



Д.І. Анпілогов – доцент кафедри  
прикладної математики  
національного університету  
«Запорізька політехніка».



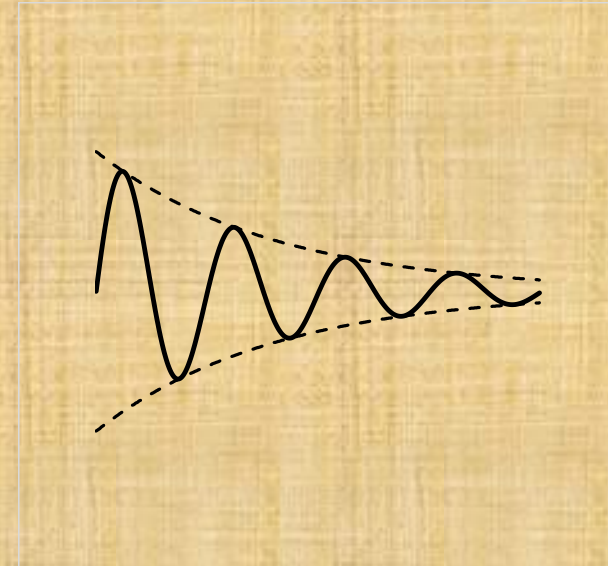
Н.В. Сніжко – доцент кафедри  
вищої математики  
національного університету  
«Запорізька політехніка».

Диференціальні рівняння

Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко

Д.І. Анпілогов  
Н.В. Сніжко

# Диференціальні рівняння



**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»**

**Д. І. Анпілогов  
Н. В. Сніжко**

## **ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ**

**Навчальний посібник**

**Запоріжжя • НУ «Запорізька політехніка» • 2019**

УДК 517.9(075.8)  
А69

*Рекомендовано до друку вченою радою  
Запорізького національного технічного університету  
(протокол № 3 від 28.10.2019)*

**Р е ц е н з е н т и:**

*В. Г. Корніч* – завідувач кафедри системного аналізу та обчислювальної математики НУ «Запорізька політехніка», доктор фізико-математичних наук, професор,

*Ю. В. Мاستиновський* – завідувач кафедри прикладної математики НУ «Запорізька політехніка», кандидат технічних наук, професор

**Анпілогов Д.І., Сніжко Н.В.**

А69 Диференціальні рівняння: навч. посібник / Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2019. – 175 с.

ISBN 978-617-529-242-6

Посібник містить теоретичні відомості і значну кількість ілюстративних прикладів та розв'язаних задач з теми «Диференціальні рівняння» у відповідності до програми курсу «Вища математика» багатоступеневої підготовки фахівців радіотехнічних спеціальностей. В посібнику містяться також індивідуальні завдання в кількості 15 варіантів та приклади їх розв'язку, які не потребують застосування обчислювальної техніки.

Видання може бути корисним для студентів, педагогів вищої школи, докторантів та аспірантів, які працюють у сфері педагогіки вищої школи.

**УДК 517.9(075.8)**

ISBN 978-617-529-242-6

© Анпілогов Д. І.

© Сніжко Н. В.

© Національний університет  
«Запорізька політехніка», 2019

# З М І С Т

---

---

Вступ . . . . .	6
<b>1 Основні терміни і означення</b>	<b>7</b>
1.1 Приклади і означення . . . . .	7
1.2 Питання для перевірки . . . . .	10
<b>2 Рівняння першого порядку</b>	<b>12</b>
2.1 Нормальна форма . . . . .	12
2.2 Елементарні окремі випадки . . . . .	12
2.3 Рівняння з відокремлюваними змінними . . . . .	14
2.3.1 Основний випадок . . . . .	14
2.3.2 Додатковий випадок . . . . .	14
2.4 Однорідні рівняння . . . . .	15
2.4.1 Основний випадок . . . . .	15
2.4.2 Додатковий випадок . . . . .	16
2.5 Лінійні рівняння першого порядку . . . . .	17
2.5.1 Варіація довільної сталої . . . . .	18
2.5.2 Метод Бернуллі . . . . .	19
2.5.3 Один нелінійний випадок . . . . .	21
2.6 Рівняння Бернуллі . . . . .	22
2.6.1 Застосування методу Бернуллі . . . . .	23
2.6.2 Метод лінеаризації . . . . .	24
2.7 Рівняння в повних диференціалах . . . . .	25
2.7.1 Випадок повного диференціалу . . . . .	25
2.7.2 Інтегруючий множник . . . . .	29
2.8 Огляд інших випадків . . . . .	33
2.9 Питання для перевірки . . . . .	35

<b>3</b>	<b>Рівняння, які допускають зниження порядку</b>	<b>36</b>
3.1	Випадок відсутності функції і її декількох похідних	36
3.2	Випадок відсутності аргументу . . . . .	37
3.3	Питання для перевірки . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Лінійні рівняння вищих порядків</b>	<b>40</b>
4.1	Основні означення . . . . .	40
4.2	Однорідні лінійні рівняння . . . . .	40
4.2.1	Принцип суперпозиції . . . . .	41
4.2.2	Вронскіан . . . . .	43
4.2.3	Про загальність розв'язку . . . . .	46
4.3	Однорідні лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами . . . . .	47
4.3.1	Випадок простих дійсних коренів . . . . .	48
4.3.2	Одна важлива формула . . . . .	48
4.3.3	Випадок кратних дійсних коренів . . . . .	52
4.3.4	Початкові відомості про комплексні числа . . . . .	55
4.3.5	Випадок простих комплексних коренів . . . . .	59
4.3.6	Випадок кратних комплексних коренів . . . . .	62
4.4	Метод варіації довільних сталих . . . . .	64
4.5	Неоднорідні лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною . . . . .	69
4.5.1	Теорема про загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння . . . . .	69
4.5.2	Побудова частинного розв'язку. Нерезонансні випадки . . . . .	73
4.5.2.1	Спеціальна права частина . . . . .	73
4.5.2.2	Випадок 1: $s = 0, \mu = 0$ . . . . .	75
4.5.2.3	Випадок 2: $s = 0, \mu \neq 0$ . . . . .	76
4.5.2.4	Випадок 3: $s \neq 0, \mu = 0$ . . . . .	77
4.5.2.5	Випадок 4: $s = 0, \mu = ib$ . . . . .	79
4.5.2.6	Випадок 5: $s = 0, \mu = a + ib$ . . . . .	85
4.5.2.7	Випадок 6: $s \neq 0, \mu$ - дійсне . . . . .	87
4.5.2.8	Випадок 7: $s \neq 0, \mu = a + ib$ . . . . .	90
4.5.3	Побудова частинного розв'язку. Резонансні випадки . . . . .	93
4.5.3.1	Випадок многочлену в правій частині . . . . .	93
4.5.3.2	Загальний випадок . . . . .	96
4.5.3.3	Наслідки . . . . .	97
4.6	Питання для перевірки . . . . .	99

<b>5 Системи звичайних диференціальних рівнянь</b>	<b>102</b>
5.1 Загальні поняття . . . . .	102
5.2 Лінійні нормальні СДР . . . . .	106
5.3 Метод виключення . . . . .	110
5.3.1 Загальний випадок . . . . .	110
5.3.2 Застосування методу виключення для лінійної нормальної СДР . . . . .	113
5.4 Метод заміни . . . . .	116
5.4.1 Загальна ідея . . . . .	117
5.4.2 Випадок простих дійсних коренів . . . . .	118
5.4.3 Випадок простих комплексних коренів . . . . .	119
5.4.4 Випадок кратних коренів . . . . .	122
5.4.5 Випадок неоднорідної СДР . . . . .	124
5.5 Питання для перевірки . . . . .	127
<b>6 Індивідуальні завдання</b>	<b>130</b>
<b>7 Розв'язок типового варіанту</b>	<b>144</b>
Література . . . . .	173

## Вступ

Посібник містить теоретичні відомості з теми «Диференціальні рівняння» у відповідності до програми курсу «Вища математика» багатоступеневої підготовки фахівців електро- і радіотехнічних спеціальностей. Передбачається, що читач володіє технікою диференціювання і інтегрування. Крім того, викладення суттєво спирається на поняття лінійної незалежності, яке відоме з курсу лінійної алгебри.

