних напружень, а знак «мінус» відповідає правилу, наведеному в підрозділі (12.2).

Найбільші дотичні напруження, як виходить з аналізу формули (12.11), маємо на площадках при $\sin 2\alpha = 1$, тобто тоді, коли $2\alpha = 90^\circ$,

або $\alpha = 45^\circ$, тоді:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} . \quad (12.14)$$

Розглянемо тепер об'ємний напружений стан, який має місце, коли на гранях виділеного елемента всі три головні напруження відмінні від нуля (рис.12.7,а).

Проведемо довільний переріз елемента так, щоб площина перерізу перетнула всі три координатні осі (рис.12.7,б). Нормаль n до цієї площини утворює з координатними осями x , y , z відповідно кути α_1 , α_2 і α_3 . Нормальне напруження σ_n по такій площині визначається формулою, отриманою в теорії пружності і аналогічною формулі (12.9):

$$\sigma_n = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha_3. \quad (12.15)$$

Дотичні напруження на цій площині обчислюють за формулою:

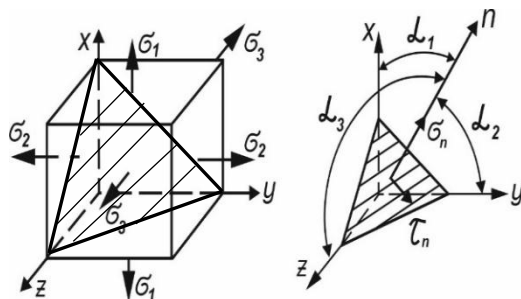
$$\tau_n = \sqrt{\sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha_3 - \sigma_n^2} . \quad (12.16)$$

Екстремальні значення нормальних напружень:

$$\sigma_{n \max} = \sigma_1; \quad \sigma_{n \min} = \sigma_3.$$

Максимальні значення дотичних напружень:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} . \quad (12.17)$$



а) б)
Рисунок 12.7– Об'ємний напружений стан

12.4 Теорії міцності

Під дією зовнішніх сил матеріал може перебувати в різних механічних станах. Так, при незначних навантаженнях виникають пружні деформації, і матеріал перебуває в пружному стані. Наростаючі навантаження призводять до появи пластичних деформацій. В такому випадку говорять, що матеріал переходить у пластичний стан. В опорі матеріалів момент появи пластичних деформацій або ознака крихкого руйнування хоча б в одній точці матеріалу конструкції розглядається як порушення міцності в цілому. Розрахунки на міцність, що ґрунтуються на такому уявленні, називаються розрахунками за допустимими напруженнями.

Знаходження допустимих напружень у випадку лінійного напруженого стану при розтяганні або стисканні не викликає труднощів. При плоскому або об'ємному напруженому стані знаходження небезпечних напружень становить надзвичайно складну задачу.

В зв'язку з цим виникла необхідність, на основі дослідів при розтяганні і стисканні, теоретично визначити міцність матеріалів при довільних плоских і об'ємних напружених станах. В такому разі результати дослідів при лінійному напруженому стані стають еталоном міцності. В результаті за допомогою такого еталона – так званої **еквівалентного напруження** (його позначають $\sigma_{\text{екв}}$) –

обґрунтовується міцність матеріалів при довільних напружених станах.

Для обґрунтування еквівалентного напруження вводять різні гіпотези про переважаючий вплив того чи і іншого фактору на міцність матеріалів при довільному напруженому стані. Теорії, які обґрунтовують ознаки однакової безпеки руйнування матеріалів при рівних напружених станах, навиваються **теоріями міцності**.

З великої кількості запропонованих на даний час теорій розглянемо ті, які найбільш обґрунтовані експериментально і набули широкого застосування.

1. Теорія найбільших дотичних напружень (третя теорія міцності). Згідно а цією теорією вважають, що пластична деформація виникає внаслідок необоротних зсувів у матеріалі, які спричиняються дотичними напруженнями.

За об'ємного напруженого стану найбільші дотичні напруження визначаються згідно з (12.17):

При простому розтяганні:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}.$$

Рівняння еквівалентності і умову міцності за даною теорією можна записати остаточно у вигляді:

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (12.18)$$

Перевага цієї теорії полягає в тому, що вона добре підтверджується різними дослідями при плоскому і об'ємному напружених станах над матеріалами, що однаково працюють на розтягання і стискання. Експериментально встановлено, що похибка в оцінюванні міцності через знехтування впливом σ_2 не перевищує 15 %.

2. Теорія питомої потенціальної енергії зміни форми тіла (четверта теорія міцності). Згідно з цією теорією вважають, що граничний стан для матеріалу, незалежно від виду напруженого стану, настає тоді, коли питома енергія зміни форми u_ϕ в одиниці об'єму матеріалу досягає свого небезпечного значення (u_ϕ^0 , обчисленого за простого розтягання). Умову міцності у цьому разі можна записати так:

$$u_{\phi} \leq [u_{\phi}]. \quad (12.19)$$

Якщо величини, що входять до нерівності (12.19), виразити через головні напруження, то отримаємо, що еквівалентне напруження за четвертою теорією міцності має вигляд:

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq [\sigma_F]. \quad (12.20)$$

Отже, четверта теорія міцності враховує всі три головні напруження, що безперечно, є її перевагою. Зазначена теорія добре підтверджується дослідами над пластичними матеріалами.

3. Теорія міцності Мора. Ця теорія дозволяє встановити критерій міцності для крихких матеріалів, які по-різному чинять опір розтяганні і стисканні. Вона ґрунтується на систематизації великої кількості експериментальних даних, яка показує, що середнє головне напруження σ_2 несуттєво впливає на оцінку міцності матеріалів. На цій підставі Мор запропонував такий критерій міцності:

$$\sigma_{\text{екв M}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_P]}{[\sigma_C]} \cdot \sigma_3 \leq [\sigma_P], \quad (12.21)$$

де $[\sigma_P]$ і $[\sigma_C]$ – допустимі напруження відповідно при розтяганні і стисканні.

Критерій міцності Мора широко використовується в процесі розрахунків конструкцій із крихких матеріалів. Для пластичних матеріалів $[\sigma_P] = [\sigma_C]$, тому теорія міцності Мора для них збігається з третьою теорією міцності (12.19).

13 СКЛАДНИЙ ОПІР

Під складним опором розуміють різні комбінації простих напружених станів стержня (розтягання, стискання, зсуву, кручення, згинання).

В загальному випадку навантаження стержня в поперечних перерізах можуть діяти шість внутрішніх силових факторів – N , Q_y , Q_z , M_y , M_z , M_x . Напружений стан при цьому знаходять на основі принципу суперпозиції. Згідно з даним принципом, у досліджуваній точці розраховують окремо напруження від дії кожного силового фактора, після чого їх підсумовують і визначають сумарні компоненти напружень. Зрозуміло, що знаючи напружений стан у точці і використовуючи ту чи іншу теорію міцності, можна провести розрахунки на міцність даного елемента.

13.1 Косе згинання

Косим називають згинання, при якому площина дії навантажень не збігається з жодною із головних площин перерізу. Наприклад, на рис.13.1 сила \bar{F} діє у площині яка не збігається з головними площинами стержня xu і xz .

Під час розрахунків кожне із зовнішніх навантажень розкладають не складові частини, що діють у головних площинах. Отже, косе згинання розглядають як суму двох плоских згинань у двох взаємноперпендикулярних площинах.

Розглянемо консольну балку довжиною l прямокутного перерізу (Рис.13.1), до кінця якої прикладемо силу \bar{F} , що утворює з віссю u кут α . Розкладемо силу \bar{F} , на дві складові, напрямлені вздовж головних осей перерізу:

$$F_y = F \cos \alpha, \quad F_z = F \sin \alpha. \quad (13.1)$$

У поперечних перерізах балки сили F_y і F_z утворюють чотири із

шести внутрішніх силових факторів: Q_y , Q_z , M_y і M_z .

У розрахунках на міцність, як і за плоского згинання, нехтують поперечними силами Q_y , Q_z , і утворюваними ними дотичними напруженнями.

Значення згинаючих моментів у довільному поперечному перерізі балки, взятому на відстані x від кінця консолі, будуть:

$$M_z = F_y \cdot x; \quad M_y = F_z \cdot x. \quad (13.2)$$

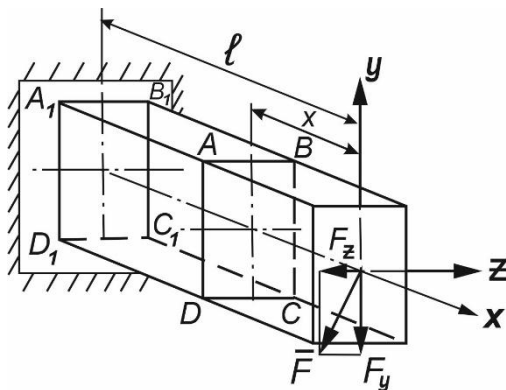


Рисунок 13.1 - Косе згинання

Згинаючий момент вважають додатним, якщо в першому квадранті перерізу він розтягує волокно балки, і від'ємним, якщо утворює стискання волокон. У розглянутому прикладі M_z і M_y – додатні. Епюри згинаючих моментів M_z і M_y зображені на Рис.13.2.

Обчислюємо нормальні напруження в довільній точці $K(z, y)$ поперечного перерізу взятого на відстані x від вільного краю консолі (Рис.13.3). Оскільки кожний із моментів M_z і M_y утворює в даній точці нормальне напруження, то повне напруження знайдемо як суму складових:

$$\sigma = \sigma' + \sigma''.$$

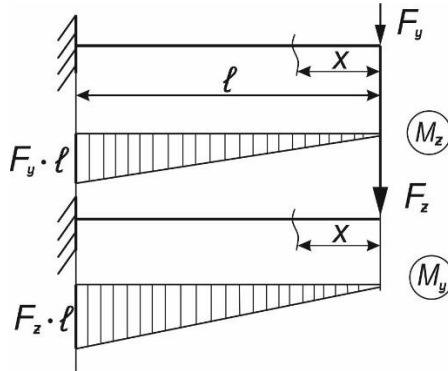


Рисунок 13.2 - Епюри згинаючих моментів M_z і M_y

Тут σ' - нормальне напруження в точці К, утворена згинаючим моментом M_z :

$$\sigma' = \frac{M_z}{J_z} \cdot y,$$

σ'' - нормальне напруження в тій же точці, утворено згинаючим моментом M_y :

$$\sigma'' = \frac{M_y}{J_y} \cdot z.$$

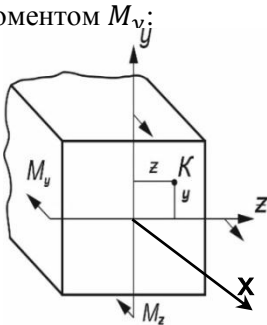


Рисунок 13.3 - Згинаючі моменти в поперечному перерізі

Отже результуюча нормального напруження в точці К становитиме:

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot z . \quad (13.3)$$

Як було показано, за прямого згинання, нейтральна лінія збігається з однією із головних осей перерізу і перпендикулярна до силової площини. З рівняння (13.3) видно, що нормальні напруження при косому згинанні в центрі ваги перерізу також дорівнюють нулю. Тобто, якщо в (13.3) підставимо $y = 0$ і $z = 0$, то дістанемо $\sigma = 0$. Проте нейтральна лінія не збігається з жодною із головних осей.

Оскільки формула нейтральної лінії описує геометричне місце точок в перерізі, де $\sigma = 0$, то із (13.3) маємо:

$$\frac{M_z}{J_z} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot z = 0,$$

або

$$y = -\frac{M_y J_z}{M_z J_y} \cdot z. \quad (13.4)$$

Це рівняння прямої, яка проходить через центр ваги перерізу. Із курсу математики бачимо, що положення такої прямої може бути задано кутом її нахилу до однієї з координатних осей. Тобто положення нейтральної лінії визначається кутовим коефіцієнтом:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{z} = -\frac{M_y J_z}{M_z J_y} , \quad (13.5)$$

де β – кут, який утворює нейтральна лінія (Н.Л.) з віссю (Рис.13.4).

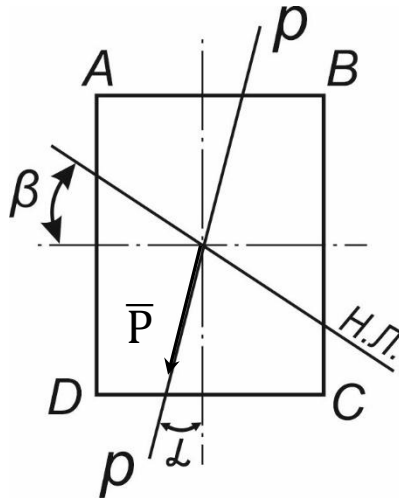


Рисунок 13.4 - Визначення положення нейтральної лінії

На цьому ж рисунку показана силова лінія $p - p$, як лінія перетину силової площини і поперечного перерізу балки. Із формул (13.1 і 13.2) випливає, що

$$\frac{M_y}{M_z} = \frac{F_z \cdot x}{F_y \cdot x} = \frac{F \cdot \sin \alpha}{F \cdot \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Тоді формулу 13.5 можна переписати у вигляді:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (13.6)$$

Отже, положення нейтральної лінії не залежить від значення сили \bar{F} , а визначається лише кутом нахилу силової площини до осі y і формою перерізу. Причому, якщо $J_z = J_y$, то із (13.6) випливає, що $|\beta| = |\alpha|$, а значить, нейтральна лінія стає перпендикулярною до силової площини. Оскільки в загальному випадку косоного згину моменти інерції J_z і J_y не дорівнюють один одному, то і нейтральна лінія не перпендикулярна до силової площини.

Звернемо увагу на те, що на нейтральній лінії нормального на-

пруження дорівнюють нулю, а максимальних значень вони досягнуть у точках перерізу, максимально віддалених від нейтральної лінії. В розглядуваному перерізі (Рис.13.4) найбільш напруженими будуть точки В і D. Для знаходження напружень у даних точках необхідно у рівняння (13.3) підставити із врахуванням знаку їх координати, тоді

$$\sigma_B = \frac{M_z}{J_z} \cdot y_B + \frac{M_y}{J_y} \cdot z_B; \quad \sigma_D = \frac{M_z}{J_z} \cdot y_D + \frac{M_y}{J_y} \cdot z_D,$$

або

$$\sigma_B = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}; \quad \sigma_D = -\left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}\right),$$

де

$$W_z = \frac{J_z}{y_{max}} = \frac{J_z}{y_B} = -\frac{J_z}{y_D}$$

– момент опору перерізу відносно осі z,

$$W_y = \frac{J_y}{z_{max}} = \frac{J_y}{z_B} = -\frac{J_y}{z_D}$$

– момент опору перерізу осі y.

Для нормальної роботи елемента конструкції максимальні нормальні напруження в небезпечному перерізі не мають бути більшими за допустимі. Небезпечний переріз знаходять із аналізу побудови епюр M_y і M_z (див. рис.13.2). Очевидно, що в розтягнутому випадку небезпечний переріз буде в закріпленні балки (переріз А, В, С, D на Рис.13.1), а максимальні згинаючі моменти становитимуть:

$$M_{y\ max} = F_z \cdot \ell; \quad M_{z\ max} = F_y \cdot \ell.$$

Тоді умову міцності при косому згинанні запишемо у вигляді:

$$\sigma_{max} = \sigma_{B_1} = \frac{M_z max}{W_z} + \frac{M_y max}{W_z} \leq [\sigma_p];$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{D_1} = \left| \frac{M_z max}{W_z} + \frac{M_y max}{W_y} \right| = [\sigma_c], \quad (13.8)$$

де $[\sigma_p]$ і $[\sigma_c]$ – допустимі напруження матеріалу балки відповідно на розтягання і стискання.

Для балок, матеріали яких однаково чинять опір розтягання і стискання, маємо:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z max}{W_z} + \frac{M_y max}{W_y} \leq [\sigma], \quad (13.9)$$

де $W_z = J_z / y_{max}$; $W_y = J_y / z_{max}$; z_{max}, y_{max} – координати самої віддаленої від нейтральної лінії точки.

13.2 Згинання з розтяганням (стисканням)

Якщо на брус діють зовнішні навантаження, силові площини яких проходять через вісь бруса і викликають поперечні і поздовжні зусилля, то такий вид складного опору називають згином з розтяганням (стисканням). В цьому разі в поперечних перерізах бруса мають місце поперечні сили Q_y, Q_z , поздовжня сила N і згинаючі моменти M_y і M_z . Як і в випадку згинання, в цьому разі також нехтують поперечними силами Q_y і Q_z спричиненими дотичними напруженнями τ_y та τ_z . Для знаходження в точках поперечного перерізу нормального напруження необхідно, використовуючи принцип суперпозиції, додати складові напружень, зумовлені окремо поздовжньою силою N і згинаючими моментами M_y і M_z .

Розглянемо деформацію згинання і розтягання на прикладі позацентрового розтягання. **Позацентрове розтягання** – це такий вид деформації, коли стискаюча сила паралельна осі бруса, але точка її прикладення не збігається з центром ваги перерізу. Точку перетину будь-якого перерізу бруса з лінією дії сили \vec{F} назовемо полюсом сили. Координати полюса сили в системі головних осей поперечного перерізу позначимо y_p та z_p . Відстань від полюса сили до центра ваги перерізу називається **ексцентриситетом** ℓ (Рис.13.5).

