

УДК 532.135

Онуфрієнко В.М.¹, Козак В.С.²

¹ д-р фіз.-мат. наук, проф. НУ «Запорізька політехніка»

² студ. гр. М-314 НУ «Запорізька політехніка»

РЕОЛОГІЧНІ РІВНЯННЯ СТАНУ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ В'ЯЗКО-ПРУЖНОЇ ПОВЕДІНКИ ФРАКТАЛЬНО КОНФІГУРОВАНИХ МАТЕРІАЛІВ: МОДЕЛІ ВАГНЕРА, ЛЕОНОВА, МАРУЧЧІ

Метою цієї роботи є використання методу дробових похідних та фрактального аналізу для опису процесу текучості полімерних

нанокомпозитів та фізична інтерпретація дробового показника у випадку полімерів.

Побудову часових компактів вичерпування фрактально конфігурованого матеріалу здійснюємо за наступною схемою [1]. Сформуємо перше покоління покриття відрізками часу $\Delta t_1 < t$, де t спостережуваний загальний час руху від точки А до В по фракталу. Кількість елементів покриття часу t_1 залежить від діаметру t та величини Δt_1 у вигляді функції $N_{\Delta t_1 t} = f(t / \Delta t_1)$. Для наступних поколінь спостерігаються наступні співвідношення між кількостями часового покриття:

$$N_{\Delta t_1 t} \times N_{\Delta t_2 t_1} = N_{\Delta t_2 t}; N_{\Delta t_1 t} \times N_{\Delta t_3 t_1} = N_{\Delta t_3 t}; \dots; N_{\Delta t_{i(k+1)} \Delta t_{i(k)}} \times N_{\Delta t_{i(k+2)} \Delta t_{i(k+1)}} = N_{\Delta t_{i(k+2)} \Delta t_{i(k)}}.$$

З останньої рівності маємо функціональне рівняння Коші типу $f(x)f\left(\frac{y}{x}\right) = f(y)$, розв'язок якого є степеневою функцією

$$f\left(\frac{\Delta t_{i(k)}}{\Delta t_{i(k+1)}}\right) = \left(\frac{\Delta t_{i(k)}}{\Delta t_{i(k+1)}}\right)^\alpha, \quad -\infty < \alpha < +\infty, \quad (1)$$

що допускає узагальнення для комплексного значення показника $\alpha = \alpha' + i\alpha''$.

Таким чином, для опису фрактальних розподілів у часі застосовуємо диферінтеграли з комплексним порядком $d^\alpha t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{dt}{(t-t')^{1-\alpha}}$, що пов'язані

з дробовою похідною $d^\alpha L(t) = {}_a D_t^\alpha L(t) d^\alpha t$ [2]

$${}_a D_t^\alpha L(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{L(t')}{(t-t')^\alpha} dt' \quad (2)$$

Для опису нелінійного відклику фрактально конфігурованих метаматеріалів використаємо далі інтегральне формулювання Вагнера [3], до схеми якого вводимо диферінтегральну α характеристику (швидкість зміни) напруженості (обчислюється інтегралом по історії деформації для зсувних потоків)

$$\sigma(t) = - \int_{-\infty}^t M(t-t') h(\gamma) \gamma(t, t') d^\alpha t' \quad (3)$$

де скінченна деформація $\gamma(t, t') = \gamma(t') - \gamma(t)$, $h(\gamma)$ - функція затухання.

Функція $M(t-t')$ є ядром пам'яті і визначається швидкістю зміни модуля релаксації $M(t-t') = {}_0 D_t^\alpha G(t-t')$, ${}_0 D_t^\alpha G(t-t') d^\alpha t' = d^\alpha G(t-t')$, таким чином $\sigma(t) = - \int_{-\infty}^t h(\gamma)(t, t') d^\alpha G(t-t')$. Параметр дробового порядку

$0 < \alpha < 1$ визначає швидкість релаксації, де нижчі значення відповідають довготривалій пам'яті, а асимптотична поведінка показує перехід від пружності до в'язкої течії з важким степеневим хвостом.

Рівняння (3) є нелінійним узагальненням рівняння для фрактальної конфігурації середовища, його можна використовувати для побудови нелінійних в'язко-пружних рівнянь дробового порядку шляхом вибору функції пам'яті. З'являється можливість опису середовищ з фрактальною в'язкоеластичністю та складною пам'яттю таких, як біополімери, гелі, нанокомпозити, структура яких має самоподібну архітектуру.

Звичайна (дійсна) дробова похідна описує плавне згасання або дифузю, а комплексна частина виявляє періодичні коливання в логарифмічному масштабі, що підтверджує не безперервну, а сходинкову фрактальну структуру.

Комплексні показники застосовуються в моделях фрактальних меж, що наближаються до краху (розрив матеріалу, землетруси, фінансові кризи). Математична модель демонструє такі процеси збільшення амплітуди логоперіодичних коливань, що важливо для прогнозування моментів злому фрактальної структури.

Результати побудованої моделі показали, що коректний опис процесу текучості для полімерних нанокомпозитів, наповнених вуглецевими нанотрубками у фрактальній інтерпретації, може бути отриманий в рамках концепції дробових похідних. Величина границі текучості контролюється двома факторами: модулем пружності та структурним станом нанокомпозиту, що характеризується фрактальною розмірністю його структури. Дробовий показник степеня визначається як дробова частина фрактальної розмірності структури нанокомпозиту, яка є основним інформатором щодо стану зазначеної структури.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Onufriyenko V.M. Physical and geometric interpretation of α -Characteristics. Telecommunication and Radio Engineering. 1999. Vol.53. 4-5. P. 136-139.
2. Ortigueira M.D. A coherent approach to non-integer order derivatives. Signal Processing. 2006. 86. P. 2505.
3. Rathinaraj J.D.J., McKinley G.H., Keshavarz B. Incorporating Rheological Nonlinearity into Fractional Calculus Descriptions of Fractal Matter and Multi-Scale Complex Fluids. Fractal Fract. 2021. 5. P.174.