Викладення побудовано в такий спосіб, щоб охопити основні типи звичайних диференціальних рівнянь і прийоми та методи їх розв'язання. Разом з тим, сформульовано і доведено низку теорем, які використовують при практичній побудові розв'язків.

Усі основні теоретичні положення ілюструються великою кількістю відповідних прикладів. Приклади обмежено позначками  $\triangleleft$  і  $\triangleright$ . Автори, зокрема, ретельно добирали приклади, які ілюструють хід постановки математичних задач для опису фізичних процесів.

Певні фрагменти матеріалу набрано дрібним шрифтом. Як правило, при першому читанні ці фрагменти можна пропустити, але автори настійливо рекомендують повернутись до них.

В посібнику містяться також індивідуальні завдання в кількості 15 варіантів і приклад розв'язку одного варіанту. Завдання для самостійної роботи дібрано в такий спосіб, щоб відповіді переважно містили цілі значення різних коефіцієнтів. По-перше, отримання відповіді з цілими коефіцієнтами, на думку авторів, повинно відігравати роль непрямої вказівки на правильність розв'язку. По-друге, зручність розрахунків дозволяє не відволікатись на громіздкі арифметичні дії, а зосередитись на ідеях і практичних аспектах теорії звичайних диференціальних рівнянь.

# 1 ОСНОВНІ ТЕРМІНИ І ОЗНАЧЕННЯ

## 1.1 Приклади і означення

Зазвичай при розв'язуванні фізичних, технічних або інших задач ми описуємо явища, перебіг яких підпорядковується певним законам. В елементарних випадках законом є алгебраїчний зв'язок між параметрами стану описуваної системи. Прикладами можуть бути закони Менделєєва-Клапейрона  $pV = \frac{m}{\mu} RT$ , Ома  $I = \frac{U}{R}$ , всесвітнього тяжіння  $F = \frac{GMm}{r^2}$  тощо.

Але в більш загальному випадку закон може включати в себе не тільки параметри стану системи, а ще й їх похідні, тобто замість алгебраїчної може набувати диференціальної форми.

◁ *Приклад 1.1.* Човен масою  $m$  штовхнули з початковою швидкістю  $v_0$ . Знайти залежність швидкості човна від часу, вважаючи силу опору пропорційною до швидкості з коефіцієнтом пропорційності  $\lambda$ .

За другим законом Ньютона  $ma = F$ . За означенням прискорення  $a = \frac{dv}{dt}$ . За умовою задачі  $F = -\lambda v$ . Маємо:

$$m \frac{dv}{dt} = -\lambda v(t). \quad (1.1)$$

Отже, треба знайти функцію  $v(t)$ , яка в довільну мить пропорційна до своєї похідної. Маємо:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\lambda}{m} dt, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{\lambda}{m} dt, \quad \ln |v| = -\frac{\lambda}{m} t + C.$$

Обмежуючись випадком  $v > 0$ , маємо

$$v(t) = e^{-\frac{\lambda}{m}t+C} = e^C \cdot e^{-\frac{\lambda}{m}t}. \quad (1.2)$$

За умовою, якщо  $t = 0$ , то  $v = v_0$ , тобто  $v_0 = e^C \cdot e^0$ ,  $e^C = v_0$ . Остаточно,

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t}. \quad (1.3)$$

Якби прискорення гальмування було сталим, ми б отримали відому формулу  $v = v_0 - at$ . Але вона, на відміну від (1.3), не

здатна врахувати, що з плином часу сила опору (а отже, і прискорення руху) зменшується.  $\triangleright$

Важливо, що в рівнянні (1.1) зміна  $dv$  швидкості залежить від того миттєвого значення  $v(t)$ , яке має місце в кожний конкретний момент. Іншими словами, в рівнянні (1.1) враховано, що шукана величина  $v(t)$  є саме функцією. В цьому і полягає принципова відмінність алгебраїчних форм законів від диференціальних форм: розв'язуючи алгебраїчне рівняння, ми отримуємо у відповіді числа, а розв'язуючи диференціальне рівняння (ДР) – функції.

◆ **Означення 1.1.** Диференціальним називають рівняння, що містить шукану функцію і її похідні.

Рівняння (1.1) – диференціальне.

◆ **Означення 1.2.** Звичайним називають диференціальне рівняння, в якому шуканою є функція однієї змінної.

ДР (1.1) – звичайне.

Існують диференціальні рівняння, які містять шукану функцію декількох змінних, а також її частинні похідні. Наприклад, рівняння Лапласа  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , де  $z = z(x, y)$ ; одновимірне рівняння теплопровідності  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$ , де  $u = u(x, t)$ , і т.д. Такі рівняння називають диференціальними рівняннями з частинними похідними; ми їх не розглядатимемо.

◆ **Означення 1.3.** Порядком звичайного ДР називають найвищий порядок похідної, яка до нього входить.

ДР (1.1) – першого порядку. Наведемо приклад, коли виникає рівняння другого порядку.

◁ *Приклад 1.2.* Конденсатор ємністю  $C$  зарядили зарядом  $Q_0$  і приєднали до котушки індуктивністю  $L$ . Знайти залежність  $Q(t)$  заряду на конденсаторі від часу.

За означенням електроємності заряд конденсатора  $Q = CU$ , де  $U$  – напруга на конденсаторі. Це означення справедливе для будь-якого моменту часу, отже,  $U(t) = \frac{Q(t)}{C}$ . Струм розряду конденсатора (за означенням миттєвого значення сили струму)  $I = \frac{dQ}{dt}$ . За законом Фарадея електромагнітної індукції ЕРС самоіндукції  $\mathcal{E}(t) = -L \frac{dI}{dt} = -LQ''$ . Тоді напруга на котушці  $U_L(t) = -\mathcal{E}(t) = LQ''$ . За законом Кірхгофа для замкненого кола без джерел  $U_L(t) + U(t) = 0$ ,  $LQ'' + \frac{Q(t)}{C} = 0$ . Позначимо  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ . Маємо:

$$Q'' + \omega^2 Q(t) = 0. \quad (1.4)$$

Отримали *рівняння власних коливань*. Математично воно є звичайним диференціальним рівнянням *другого порядку*. Спосіб отримання його розв'язку буде подано нижче, а зараз ми цей розв'язок просто пред'явимо:

$$Q(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (1.5)$$

Справді,

$$\begin{aligned} I(t) &= Q'(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t, \\ Q'' &= -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t = \\ &= -\omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = -\omega^2 Q(t). \end{aligned}$$

Для перевірки залишається підставити це до (1.4).

В початковий момент часу  $t = 0$  за умовою  $Q(0) = Q_0$ . Але струму в котушці до замикання не було. Оскільки струм котушки є неперервною<sup>1</sup> функцією часу, то після замикання він з'явиться не одразу; в момент замикання після замикання він також дорівнюватиме нулю:  $I(0) = Q'(0) = 0$ . Маємо систему:

$$\begin{cases} Q(0) = A \cos 0 + B \sin 0 = Q_0; \\ Q'(0) = -A\omega \sin 0 + B\omega \cos 0 = 0. \end{cases}$$

Її очевидний розв'язок  $A = Q_0$ ,  $B = 0$ . Остаточно,

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega t, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \triangleright \quad (1.6)$$

При порівнянні наведених прикладів бачимо їх спільні риси: для ДР (1.1), (1.4), виникає безліч розв'язків, які утворюють *сімейство* функцій (1.2), (1.5) відповідно. В середині сімейства можна обирати будь-яку функцію, надаючи певні значення *довільним сталим інтегрування* (в сімействі (1.2) це константа  $C$ , а в сімействі (1.5) це незалежні константи  $A$ ,  $B$ ). **Кількість незалежних довільних констант інтегрування завжди збігається з порядком рівняння** (одна константа в першому прикладі, і дві – в другому). Сукупність усіх функцій в знайденому сімействі утворює **загальний розв'язок рівняння**. Для рівняння (1.1) загальним розв'язком є *однопараметричне* сімейство функцій (1.2), а для рівняння (1.4) – *двопараметричне* сімейство (1.5).