Знайдемо внутрішні складові фактори у довільному перерізі бруса (Рис.13.6). Використовуючи метод перерізів, отримаємо:

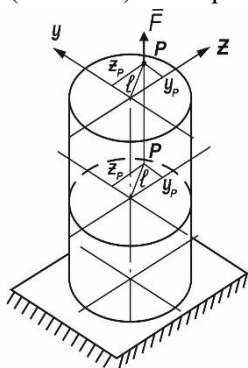


Рисунок 13.5 - Позацентрове розтягання силою \vec{F}

$$N = F; \quad M_z = F \cdot y_p; \quad M_y = F \cdot z_p.$$

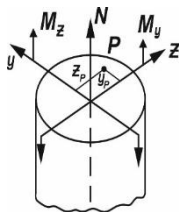


Рисунок 13.6 – Внутрішні силові фактори у довільному перерізі

Нормальні напруження від кожного із внутрішніх силових факторів N , M_z , M_y будуть відповідно:

$$\sigma' = \frac{N}{A}, \quad \sigma'' = \frac{M_z}{J_z} \cdot y, \quad \sigma''' = \frac{M_y}{J_y} \cdot z.$$

Підсумовуючи σ' , σ'' і σ''' , маємо

$$\sigma = F \left(\frac{1}{A} + \frac{y_p}{J_z} \cdot y + \frac{z_p}{J_y} \cdot z \right). \quad (13.10)$$

Формулу 13.10 можна використовувати для визначення напруження при позацентровому розтяганні. В разі позацентрового стискання перед правою частиною формули (13.10) необхідно поставити знак «мінус». Прирівнюючи напруження в формулі (13.10) до нуля, дістанемо рівняння нейтральної лінії:

$$\frac{1}{A} + \frac{y_p}{J_z} \cdot y + \frac{z_p}{J_y} \cdot z = 0 . \quad (13.11)$$

Очевидно, що (13.11) є рівняння прямої, яка не проходить через початок координат.

В разі позацентрового розтягання (стискання) нормальне напруження в кожній точці поперечного перерізу бруса пропорційне відстані від цієї точки до нейтральної лінії. Використовуючи цю закономірність, побудуємо епюру нормальних напружень, значення яких відкладаються відносно лінії, перпендикулярної до нейтральної осі. Тоді значення максимальних нормальних напружень на ділянці розтягання становитиме:

$$\sigma_{max} = \sigma_B = F \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{y_p}{J_z} \cdot y_p + \frac{z_p}{J_y} \cdot z_B \right),$$

на ділянці стискання:

$$\sigma_{min} = \sigma_D = F \cdot \left(\frac{1}{A} - \frac{y_p}{J_z} \cdot y_D - \frac{z_p}{J_y} \cdot z_D \right).$$

Останні рівняння можуть бути використані для складання умови міцності матеріалу при позацентровому розтяганні (стисканні). Оскільки для пластичних матеріалів $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$, то **умова міцності** записується для однієї віддаленої від нейтральної лінії точки:

$$\sigma_{max} = \sigma_B = F \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{y_p}{J_z} \cdot y_p + \frac{z_p}{J_y} \cdot z_B \right) \leq [\sigma] . \quad (13.12)$$

Для крихких матеріалів $[\sigma_c] > [\sigma_p]$, тому, якщо напруження стискання в поперечному перерізі стержня більші від напружень розтягання, розрахунок на міцність ведеться за двома умовами:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_{min} \leq [\sigma_c] . \quad (13.13)$$

13.3 Згинання з крученням

Одночасних деформацій згинання з крученням зазнає більшість валів, які звичайно бувають прямими стержнями круглого або кільцевого перерізу. Таке поєднання деформацій валів утворюють сили натягу пасів на шківках пасових передач, тиску зубів коліс в зубчастих передачах тощо. В поперечних перерізах вала при згинанні з крученням відмінні від нуля такі силові фактори: M_x, M_y, M_z, Q_y, Q_z .

Ці сили і моменти в точках перерізу валу утворюють нормальні напруження від згинання і дотичні напруження від згинання і кручення. Впливом поперечних сил Q_y і Q_z нехтують, тому що відповідні їм дотичні напруження набагато менші за дотичні напруження кручення і нормальні напруження згинання. До того ж в небезпечних точках на поверхні валу дотичні напруження від поперечних сил дорівнюють нулю.

Розглянемо вал, на якому закріплено два шківки С і D пасової передачі діаметрами D_1 і D_2 (рис.13.7).

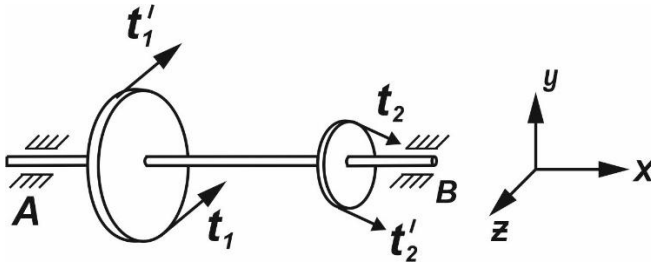


Рисунок 13.7 - Схема навантаженого валу

Сили натягу витків пасових передач визначимо t_1 , t_1' і t_2 , t_2' . Нехтуючи тертям у підшипниках А і В, складемо розрахункову схему. Для цього наведемо всі діючі сили і крутильні моменти на вал до його осі. Під час перенесення сили \bar{F} (Рис.13.8) до осі вала необхідно додати ще крутильний момент $T = F \cdot D/2$, (Рис.13.8, б). Якщо на шків діють дві сили, наприклад t і t' (Рис.13.8, в), то результуюча сила, що діє на вісь вала, $F = t + t'$, а крутильний момент $T = (t' - t) \cdot D/2$ (Рис.13.8, г).

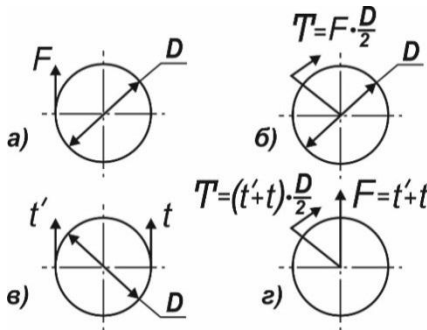


Рисунок 13.8 - Розрахункова схема

За умови, що ведуча вітка pasa натягнута вдвічі сильніше від веденої ($t' = 2t$), маємо:

$$F_1 = t_1' + t_1 = 3t_1, \quad F_2 = t_2' + t_2 = 3t_2,$$

$$T_1 = (t'_1 - t_1) \cdot D_1/2 = t_1 \cdot D_1/2, \quad T_2 = (t'_2 - t_2) \cdot D_2/2 = t_2 \cdot D_2/2.$$

Розрахункова схема валу пасової передачі зображена на Рис.13.9, а. Сили F_1 і F_2 розкладають на вертикальні та горизонтальні складові. Вертикальні сили F_{1y} і F_{2y} утворюють в підшипниках вертикальні реакції R_{Ay} і R_{By} , а горизонтальні сили F_{1z} і F_{2z} – горизонтальні реакції R_{Az} і R_{Bz} . Величини реакцій в підшипниках вала визначають як для балки, що лежить на двох опорах (див.рис.13.9, б, г) складаючи рівняння рівноваги.

Еюра згинаючих моментів M_z побудована від вертикальних сил R_{Ay} , F_{1y} , F_{2y} , R_{By} і показана на Рис.13.9, в. Аналогічна їй еюра згинаючих моментів M_y у горизонтальній площині побудована від горизонтальних сил R_{Az} , F_{1z} , F_{2z} і R_{Bz} (Рис.13.9, д). Еюру сумарних моментів $M_{зг}$ (Рис.13.9, е) будують на основі еюр M_y і M_z за формулою:

$$M_{зг} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} \quad (13.14)$$

За рівномірного обертання валу, він перебуває в стані рівноваги, тобто $T_1 + T_2 = 0$. Еюра крутильних моментів із врахуванням того, що $T_1 = T_2 = T$, зображена на рисунку 13.9, ж. Небезпечний переріз валу знаходиться там, де опори повних згинаючих моментів $M_{зг}$ і крутильних моментів M_x досягають найбільших значень. Для вала, показаного на рисунку 13.9, небезпечним буде переріз С, зображений на Рис.13.10.

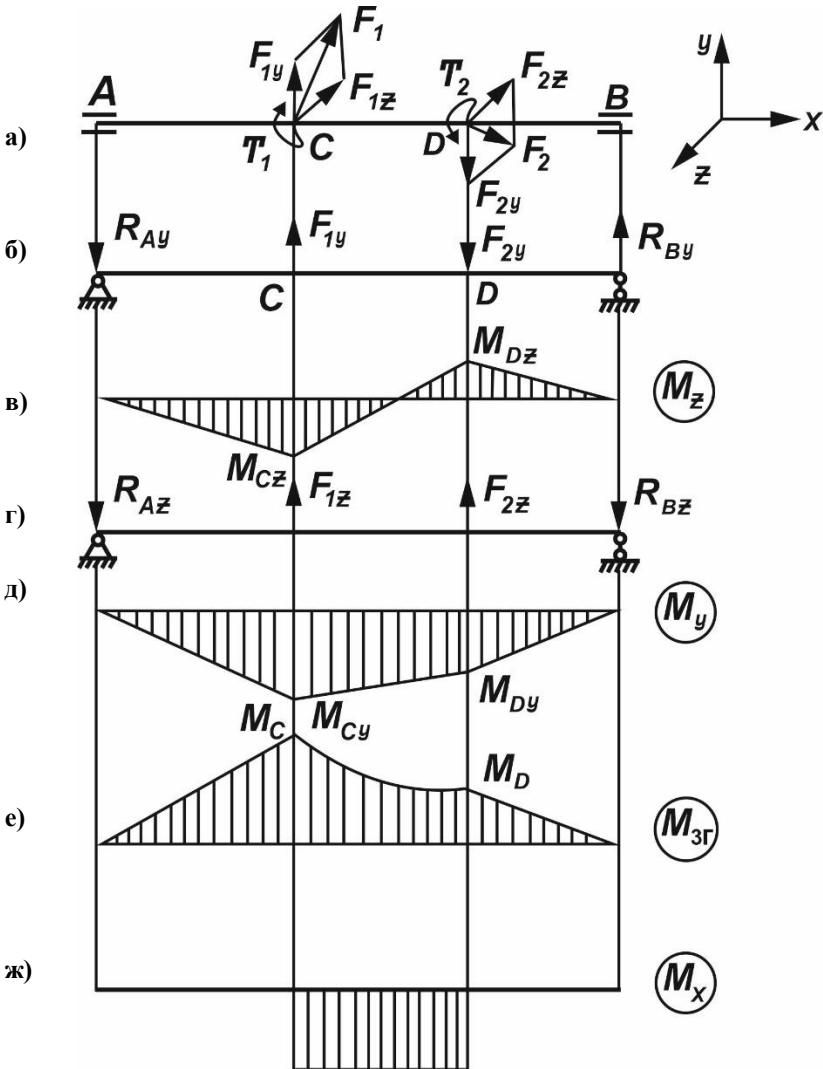


Рисунок 13.9 – Розрахункова схема валу. Епюри згинаючих і крутильних моментів

В цьому перерізі діє найбільший згинаючий момент $M_{z\Gamma}$, а також максимальний крутильний момент M_x . За вісь y взята вісь, яка

перпендикулярна до площини дії згинаючого моменту $M_{зг}$. Отже вісь y – це нейтральна лінія перерізу. Від дії моментів $M_{зг}$ і M_x у поперечному перерізі виникають нормальні σ і дотичні τ напруження, значення яких в будь-якій точці перерізу визначаються за формулами:

$$\sigma = \frac{M_{зг}}{J} \cdot z, \quad \tau = \frac{M_x}{J_\rho} \cdot \rho. \quad (13.15)$$

Тут: $J = J_y \neq J_x$ – осьовий момент інерції вала круглого поперечного перерізу, ρ – відстань від точки, у котрій визначається напруження, до центра ваги перерізу.

Епюри нормальних і дотичних напружень зображені на Рис.13.10.

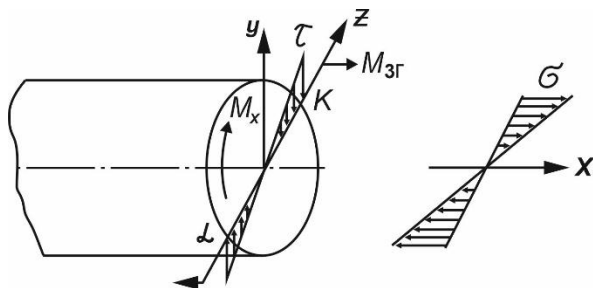


Рисунок 13.10 – Епюри нормальних та дотичних напружень в перерізі

Максимальні за абсолютною величиною нормальні напруження виникають у найвіддалених від нейтральної лінії точках К і L:

$$\sigma = \frac{M_{зг}}{W}. \quad (13.16)$$

Найбільші дотичні напруження виникають в точках контуру перерізу

$$\tau = \frac{M_x}{W_\rho} = \frac{M_x}{2W}. \quad (12.17)$$

У формулі 13.17 враховано, що полярний момент опору для круга удвічі більший від осьового:

$$W_\rho = W_z + W_y.$$

Для матеріалів, які однаково чинять опір розтягання і стискання, небезпечними в поперечному перерізі будуть одночасно точки К і L. Для дослідження напруженого стану виріжемо на ділянці точки К (Рис.13.11, а) елементарний паралелепіпед так, щоб права грань (заштрихована) була паралельна площі поперечного перерізу валу. Тоді на гранях паралелепіпеда, паралельних поперечному перерізу валу, діють нормальні σ і дотичні τ напруження, значення яких визначаються за формулами (13.16) і (13.17). На підставі закону парності дотичних напружень, напруження τ виникають також на верхній і нижній гранях паралелепіпеда. Останні дві грані вільні від напружень, оскільки відсутні сили, що розтягують або стискають вал у напрямі, перпендикулярному до його осі.

Отже, в небезпечній точці К спостерігаємо випадок плоского напруженого стану. В цьому разі головні напруження визначаються за формулами:

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right), \quad (13.18)$$

$$\sigma_{min} = \frac{1}{2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right). \quad (13.19)$$

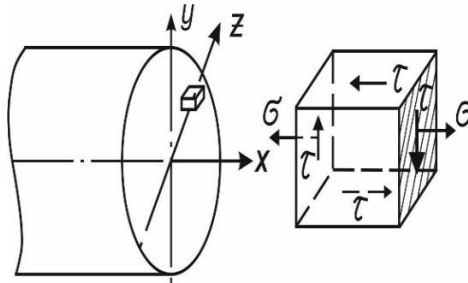


Рисунок 13.11 – Напружений стан на ділянці точки К перерізу

Оскільки $\tau \neq 0$, то $\sigma_{max} > 0$, $\sigma_{min} < 0$, а отже, в результаті маємо:

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right);$$

$$\sigma_2 = 0; \quad (13.20)$$

$$\sigma_3 = \sigma_{min} = \frac{1}{2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right).$$

Тоді елементарний паралелепіпед, вирізаний на ділянці точки К, головними площинами, буде мати вигляд, зображений на рисунку 13.12.

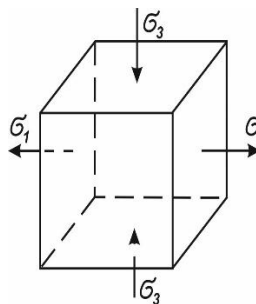


Рисунок 13.12 – Елементарний паралелепіпед, вирізаний на ділянці точки К, головними площинами

Розрахунок валу при згинанні з крученням проводиться з використанням однієї з теорій міцності. В цьому разі вал із пластичних матеріалів розраховують за третьою або четвертою теоріями міцності. **Загальна умова міцності валу** матиме вигляд:

$$\sigma_{\text{екв.}} \leq [\sigma] . \quad (13.21)$$

Тоді за третьою теорією міцності маємо:

$$\sigma_{\text{екв.III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] , \quad (13.22)$$

а за четвертою теорією отримаємо:

$$\sigma_{\text{екв.IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] . \quad (13.23)$$

Враховуючи формули (13.16) та (13.22), умови міцності (13.22 і 13.23) можна замінити однією формулою:

$$\sigma_{\text{екв.}} = \frac{M_{\text{пр}}}{W} \leq [\sigma] , \quad (13.24)$$

де $M_{\text{пр}}$ – зведений момент, який визначається за відповідними теоріями міцності:

а) за третьою теорією міцності:

$$M_{\text{пр.III}} = \sqrt{M_{\text{зг}}^2 + M_x^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_x^2} ; \quad (13.25)$$

б) за четвертою теорією міцності:

$$M_{\text{пр.IV}} = \sqrt{M_{\text{зг}}^2 + 0,75M_x^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_x^2} . \quad (13.26)$$

13.4 Розрахунки на міцність зубчастих передач

При роботі зубчастої передачі між зубцями спряжених зубчастих коліс виникає сила тиску \bar{F} , яка напрямлена по лінії зачеплення. Крім того, від взаємного ковзання їх, між ними виникає сила тертя

$F_1 = f \cdot F$, де f – коефіцієнт тертя. Ця сила порівняно із силою \bar{F} невелика, тому при виводі розрахункових формул її не враховують. Під дією цих сил зуб знаходиться у складному напруженому стані. На їх працездатність впливають напруження згинання σ_F у перерізах зубців і контактні напруження σ_H у поверхневих шарах зубців. Обидва ці напруження, змінні у часі, можуть спричинити руйнування зубців або їх поверхні.

Напруження згинання σ_F викликають злам зубців, а контактні напруження σ_H – руйнацію поверхневих шарів зубців.

Злам зубців викликається перевантаженням їх, а руйнація поверхневих шарів виникає за рахунок різниці у твердості різних поверхневих шарів. Для запобігання цього зубці розраховують на міцність за напруженнями згинання та контактними напруженнями.

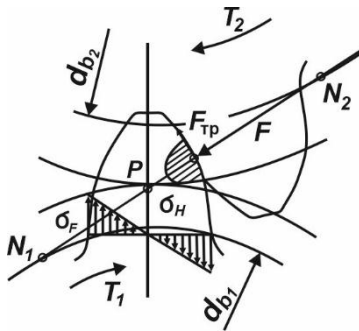


Рисунок 13.13 – Сили і напруження у зачеплених зубцях

Розрахунки зубців на контактну міцність виконують для зачеплення в полюсі. За основу береться **формула Герца** для найбільших контактних напружень стискання циліндрів, що

контактують по утворюючим,

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{E}{[2\pi(1 - \mu^2)]} \cdot \left(\frac{q}{\rho_{\text{пр}}}\right)}, \quad (13.27)$$

де E – зведений модуль пружності матеріалів зубчастих коліс; μ – коефіцієнт Пуассона;

$\rho_{\text{пр}}$ – зведений радіус кривизни профілів зубців у полюсі зачеплення; $q = F/k$ – нормальне навантаження на одиницю довжини ℓ_k контактної лінії зуба; F – сила тиску між зубцями.

Зведений модуль пружності:

$$E = \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2}, \quad (13.28)$$

де E_1 і E_2 – відповідно модулі пружності матеріалів шестерні та колеса.

Зведений радіус кривизни циліндричної прямозубої передачі:

$$\rho_{\text{пр}} = \rho_1 \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1 \pm \rho_2}, \quad (13.29)$$

де ρ_1 і ρ_2 – відповідно радіуси кривизни профілів зубців шестерні і колеса; знак «плюс» для зовнішнього, «мінус» для внутрішнього зачеплення.

З рисунка 13.14 видно, що $\rho_1 = 0,5 \cdot d_{w1} \cdot \sin\alpha_{1w}$ і $\rho_2 = 0,5 \cdot d_{w2} \cdot \sin\alpha_{1w}$, тому

$$\rho_{\text{пр}} = \frac{ud_{w1} \cdot \sin\alpha_{1w}}{2(u \pm 1)}. \quad (13.30)$$

Приймаючи для прямозубої циліндричної передачі $\alpha_{1w} = \alpha = 20^\circ$, $\mu = 0,3$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, коефіцієнт, що враховує форму

спряжених поверхонь зубців $z_H = 1.76$, коефіцієнт, що враховує форму спряжених зубців $z_M = 275 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}$ для сталених коліс, виражаючи усі розміри коліс через міжосьову відстань, маємо:

$$\alpha_w = K_a(u \pm 1)^3 \sqrt{\frac{T_2 K_{HB}}{u^2 \Psi_{ba} [\sigma_H]^2}},$$

де $K_a = 495$ для прямозубої передачі, $\Psi_{ba} = b_w/\alpha_w$ – коефіцієнт ширини вінця колеса.

Допустиме контактне напруження:

$$[\sigma_H] = \left(\frac{\sigma_{H \text{ lim } b}}{S_H} \right) z_R z_V K_{HL}, \quad (13.31)$$

де $\sigma_{H \text{ lim } b}$ – межа контактної втомленості поверхонь зубців, яка відповідає базовій кількості циклів напружень; S_H – коефіцієнт безпеки; z_R – коефіцієнт, що враховує шорсткість поверхонь спряжених коліс; z_V – коефіцієнт, що враховує колову швидкість передачі; K_{HL} – коефіцієнт довговічності. Усі ці коефіцієнти вибираються з довідників (див. [4]).

Модуль зачеплення визначається за формулою:

$$m = (0,01 \div 0,02) \alpha_M.$$

Розрахунок зубців на згинання, як і розрахунок на контактну міцність, роблять з урахуванням ряду факторів, які впливають на опір втомленості при згинанні і які виражаються різними коефіцієнтами:

K_z – теоретичним коефіцієнтом концентрації напружень у перерізі зуба;

коефіцієнтом Y_F форми зуба;

коефіцієнтом Y_a перекриття зубців;

коефіцієнтом Y_β нахилу зубців;

коефіцієнтом $K_{F\beta}$ нерівномірності розподілення навантаження по ширині вінця зубчатого колеса;

коефіцієнтом K_{FV} динамічного навантаження, що виникає при роботі передачі.

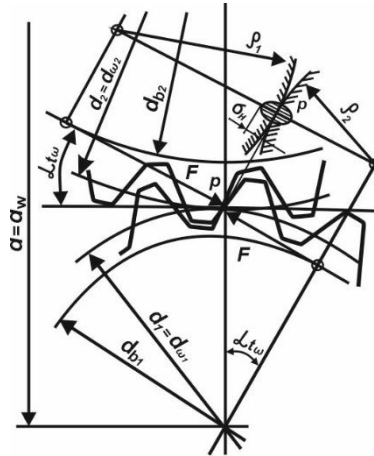


Рисунок 13.14 – Елементи зачеплення для розрахунку зубців на контактну міцність

При розрахунках зубців на згинання зуб розглядають як балку, яка жорстко защемлена одним кінцем і навантажена силою F (Рис.13.15). Таке положення навантаження найбільш небезпечне, тому що плече сили відносно вразливого перерізу має найбільше значення. За вразливий переріз приймається переріз у його підвалині, в зоні найбільшої концентрації напружень.

Хоч найбільші напруження виникають на стиснутому боці (неробочому) зуба, та розрахунки на міцність проводимо по напруженням, що виникають на робочому боці, тому що тріщини і руйнування зубців починаються, як показують досвід і експерименти, на розтягнутому боці зуба.

Розрахункові напруження згинання зубців у небезпечному перерізі на його робочому боці (див.рис.13.13)

$$\sigma_F = \left(\frac{\ell F \cos \alpha}{W_Z} - \frac{F \sin \alpha}{A} \right) Y_\alpha Y_\beta K_\tau K_{Fa} K_{F\beta} K_{FV},$$

де W_Z і A – момент опору на згинання і площа небезпечного перерізу.

$$W_Z = \frac{bs^2}{6}, \quad A = bs,$$

де b – ширина зуба, s – товщина зуба у небезпечному перерізі, ℓ – висота зуба.

Підставимо замість сили F її вираз через колову силу F_1 , чисельник і знаменник правої частини помножимо та, поділимо на модуль m , безрозмірну величину, що залежить від форми зуба, назовемо **коефіцієнтом форми зуба**:

$$Y_F = \left(6 \frac{m\ell \cos \alpha}{s^2} - \frac{m \sin \alpha}{s} \right) \frac{K_1}{\cos \alpha_w}.$$

Питома розрахункова колова сила:

$$w_{F1} = K_{Fa} K_{F\beta} K_{FV} \frac{F_1}{b}.$$

Розрахункова формула перевірного розрахунку зубців на згинання (згідно з ДСТ 21354-75), має вигляд:

$$\sigma_F = Y_F Y_\alpha Y_\beta \frac{w_{F1}}{m} \leq [\sigma_F], \quad (13.32)$$

де $[\sigma_F]$ – припустиме напруження згинання для зубців.

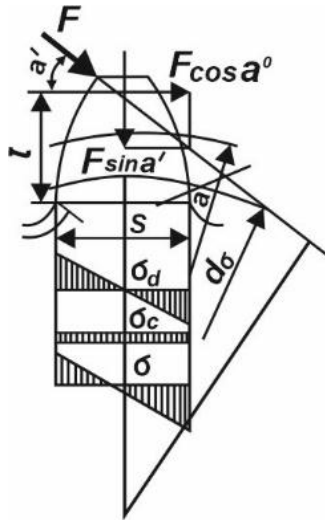


Рисунок 13.15 – Елементи зачеплення для розрахунку зубців на згинання

Підставляючи у формулу (13.32) замість колової сили F_1 її вираз через крутильний момент:

$$F_1 = 2 \cdot 10^3 \frac{T_1}{d_{w1}},$$

де F_1 – в Н, T_1 – в Нм та d_{w1} – в мм, позначаючи відношення ширини зуба до його діаметра $\Psi_{bd} = \frac{b_w}{d_{w1}}$ – коефіцієнт ширини зуба, вирішуємо рівняння відносно модуля і маємо:

$$m = K_m \sqrt[3]{\frac{Y_F K_{F\beta} T_1}{z_1^2 \Psi_{bd} [\sigma_F]}}, \quad (13.33)$$

$$\text{де } K_m = \sqrt[3]{2 \cdot 10^2 Y_a Y_\beta K_{Fa} K_{Fv}}.$$

Отриманий модуль слід округлити до найближчого стандартного значення з ДСТ 9563-60: 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 1, 1,25, 1,5, 1,75, 2,25,

2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 50 і далі через 5 мм.

14 ЛАНЦЮГОВІ ТА ПАСОВІ ПЕРЕДАЧІ

Ланцюгова передача у самому розповсюдженому вигляді складається з розташованих на деякій відстані один від одного коліс, які називаються зірочками, і охоплюючого їх ланцюга (Рис.14.1).

Обертальний рух ведучої зірочки перетворюється на обертальний рух веденої за рахунок зачеплення ланцюга із зубцями зірочок. **Переваги ланцюгової передачі** порівняно з пасовою – відсутність ковзання, компактність (вони займають набагато менше місця за шириною), менші навантаження на вали і підшипники (немає необхідності у початковому натягу ланцюга).

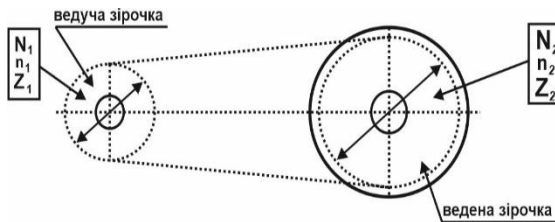


Рисунок 14.1 – Ланцюгова передача

Коефіцієнт корисної дії значно вищий і досягає значення $\eta = 0.98$.

Недоліки ланцюгових передач: подовження ланцюга внаслідок зношення його шарнірів і подовження пластин, внаслідок чого передача має дещо неспокійний хід; наявність в елементах ланцюга змінних прискорень, які спричиняють динамічні навантаження тим більші, чим більші швидкості руху ланцюга і чим менше зубців має менша зірочка; шум в роботі; необхідність уважного ставлення до її експлуатації.

Ланцюгові передачі використовують при великих міжосьових відстанях, коли зубчасті передачі неможливо використати з-за громіздкості, а пасові – з-за вимог компактності або сталого значення передаточного відношення. В залежності від конструкції ланцюгів

використовують передачі потужністю до 5000 кВт при колових швидкостях до 30...35 м/с. Найбільш розповсюджені ланцюгові передачі потужністю до 100 кВт при колових швидкостях до 15 м/с. Ланцюгові передачі використовують у транспортних, сільськогосподарських, будівельних, гірничих, нафтових та інших машинах.

Ланцюги за конструкцією бувають: втулочними, роликowymi (ДСТ 13568-75), зубчатими (ДСТ 13552-68) та фасонноланковими.

Основними геометричними характеристиками ланцюга є: крок, тобто відстань між осями двох найближчих шарнірів ланцюга, і ширина, а основна силова характеристика – руйнівне навантаження ланцюга, яке визначається експериментально.

Втулочний однорядний ланцюг (Рис.14.2) складається з внутрішніх пластин 1, напресованих на втулки 2, що вільно обертаються на валах 3, на яких напресовані зовнішні пластини 4. В залежності від потужності, яку треба передати, ланцюги виготовляють однорядними (ПВ) і дворядними (2ПВ). Такі ланцюги використовують при швидкостях до 10 м/с.

Приводні роликіві ланцюги за ДСТ 13568-75 бувають однорядними нормальними (ПР), однорядними полегшеними (ПРД), однорядними посиленними (ПРУ), дво-(2ПР)-, три-(3ПР)- та чотирирядними (4ПР) а також із зігнутими пластинами (ПРИ).

Роликівий однорядний ланцюг відрізняється від втулочного тим, що на його втулках розташовані ролики, що вільно обертаються, які замінюють тертя ковзання між втулками і зубцями зірочок на тертя кочення. Такі ланцюги використовують при колових швидкостях до 20 м/с.

Багаторядні ланцюги дають можливість збільшити навантаження пропорційно кількості рядів, тому їх використовують при передачах великих потужностей. Роликіві ланцюги з зігнутими пластинами використовують при динамічних навантаженнях (ударах, частих реверсах і т. і.).

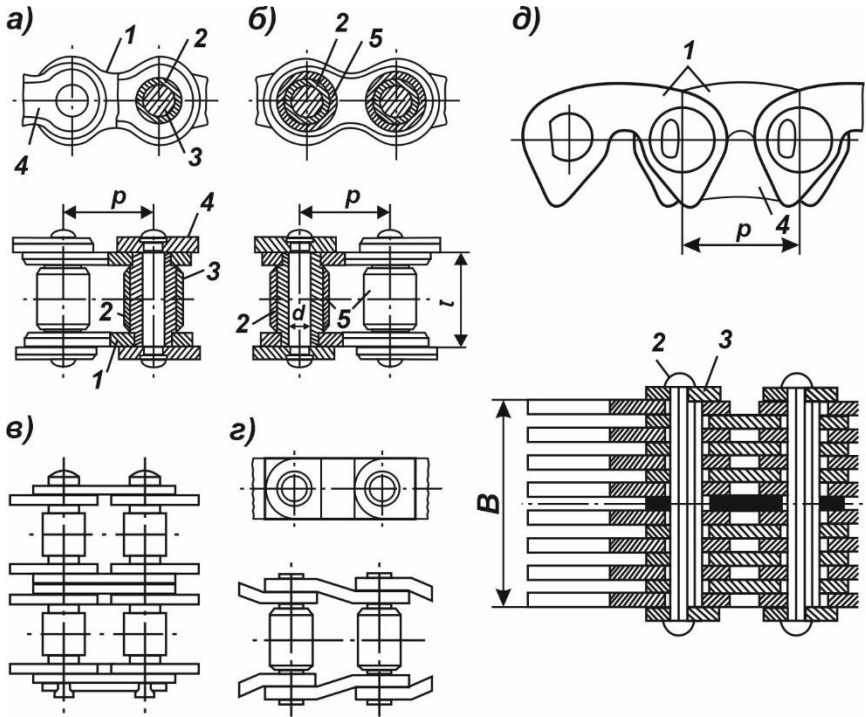


Рисунок 14.2 – Конструктивні типи ланцюгів

Змащування приводних ланцюгів попереджає їх від швидкого зношування. Для відповідальних передач при швидкостях до 8 м/с застосовують картерне змащування занурюванням ланцюга у мастильну купіль на глибину не більше ширини пластини і при великій швидкості – примусовою циркуляційною подачею мастила від насосу. Застосовують також консистентне змащування, яке здійснюється періодично через 120...180 годин занурюванням ланцюга у розігріте мастило.

14.1 Розрахунок ланцюгової передачі.

Центри шарнірів ланцюга при зачепленні з зубцями зірочки розташовуються на ділильному колі зірочки. Ділильне коло зірочки:

$$d = \frac{p}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}, \quad (14.1)$$

де p – крок ланцюга, z – кількість зубців зірочки.

Для втулочних і роликкових ланцюгів зубці зірочок профілюють у відповідності з ДСТ 591-69, для зубчастих ланцюгів – у відповідності з ДСТ 13576-68, за якими і визначають усі розміри зубців, а також діаметри вершин d_a і западин d_r зубців цих зірочок. Профілі і розміри зубців зірочок для фасоноланкових ланцюгів приймають за ДСТ 1055-53.

Мінімальна міжосьова відстань a_{min} ланцюгової передачі приймають в залежності від передаточного числа u передачі і умови, що кут обхвату ланцюгом меншої зірочки складає не менш 120° , тобто при $u \leq 3$:

$$a_{min} = 0.5(d_{a1} + d_{a2}) + 30 \dots 50 \text{ мм}; \quad (14.2)$$

при $u > 3$

$$a_{min} = \left[\frac{(9 + u)}{20} \right] (d_{a1} + d_{a2})_{\text{мм}}, \quad (14.3)$$

де d_{a1} і d_{a2} – діаметри вершин відповідно меншої і більшої зірочки, мм.

Оптимальна міжосьова відстань ланцюгової передачі:

$$a = (30 \dots 50)p, \quad (14.4)$$

чисельний множник приймається тим більшим, чим більше u .

Кількість ланок z_r ланцюга розраховують по попередньо прийнятій міжосьовій відстані a передачі, кроку ланцюга p та числами зубців меншої z_1 і більшої z_2 зірочок:

$$z_V = \frac{(z_1 + z_2)}{2} + \frac{\left[\frac{(z_1 + z_2)}{(2\pi)}\right]^2 p}{a} + \frac{2a}{p}. \quad (14.5)$$

Розраховане число округлюють до найближчого парного числа. Довжину ланцюга визначають за формулою:

$$\ell = z_r \cdot p. \quad (14.6)$$

Передаточне відношення:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (14.7)$$

Число зубців меншої зірочки вибирається в залежності від передаточного відношення i .