<sup>1</sup>В електротехніці цю властивість (а також неперервність напруги на конденсаторі) називають *законом комутації*.

До рівняння можна приєднати додаткові умови, які накладаються на початкове значення функції і її похідних. Це т.зв. **початкові умови**. Їх кількість повинна дорівнювати порядку рівняння, і тоді їх вистачить для знаходження відповідної кількості довільних сталих інтегрування. При використанні конкретних значень довільних сталих інтегрування із сімейства розв'язків обирається єдина функція: (1.3) або (1.6) відповідно. Ця функція задовольняє не лише рівняння, а ще й початкові умови. Її називають **частинним розв'язком**.

Отже, надалі можна вивчати задачі двох класів. В задачах першого класу ми маємо лише ДР. Формулювання задачі таке: «знайти усі<sup>2</sup> розв'язки ДР». Її математичний вигляд такий: знайти  $n$ -параметричну родину функцій  $y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ , для яких

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

В задачах другого класу ми маємо ДР деякого порядку і приєднані до нього початкові умови в кількості, яка дорівнює цьому порядку. Тепер задача звучить так: «знайти розв'язок ДР, який задовольняє задані початкові умови». Це є формулювання т.зв. **задачі Коші**. Її математичний вигляд такий: знайти функцію  $y(x)$ , для якої

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0; \\ y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}. \end{cases}$$

## 1.2 Питання для перевірки

1. Що таке ДР?
2. Що таке розв'язок ДР?
3. Що таке звичайне ДР?
4. Що таке порядок звичайного ДР?
5. Що таке загальний розв'язок звичайного ДР?

---

<sup>2</sup>В переважній більшості навчальних прикладів «знайти усі усі розв'язки» означає те саме, що «знайти загальний розв'язок». Але існують випадки, коли деяка функція є розв'язком диференціального рівняння, проте її не можна отримати із загального розв'язку аніяким підбором довільних констант інтегрування. Такі розв'язки називають **особливими**.

6. Скільки довільних констант інтегрування містить загальний розв'язок звичайного ДР?
7. Що таке частинний розв'язок звичайного ДР?
8. Що таке початкові умови і навіщо вони потрібні?
9. Що таке задача Коші? Скільки початкових умов до неї входить?
10. Чому не завжди правильно казати, що загальний розв'язок містить усі можливі розв'язки ДР?

# 2 РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

## 2.1 Нормальна форма

Найбільш загальний вигляд звичайних ДР першого порядку відносно функції  $y(x)$  є

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2.1)$$

Наприклад,  $\sqrt{y' + \frac{x}{y-y'}} - 2e^{x+yy'} = 0$ . На жаль, загальних методів розв'язування таких рівнянь не існує.

Однак, певні припущення щодо функції  $F$  дозволяють звести (2.1) до деяких окремих випадків, які можуть бути розв'язані аналітично. Наприклад, нехай рівняння (2.1) вдалось однозначно розв'язати відносно  $y'$ , виразивши цю похідну через  $x$  і  $y$ . Рівняння набуде вигляду:

$$y' = f(x, y). \quad (2.2)$$

В цьому разі кажуть, що рівняння (2.1) зведено до **нормальної** (або нормалізованої) форми (2.2).

## 2.2 Елементарні окремі випадки

1°. Нехай при зведенні рівняння першого порядку до нормальної форми з'ясувалось, що права частина (2.2) не залежить від функції  $y$ , тобто нормальна форма має вигляд

$$y' = \varphi(x).$$

Тоді загальний розв'язок виникає в результаті безпосереднього інтегрування:

$$y(x) = \int y'(x) dx = \int \varphi(x) dx + C.$$

◁ *Приклад 2.1.* Знайти загальний розв'язок ДР першого порядку  $y' = 2x + 3x^2$ . Маємо:

$$y(x) = \int y'(x) dx = \int (2x + 3x^2) dx = x^2 + x^3 + C. \triangleright$$

2°. Нехай при зведенні рівняння першого порядку до нормальної форми з'ясувалось, що права частина (2.2) не залежить від аргументу  $x$ , тобто нормальна форма має вигляд

$$y' = \psi(y).$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \psi(y), \quad \frac{dy}{\psi(y)} = dx, \quad \int \frac{dy}{\psi(y)} = \int dx + C.$$

◁ *Приклад 2.2.* Знайти загальний розв'язок ДР першого порядку  $y' = \frac{1}{4y^3 + \cos y}$ . Маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4y^3 + \cos y}, \quad (4y^3 + \cos y) dy = dx.$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$y^4 + \sin y = x + C.$$

Очевидно, це рівняння є трансцендентним відносно  $y$ , тобто розв'язати його аналітично і отримати явний вигляд функції  $y = y(x)$  неможливо. Проте, з точки зору теорії диференціальних рівнянь вважається, що задане рівняння розв'язане, оскільки воно зведене до такого вигляду, який більше не містить символу диференціювання (кажуть, що ми **проінтегрували диференціальне рівняння**). Тобто, загальний розв'язок подано в цьому прикладі неявно. Можна сказати також, що знайдено функцію  $x(y) = y^4 + \sin y - C$ , обернену до шуканої. ▷

◁ *Приклад 2.3.* Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку  $y' = e^{-y^2}$ . Маємо:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y^2}, \quad e^{y^2} dy = dx.$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$\int e^{y^2} dy = x + C.$$

Як відомо, інтеграл в лівій частині взагалі неможливо виразити у вигляді комбінації скінченної кількості елементарних функцій (цей інтеграл «не береться»). Проте, з точки зору теорії диференціальних рівнянь теж вважається, що задане рівняння розв'язано. Останнє рівняння є **першим інтегралом диференціального рівняння**; воно і надає розв'язок. ▷

## 2.3 Рівняння з відокремлюваними змінними

### 2.3.1 Основний випадок

Нехай рівняння (2.1) першого порядку вдалося звести до нормальної форми (2.2), і виявилось, що права частина є добутком двох співмножників, кожен з яких є функцією лише одного аргументу:

$$y' = \varphi(x) \cdot \psi(y).$$

Такі рівняння називають **диференціальними рівняннями з відокремлюваними змінними**. Їх розв'язок легко побудувати аналітично:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \cdot \psi(y), \quad \frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x) dx, \quad \int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x) dx + C.$$

◁ *Приклад 2.4.* Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку  $y' = 2xe^{-y}$ .

Маємо:

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{-y}, \quad \frac{dy}{e^{-y}} = 2x dx, \quad \int e^y dy = \int 2x dx,$$
$$e^y = x^2 + C, \quad y(x) = \ln(x^2 + C). \triangleright$$

Цей тип рівнянь узагальнює елементарні випадки, описані в п. 2.2. Справді, якщо  $\psi(y) \equiv 1$ , то рівняння з відокремлюваними змінними перетворюється на елементарний окремий випадок 1°, а якщо  $\varphi(x) \equiv 1$  – то на елементарний окремий випадок 2°.

### 2.3.2 Додатковий випадок

Нехай рівняння (2.1) першого порядку вдалося звести до нормальної форми (2.2), і виявилось, що аргументом функції в правій частині є лінійна комбінація  $x$  і  $y$ :

$$y' = f(ax + by).$$

Покажемо, що в такому рівнянні можливе відокремлення змінних. Покладемо

$$z(x) = ax + by(x), \quad z' = a + by', \quad y' = \frac{z' - a}{b}.$$

Рівняння набуває вигляду

$$\frac{z' - a}{b} = f(z), \quad \frac{dz}{dx} = a + bf(z), \quad \frac{dz}{a + bf(z)} = dx,$$

і змінні відокремлено.