Основний критерій працездатності приводних ланцюгів – зносостійкість їх шарнірів. Несуча спроможність ланцюгової передачі визначається значеннями допустимих контактних напружень у шарнірах ланцюга. Відповідно і розрахунок ланцюгової передачі полягає в розрахунку її шарнірів на зносостійкість по допустимому тиску $[P]$ для шарнірів.

Допустима колова сила передачі при середніх експлуатаційних умовах:

$$[F] = A \cdot [P], \quad (14.8)$$

де A – площа проекції опорної поверхні шарніра;

$[P]$ - допустимий тиск у шарнірах ланцюга для середніх експлуатаційних умов (приймається за даними довідників).

Для втулочного і роликового ланцюга $A = d \cdot \ell$, де d – діаметр валика, ℓ – довжина втулки.

Розрахунок ланцюга на зносостійкість шарнірів проводиться за формулою:

$$F_1 \leq \frac{[F_t]}{k}, \quad (14.9)$$

де k – добуток коефіцієнтів, що враховують динамічність навантаження, спосіб регулювання натягу ланцюга, величину міжосьової відстані, нахил лінії зірочок до горизонту, способу змащування ланцюга, режим роботи.

При розрахунках ланцюга на зносостійкість шарнірів попередньо задаються кроком ланцюга p . Потім приймають число зубців меншої зірочки z_1 , визначають середню швидкість ланцюга V , колову силу F_1 . Якщо при розрахунку виявиться, що крок p ланцюга був прийнятий зavelиким, то його треба взяти меншим, таким, щоб він був мінімально допустимим для заданого навантаження. Якщо ж, всеж-таки, крок зavelикий, то треба замість однорядного вибрати багаторядний ланцюг. Число рядів ланцюга:

$$z_v = k \cdot \frac{F_t}{[F_t]}, \quad (14.10)$$

де $[F_t]$ – допустима колова сила однорядного ланцюга. Після розрахунків остаточно ланцюг вибирають за відповідним ДСТом.

14.2 Пасові передачі

Загальні відомості. Пасова передача у загальному вигляді складається з ведучого і веденого шківів, розташованих на деякій

відстані один від одного і з'єднаних пасом, надітим на шків з натягом. Обертання ведучого шківа перетворюється у обертання веденого завдяки тертю, яке виникає між пасом і шківом.

За формою поперечного перерізу розрізняють плоскі (Рис.14.2, б), клинові (Рис.14.2, в), поліклинові (Рис.14.2, г), і круглі (Рис.14.2, д) приводні паси.

Плоскі паси у поперечному перерізі мають форму прямокутника шириною, значно більшою за товщину. Чим тонше пас, тим він гнучкіше. Клинові паси у перерізі мають форму трапеції. Робочими поверхнями клинового паса є його боки, якими він прилягає до боків канавок шківа. Глибину канавки приймають більше ніж висота паса. Такі паси характеризуються збільшеним, за рахунок клина, зчепленням з ними і, відповідно, збільшеною тяговою спроможністю. Поліклинові паси – плоскі паси з поздовжніми клиновими виступами – ребрами на робочій поверхні, які входять у клинові канавки шківів. Ці ремені поєднують переваги плоских пасів – гнучкість і клинових – підвищену зчепленість зі шківом.

Відповідно формі перерізу паса розрізняють, **плоскопасові, клинопасові, поліклинові і круглопасові передачі**. Найбільш розповсюдженими є плоскопасові і клинопасові передачі.

Завдяки гнучкості пасів пасові передачі працюють плавно й тихо. Вони запобігають механізми від перевантаження внаслідок можливого ковзання пасів. Плоскопасові передачі використовують при великих міжосьових відстанях. Існують плоскопасові передачі, які спроможні працювати при великих швидкостях руху пасу (до 100 м/с). При малих міжосьових відстанях, великих передаточних відношеннях і передачі обертання від одного ведучого шківа декільком веденим віддається перевага клинопасовій передачі.

Вантажоспроможність у плоскопасових передачах забезпечується за рахунок ширини паса, а у клинопасовій передачі – за рахунок кількості пасів.

Забезпечення тертя між пасом і шківом здійснюється за рахунок попереднього натягу пасів одним із шківів, або за допомогою

натяжного ролика (шківа).

До **переваг пасових передач**, що визначають області їх використання, відносяться: можливість здійснення передачі між валами, розташованими на великих відстанях; плавність і безударність роботи передачі; граничність навантаження; простота передачі, невелика вартість і простота обслуговування.

Недоліки пасових передач: громіздкість; несталість передаточного відношення; підвищені сили тиску на вали і підшипники.

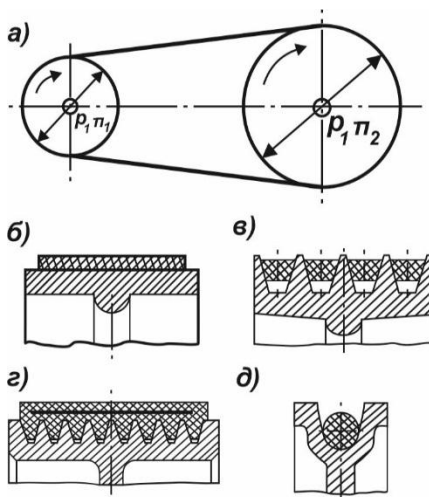


Рисунок 14.3 – Пасова передача, типи пасових передач

Матеріали і конструкція пасів. Приводний пас повинен мати визначену тягову спроможність (можливість передавати задане навантаження без ковзання) і достатню довговічність. Тягова спроможність паса забезпечується надійним зчепленням його зі шківами, що обумовлюється високим коефіцієнтом тертя між ними. Довговічність паса залежить від напружень згинання, що виникають в ньому, і частоти циклів навантажень – числа пробігів паса в одиницю часу.

За матеріалами і конструкціями розрізняють декілька типів пасів.

До стандартних плоскій пасів відносяться: прогумовані тканинні (ГСТ 38.05.98-76), шкіряні (ДСТ 18679-73), бавовняні суцільноткані (ДСТ 6982-75) і вовняні (ГСТ 3157).

Прогумовані паси – найбільш розповсюджені. Їх виготовляють трьох типів: А, Б і В. Нарізні паси типу А (Рис.14.4, а) складаються з декількох шарів (прокладок) крупноплетеної бавовняної тканини (бельтингу), між якими для підвищення гнучкості пасів розміщують прошарки з вулканізованої гуми. Для важких умов роботи прошарки виготовляють з уточної шнурової тканини. Краї пасів типу А покривають водостійкою сумішшю. Паси типу Б виготовляють як з гумовими прошарками, так і без них. Спірально загорнуті паси типу В виготовляють з одного куска бельтингової тканини без прошарків між ними. Усі типи прогумованих пасів виконують як з гумовими обкладками, так і без них.



Рисунок 14.4 – Типи пасів

Тканина забезпечує прогумованим пасам достатню міцність і довговічність, а гума є сполучною речовиною пасів, застерігає тканину від пошкоджень, підвищує коефіцієнт тертя між пасом і шківом. Допустима швидкість для пасів: типу А – 30 м/с, типу Б – 20 м/с, типу В – 15 м/с.

Шкіряні паси виготовляють з окремих цілих смуг шкіри шляхом склеювання їх або зшиванням. Вони можуть працювати при швидкостях до 45 м/с. Однак з-за їх високої вартості використовуються дуже рідко.

Вовняні (бавовняні) паси виготовляють (ткуть) у декілька шарів з вовняних або бавовняних ниток, насичують їх сумішшю з оліфи, крейди та залізного суріка. Вони менш чутливі до впливу підвищеної температури, вологи, хімічних речовин, що і обумовлює область їх застосування. Максимальна допустима швидкість до 30 м/с.

Зубчасті паси поєднують у собі переваги плоских пасів і зубчатих зачеплень. На робочій поверхні пасів роблять виступи (зубці), які входять в зачеплення з виступами (зубцями) на шківках. Зубчасті паси виготовляють з мастилостійких штучних матеріалів, з гуми на основі хлоропренових каучуків, з вулкана, армовані сталевими дротяними тросами. Такі паси спроможні передавати потужності до 200 кВт і більше при швидкості до 80 м/с.

Клинові паси для приводів загального призначення виготовляють двох конструкцій: кордоткані і кордошнурові. Клинові паси виготовляють трьох типів: нормального перерізу, вузькі і широкі. Паси нормального перерізу (ДСТ 1284.1-80; 2-80; 3-80) є основними у загальному машинобудуванні. Ці паси виготовляють семи різних за розміром перерізів: О, А, Б, В, Г, Д і Е. Вони виготовляються нескінченими стандартних довжин. Кут профілю $\varphi_0 = 40^\circ$. Допустима швидкість для профілів О, А, Б і В до 25 м/с, для профілів Г, Д і Е – до 30 м/с.

Поліклинові паси за конструкцією подібні до клинових, з'єднаних плоским пасом. Вони можуть працювати при швидкостях до 40 м/с.

Круглі паси виготовляють з бавовняних або капронових тканин. Іноді користуються прогумованими або шкіряними пасами.

Розрахунки пасових передач. Для забезпечення передачі крутного моменту і відсутності ковзання паса по шківу треба забезпечити попередній натяг пасів. Сила натягу ведучої гілки паса F_1 , більше сили натягу веденої гілки F_2 . Згідно з формулою Ейлера:

$$\frac{F_1}{F_2} = e^{fa} , \quad (14.11)$$

де f – коефіцієнт тертя, a – кут обхвату шківів пасом.
Початкова сила натягу паса:

$$F_0 = A \cdot \sigma_0 , \quad (14.12)$$

де σ_0 – початкове напруження у пасі, яке для плоских стандартних пасів без автоматичних натяжних пристроїв $\sigma_0 = 1.8$ МПа; з автоматичними натяжними пристроями $\sigma_0 = 2$ МПа; для клинових стандартних пасів $\sigma_0 = 1.2 \dots 1.5$ МПа; для поліамідних пасів $\sigma_0 = 3 \dots 4$ МПа; A - площа перерізу паса плоскопасової передачі, площа перерізів усіх пасів клинопасової передачі.

Маючи на увазі, що сума сил натягу гілок паса постійна (незалежно від того, навантажена передача чи ні), то

$$F_1 + F_2 = 2F_0 . \quad (14.13)$$

Середнє значення коефіцієнта тертя для чавунних і сталевих шківів можна прийняти: для прогумованих пасів $f = 0,35$, для шкіряних пасів $f = 0,22$ і для бавовняних та вовняних пасів $f = 0,3$.

При визначенні сил F_1 і F_2 в клинопасовій передачі замість коефіцієнта тертя f слід підставляти коефіцієнт тертя для клинопасової передачі

$$f_{\tau} = \frac{f}{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)},$$

де φ_0 – кут клинових пасів.

Сила тиску Q на вал шківів дорівнює геометричній сумі сил натягу гілок (Рис. 14.5, а). З паралелограма сил випливає:

$$Q = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\gamma} \approx (F_1 + F_2) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right), \quad (14.14)$$

де γ – кут між гілками пасу. З рис.14.5, б видно, що

$$\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \quad (14.15)$$

де α – кут обхвату пасом меншого шківів.

Замість суми $F_1 + F_2$ у рівняння (14.14) підставимо подвійну силу попереднього натягу пасу F_0 (див.14.14). Тоді з урахуванням (14.15) остаточно

$$Q = 2F_0 \sin(\alpha/2). \quad (14.15)$$

Коефіцієнт корисної дії η при нормальних умовах роботи у середньому для плоскостасової передачі дорівнює 0,96, а для клинопасової – 0,95. При сприятливих умовах роботи, наприклад при малих діаметрах шківів, великих швидкостях пасів і т.і., він може знижуватись до 0,85.

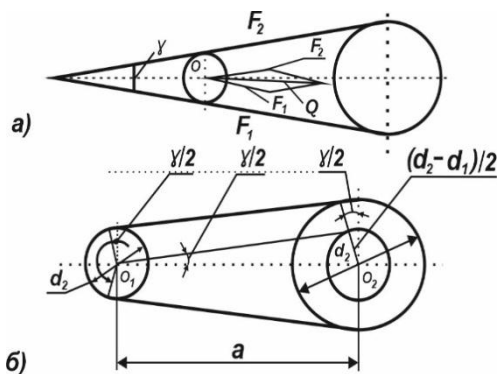


Рисунок 14.5 – Розрахункова схема пасової передачі

Діаметр меншого шківів плоскостасової передачі:

$$d_1 = (1100 \dots 1300)^3 \sqrt[3]{\frac{P_1}{n_1}} \quad (14.16)$$

або

$$d_1 = (520 \dots 610) \sqrt[3]{\frac{P_1}{\omega_1}}, \quad (14.17)$$

де d_1 – в мм; P_1 – в кВт; n_1 – в хвил⁻¹ і ω_1 – в рад/сек.

Розрахований діаметр d_1 меншого шківa перевіряють за припустимою швидкістю для паса:

$$V = \frac{\omega_1 d_1}{2} = \frac{\pi n_1 d_1}{60} \leq [V]. \quad (14.18)$$

Діаметр d_1 меншого шківa клинопасової передачі приймають за ДСТ 1284.3-80 в залежності від обраного прюфілю паса. Діаметр d_2 більшого шківa як для плоскопасової, так і для клинопасової передачі визначають за формулою $d_2 = d_j \cdot i$. Остаточні діаметри шківів плоскопасової передачі узгоджують з ДСТ 17383-73, а клинопасової передачі – з ДСТ 1284.3-80.

Кут обхвату пасу меншого шківa $\alpha = 180 - \gamma$.

Міжосьова відстань пасової передачі визначається конструкцією привода.

Для плоскопасової передачі:

$$\alpha \geq 2(d_1 + d_2). \quad (14.19)$$

Для клинопасової передачі:

$$\alpha = C d_2, \quad (14.20)$$

де d_2 – діаметр більшого шківa; C – чисельний коефіцієнт, який приймається в залежності від передаточного відношення.

Розрахункова довжина пасів плоскопасової відкритої передачі

або відкритої клинопасової передачі:

$$\ell = 2a + 1.57(d_1 + d_2) + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a}. \quad (14.21)$$

Розраховану довжину ℓ узгоджують з ДСТ.

15 КОНСТРУКЦІЯ І РОЗРАХУНОК ДЕТАЛЕЙ. НЕРОЗ'ЄМНІ З'ЄДНАННЯ

15.1 Зварні з'єднання

Позитивні якості та недоліки. З'єднання окремих частин у одне ціле при зварюванні одержується за рахунок місцевого розігріву з'єднуваних частин до розплавленого стану. Зварюванням можна з'єднувати як металічні, так і неметалічні деталі.

Зварні з'єднання є самими досконалими із нероз'ємних з'єднань.

Їх переваги виявляються у наступному:

- а) рівномірність по відношенню до з'єднуваних елементів;
- б) економія матеріалу і зменшення маси конструкції у порівнянні з заклепочними з'єднаннями;
- в) висока продуктивність і простота процесу зварювання.

Недоліки зварних з'єднань:

- а) поява температурних напружень і їх концентрація;
- б) можливість короблення при зварюванні тонкостінних елементів.

Способи зварювання. Існує декілька найбільш вживаних методів зварювання: електродугова, електрошлакова, контактна і газова. Знаходять застосування нові способи: холодна, ультразвукова, тертям і вибухом.

При електродуговому зварюванні під дією тепла, яке виділяється електричною дугою, оплавляються з'єднані елементи, і оплавлений метал разом з металом електрода, обмазаного захисним шаром, утворює міцний шов. Цим способом зварюються конструкційні сталі, любих марок, титан, чавун, алюмінієві та мідні сплави. Зварювання може виконуватися зварювальними автоматами і напівавтоматами або вручну. Електродугове зварювання в середовищі захисного газу (фреону або гелію) застосовується при зварюванні високовуглецевих сталей, алюмінієвих, магнієвих сплавів, міді, молібдену і інших металів і сплавів.

Електрошлакове зварювання дозволяє зварювати метал необмеженої товщини. Метал розігрівається за рахунок тепла, яке виділяється при проходженні струму через електропровідну шлакову ванну від електродів до з'єднаних частин деталей.

З'єднання деталей за допомогою **контактної електрозварки** проходить за рахунок розігріву стику теплом, яке виділяється при проходженні електричного струму через місце контакту з'єднаних деталей при одночасній дії сили, яка стискає деталі. Це точкове, стикове, роликкове і імпульсне зварювання.

При **газовому зварюванні** оплавлення елементів деталей і прутка присадкового матеріалу відбувається в струмені газового полум'я. Таке зварювання застосовується при з'єднанні деталей з різними температурами плавлення, а також пластмасових деталей.

Позитивні якості зварювання полягають у можливості зварювати неметалічні деталі і незалежність від джерел електроенергії. Недоліки: можливість короблення деталей, обмеження товщини зварюваних деталей (30-40 мм), більш низька міцність швів ніж при електричному зварюванні.

Типи і конструкція зварних швів. При електродуговому зварюванні в залежності від взаємного розташування зварюваних деталей (рис. 15.1) розрізняють з'єднання; стикове, нахлестом, впритик або таврове, кутове.

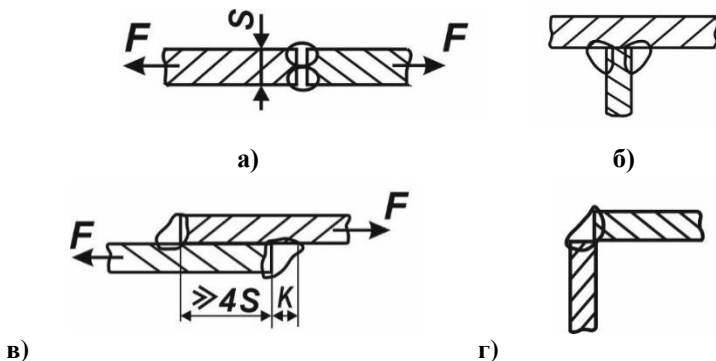


Рисунок 15.1 – Типи зварних швів

У стикових з'єднаннях використовуються стикові шви з відбортовкою кромки, без скосу і з скосом шва, односторонні і двосторонні. У останніх згаданих видах з'єднань шви мають вигляд валика і називаються валиковими або кутовими швами.

У залежності від розташування шва відносно лінії дії сили при з'єднанні встик розрізняють прямі і косі шви (Рис.15.2, а, б); при з'єднаннях нахлестом – прямі, флангові, косі і комбіновані шви (Рис.15.2, в, г, д, е).

Для попередження виникнення збільшення гнучких напружень лобові шви рекомендується розміщувати з двох сторін. При цьому довжина перекриття з'єднуваних елементів не повинна бути менше $4S$ (S – товщина з'єднуваних елементів).

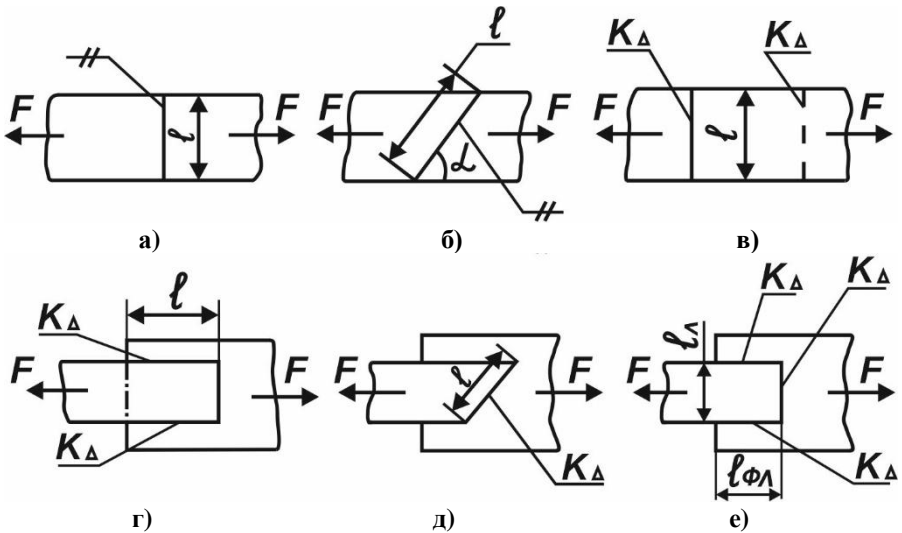


Рисунок 15.2 – Види зварних з'єднань

Довжина лобових і косих швів не обмежується: довжина флангових швів l не повинна перевищувати $50..60 K$ – довжина катета кутового шва.

Не рекомендується з'єднувати деталі точковим зварюванням з

різницею товщини їх у три рази і більше. Діаметр d точки назначається в залежності від найменшої товщини зварювальної деталі S , для сталених деталей при $S \leq 1,5 \div 3$ мм $d = 1,2 S \div 4$ мм, при $S > 3$ мм $d = 1,5S \div S$ мм. Крок між центрами точок при з'єднанні двох і трьох деталей $\ell = 3d$ і $\ell = 4d$ відповідно.

15.2 Розрахунок зварних з'єднань

Зварні з'єднання повинні бути по можливості рівномісними з основним металом конструкцій. У з'єднаннях встик (Рис.15.1 а), умова міцності шва довжиною ℓ (Рис.15.2, а) при роботі на розтягання:

$$\sigma = \frac{F}{S\ell} \leq [\sigma'_p], \quad (15.1)$$

при роботі на стискання:

$$\sigma = \frac{F}{S\ell} \leq [\sigma'_{ст}]. \quad (15.2)$$

Якщо шов зорієнтовано під кутом α (звичайно $\alpha=45^\circ$) до напрямку зусилля (Рис.15.2, б), то його міцність умовно визначається за формулою:

$$\tau = \frac{F}{S\ell} \leq [\tau']. \quad (15.3)$$

У наведених залежностях: σ і τ – нормальні і дотичні напруження в матеріалі шва; F – діюче зусилля; S – товщина з'єднуваних елементів; ℓ – довжина шва; $[\sigma'_p]$, $[\sigma'_{ст}]$ – допустимі нормальні напруження матеріалу шва; $[\tau']$ – допустиме дотичне напруження матеріалу шва.

Для з'єднання нахлестом в прямих швах (Рис.15.2, в) і флангових

(Рис.15,2, г) швах:

$$\tau = \frac{F}{2 \cdot 0,7K \cdot \ell} \leq [\tau'] , \quad (15.4)$$

в комбінованих швах (Рис.15.2, е) на основі принципу незалежності дії сил:

$$\tau = \frac{F}{(0,7 \cdot K \cdot \ell_{\text{л}} + 2 \cdot 0,7K \ell_{\text{фл}})} \leq [\tau'] , \quad (15.5)$$

де $\ell_{\text{л}}$ і $\ell_{\text{фл}}$ – довжина лобового і флангового швів;

K – довжина катета шва.

При дії на стиковий шов згинаючого моменту, прикладеного в площині приварки (Рис.15,3, а), розрахунок шва виконується за формулою:

$$\sigma = \frac{6M}{S\ell^2} = \frac{M}{W} \leq [\sigma'_p] , \quad (15.6)$$

де $W = \frac{S\ell^2}{6}$ – момент опору шва.

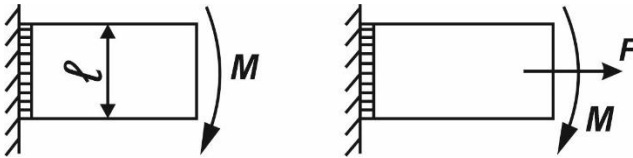


Рисунок 15.3 – Дія на стиковий шов згинаючого моменту

Якщо стиковий шов знаходиться під дією того ж моменту і розтягуючої сили, то шов розраховується за формулою:

$$\sigma = \frac{F}{S\ell} + \frac{6M}{S\ell^2} \leq [\sigma'_p].$$

У з'єднаних нахлестом з точковим зварюванням, напруження в точці:

$$\tau = \frac{4F}{i\pi d^2} \leq [\tau'], \quad (15.7)$$

де i - кількість одноразових зварних точок; d - діаметр зварної точки.

Допустимі напруження в швах вибирають як частину допустимого напруження $[\sigma_p]$ для основного металу. Так, у швах з'єднань із мало- і середньовуглецевих конструкційних сталей, виконаних автоматичною і напівавтоматичним зварюванням під шаром флюсу, у середовищі захисного газу, а також вручну електродами Е42А і Е50А при розтяганні і стисканні $[\sigma'_p] = [\sigma'_{ст}] = [\sigma_p]$, на зріз $[\tau'] = 0,65[\sigma_p]$

Для з'єднань, зварних звичайними електродами (ЕІ2, Е50), $[\sigma'_p] = 0,9[\sigma_p]$; $[\sigma'_{ст}] = [\sigma_p]$; $[\tau'] = 0,65[\sigma_p]$. Для контактного точечного зварювання $[\tau'] = 0,5[\sigma_p]$.

Задача. Розрахувати зварний стиковий шов за наступними даними: ширина полоси $\ell = 100$ мм; товщина полоси $S = 5$ мм; $[\sigma'_p] = 80$ Н/мм². Яке навантаження може витримати шов?

$$\text{За формулою 15.1 маємо } \sigma_{max} = \frac{F_{max}}{S \cdot \ell} \leq [\sigma'_p]$$

$$\text{Звідки } F_{max} = S \ell \cdot [\sigma'_p] = 100 \cdot 5 \cdot 80 = 40 \cdot 10^3 \text{ Н} = 40 \text{ кН}.$$

15.3 Заклепочні з'єднання

Позитивні якості і недоліки. Заклепочні з'єднання виконуються за допомогою спеціальних деталей: клепок (Рис.15.4, а, в) або цапф, передбачуваних на з'єднуваних деталях (Рис.15.4, б), які виконуються

суцільними або пустотілими, названими пістонами (Рис.15.4, в). Одна із головок заклепки називається закладною, а друга, яка утворюється в процесі клепаання – замикаючою. З'єднані деталі при цьому сильно стискаються.

Позитивними якостями заклепочних з'єднань є можливість з'єднання деталей які не зварюються, менше пошкоджуються елементи під час розбирання, менша концентрація напружень із-за можливих невеликих зміщень деталей у з'єднанні. До недоліків відносяться велика трудомісткість і великі витрати металу, мала продуктивність і висока вартість.

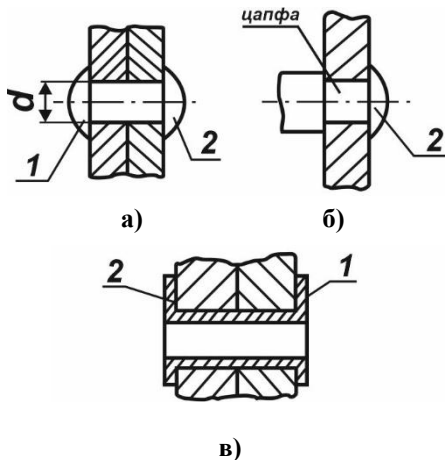


Рисунок 15.4 – Деталі заклепок

Заклепочні з'єднання застосовуються у авіаційних конструкціях, у деяких будівельних конструкціях, у приладобудуванні. Заклепки виготовляють із сталей Ст2, Ст3, 10, 15, латуні, міді і алюмінію.

Типи заклепок і заклепочних швів. Форми і розміри заклепок стандартизовані. Деякі типи заклепок і пістонів наведені на (Рис.15.5: а) – з напівкруглою закладною головкою (ГОСТ 10299-80); б – потайною головкою (ГОСТ 10300-80); в – напівпотайною головкою (ГОСТ 10301-80); г – точечна пустотіла; д – штамповка пустотіла; е –

штамповка пустотіла з закритою головкою.

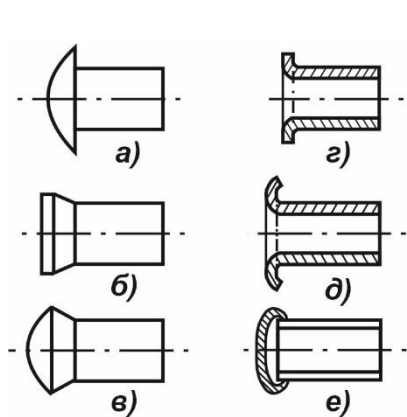


Рисунок 15.5 - Типи заклепок

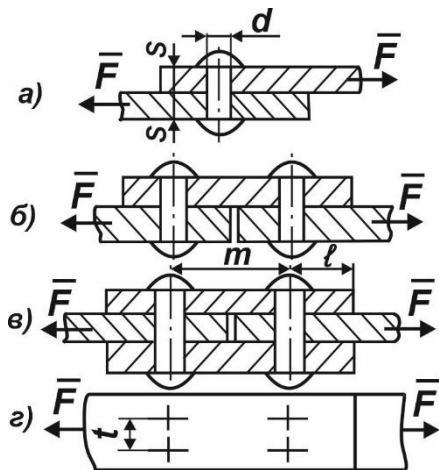


Рисунок 15.6 – Типи заклепочних з'єднань

Розрізняють три основних типу заклепочних з'єднань: внахлст (рис.15.6, а), встик з однією (Рис.15.6, б) і двома (Рис.15.6, в) накладками; однорядні, дворядні (Рис.15.6, г) і т.д.

Конструкція шва вибирається в залежності від умов роботи і форми з'єднуваних деталей. Під час конструювання швів слід забезпечити симетричне розташування площин зрізу відносно діючої сили (Рис.15.6, в), бо у протилежному вигадку (Рис.15.6, б) стержень заклепки зазнає згинання і з'являється зусилля, які будуть прагнути відірвати головки заклепок.

Розрахунок заклепочних з'єднань. Заклепки у з'єднанні, яке знаходиться під дією повздовжніх сил, розраховують на зрізання і перевіряються на змикання. У щільних з'єднаннях перевірка на зминання не виконується, бо все зовнішнє навантаження сприймається силами тертя, хоча спочатку навантаження передається силами тертя, а потім в роботі приймає участь тіло заклепки, яке піддається згинанню, зминанню і зсуву. Умовність розрахунку враховується відповідним

вибором допустимого напруження на зрізання. Розрахункова формула має вигляд:

$$\tau = \frac{4F_i}{i\pi d^2} \leq [\tau_{cp}], \quad (15.8)$$

де d – діаметр стержня заклепки; F_i – сила, яка припадає на одну заклепку; i – кількість площин зрізання.

За перевірочним розрахунком бокової поверхні заклепки на зминання користуються формулою:

$$\sigma_{cm} = \frac{F_i}{Sd} \leq [\sigma_{зм}], \quad (15.9)$$

де $[\sigma_{зм}]$ – допустиме напруження зминання;

S – товщина з'єднаних деталей.

Діаметр заклепки d вибирають в залежності від товщини з'єднаних деталей: $d = (S + 1)$ мм.

Після визначення допустимого зусилля із формули (15.8) визначаємо необхідне число заклепок як відношення повного зусилля F у з'єднанні до допустимого F_1 на одну заклепку.

Величина допустимих напружень при статичних навантаженнях в залежності від матеріалу заклепок і способу обробки отворів: у просвердлених отворах для заклепок із СТ0, СТ2, СТ3 $[\tau_{cp}] = 140$ МПа і $[\sigma_{зм}] = 280 \dots 320$ МПа; при продавлених отворах $[\tau_{cp}] = 100$ МПа і $[\sigma_{зм}] = 240 \dots 280$ МПа.

Інші параметри заклепного з'єднання (Рис.15.6, г) вибираються в залежності від діаметра заклепки:

$$\ell = (1,5 \dots 2,0)d; \quad m = (2 \dots 3)d; \quad t = (3 \dots 4)d.$$

Заклепні з'єднання приладів, як правило, не розраховуються на міцність, а вибирають із конструктивних міркувань і в залежності від

сумарної товщини з'єднаних деталей S (в межах $S_1 = 2 \dots 10$ мм)
діаметр заклепки $d = 0,5 S + 1$ мм.

16 РОЗ'ЄМНІ З'ЄДНАННЯ

16.1 Різьбові з'єднання

Позитивні якості і недоліки. Деталі, які утворюють різьбові з'єднання (Рис.16.1), мають гвинтову нарізку: на одній із деталей різьба розміщена на зовнішній циліндричній поверхні 1 (зовнішня різьба), друга із сполучених деталей 2 різьбу на внутрішній циліндричній поверхні (внутрішня різьба).

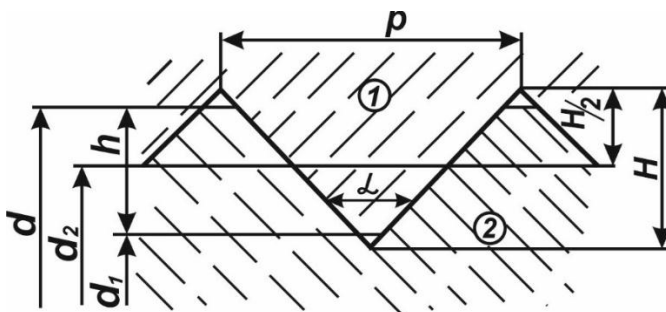


Рисунок 16.1 – Елементи різьби

Позитивними якостями різьбових з'єднань є їх висока надійність, зручність складання і розбирання, можливість утворення великих осьових сил, простота, відносно невисока вартість внаслідок стандартизації і масового виробництва різьбових деталей. Недоліки різьбових з'єднань: слід вважати концентрацію напружень в западинах різьби, що знижує втому міцність різьбового з'єднання.

Елементи різьби. Основні визначення і позначення елементів для циліндричних і конічних різьб встановлює стандарт. Для циліндричної різьби (Рис.16.1): d – зовнішній, d_1 – внутрішній, d_2 – середній діаметр різьби; α – кут профілю; p – крок різьби; n – число заходів різьби; Ψ – кут підйому різьби.

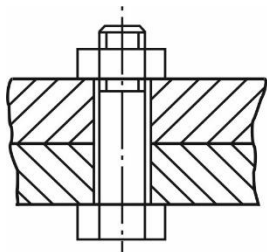
За формою профілю розрізняють трикутні, прямокутні, трапецеїдальні і круглі різьби. Якщо різьба являє собою одну гвинтову

лінію, то вона називається однозаходною. Застосовують також двох-, трьох- і багатозаходні різьби. За напрямком гвинтової лінії розрізняють праву і ліву різьби. Переважне застосування отримала права різьба. Ліва різьба застосовується частіше там, де з'єднання з правою різьбою в процесі експлуатації може ослабнути.