◁ *Приклад 2.5.* Розв'яжемо рівняння  $y' = (x + y)^2$ . Введемо заміну  $z(x) = x + y$ , тоді  $z' = 1 + y'$ ,  $y' = z' - 1$ , і рівняння набуває вигляду  $z' - 1 = z^2$ . Маємо:  $\frac{dz}{dx} = 1 + z^2$ ,  $\frac{dz}{1+z^2} = dx$ , і змінні відокремлено. Інтегруємо:

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx, \quad \arctg z = x + C, \quad \arctg(x + y) = x + C. \triangleright$$

## 2.4 Однорідні рівняння

### 2.4.1 Основний випадок

Нехай рівняння (2.1) першого порядку вдалося звести до нормальної форми (2.2), і виявилось, що права частина залежить тільки від відношення змінних  $x$  і  $y$ :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Рівняння такого типу називають **однорідними ДР першого порядку**.

Введемо заміну  $z(x) = \frac{y}{x}$ , тоді  $y(x) = x \cdot z(x)$ ,

$$y' = x'z + xz' = z + xz',$$

і рівняння набуває вигляду

$$z + xz' = f(z), \quad z' = \frac{1}{x}(f(z) - z).$$

Якщо позначити  $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ ,  $\psi(z) = f(z) - z$ , то рівняння зводиться до випадку відокремлення змінних.

◁ *Приклад 2.6.* Знайти загальний розв'язок ДР першого порядку  $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$ . Маємо:

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Покладемо  $z(x) = \frac{y}{x}$ , тоді  $y(x) = x \cdot z(x)$ ,  $y' = z + xz'$ , і рівняння набуває вигляду

$$z + xz' = z + \sqrt{1 - z^2}, \quad x \cdot \frac{dz}{dx} = \sqrt{1 - z^2}, \quad \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Тепер змінні відокремлені, і можна інтегрувати:

$$\arcsin z = \ln|x| + \ln|C|.$$

Зауважимо, довільну сталу інтегрування часто вигідно обирати в вигляді  $\ln|C|$  (а не  $C$ ). Це суті справи не змінює, оскільки функція логарифм перекриває множиною своїх значень усю множину дійсних чисел. Тоді

$$\arcsin z = \ln|Cx|, \quad z(x) = \sin \ln|Cx|, \quad y(x) = xz = x \sin \ln|Cx|. \quad \triangleright$$

## 2.4.2 Додатковий випадок

Нехай рівняння (2.1) першого порядку вдалося звести до нормальної форми (2.2), і виявилось, що права частина є функцією *одного* аргументу, який дробово-лінійно залежить від  $x$  і  $y$ :

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

тобто  $y' = f(t)$ , де  $t = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ .

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Нехай вона не вироджена, і її єдиний розв'язок – впорядкована пара  $(x_0, y_0)$ . Введемо заміну

$$\begin{cases} \xi = x - x_0, \\ \eta = y - y_0. \end{cases}$$

Маємо:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\eta + y_0)}{d(\xi + x_0)} = \frac{d\eta}{d\xi} = \eta',$$

де в правій частині похідна береться за аргументом  $\xi$ . Маємо також:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{a_1(\xi + x_0) + b_1(\eta + y_0) + c_1}{a_2(\xi + x_0) + b_2(\eta + y_0) + c_2} =$$

$$= \frac{a_1\xi + b_1\eta + (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)}{a_2\xi + b_2\eta + (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)} = \frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta} = \frac{a_1 + b_1\frac{\eta}{\xi}}{a_2 + b_2\frac{\eta}{\xi}}.$$

Тут враховано, що  $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$ ,  $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0$ , оскільки  $(x_0, y_0)$  – розв'язок відповідної системи. Рівняння набуває вигляду

$$\eta' = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{\eta}{\xi}}{a_2 + b_2\frac{\eta}{\xi}}\right).$$

Очевидно, воно є однорідним і може бути розв'язано за допомогою заміни  $\zeta(\xi) = \frac{\eta(\xi)}{\xi}$ .

Нехай тепер система вироджена, тобто рядки коефіцієнтів  $a_{1,2}$ ,  $b_{1,2}$  пропорціональні. Тоді існує  $\lambda$  таке, що  $a_2 = \lambda a_1$ ,  $b_2 = \lambda b_1$ . Запровадимо позначення

$$z(x) = a_1x + b_1y(x), \quad z' = a_1 + b_1y', \quad y' = \frac{z' - a_1}{b_1},$$

одержимо:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2} = \frac{z + c_1}{\lambda z + c_2} = \varphi(z),$$

і рівняння набуває вигляду

$$\frac{z' - a_1}{b_1} = f(\varphi(z)), \quad \frac{dz}{dx} = a_1 + b_1\psi(z).$$

Тут змінні вже можуть бути відокремлені.

## 2.5 Лінійні рівняння першого порядку

Неоднорідним лінійним звичайним диференціальним рівнянням першого порядку називають ДР вигляду

$$y' + p(x) \cdot y = f(x). \quad (2.3)$$

Для розв'язування такого рівняння користуються або методом Лагранжа (методом варіації довільної сталої), або методом Бернуллі.

## 2.5.1 Варіація довільної сталої

Розв'язування методом Лагранжа (методом варіації довільної сталої) здійснюють в два етапи.

На першому етапі заданому рівнянню ставлять у відповідність **однорідне лінійне звичайне диференціальне рівняння першого порядку**, яке виникає при відкиданні правої частини  $f(x)$  і має вигляд:

$$y' + p(x) \cdot y = 0. \quad (2.4)$$

Воно є рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x) \cdot y, \quad \frac{dy}{y} = -p(x) dx.$$

Інтегруючи, маємо:

$$\ln |y| = - \int p(x) dx + \ln |C|, \quad y_{\text{одн}} = C e^{- \int p(x) dx}.$$

На другому етапі загальний розв'язок неоднорідного рівняння знаходять, варіюючи довільну сталу інтегрування, тобто припускаючи її зміну в залежності від  $x$ . А саме, кажуть: **загальний розв'язок неоднорідного рівняння методом Лагранжа (варіації довільної сталої) шукаємо у вигляді:**

$$y_{\text{неодн}}(x) = C(x) e^{- \int p(x) dx}. \quad (2.5)$$

Фактично це рівняння виконує роль заміни змінної, за допомогою якої ми переходимо від задачі пошуку функції  $y_{\text{неодн}}(x)$  до задачі пошуку функції  $C(x)$ . Ми зараз переконаємось, що ця нова задача є більш простою.

Диференціюючи (2.5), отримуємо:

$$\begin{aligned} y'_{\text{неодн}} &= C'(x) e^{- \int p(x) dx} + C(x) \left( e^{- \int p(x) dx} \right)' = \\ y'_{\text{неодн}} &= C'(x) e^{- \int p(x) dx} - C(x) e^{- \int p(x) dx} \left( \int p(x) dx \right)' = \\ &= C'(x) e^{- \int p(x) dx} - C(x) e^{- \int p(x) dx} \cdot p(x). \end{aligned}$$

Підставляючи тепер  $y'_{\text{неодн}}$  і  $y_{\text{неодн}}$  до (2.3), отримуємо:

$$C'(x) e^{- \int p(x) dx} - C(x) e^{- \int p(x) dx} \cdot p(x) + p(x) \cdot C(x) e^{- \int p(x) dx} = f(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x) dx} = f(x), \quad C'(x) = f(x)e^{\int p(x) dx}.$$

Тоді

$$C(x) = \int C'(x) dx + C_0 = \int f(x)e^{\int p(x) dx} dx + C_0,$$

і розв'язок знайдено у вигляді (2.5).

◁ *Приклад 2.7.* Методом Лагранжа (варіації довільної сталої) розв'язати рівняння  $y' - 2xy = e^{x^2} \cos x$ .