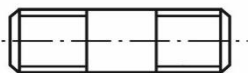
У машинобудуванні застосовують головним чином наступні різьби: метричну, круглу, трапецеїдальну, упорну, трубну циліндричну, трубну конічну. Профільний кут метричної різьби $\alpha = 60^\circ$.

Деталі кріплення. Різьбові з'єднання здійснюються за допомогою спеціальних деталей (Рис. 16.2):

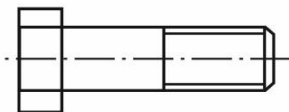
а) – болтів, б) – шпильок; в) – гвинтів. Під гайки підкладають шайби.



а)



б)



в)

Рисунок 16.2 – Деталі кріплення

Механічні властивості деталей кріплення нормуються стандартом, у відповідності з яким сталні болти діляться на 12 класів міцності, кожна із яких позначається двома числами, а гайки на 7 класів, позначених одним числом.

Для болтів перше число, помножене на 100, дає мінімальне значення границі міцності (МПа) необхідного матеріалу; друге, помножене на 10, визначає у відсотках відношення границі текучості до границі міцності. Наприклад, для болта класу 3,6 означає:

$$\sigma_{Bmin} = 3 \cdot 100 = 300 \text{ МПа}; \quad \frac{\sigma_T}{\sigma_{Bmin}} = 6 \cdot 10 = 60\%.$$

Для запобігання від самовідгвинчування різьбового з'єднання застосовують різні засоби стопоріння: контрогайки, пружинні шайби, шплінти, стопорні шайби.

Робота деталей різьбового з'єднання. Розглянемо співвідношення між силами діючими у гвинтовій парі з прямокутною різьбою (Рис.16.3). Розвернемо виток прямокутної різьби гвинта по середньому діаметру d_2 у похилу площину, а гайку замінимо повзуном. Підйому повзуна по похилій площині відповідає нагвинчуванню гайки на гвинт.

Розподілимо силу F на дві складові: осьову силу F_a , діючу на гвинтову пару, і колову силу F_t , яка обертає гайку при її нагвинчуванні. Із креслення розподілу сил витікає, що

$$F_t = F_a \cdot tg(\Psi + \varphi),$$

де Ψ - кут підйому різьби; φ – кут тертя ($\varphi = \text{arc } tg f$).

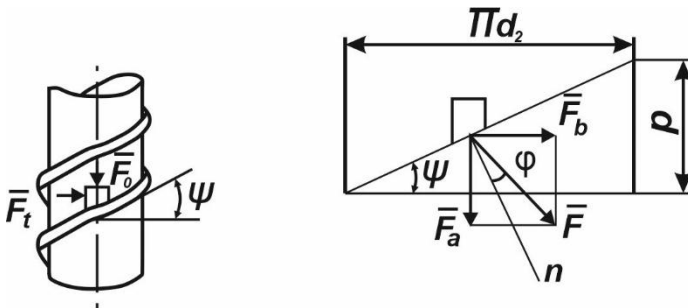


Рисунок 16.3 – Сили, які діють у гвинтовій парі з прямокутною різьбою

Очевидно, що крутильний момент $T_p = M_p$ в різьбі, утворений силою F_t при нагвинчуванні гайки (або загвинчування гвинта),

$$M_p = T_p = 0,5d_2 \cdot F_t \text{ або } M_p = T_p = 0,5d_2 \cdot F_a \operatorname{tg}(\Psi + \varphi). \quad (16.1)$$

Спуску повзуна по похилій площині відповідає відгвинчування гайки або гвинта. У цьому випадку, при розподіленні сил взаємодії F між похилою площиною і повзуном на осьову силу F_a і колову силу F_t , маємо:

$$F_t = F_a \cdot \operatorname{tg}(\varphi - \Psi).$$

Очевидно, що при $F_t \geq 0$ що відповідає умові $\operatorname{tg}(\varphi - \Psi)$ різьба буде самогальмуючою. Відповідно, умова самогальмування прямокутної різьби має вигляд $\Psi \leq \varphi$.

При підйомі повзуна по похилій площині рушійною силою F_t на висоту, яка дорівнює ходу різьби P , робота рушійних сил:

$$A_{PC} = F_t \pi d_2 = \pi d_2 \cdot F_a \cdot \operatorname{tg}(\varphi + \Psi), \quad (16.2)$$

а робота сил корисного опору:

$$A_{KO} = F_a \cdot P = F_a \cdot \pi d_2 \cdot \operatorname{tg} \Psi. \quad (16.3)$$

Коефіцієнт корисної дії η гвинтової пари при нагвинчуванні гайки або загвинчуванні гвинта визначається у вигляді:

$$\eta = \frac{A_{KO}}{A_{PC}} = \frac{F_a \cdot \pi d_2 \cdot \operatorname{tg} \Psi}{F_a \cdot \pi d_2 \cdot \operatorname{tg}(\Psi + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} \Psi}{\operatorname{tg}(\Psi + \varphi)}. \quad (16.4)$$

Момент тертя M_{Tp} на торці гайки при загвинчуванні визначається за наступними міркуваннями. Торцева опорна поверхня гайки приймається кільцевою з зовнішнім діаметром D_1 , який дорівнює розміру ключа, і з внутрішнім діаметром d_0 , який дорівнює діаметру

бовта (Рис.16.4).

$$M_{TP} = F \cdot f \left(\frac{D - d_0}{4} \right)$$

або

$$M_{TP} = F_a \cdot f \frac{d_{cp}}{2}. \quad (16.5)$$

Момент M_3 , необхідний для загвинчування гайки або гвинта

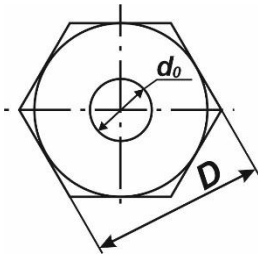


Рисунок 16.4 – Параметри гайки

$$M_3 = M_p + M_{TP} = F_a \cdot \frac{d_2}{2} \left[\operatorname{tg}(\Psi + \varphi) + f \frac{d_{cp}}{2} \right], \quad (16.6)$$

де F_a – осьова сила;

$$d_{cp} = \frac{D - d_0}{2}$$

– середній діаметр опорного торця гайки, d_2 – середній діаметр різьби.

16.2 Розрахунок болтів

Вихід із ладу болтів і гвинтів відбувається внаслідок розриву стержня по різьбі або по перехідному перерізу біля головки. Розрахунок болтів виконують за одним основним критерієм працездатності – міцності нарізаної частини стержня. Із розрахунків на міцність визначають номінальний діаметр різьби болта.

Болт, навантажений осьовою розтягуючою силою (попередня і послідувача затяжка відсутні). Характерним прикладом даного наван-

таження може бути різьбовий кінець вантажного крюка вантажопідійомної машини (Рис.16.5)

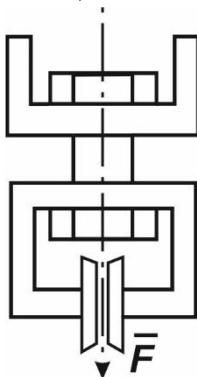


Рисунок 16.5 – Різьбовий кінець вантажного крюка

При відсутності попередньої затяжки основна розрахункова формула при розрахунках стержня гвинта, який розтягується силою \vec{F} , має вигляд:

$$\sigma_p = \frac{4F}{\pi d_1^2} \leq [\sigma_p], \quad (16.7)$$

звідки

$$d_1 = \sqrt{\frac{4F}{\pi[\sigma_p]}} = 1.13 \sqrt{\frac{F}{[\sigma_p]}}, \quad (16.8)$$

де d_1 – внутрішній діаметр різьби.

Болт встановлено в отвір з зазором, деталі навантажені поперечною силою (Рис.16.6).

У цьому випадку болт затягується такою силою затяжки \vec{F}_3 , щоб виникаюча при цьому сила тертя $\vec{F}_{тр}$ на поверхні з'єднаних деталей була не менше зовнішньої рушійної поперечної сили \vec{F} . В результаті цього болт працює на розтягання від сили \vec{F}_3 .

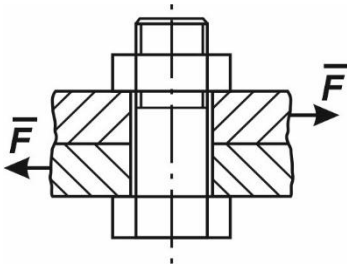


Рисунок 16.6 - Болт встановлено в отвір з зазором

Необхідну силу затяжки болта визначають із умови:

$$F_{\text{тр}} = F = f F_3,$$

Звідки $F_3 = F/f$, де f – коефіцієнт тертя між з'єднуючими деталями ($f = 0,15 \dots 0,2$).

Розрахункова формула має вигляд:

$$\sigma_p = \frac{4F_3}{\pi d_1^2} \cdot 1,3 \cdot 1,2 \leq [\sigma_p],$$

звідки

$$d_1 = \sqrt{6,24 F / (\pi f [\sigma])} \text{ або } d_1 = 1,4 \sqrt{\frac{F}{\pi [\sigma_p]}}. \quad (16.9)$$

Болт встановлено в отвір без зазору, навантажений поперечною силою (Рис.16.7)

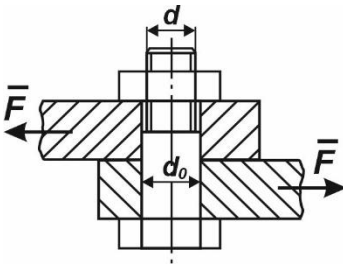


Рисунок 16.7 - Болт встановлено в отвір без зазору

У цьому випадку болт розраховують на зрізання. Умова міцності болта:

$$\tau_3 = \frac{4F}{\pi d_0^2} \leq [\tau_C] , \quad (16.10)$$

де τ_3 – розрахункове напруження зрізу болта;

F – поперечна зовнішня сила, яка зрізує болт;

d_0 – діаметр стержня болта у небезпечному перерізі;

$[\tau_C]$ – допустиме напруження на зрізі болта.

Формулою 16.10 користуються при перевірконому розрахунку болта.

Проектний розрахунок виконується за формулою:

$$d_0 = \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau_{3P}]}} \text{ або } d_0 = 1,13 \sqrt{\frac{F}{[\tau_{3P}]}}. \quad (16.11)$$

17 МУФТИ

17.1 Кулачкові муфти

Конструкція. Кожна із двох – рухомої і нерухомої – напівмуфт кулачкової муфти (Рис. 17.1) на своїй торцевій поверхні мають виступи, які входять в зачеплення при з'єднанні валів. Найбільш розповсюдженими є прямокутні, трапецевидні, трикутні профілі кулачків (Рис.17.1, б.).

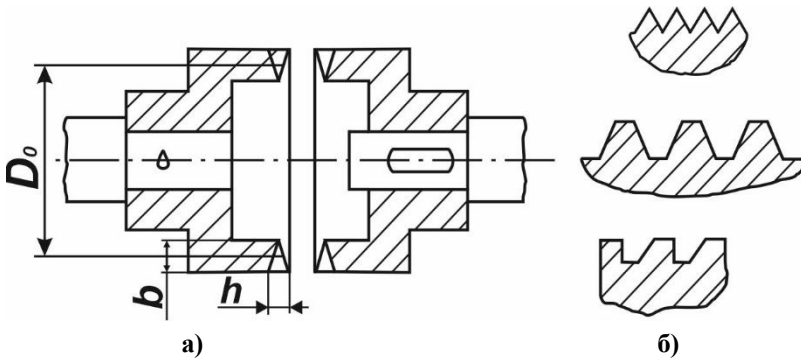


Рисунок 17.1 – Конструкції кулачкових муфт

Включення кулачкової муфти відбувається переміщенням рухомої напівмуфти або при зупинених валах або при дуже малій різниці швидкостей обертання до 1 м/с ведучого і веденого валів. Позитивними якостями кулачкових муфт є їх малі розміри і відсутність взаємного ковзання. Працездатність муфти залежить від точності центровки валів. Довжину ступиці рухомих напівмуфт вибирають рівною не менше двох діаметрів валу.

Кулачкові муфти виготовляють із сталей 15Х, 20Х з послідуною цементацією робочих поверхонь кулачків або із сталі 40Х, 30ХН з послідуочим гартуванням.

Розрахунок. Кулачки напівмуфт виходять із ладу із-за зношування, тому їх розраховують по контактному тиску:

$$p = \frac{2T_p}{D_0 z \cdot bh} \leq [p], \quad (17.1)$$

де D_0 – передній діаметр кулачків;

z - число кулачків;

b – ширина кулачка, виміряна по радіусу;

h - середня глибина заходів кулачків, виміряна по осі муфти;

$[p]$ – допустимий тиск (для загартованих поверхонь зубів муфт, які не вимикаються на ходу, $[p] = 80 \div 120$ МПа, для муфт які вимикають на ходу, $[p] = 30 \div 40$ МПа).

Міцність кулачків перевіряють також на згинання. Нормальне напруження від згинання наближено можна визначити за формулою:

$$\sigma = \frac{2T_p \cdot h}{z \cdot D_0 W} \leq [\sigma_H], \quad (17.2)$$

де W – момент опору перерізу кулачка біля його основи;

$[\sigma_H] = \frac{\sigma_T}{n}$ – допустиме напруження при згинанні; σ_T – границя текучості, $n \geq 1,5$ – коефіцієнт безпеки; T_p – розрахунковий крутильний момент.

17.2 Фрикційні муфти

Конструкція. В муфтах цієї групи для з'єднання валів використовуються сили тертя між стичними поверхнями напівмуфт. Напівмуфта 2 (Рис.17.2) переміщується вздовж одного із з'єднаних валів по шпонці ковзання і притискується своєю торцевою площиною до напівмуфти з зусиллям F . Це зусилля передається рухомій напівмуфті за допомогою кільця 3.

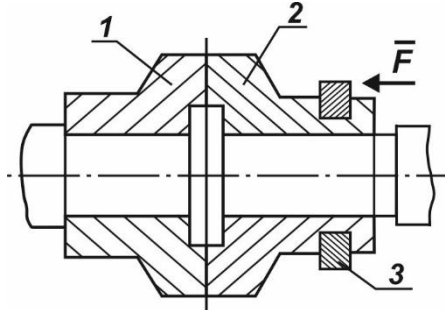


Рисунок 17.2 – Фрикційні муфти

Застосовуються однодискові і багатодискові фрикційні муфти. За розташуванням поверхонь з'єднання розрізняють дискові, конусні і циліндричні муфти.

Розрахунок. Період вмикання муфти супроводжується зносом робочих поверхонь. У зв'язку з цим крутильний момент T , який може передавати муфта і сила \bar{F} , необхідна для її вмикання, визначаються з урахуванням обмеження тиску. Для дискової муфти крутильний момент, що передається, визначається за формулою:

$$T \leq \frac{1}{2} \pi [p] \cdot f (R^3 - r^3) \cdot z, \quad (17.3)$$

де R і r – зовнішній і внутрішній радіуси поверхонь тертя;

$[p]$ – допустимий питомий тиск;

f – коефіцієнт тертя ковзання;

z – кількість пар поверхонь тертя.

При врахуванні впливу на величину $[p]$ швидкості v ковзання дисків, кількості z дисків в муфті і кількості вмикань муфти на годину відповідно через коефіцієнти K_v , K_z і K_m , а також приймаючи до уваги запас зчеплення β , цей вираз можемо записати у вигляді:

$$T = \frac{1}{2\beta} \pi [p] \cdot f (R^3 - r^3) \cdot z \cdot K_v \cdot K_z \cdot K_m. \quad (17.4)$$

Значення коефіцієнта тертя f і допустимого тиску $[p]$ приймаємо в залежності від матеріалу пар тертя.

Таблиця 17.1 - Значення коефіцієнта тертя f і допустимого тиску $[p]$ в залежності від матеріалу пар тертя

Матеріал пар тертя	f	$[p]$, МПа
Загартована сталь по загартованій сталі з мастилом	0,06	0,6÷0,8
Чавун по чавуну або по загартованій сталі	0,08	0,6÷0,8
Для пресового матеріалу на основі азбесту по сталі або чавуну	0,3	0,2÷0,3

Значення коефіцієнтів у формулі (17.4):

$K_V = 1.35, 1.0, 0.8, 0.63, 0.55$ при $V_{CP} = 1, 1.5, 5, 10, 15$ м/с.

$K_z = 1, 0.91, 0.76$ при $z \leq 3, z = 6, 11$.

$K_m = 1$ при кількості переключень муфти за годину $m \leq 50 \div 100$.

$\beta = 1,3 - 1,5$ – для металорізальних верстатів, $\beta = 1,25 - 1,5$ – для підйомно-транспортних машин.

Сила, необхідна для вмикання дискової муфти:

$$F = \frac{\beta T}{R_m \cdot z \cdot f} , \quad (17.5)$$

де R_m – середній радіус поверхні тертя (звичайно $R/r = 0,5$).

17.3 Самокеровані запобіжні муфти

Конструкція. Ці муфти, які використовуються для захисту ведених ланок від перенавантажень, розрізняються великою різноманітністю. На (Рис.17.3) зображена шарикова запобіжна муфта. Зчеплення ведучого і веденого елементів муфти виконується за допомогою підпружинених шариків. Якщо крутільний момент на веденому валу перевищить допустимий, то шарик буде прослизати і передача моменту перерветься. Силу тиску пружини на шарик можна регулювати і тим самим змінювати максимальний крутільний момент, що передається від однієї напівмуфти до другої.

Центробіжна фрикційна муфта (Рис.17.4) призначена для застереження веденого механізму як від перенавантаження по моменту так і від перевищення заданої частоти обертання.

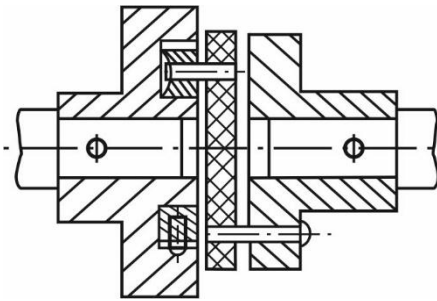


Рисунок 17.3 - Шарикова запобіжна муфта

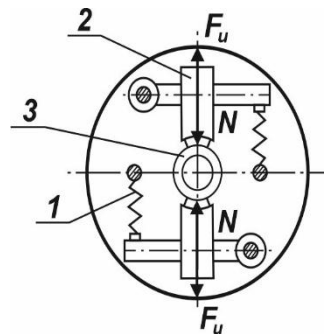


Рисунок 17.4 - Центробіжна фрикційна муфта

Регулювання муфти виконується з допомогою зміни натягнення пружин 1, які притискують гальмові колодки 2, які закріплені на ведучій напівмуфті, до тормозної втулки 3, настромлених на ведений вал.

Розрахунок. Вмикання центробіжної муфти відбувається під дією сили F , з якою гальмова колодка притискається до гальмового диску

$$F = F_n - F_u , \quad (17.6)$$

де F_n – зведена сила дії пружини, F_u – зведена сила інерції, що діє на важіль гальмової колодки.

Момент тертя повинен бути більше розрахункового крутильного моменту T_p , що передається:

$$M_{TP} = (F_n - F_u)f \cdot r \geq T_p , \quad (17.6)$$

де r – відстань від осі обертання до точки прикладання рівнодіючої сили тертя.

Із збільшенням частоти обертання зростає сила F_u , момент тертя зменшується і при критичному значенні частоти обертання, яке відповідає $M_{TP} = T_p$, відбувається ковзання муфти. При подальшому збільшенні частоти обертання ведучої ланки сила інерції зрівноважує дію пружини і настає розмикання муфти.

17.4 Глухі муфти

Конструкції. З'єднання валів за допомогою глухих муфт виключає можливість її відносного зміщення. Частіше всього застосовуються втулкові і фланцеві муфти. Найпростіша втулкова муфта із штифтами, яка складається із з'єднуючої втулки і двох штифтів (Рис.17.5, а) використовується для передачі невеликих крутильних моментів.

Застосовуються муфти, які з'єднуються з валами призматичними або сегментними шпонками (Рис.17.5, б).

За допомогою втулкових муфт з'єднуються кінці валів діаметром d від 4 до 100 мм. Довжина втулки L , приймається рівною $(2.8 \div 4.0)d$, а зовнішній діаметр муфти $D = (1.5 \div 2.0)d$. Втулки виготовляють із сталі 45, текстоліту або другого матеріалу. Фланцева муфта (Рис.17.6) складається із двох дисків, насаджених на кінці валів і з'єднаних між собою болтами, такі муфти (нормаль МН 2728-61) виготовляють із

середньовуглецевої сталі або сірого чавуну. Фланцеві муфти передають рух без зниження ударів і поштовхів, які виникають під час роботи з'єднаних валів.

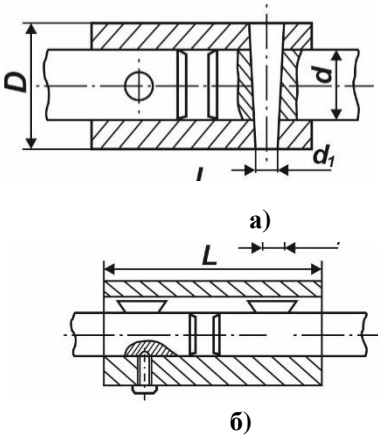


Рисунок 17.5 - Втулкова муфта із штифтами

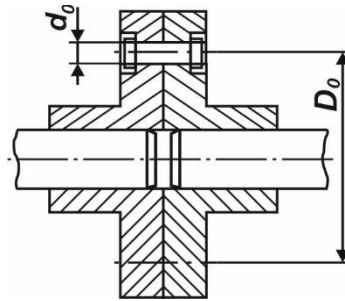


Рисунок 17.6 – Фланцева муфта

Втулку втулкової муфти із штифтами (Рис.17.5, б) перевіряють на кручення.

$$\tau = \frac{T_p}{W_p} = \frac{16T_p}{\pi D^3 \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)} \leq [\tau] . \quad (17.7)$$

Розрахунковий крутильний момент визначається в залежності від призначення механізму або машини:

$$T_p = T_{max} \cdot K,$$

де T_{max} – найбільший крутильний момент, K – коефіцієнт режиму, який залежить від виду двигуна і механізму: при під'єднанні до турбіни $K = 1 \dots 1,25$, до електродвигуна $K = 1 \dots 5$, до поршневого двигуна $K = 1,5 \dots 5$.

Допустиме напруження на кручення $[\tau] = 0,25 \sigma_T$. Конічні штифти втулочної муфти перевіряють розрахунком на зрізання за формулою (якщо $T = T_P$):

$$\tau = \frac{4T_P}{\pi d_1^2 \cdot d} \leq [\tau_{зр}]. \quad (17.8)$$

Якщо болти фланцевої муфти встановлює в отвори з зазором, то крутильний момент передається за рахунок тертя, яке виникає між фланцями муфти, і розрахунок зводиться до визначення сили затяжки одного болта:

$$F = \frac{2T_P}{D_0 z f}, \quad (17.9)$$

де $f = 0,1 \div 0,2$ – коефіцієнт тертя; z – кількість бовтів.

У випадку, коли диски фланцевої муфти з'єднуються чистими болтами, встановленими в отвори без зазорів, (Рис.17.6), крутильний момент передається болтами, які працюють на зрізання. Розрахункова формула для цього випадку:

$$\tau = \frac{8T_P}{z \cdot D_0 \cdot \pi d_0^2} \leq [\tau_{зр}], \quad (17.10)$$

де d_0 – діаметр стержня болта;

$[\tau_{зр}] = 0,25 \sigma_T$ – допустиме напруження на зрізання.

18 ВАЛИ І ОСІ

18.1 Прямі вали і осі. Конструкції

Конструкція валу або осі визначається призначенням, а також величиною і розміщенням діючих навантажень. Розрізняють різні, ступінчасті, шліцьові і фланцеві вали. Осі розділяються на нерухомі і рухомі. Вони бувають рівними або ступінчастими. Місця переходу від одного діаметру до другого виконуються у вигляді галтелей (Рис.18.1), радіус R яких слід вибирати по можливості більшим для зниження концентрації напружень. Частина валів і осей, які знаходяться в опорах називаються цапфами. Розрізняють конструкції підшипники ковзання (Рис.18.1, б) і кочення (Рис.18.2).

Осі і вали виготовляють із якісної сталі 20, 30, 40 і 45 і легованих сталей 40ХН; 40ХНМА; 30ХТГ; 30ХГСА; 18Х2НЧВА. У тих випадках, коли необхідно забезпечити антимагнітність, вали і осі виготовляють із антикорозійних сталей або бронзи. Для зменшення маси застосовують дюралюміній або сплави на базі титану.

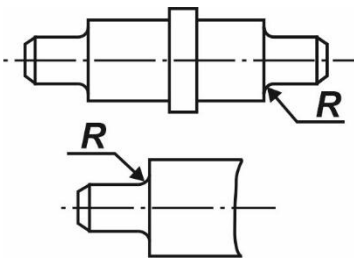


Рисунок 18.1 - Конструкція валів

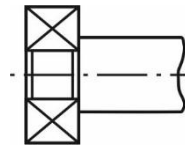


Рисунок 18.2 – Вал з підшипником кочення

18.2 Попередній розрахунок валів

Вали навантажуються такими силами і моментами, які викликають складну деформацію згинання з крученням. У зв'язку з тим, що на початковій стадії проектування розміри валу по довжині можуть бути невідомими, діаметр валу d приблизно визначають із розрахунків тільки на кручення при знижених допустимих напруженнях:

$$d = \sqrt{\frac{T}{0,2[\tau]}}, \quad (18.1)$$

де T – крутильний момент;

$[\tau]$ – умовне допустиме напруження (для сталевих валів $[\tau] = 12 \dots 20$ МПа).

У деяких випадках діаметр валу приймається на основі практики проектування. Наприклад, діаметр ведучого валу редуктора приймається рівним $0,8 \div 1,2$ діаметра валу приводного електродвигуна.

18.3 Розрахунок на статичне навантаження

Якщо на вал діють постійні навантаження або навантаження, величини яких відхиляються від середнього значення в межах 10-15%, то розрахунок валу ведуть на статичну міцність за найбільшими навантаженнями.

Після визначення діючих навантажень складають розрахункову схему і будують епюри поперечних сил і згинаючих моментів у двох взаємно перпендикулярних площинах, а також епюру крутильних моментів T . За допомогою епюру визначають небезпечні перерізи.

Розрахунок валу на згинання з крученням за третьою теорією міцності зводиться до розрахунку на просте згинання за зведеним

МОМЕНТОМ.

$$M_{3B} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + T^2} . \quad (18.2)$$

При цьому рівняння міцності має вигляд:

$$\sigma = \frac{M_{3B}}{W} = \frac{32M_{3B}}{\pi d^3} \leq [\sigma_3], \quad (18.3)$$

Звідки діаметр валу:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{3B}}{0,1[\sigma_3]}}$$

Рівняння міцності для порожнистого валу з відношенням внутрішнього діаметра до зовнішнього $\beta = \frac{d_0}{d}$ має вигляд:

$$\sigma = \frac{32M_{3B}}{\pi d^3(1 - \beta^4)} \leq [\sigma_3]. \quad (18.4)$$

При розрахунках осей крутільний момент T вважається рівним нулю. Допустимі напруження для валів і осей встановлюються з урахуванням механічних характеристик матеріалу, а також джерела концентрації напружень і діаметра валу. Для валів діаметром 30, 50 і 100 мм із вуглецевих сталей 45 і СТ6 а $\sigma_B \geq 600$ МПа і $\sigma_{-1} = 260$ МПа при наявності ступінчастих переходів з галтелями $[\sigma_3] = 70, 65, 55$ МПа. Тут σ_{-1} – границя витривалості на згинання, орієнтовно $\sigma_{-1} = (0,42 \dots 0,45)\sigma_B$ (границя міцності).

18.4 Розрахунок на витривалість

Для валів, які піддаються дії тривалих змінних навантажень, найбільшу небезпеку становлять втомні руйнування. Тому виконується

розрахунок на витривалість, як перевірочний після завершення конструювання валу за даними попереднього розрахунку.

Розрахунок виконується за формулами (18.2 - 18.4), а змінність дії навантаження враховуються зниженням допустимих напружень $[\sigma_3]$ при статичному навантаженні шляхом помноження їх на коефіцієнт $\gamma < 1$. При пульсуючому характері зміни напружень для вуглецевих і легованих сталей $\gamma = 0,44 \div 0,48$, для сталюого литва $\gamma = 0,50 \div 0,58$.

При симетричному циклі зміни напруження для вуглецевих і легованих сталей $\gamma = 0,26 \div 0,28$, для сталюого литва $\gamma = 0,30 \div 0,33$.

18.5 Розрахунок на жорсткість

Переміщення, які виникають під дією на вал робочих навантажень, впливають на працездатність самого валу, також на муфти, підшипники, зубчасті колеса, пов'язані з валом. Розрахунок на жорсткість полягає у визначенні умов закручування валів φ і умов повороту $\varphi_{3Г}$ поперечних перерізів валів у місцях установки на них інших деталей. Для ступінчастого валу, який складається із n циліндричних ділянок, кут закручування у радіанах:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{T_i \ell_i}{GJ_{\rho i}},$$

де $J_{\rho i}$, ℓ_i – полярний момент і довжина i -тої ділянки;

T_i – крутний момент, який діє у межах i -тої ділянки;

G – модуль зсуву.

Допустиме значення кутів повороту осей $\varphi_{3Г}$ залежить від вимоги до жорсткості насаджених на вали деталей і змінюються від 0,01 до 0,001 рад.

18.6 Підшипники кочення

Типи і конструкції підшипників. Підшипники кочення – найбільш поширений спосіб закріплення деталей, які знаходяться у обертальному і коливальному русі. Підшипник кочення складається із зовнішнього 1 і внутрішнього 2 кілець, між якими розташовані тіла кочення 3. Для запобігання тіл кочення від зміщення і стикання між собою їх відділяють одне від другого сепараторами 4. D і d – зовнішній і внутрішній діаметри підшипників (рис.18.3).

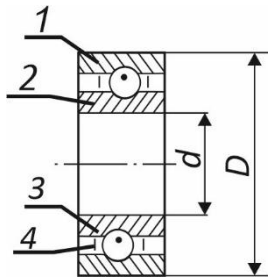


Рисунок 18.3 – Підшипник кочення

Підшипники кочення за напрямком дії навантаження відносно осі обертання діляться на радіальні, упорні, радіально-упорні і упорно-радіальні (Рис.18.4); за розмірами, ширині і зовнішньому діаметру – на серії від надлегкої до тяжкої.

У залежності від форми тіл кочення підшипники поділяються на шарикові і роликові циліндричні, сферичні, конічні. За конструктивними особливостями вони бувають самовстановлюючі і несамовстановлюючі, які допускають перекіс осі внутрішнього кільця по відношенню до осі зовнішнього, одно- дво- і чотири рядні (в залежності від кількості тіл кочення, розташованих по ширині підшипника), із стопорними шайбами, з ущільнювачами і без них (Рис.18.5).

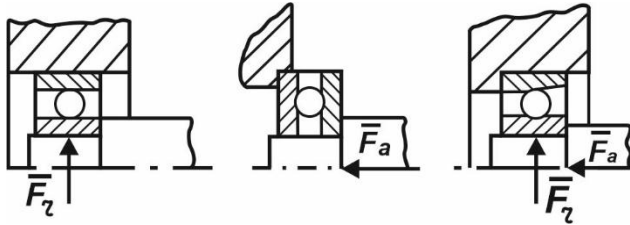


Рисунок 18.4 – Навантаження на підшипник кочення

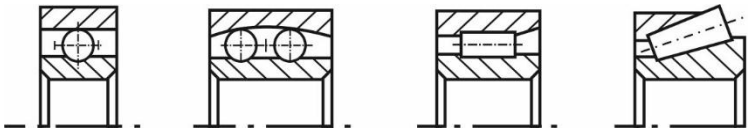


Рисунок 18.5 – Конструктивні особливості підшипників кочення

Вибір підшипників. Розрахунок підшипників кочення на міцність нормується стандартом і виконується за емпіричними залежностями, отриманими на основі результатів багаторазових випробувань. Підшипники вибирають за динамічною і статичною вантажопідйомністю.

Динамічною вантажопідйомністю радіальних і радіально-упорних підшипників називається таке радіальне навантаження, яке може витримати підшипник на протязі одного мільйона обертів внутрішнього кільця при нерухомому зовнішньому.

Вибір підшипників виконується у наступній послідовності:

1. Намічають тип підшипника з урахуванням умов експлуатації і конструкції вузла.
2. Обчислюють еквівалентне навантаження динамічне за формулою:

$$F = (x \cdot V \cdot F_r + y \cdot F_a) K_\delta K_t, \quad (18.5)$$

де F_r і F_a - відповідно постійні за величиною і напрямком радіальні і осьові навантаження, Н;

x , y – коефіцієнти радіального і осьового навантаження;

V – коефіцієнт обертання $V = 1$, якщо обертається внутрішнє кільце, $V = 1,2$, якщо внутрішнє кільце нерухоме по відношенню до навантаження;

K_δ – коефіцієнт безпеки;

K_τ – температурний коефіцієнт наведений у стандарті.

При статичних умовах експлуатації ($n < 1$ об/хв) за еквівалентне статичне навантаження приймається більше із значень:

$$F_0 = x_0 F_r + y_0 F_a \quad (18.6)$$

де x_0 і y_0 – коефіцієнти радіального і осевого навантаження, їх величини приведені у стандарті.

3. За вибраною довговічністю у годинах $L_n = 2500 \div 10000$ год. визначають довговічність у мільйонах обертів:

$$L = \frac{60 \cdot n \cdot L_n}{10^6}. \quad (18.7)$$

4. Визначають потрібну динамічну вантажопідйомність:

$$C_{TP} = F \cdot (L)^{\frac{1}{\alpha}},$$

де $\alpha = 0,3$ для шарикових підшипників;

$\alpha = 0,33$ для роликів підшипників.

5. За знайденим значенням динамічної вантажопідйомності в каталозі вибирають конкретний типорозмір підшипника і його габаритні розміри. Перевіряють, щоб частота обертання не перевищувала граничної частоти обертання, зазначеної у каталозі.

6. Назначають клас точності підшипника з урахуванням вимог, які пред'являються до складальної одиниці. За точністю виготовлення підшипники діляться на класи: 0; 6; 5; 4; 2 Н, П, В, НВ, ОВ – нормальної точності, підвищеної, високої, надвисокої, особливо високої.