Утворюємо відповідне однорідне рівняння:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 2xy, \quad \frac{dy}{y} = 2x dx,$$

і змінні відокремлено. Інтегруємо:

$$\ln |y| = x^2 + \ln |C|, \quad y_{\text{одн}}(x) = Ce^{x^2}.$$

Переходимо до другого етапу. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння методом Лагранжа (варіації довільної сталої) шукаємо у вигляді

$$y_{\text{неодн}}(x) = C(x)e^{x^2}, \quad y'_{\text{неодн}}(x) = C'(x)e^{x^2} + C(x)e^{x^2} \cdot 2x.$$

Підставляємо  $y'_{\text{неодн}}$  і  $y_{\text{неодн}}$  до умови задачі:

$$C'(x)e^{x^2} + C(x)e^{x^2} \cdot 2x - 2x \cdot C(x)e^{x^2} = e^{x^2} \cos x,$$

$$C'(x)e^{x^2} = e^{x^2} \cos x, \quad C'(x) = \cos x, \quad C(x) = \sin x + C_0.$$

Остаточно:

$$y_{\text{неодн}}(x) = (\sin x + C_0) e^{x^2}. \triangleright$$

## 2.5.2 Метод Бернуллі

Розв'яжемо тепер задачу (2.3) методом Бернуллі. Згідно до цього методу розв'язок неоднорідного рівняння шукається у вигляді

$$y(x) = u(x) \cdot v(x).$$

Фактично ми зараз переходимо від задачі пошуку однієї функції  $y(x)$  до задачі пошуку двох різних функцій  $u(x)$  і  $v(x)$ . Тому залишимо за собою право одну з них, наприклад,  $u(x)$ , обрати

в довільний зручний нам спосіб. Міркування зручності конкретизуємо нижче. Маємо:  $y' = u'v + uv'$ , і рівняння (2.3) набуває вигляду:

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x).$$

Згрупуємо перший і третій доданки в правій частині:

$$(u' + p(x)u)v + uv' = f(x).$$

Оскільки обрати  $u(x)$  – наше право, вимагатимемо рівності:

$$u' + p(x)u = 0, \quad \frac{du}{dx} = -p(x)u, \quad \frac{du}{u} = -p(x) dx,$$

і змінні відокремлено. Інтегруємо:

$$\ln |u| = - \int p(x) dx + \ln |C|, \quad u(x) = Ce^{-\int p(x) dx}.$$

Скориставшись своїм правом обирати конкретну функцію  $u(x)$ , покладемо  $C = 1$ . Тоді

$$u(x) = e^{-\int p(x) dx}.$$

При цьому рівняння набуває вигляду

$$uv' = f(x), \quad e^{-\int p(x) dx} v' = f(x), \quad v' = f(x)e^{\int p(x) dx},$$

Тоді

$$v(x) = \int v'(x) dx + C_0 = \int f(x)e^{\int p(x) dx} dx + C_0,$$

і розв'язок знайдено у вигляді  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ .

Якщо провести паралелі з методом Лагранжа, то з'ясується еквівалентність цих методів. Функція  $v(x)$  в разі метода Бернуллі відіграє таку саму роль, як і функція  $C(x)$  в разі методу Лагранжа, а функція  $u(x)$  – як функція  $y_{\text{одн}}(x)$ .

◁ *Приклад 2.8.* Рівняння  $y' - 2xy = e^{x^2} \cos x$  розв'язати методом Бернуллі.

Нехай  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ , тоді  $y' = u'v + uv'$ , і рівняння набуває вигляду:

$$u'v + uv' - 2xuv = e^{x^2} \cos x, \quad (u' - 2xu)v + uv' = e^{x^2} \cos x.$$

Вимагатимемо

$$u' - 2xu = 0, \quad \frac{du}{dx} = 2xu, \quad \frac{du}{u} = 2x dx,$$

і змінні відокремлено. Інтегруємо:

$$\ln |u| = x^2 + \ln |C|, \quad u = Ce^{x^2}.$$

Покладемо  $C = 1$ . Тоді  $u = e^{x^2}$ , і рівняння набуває вигляду:

$$uv' = e^{x^2} \cos x, \quad e^{x^2} v' = e^{x^2} \cos x,$$

$$v'(x) = \cos x, \quad v(x) = \sin x + C_0.$$

Остаточно:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = e^{x^2} (\sin x + C_0). \triangleright$$

### 2.5.3 Один нелінійний випадок

Деякі рівняння першого порядку, нелінійні за змінною  $y$ , можуть виявитись лінійними за змінною  $x$  (чи можуть бути зведеними до таких). В цьому разі величину  $y$  починають **вважати незалежною змінною**, і від задачі пошуку функції  $y = y(x)$  переходять до задачі пошуку функції  $x = x(y)$ , оберненої до шуканої. Можливо, з родини функцій  $x = x(y, C)$  величину  $y$  виразити в явному вигляді і не вдасться. Попри це, задачу теорії диференціальних рівнянь вважають розв'язаною.

При переході до пошуку оберненої функції користуються очевидним співвідношенням:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'_y},$$

де нижнім індексом вказано змінну, за якою береться похідна.

◁ *Приклад 2.9.* Розв'яжемо рівняння  $y' \left( 3y^2 - \frac{x}{y} \right) = \ln y$ . Очевидно, воно є нелінійним за змінною  $y$ , але змінна  $x$  входить до нього лише в першому степені. Тому переходимо до задачі пошуку оберненої функції  $x(y)$ . Маємо:

$$\frac{dy}{dx} \left( 3y^2 - \frac{x}{y} \right) = \ln y, \quad 3y^2 - \frac{x}{y} = \ln y \cdot \frac{dx}{dy},$$

$$\frac{dx}{dy} + x \cdot \frac{1}{y \ln y} = \frac{3y^2}{\ln y}.$$

Розв'язок цієї задачі методом Бернуллі шукаємо у вигляді добутку  $x(y) = u(y) \cdot v(y)$ :

$$u'v + uv' + uv \cdot \frac{1}{y \ln y} = \frac{3y^2}{\ln y}, \quad \left( u' + u \cdot \frac{1}{y \ln y} \right) v + uv' = \frac{3y^2}{\ln y}.$$

Функцію  $u$  підберемо як частинний розв'язок рівняння

$$\frac{du}{dy} + u \cdot \frac{1}{y \ln y} = 0, \quad \frac{du}{u} = -\frac{dy}{y \ln y}, \quad \ln u = -\ln(\ln y), \quad u = \frac{1}{\ln y}.$$

Тоді

$$\frac{1}{\ln y} \cdot v' = \frac{3y^2}{\ln y}, \quad v' = 3y^2, \quad v = y^3 + C.$$

Остаточню маємо

$$x(y) = u(y) \cdot v(y) = \frac{y^3 + C}{\ln y}.$$

Очевидно, знайти звідси залежність  $y(x)$  неможливо. Проте, з точки зору теорії диференціальних рівнянь задача вважається розв'язаною.  $\triangleright$

## 2.6 Рівняння Бернуллі

Метод Лагранжа (варіації довільної сталої) і метод Бернуллі при їх застосуванні до лінійного рівняння виявились еквівалентними. Насправді різниця між ними є. Метод Бернуллі іноді вдається застосувати і до нелінійних рівнянь, в той час як метод Лагранжа в цих випадках не застосовується. З іншого боку, метод Лагранжа (при певній модифікації) може бути застосований до рівнянь порядків вище першого, в той час як метод Бернуллі цього не дозволяє. Отже, рівноцінність цих методів має місце лише в разі лінійного рівняння першого порядку.

Розглянемо тепер **рівняння Бернуллі з показником  $n$** . Воно має вигляд:

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^n, \quad n \neq 1. \quad (2.6)$$

При  $n = 1$  ми б мали лінійне рівняння з відокремлюваними змінними:  $y' = (f(x) - p(x))y$ ; його розв'язок відомий. При  $n \neq 1$  рівняння (2.6) є *нелінійним* за рахунок нелінійного члену  $y^n$ .