19 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ВЗАЄМОЗАМІННІСТЬ

19.1 Взаємозамінність

Малі відхилення дійсних розмірів від розрахункових, які мають місце при виготовленні деталей, а також мікронерівності спряжених поверхонь деталей, які контактують, суттєво впливають на якість роботи механізмів.

Принцип конструювання і виготовлення деталей, який забезпечує можливість правильного складання і заміни при ремонті незалежно виготовлених деталей або вузлів без допоміжної їх обробки при додержанні вимог якості і економічності, називається **взаємозамінністю**.

Розрізняють повну і неповну взаємозамінність. Повна – передбачає правильне з'єднання всіх сполучуваних деталей, які надходять на складання. При неповній – забезпечується правильне з'єднання тільки частини деталей і вузлів, які надходять на складання.

Для складання у таких випадках використовують груповий підбір деталей, селективний метод .

Застосовуються також компенсатори і інші допоміжні технічні засоби.

19.2 Відомості про розміри

Геометричні параметри деталей кількісно оцінюються розмірами. Розмір встановлюється в процесі проектування на основі розрахунків на міцність і проставлений на кресленнях деталі або з'єднань називається номінальним. При виготовленні деталей повна відповідність між вказаними на кресленнях і дійсними розмірами практично неможлива.

Виходячи із функціонального призначення деталей і характеру їх спряження, можна назначити найбільший і найменший граничні розміри деталей, при яких буде забезпечене правильне складання і

нормальна робота вузла і механізму.

Економічно виправдані граничні відхилення розмірів деталей визначаються єдиною системою допусків і посадок.

Допуски. Всі спряжені деталі умовно поділяють на вали і отвори. Без залежності від форми, охоплюючі деталі прийнято називати отворами, а охоплювані – валами (Рис.19.1).

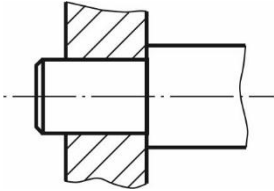


Рисунок 19.1 – Вал і отвір

Номинальні розміри отворів позначаються D_H , а валів d_H . Допустимі за вимогами взаємозамінюваності максимальні і мінімальні розміри для отвору D_{max} і D_{min} , а для вала d_{max} і d_{min} (Рис.19.2).

Верхнє відхилення отвору ES і валу es визначаються за формулами:

$$ES = D_{max} - D_H, \quad (19.1)$$

$$es = d_{max} - d_H,$$

а нижнє відхилення отвору EI і валу ei – за формулами:

$$EI = D_{min} - D_H \quad (19.2)$$

$$ei = d_{min} - d_H.$$

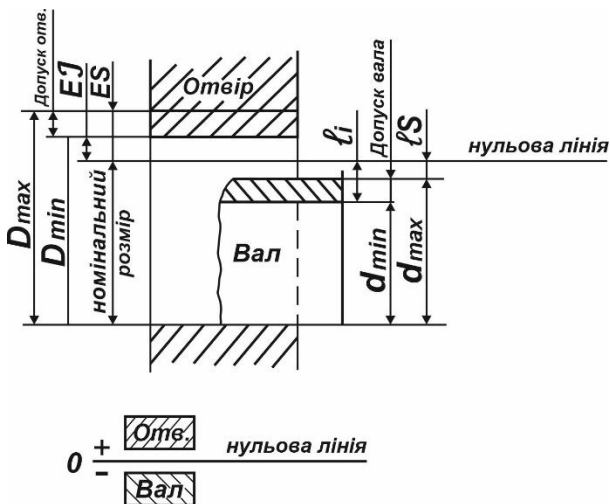


Рисунок 19.2 – Розміри валу і отвору

Дійсний розмір кондиційного валу або отвору повинен знаходитись між максимальним і мінімальним розмірами.

Допуски на розмір отвору T_D або валу T_d обчислюються за формулами

$$T_D = D_{max} - D_{min}, \quad (19.3)$$

$$T_d = d_{max} - d_{min}.$$

Отже, різниця між найбільшим і найменшим граничними розмірами називається **допуском**, а поле обмежене верхнім і нижнім відхиленням, називається **полем допуску**, умовно позначається IT.

Величини верхнього і нижнього граничних відхилень на кресленнях проставляються у міліметрах дрібними цифрами праворуч номінального розміру, наприклад $50^{+0,018}_{-0,008}$. Відхилення, які дорівнюють нулю на кресленнях не проставляються. У наведеному

прикладі верхнє відхилення отвору:

$$ES = 50^{+0,018} - 50 = 0,018 \text{ мм,}$$

нижнє відхилення:

$$EI = 50_{-0,008} - 50 = -0,008 \text{ мм,}$$

допуск на розмір отвору:

$$T_d = 50^{+0,018} - 50_{-0,008} = 0,018 + 0,008 = 0,026 \text{ мм.}$$

Розміщення поля допуску відносно нульової лінії позначають літерою або двома літерами латинського алфавіту – великою для отворів і малою літерою для валів.

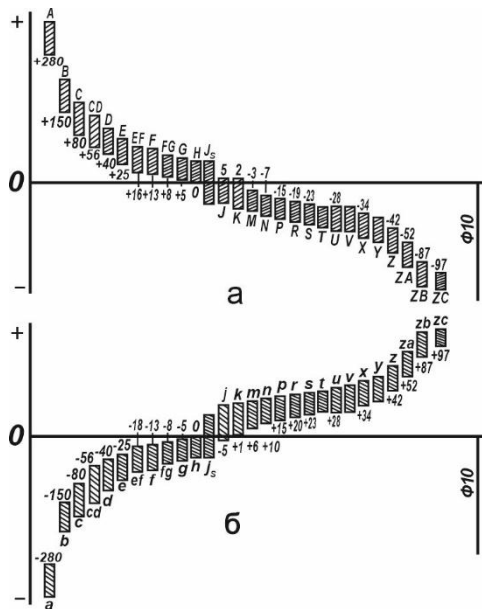


Рисунок 19.3 – Розміщення поля допуску відносно нульової лінії

19.3 Квалітети точності.

Квалітет – сукупність допусків, які відповідають однаковому ступеню точності для всіх номінальних розмірів (Laqualite – якість, властивість).

Чим більша величина допуску на розмір, тим менше вимог до точності деталі, тим простіше і дешевше можна її виготовити. Деталі великих розмірів важче виготовити, ніж малі з однаковими відхиленнями від номінальних розмірів.

Точність виконання розмірів залежить від відношення між величиною допуску і самим розміром. Вона оцінюється числом умовних одиниць допуску i у допуску даного номінального розміру. Отже, розміри, виконані з однаковим ступенем точності повинні мати приблизно однакове число одиниць i у своїх допусках.

Ступінь градації значень величин допусків, виражених у одиницях i , називається квалітетом. Всього їх 19.

Одиниця допуску i – співмножник у формулах допусків системи, є функцією номінального розміру.

$$i = 0.45 \sqrt[3]{D_{CP}} + 0.001 \cdot D_{CP}, \quad (19.4)$$

де

$$D_{CP} = \sqrt{D_H^{max} \cdot D_H^{min}},$$

де D_H^{max}, D_H^{min} – граничне значення розмірів в міліметрах для даного інтервалу.

Величина допуску ІТ, визначається квалітетом точності, назначається в залежності від розмірів деталі. Величина допуску ІТ = ai може бути виражена у одиницях допуску.

Наприклад, допуск у п'ятому квалітеті позначається умовно ІТ5 має $7i$, а у дев'ятому ІТ9 – $40i$. Це означає, що із збільшенням номера квалітету точність виконання розмірів зменшується. Числове значення

відхилень розмірів приводяться у довідковій літературі. В залежності від числа одиниць a допуску i у допуску ІТ стандартом встановлено 19 квалітетів точності, написаних у порядку зниження точності: 01, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 17. Квалітети 01, ..., 4 призначені для кінцевих мір довжини, калібрів і т.д., у квалітетах 5, ..., 13 даються допуски для спряжених розмірів деталей, а у квалітетах, 14, ..., 17 – для не спряжених розмірів деталей.

Оскільки величина поля допуску визначається квалітетом, а його положення відносно нульової лінії позначено буквою, то граничне відхилення лінійних розмірів може бути вказане на кресленнях не тільки числовими значеннями відхилень але і умовними позначеннями полів допусків.

При цьому за числом, яке вказує розмір, записується умовне позначення поля допуску, яке складається із букви і цифри. Ця цифра позначає квалітет, наприклад 20H7, 12e8. Можна вказувати у дужках числових граничних відхилень: 20H7($+0,018$), 12e8($-0,032$ / $-0,059$).

19.4 Посадки

При складанні двох спряжених деталей розрізняють охоплюючу і охоплювану поверхні. Умовно прийнято називати охоплюючу поверхню **отвором**, а охоплювану – **валом**.

За різницею між розмірами отвору і валу можна мати уяву про свободу відносного руху деталі, або про міцність їх нерухомого з'єднання. Характер з'єднання деталей називається **посадкою**.

В залежності від розмірів спряжених деталей у з'єднанні може виникнути зазор або натяг. Якщо розмір отвору більше розміру валу, то з'являється зазор – позитивна різниця між розмірами отвору і валу. Якщо розмір отвору менше розміру валу, то різниця ця від'ємна, у цьому випадку має місце натяг. Всі посадки поділяються на три групи: рухомі, характеризуються наявністю зазору; нерухомі пресові, які забезпечують натяг у з'єднанні і перехідні, у з'єднанні яких можливо отримати як зазорів так і натягів.

19.5 Системи утворення посадок

Розрізняють дві системи утворення посадок: систему отвору і систему валу.

Системою отвору називають сукупність посадок, у яких граничні відхилення даного розміру отворів однакові для всіх посадок, а різні посадки утворюються шляхом зміни граничних відхилень розмірів валів.

Такий отвір називається основним і поле допуску його позначається буквою Н, яка ставиться після номінального розміру деталі, наприклад $\varnothing 25H8$. Нижнє відхилення основного отвору дорівнює нулю, тобто поле допуску розміщується "у тіло деталі".

Якщо показується розмір двох деталей, то у позначені посадки у системі отвору входить номінальний розмір і позначення полів допусків для кожного елемента, починаючи з отвору, наприклад $40 \frac{H7}{g6}$ (або $40H7-g6$, або $40 \frac{H7}{g6}$). **Системою вала** називають сукупність посадок, у яких граничні відхилення валів однакові для даного розміру і якості точності, а різні посадки досягаються шляхом зміни граничних відхилень отворів. Поле допуску основного валу розміщується "у тіло валу", тобто номінальний розмір відповідає найбільшому розміру, верхнє відхилення дорівнює нулю. У системі валу основною деталлю є вал, поле допуску його позначають буквою h, яка ставиться після номінального розміру деталі, наприклад $\varnothing 30h6$.

У позначення посадки входить номінальний розмір, загальний для обох спряжених деталей, за якими йдуть позначення поля допусків для кожного елемента, наприклад:

$$\varnothing 10 \frac{F7}{h6} (\varnothing 10F7 - h6, \varnothing 10 F7/h6).$$

Схема розміщення полів допусків для системи отвору і системи

вала показана на Рис.19.4.

Ці дві системи являються рівноправними. Та часто системі отвору віддають перевагу, у зв'язку з тим, що скорочується асортимент ріжучого інструменту для обробки отворів.

19.6 Вибір посадок

Для утворення рухомих з'єднань деталей призначають посадки з зазором (на Рис.18.4) поля 1 у системі основного отвору або основного валу (використовуються поля допусків валів від а до h і отворів від А до Н).

При вимогах високої точності, гарного центрування, з високою імовірністю отримання мінімальних зазорів застосовуються посадки $H7/h5$, $H7/h6$, $H8/h6$.

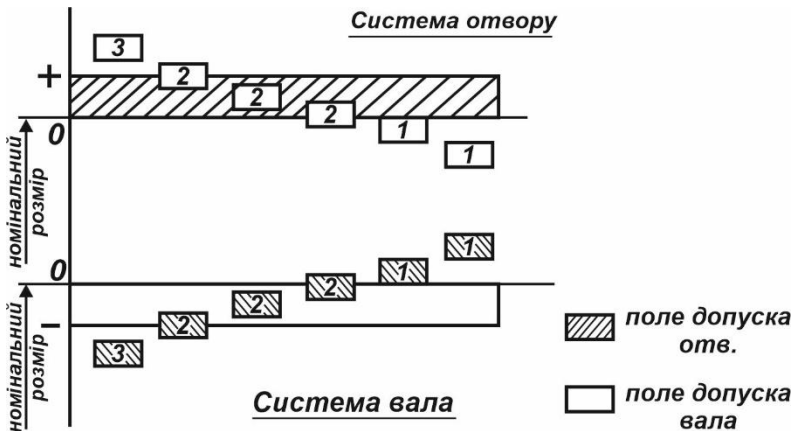


Рисунок 19.4 – Схема розміщення полів допуску

Для отримання точного обертання з невеликим числом обертів застосовуються з'єднання деталей по посадках $H6/g5$, $H7/g6$, $H7/f7$.

Посадка $H9/f9$ застосовується для з'єднання деталей невисокої точності із вільним подовжнім переміщенням або з обертанням в опорах ковзання.

Отримання вільного обертання невідповідальних деталей досягається застосуванням посадки $H11/d11$.

Перехідні посадки (поля 2, Рис.19.4) призначені для отримання нерухомих з'єднань, які періодично складаються і розбираються, їх можна отримати використовуючи поля допусків валів j, js, k, m, n і отворів I, IS, K, M, N (шківів, шестерні на валах із шпонками $H7/m6$, кільце підшипника $H7/k6$). Перехідні посадки забезпечують досить високу ступінь центрування з'єднаних деталей. У з'єднаннях для запобігання відносного руху деталей необхідно передбачати фіксаційні пристрої – штифти, шпонки і ін. Найбільш широко застосовуються посадки $H7/k6$; $H7/h6$; які використовуються для з'єднання валів і ступиць зубчастих коліс, шківів і інших деталей обертового руху, а також посадки $H7/m6$, які використовуються у штифтових з'єднаннях.

Для отримання нероз'ємних з'єднань використовуються нерухомі посадки (поля 3), які утворюються шляхом застосування полів допусків валів від p до zc і отворів від P до zc . За рахунок натягу ці посадки забезпечують нерухомість з'єднань без застосування допоміжних деталей кріплення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Артоболовский, И. И. Теория механизмов и машин : учебник для студентов высших технических учебных заведений / И. И. Артоболовский. - 4-е изд., перераб. и доп. - Москва : Транспортная компания, 2016. - 639 с. : ил.
2. Заблонский К.И. і інші. Прикладна механіка, - Київ. Вища школа, 1984, 280 с
3. Ковалев Н.А. Прикладная механика. – М.: Высшее образование, 1980, – 400 с
4. Дунаев П.Ф. Конструирование узлов и деталей машин. М, 1985, 416 с
5. Беляев Н.М и др 11-е изд., - М.: Наука, 1968. – 349 с.
6. Артоболовский И.И., Эдельштейн Б.В. Сборник задач по теории механизмов и машин.- М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973. – 256 с.
7. Иосилевич Г.Б. Прикладная механика.- М, 1985, 575 с
8. Вишневецкий І.І. Теорія механізмів і машин. Механічні передачі Київ, 1992, 355 с
9. Нехайчук В.Г., Матвійчук В.А., Чернілевський Д.В. Технічна механіка. Книга 2. Опір матеріалів. Київ, 1992, 270 с.
10. Справочник металлста в 5 томах. Т.3 изд , перераб, М. Машиностроение, 1977. Т.1.
11. В.С. Поляков, И.Д. Барбаш, О.А.Ряловський. Справочник по муфтам, - "Машиностроение", Ленинград, 1979.-344 с.
12. Справочник металлста, в 5-ти т. 3-е изд. М. «Машиностроение», 1977. Т.1, Т.2, Т.3.
13. Бейзельман Р.Д. и др. Подшипники качения. Справочник. М. «Машиностроение» 1975, 572 с.
14. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник, том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. Изд-во «Машиностроение», М.1968.- 568 с.
15. Выгодский Н.Я. Справочник по высшей математике. Изд-во «Наука». М.1972.- 872 с.

Навчальне видання

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

Укладачі: *Петро Костянтинівич Штанько*
Володимир Григорович Шевченко
Ольга Станіславівна Омельченко
Олександр Михайлович Поляков

За редакцією *Петра Костянтинівича Штанька*

Дизайн обкладинки *Видавництво «СТАТУС»*



Видавець:

ТОВ «Видавництво „СТАТУС“»

Адреса редакції: Україна, 69057, м. Запоріжжя,
Соборний просп., буд. 158, оф. 249.
моб. +38 (068) 448-11-28, mail@status.zp.ua
http://status.zp.ua

Свідцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців,
виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції *серія ДК № 5316 від 03.04.2017*

Здано в набір 01•ІХ•2020. Підписано до друку 19•Х•2020. Формат 64х90 1/16.
Папір книжково-журнальний Holmen Book Cream. Гарнітура Таймз. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 13,38. Обл.-вид. арк. 6,98. Друк. арк. відбиток 4012,5. Наклад 300 прим.
Замовлення № 9460/09.2020-А. Ціна договірна. Термін придатності книжки *необмежений*.

Макет розроблений та віддрукований:
ТОВ «Видавництво „СТАТУС“»

ISBN 978-617-7759-70-5