## 2.6.1 Застосування методу Бернуллі

Розв'яжемо (2.6) методом Бернуллі. Розв'язок шукатимемо у вигляді  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ ,  $y' = u'v + uv'$ . Як і раніше, ми зараз переходимо від задачі пошуку однієї функції  $y(x)$  до задачі пошуку двох різних функцій  $u(x)$  і  $v(x)$ . Тому залишимо за собою право одну з них, наприклад,  $u(x)$ , обрати в довільний зручний нам спосіб. Міркування зручності конкретизуємо нижче. ДР набуває вигляду (факт залежності функцій  $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $f$  від  $x$  ми більше не підкреслюємо):

$$u'v + uv' + puv = fu^n v^n, \quad (u' + pu)v + uv' = fu^n v^n.$$

Оберемо тепер  $u(x)$  так, щоб виконувалась рівність  $u' + pu = 0$ . Це можливо при  $u(x) = e^{-\int p(x) dx}$ . Наголосимо,  $u(x)$  – цілком конкретна функція, і невизначена стала інтегрування не виникає. Тоді залишиться

$$u \frac{dv}{dx} = fu^n v^n, \quad \frac{dv}{v^n} = fu^{n-1} dx,$$

і змінні відокремлено, причому в правій частині всі функції відомі. Тоді, інтегруючи, знаходимо звідси  $v(x, C)$ , і отже – загальний розв'язок  $y = u(x) \cdot v(x, C)$ .

◁ *Приклад 2.10.* Розв'язати рівняння  $y' - \frac{2y}{x} + 3e^{x^3} y^2 = 0$  методом Бернуллі. Маємо:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x), \quad y' = u'v + uv',$$

і з умови отримуємо:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} + 3e^{x^3} u^2 v^2 = 0, \quad \left(u' - \frac{2u}{x}\right)v + uv' + 3e^{x^3} u^2 v^2 = 0.$$

Вимагатимемо:

$$u' - \frac{2u}{x} = 0, \quad \frac{du}{dx} = \frac{2u}{x}, \quad \frac{du}{u} = \frac{2}{x} dx,$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{2}{x} dx, \quad \ln |u| = 2 \ln |x| + \ln |C|, \quad u = Cx^2.$$

Отже, достатньо покласти  $u = x^2$ . Маємо далі:

$$u \frac{dv}{dx} = -3e^{x^3} u^2 v^2, \quad -\frac{dv}{v^2} = 3e^{x^3} u dx.$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$\frac{1}{v} = \int 3e^{x^3} u \, dx = \int 3x^2 e^{x^3} \, dx = e^{x^3} + B, \quad v = \frac{1}{e^{x^3} + B}.$$

Остаточно:

$$y(x) = uv = \frac{x^2}{e^{x^3} + B}. \triangleright$$

## 2.6.2 Метод лінеаризації

Наведемо *інший спосіб* розв'язування рівняння Бернуллі (2.6). Введемо заміну

$$z(x) = [y(x)]^{1-n}, \quad z' = (1-n)y^{-n} \cdot y' = (1-n)\frac{y'}{y^n}, \quad (2.7)$$

$$\frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n}, \quad n \neq 1.$$

Розділимо рівняння (2.6) на  $y^n$ :

$$\frac{y'}{y^n} + p(x) \cdot y^{1-n} = f(x), \quad \frac{z'}{1-n} + p(x) \cdot z = f(x).$$

Отже, рівняння перетворилось на лінійне, а такі рівняння завжди можуть бути розв'язані. Кажуть, що введена заміна змінної **здійснює лінеаризацію** нелінійного рівняння.

◁ *Приклад 2.11.* Розв'язати рівняння  $y' - \frac{2y}{x} + 3e^{x^3}y^2 = 0$  методом заміни змінної.

Розглядуване рівняння є рівнянням Бернуллі з показником  $n = 2$ . Отже, заміна (2.7) набуває вигляду

$$z(x) = [y(x)]^{1-2} = \frac{1}{y}, \quad z' = -\frac{y'}{y^2}, \quad y' = -y^2 z'.$$

Початкове рівняння набуває вигляду

$$-y^2 z' - \frac{2y}{x} + 3e^{x^3} y^2 = 0, \quad z' + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{y} - 3e^{x^3} = 0, \quad z' + \frac{2}{x} z = 3e^{x^3}.$$

Останнє рівняння вже є лінійним неоднорідним відносно  $z(x)$ . Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{2}{x}z, \quad \frac{dz}{z} = -\frac{2 \, dx}{x},$$

і змінні відокремлено. Інтегруємо:

$$\ln |z| = -2 \ln |x| + \ln |C|, \quad z_{\text{одн}} = \frac{C}{x^2}.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння методом Лагранжа (варіації довільної сталої) шукаємо у вигляді:

$$z_{\text{неодн}} = \frac{C(x)}{x^2}.$$

Маємо:

$$z'_{\text{неодн}} = \frac{C'(x)x^2 - C(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3},$$

і неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3} + \frac{2}{x} \cdot \frac{C(x)}{x^2} = 3e^{x^3}, \quad C'(x) = 3x^2 e^{x^3}.$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$C(x) = \int C'(x) dx = \int 3x^2 e^{x^3} dx = e^{x^3} + C_0.$$

Тоді

$$z_{\text{неодн}} = \frac{C(x)}{x^2} = \frac{e^{x^3} + C_0}{x^2}.$$

При введенні зворотної заміни остаточно отримуємо:

$$y(x) = \frac{1}{z_{\text{неодн}}} = \frac{x^2}{e^{x^3} + C_0},$$

що збігається з відповіддю, одержаною в попередньому прикладі методом Бернуллі. ▷

## 2.7 Рівняння в повних диференціалах

### 2.7.1 Випадок повного диференціалу

Нехай рівняння першого порядку подано в нормальній формі  $y' = f(x, y)$ . Оскільки  $y' = \frac{dy}{dx}$ , то нормальній формі безпосередньо вдається надати вигляду  $dy = f(x, y) dx$ . Узагальнимо цей вигляд рівнянням

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (2.8)$$

Рівняння (2.8) називають **рівнянням в повних диференціалах**, якщо існує функція  $u(x, y)$  така, що  $du = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ . Тоді рівняння (2.8) набуває вигляду  $du = 0$ . Очевидно, його загальний розв'язок в неявному вигляді  $u(x, y) = C$ .

◁ *Приклад 2.12.* Розв'яжемо рівняння

$$(2xy + y^3) dx + (x^2 + 3xy^2) dy = 0.$$

Легко побачити, що ліва частина є повним диференціалом функції  $u(x, y) = x^2y + xy^3$ . Справді,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + y^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 3xy^2.$$

Тоді вираз  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$  для повного диференціалу функції  $u(x, y)$  збігається з лівою частиною умови задачі. Тоді наше рівняння має вигляд  $du = 0$ , а його загальний розв'язок подається в неявному вигляді  $u(x, y) = C$ , тобто  $x^2y + xy^3 = C$ . ▷

Часто віднайти потрібну функцію  $u(x, y)$  важко. У нас навіть немає гарантії, що така функція існує.

Розглянемо випадок, коли таку гарантію можна надати. Нехай існує функція  $u(x, y)$ , диференціал  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$  якої тотожно дорівнює виразу  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ . Тоді

$$\begin{cases} P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Продиференціюємо перше рівняння за змінною  $y$ , а друге – за змінною  $x$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \end{cases}$$

Оскільки друга мішана частинна похідна функції  $u$  не залежить від порядку диференціювання, то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2.10)$$

Отримане рівняння (2.10) є необхідною умовою існування потрібної функції  $u$ . Можна також сказати: порушення рівності (2.10) є достатньою умовою того, що потрібна функція не існує.

Обмежимося поки випадком, коли умова (2.10) виконана. Розглянемо два способи відновлення функції  $u$  за її повним диференціалом.

1°. Інтегруючи перше рівняння системи (2.9) за змінною  $x$ , знаходимо

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int P(x, y) dx + \varphi(y). \quad (*)$$

При обчисленні інтегралу  $\int P dx$  вважаємо, що  $y = \text{const}$ . Функція  $\varphi(y)$  відіграє роль невизначеної константи інтегрування (при знаходженні частинної похідної  $\frac{\partial u}{\partial x}$  ця функція зникне як константа). Підставляємо знайдений вираз для  $u$  до другого рівняння системи (2.9):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi(y) + \int P dx \right) = Q, \quad \varphi'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx.$$

Функцію  $\varphi(y)$  знаходимо звідси інтегруванням за змінною  $y$  при  $x = \text{const}$ :

$$\varphi(y) = \int \varphi'(y) dy + C = \int \left[ Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx \right] dy + C.$$

Тепер функцію  $u$  знайдено у вигляді (\*) з точністю до адитивної константи  $C$ .

Порядок дій можна змінити на протилежний: спочатку користуємось другим рівнянням системи (2.9), а потім – першим. З другого рівняння маємо:

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int Q(x, y) dy + \psi(x). \quad (**)$$

При обчисленні інтегралу  $\int Q dy$  вважаємо, що  $x = \text{const}$ . Підставляємо знайдений вираз для  $u$  до першого рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \psi(x) + \int Q dy \right) = P, \quad \psi'(x) = P - \frac{\partial}{\partial x} \int Q dy.$$

Функцію  $\psi(x)$  знаходимо звідси інтегруванням за змінною  $x$  при  $y = \text{const}$ :

$$\psi(x) = \int \psi'(x) dx + C = \int \left[ P - \frac{\partial}{\partial x} \int Q dy \right] dx + C.$$

Тепер функцію  $u$  знайдено у вигляді (\*\*) з точністю до адитивної сталої  $C$ .

◁ *Приклад 2.13.* Розв'яжемо знову рівняння

$$(2xy + y^3) dx + (x^2 + 3xy^2) dy = 0.$$

Маємо:  $P(x, y) = 2xy + y^3$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 3y^2$ ,  $Q(x, y) = x^2 + 3xy^2$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 3y^2$ . Отже, умову (2.10) виконано. Тоді функція  $u$ , повний диференціал якої збігається з лівою частиною нашого рівняння, може бути знайдена способом, описаним вище. З першого рівняння системи (2.9) маємо:

$$u = \int P(x, y) dx = \int (2xy + y^3) dx = x^2y + xy^3 + \varphi(y).$$

Підставимо цей вираз до другого рівняння цієї системи:

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2y + xy^3 + \varphi(y)) = Q(x, y),$$

$$x^2 + 3xy^2 + \varphi'(y) = x^2 + 3xy^2, \quad \varphi'(y) = 0.$$

Отже,  $\varphi(y) = C = \text{const}$ . Тоді  $u = x^2y + xy^3 + C$ . Це збігається з відповіддю, отриманою в попередньому прикладі, з точністю до адитивної сталої. Остаточна відповідь записується в неявному вигляді  $u = \text{const}$ , або  $x^2y + xy^3 = \text{const}$ . ▷

2°. Розглянемо другий спосіб побудови розв'язку рівняння (2.8). Цей спосіб дозволяє одразу знайти частинний розв'язок, який задовольняє початкову умову  $y(x_0) = y_0$ .

Нехай  $M_0(x_0, y_0)$  – деяка початкова точка координатної площини  $Oxy$ , а  $M(x, y)$  – довільна поточна точка. Нехай  $M_0M$  – довільний контур, який міститься всередині області  $D$ , в якій функції  $P$ ,  $Q$  неперервно диференційовні. Оскільки за виконання умови (2.10) вираз  $P dx + Q dy = du$  є повним диференціалом, то криволінійний інтеграл від нього не залежить від форми контуру  $M_0M$ . Тоді частинний розв'язок в неявному вигляді

$$u(M) - u(M_0) = \int_{M_0M} P dx + Q dy.$$

Власне, цей спосіб містить обидва варіанти попереднього. Справді, вище ми обчислювали криволінійний інтеграл вздовж ламаної, перша ланка якої горизонтальна ( $y = \text{const}$ ), а друга – вертикальна ( $x = \text{const}$ ), або навпаки.

## 2.7.2 Інтегруючий множник

Розглянемо тепер випадок, коли умову (2.10) порушено, і потрібної функції  $u$  не існує. В цьому разі домножимо<sup>1</sup> рівняння (2.8) на деяку (поки невідому) функцію  $\mu(x, y)$ . Утвориться нове рівняння

$$P^*(x, y) dx + Q^*(x, y) dy = 0, \quad (2.8A)$$

де позначено  $P^*(x, y) = \mu(x, y) \cdot P(x, y)$ ,  $Q^*(x, y) = \mu(x, y) \cdot Q(x, y)$ . Якщо функцію  $\mu(x, y)$  дібрано вдало, то умова (2.10), яка була порушена для функцій  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ , може виявитись виконаною для функцій  $P^*(x, y)$ ,  $Q^*(x, y)$ . Тоді рівняння (2.8A) може бути розв'язаним в той же спосіб, що і рівняння (2.8). Функцію  $\mu(x, y)$ , яка перетворює вираз  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  на повний диференціал, називають **інтегруючим множником**.

З'ясуємо умови, за яких функція  $\mu(x, y)$  є інтегруючим множником. Для цього достатньо виконати умову (2.10) для функцій  $P^*(x, y)$ ,  $Q^*(x, y)$ . Масмо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^*}{\partial y} &= \frac{\partial Q^*}{\partial x}, & \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} &= \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, & \frac{\partial \mu}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Отримали ДР з частинними похідними для функції  $\mu(x, y)$ . Але ця задача не простіша за початкову, навіть попри те, що нам потрібен лише будь-який частинний розв'язок рівняння (2.11). Однак, можна надати певні рекомендації щодо пошуку цього частинного розв'язку. Це неважко зробити, припускаючи<sup>2</sup>, що  $\mu$  є **функцією лише одного змінного**. В цьому разі рівняння в частинних похідних спростується, оскільки перетворюється на звичайне ДР.

1°. Припустимо, інтегруючий множник існує у вигляді  $\mu(x)$ , тоді дослідимо, за яких умов таке припущення є обгрунтованим. Масмо:  $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ . Тоді рівняння (2.11) набуває вигляду

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{Q} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right). \quad (2.12)$$

Тут частинну похідну  $\frac{\partial \mu}{\partial x}$  замінено на похідну  $\frac{d\mu}{dx}$ , оскільки  $\mu$  тепер є функцією лише одного аргументу  $x$ . Якщо з'ясується, що права частина (2.12), як і ліва, залежить лише від  $x$ , то отримане рівняння є звичайним ДР з розділеними змінними. Його загальний розв'язок подається у вигляді

$$\mu = C e^{\int \frac{1}{Q} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx}.$$

Частинний розв'язок можна отримати, наприклад, при  $C = 1$ .

< **Приклад 2.14.** Розглянемо рівняння  $(3x + 2y^2) dx + 2xy dy = 0$ . Масмо:  $P = 3x + 2y^2$ ,  $Q = 2xy$ ;  $\frac{\partial P}{\partial y} = 4y$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$ , і рівність (2.10) не виконано. Отже, вираз в лівій частині рівняння не є повним диференціалом.

<sup>1</sup>Рівняння  $\mu(x, y) = 0$  задає неявно  $y$  як функцію  $x$ . Якщо виявиться, що рівняння  $\mu(x, y) = 0$  виконано, то ця функція опиниться серед розв'язків. В такий спосіб виникає сторонній розв'язок, який є хибним. Тому вважатимемо, що  $\mu(x, y) \neq 0$ .

<sup>2</sup>На жаль, загальних методів знаходження інтегруючого множника не існує. Тому ми вимушені обмежуватись певними припущеннями, розглядаючи лише деякі окремі випадки.

Перевіримо, чи існує інтегруючий множник, який залежить лише від  $x$ :

$$\frac{1}{Q} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1}{2xy} \cdot (4y - 2y) = \frac{1}{x}.$$

Отриманий вираз не залежить від  $y$ , тому інтегруючий множник може бути знайдений як довільний частинний розв'язок рівняння (2.12). Це рівняння зараз набуває вигляду:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, отримуємо:  $\ln \mu = \ln x$ ,  $\mu = x$ . Довільна константа інтегрування тут відсутня, оскільки ми шукаємо будь-який частинний розв'язок. Домножимо рівняння в умові задачі на знайдений множник:

$$(3x^2 + 2xy^2) dx + 2x^2y dy = 0.$$

Для нових функцій  $P$ ,  $Q$  маємо:  $P = 3x^2 + 2xy^2$ ,  $Q = 2x^2y$ ;  $\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy$ , і рівність (2.10) тепер виконано. Отже, вираз  $(3x^2 + 2xy^2) dx + 2x^2y dy$  тепер є повним диференціалом. Тоді з використанням рівнянь системи (2.9) маємо:

$$u = \int P(x, y) dx = \int (3x^2 + 2xy^2) dx = x^3 + x^2y^2 + \varphi(y).$$

Тоді  $\frac{\partial}{\partial y} (x^3 + x^2y^2 + \varphi(y)) = Q(x, y)$ ,  $2x^2y + \varphi'(y) = 2x^2y$ . Звідси знаходимо  $\varphi'(y) = 0$ ,  $\varphi(y) = C = \text{const}$ . Тоді  $u = x^3 + x^2y^2 + C$ . Остаточна відповідь записується в неявному вигляді  $u = \text{const}$ , або  $x^3 + x^2y^2 = \text{const}$ .  $\square$

2°. Припустимо, шуканий інтегруючий множник існує у вигляді  $\mu = \mu(y)$ , тоді дослідимо, за яких умов таке припущення є обґрунтованим. Маємо:  $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ . Тоді рівняння (2.11) набуває вигляду

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dy} = -\frac{1}{P} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right). \quad (2.13)$$

Тут частинну похідну  $\frac{\partial \mu}{\partial y}$  замінено на похідну  $\frac{d\mu}{dy}$ , оскільки  $\mu$  тепер є функцією лише одного аргументу  $y$ . Якщо з'ясується, що права частина (2.13), як і ліва, залежить лише від  $y$ , то отримане рівняння є звичайним ДР з відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок подається у вигляді

$$\mu = C e^{-\int \frac{1}{P} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dy}.$$

Частинний розв'язок можна отримати, наприклад, при  $C = 1$ .

$\triangleleft$  *Приклад 2.15.* Розглянемо рівняння

$$\sin y dx + 2[\sin y + (x + 2y) \cos y] dy = 0.$$

Маємо:  $P = \sin y$ ,  $Q = 2[\sin y + (x + 2y) \cos y]$ ;  $\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2 \cos y$ . Рівність (2.10) не виконано; вираз в умові задачі не є повним диференціалом.

Перевіримо, чи існує інтегруючий множник, який залежить лише від  $y$ :

$$-\frac{1}{P} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\sin y} \cdot (\cos y - 2 \cos y) = \text{ctg } y.$$

Отриманий вираз не залежить від  $x$ , тому інтегруючий множник може бути знайдений як довільний частинний розв'язок рівняння (2.13). Це рівняння зараз набуває вигляду:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dy} = \operatorname{ctg} y, \quad \frac{d\mu}{\mu} = \operatorname{ctg} y \, dy.$$

Інтегруючи, отримуємо:  $\ln \mu = \ln \sin y$ ,  $\mu = \sin y$ . Невизначена константа інтегрування тут відсутня, оскільки ми шукаємо довільний частинний розв'язок. Домножимо рівняння в умові задачі на знайдений множник:

$$\sin^2 y \, dx + 2 [\sin^2 y + (x + 2y) \sin y \cos y] \, dy = 0.$$

Маємо:  $P = \sin^2 y$ ,  $Q = 2 [\sin^2 y + (x + 2y) \sin y \cos y]$ . Виконання рівності (2.10) перевірити нескладно; вираз  $\sin^2 y \, dx + 2 [\sin^2 y + (x + 2y) \sin y \cos y] \, dy$  тепер є повним диференціалом. Тоді з використанням рівнянь системи (2.9) маємо:

$$u = \int P(x, y) \, dx = \int \sin^2 y \, dx = x \sin^2 y + \varphi(y).$$

Тоді  $\frac{\partial}{\partial y} (x \sin^2 y + \varphi(y)) = Q(x, y)$ ,

$$2x \sin y \cos y + \varphi'(y) = 2 [\sin^2 y + (x + 2y) \sin y \cos y],$$

$$\varphi'(y) = 2 [\sin^2 y + 2y \sin y \cos y] = 2 \sin^2 y + 2y \cdot 2 \sin y \cos y,$$

Звідси  $\varphi(y) = \int \varphi'(y) \, dy = 2y \sin^2 y + C$ . Тоді

$$u = x \sin^2 y + 2y \sin^2 y + C = (x + 2y) \sin^2 y + C. \triangleright$$

3°. Припустимо, інтегруючий множник знову є функцією однієї змінної і існує у вигляді  $\mu = \mu(z)$ , де  $z = z(x, y)$  – деяка (поки що невідома) диференційовна функція. Дослідимо, за яких умов таке припущення є обґрунтованим. За теоремою про похідну складної функції маємо:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}. \end{cases}$$

Тоді рівняння (2.11) набуває вигляду

$$\begin{aligned} Q \cdot \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - P \cdot \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} &= \mu \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right), \\ \frac{d\mu}{dz} \left( Q \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - P \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \mu \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right), \\ \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dz} &= \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - P \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Якщо з'ясується, що права частина (2.14), як і ліва, залежить лише від  $z$ , то отримане рівняння є звичайним ДР з відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок подається у вигляді

$$\mu = C e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - P \cdot \frac{\partial z}{\partial y}} dz}.$$

Частинний розв'язок можна отримати, наприклад, при  $C = 1$ . Зауважимо, рівняння (2.14) містить всередині себе рівняння (2.12), (2.13) в якості окремих випадків: при  $z = x$ ,  $z = y$  відповідно. В більш загальних випадках в якості  $z$  можуть виступати комбінації вигляду  $z = x \pm y$ ,  $z = xy$ ,  $z = ax^m + by^n$  тощо.

Метою подальшого розв'язування є пошук (підбір) такого виразу  $z(x, y)$ , який зробить праву частину рівняння (2.14) функцією тільки однієї змінної  $z$ .

◁ *Приклад 2.16.* Розглянемо рівняння

$$(3 \sin x + (x + y) \cos x) dx + 3 \sin x dy = 0.$$

Маємо:  $P = 3 \sin x + (x + y) \cos x$ ,  $Q = 3 \sin x$ . Легко переконатись, що рівність (2.10) не виконано.

Підберемо функцію двох змінних  $z = z(x, y)$ , за якої права частина рівняння (2.14) стає функцією однієї змінної  $z$ . Маємо:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - P \cdot \frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\cos x - 3 \cos x}{3 \sin x \frac{\partial z}{\partial x} - [3 \sin x + (x + y) \cos x] \frac{\partial z}{\partial y}}.$$

Цей вираз значно спроститься, якщо з нього зникне синус. Цього легко досягти, поклавши  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$ . Отримаємо:

$$Q \cdot \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial x} - P \cdot \frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{-2 \cos x}{-(x + y) \cos x \frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{2}{(x + y) \frac{\partial z}{\partial y}}.$$

Тоді покладемо  $z(x, y) = x + y$ . При цьому  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ , і рівняння (2.14) набуває вигляду

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dz} = \frac{2}{x + y} = \frac{2}{z}.$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$\ln \mu = 2 \ln z, \quad \mu = z^2 = (x + y)^2.$$

Довільна константа інтегрування тут відсутня, оскільки ми шукаємо будь-який частинний розв'язок. Домножимо рівняння в умові задачі на знайдений множник:

$$(3(x + y)^2 \sin x + (x + y)^3 \cos x) dx + 3(x + y)^2 \sin x dy = 0. \quad (*)$$

Маємо:  $P = 3(x + y)^2 \sin x + (x + y)^3 \cos x$ ,  $Q = 3(x + y)^2 \sin x$ ;

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6(x + y) \sin x + 3(x + y)^2 \cos x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 6(x + y) \sin x + 3(x + y)^2 \cos x,$$

і рівність (2.10) тепер виконана. Отже, ліва частина (\*) – повний диференціал. Рівняння системи (2.9) зручно розв'язати в зворотному порядку (спочатку друге, а потім перше). Маємо:

$$u = \int Q(x, y) dy = \int 3(x + y)^2 \sin x dy = (x + y)^3 \sin x + \psi(x).$$

Тоді  $\frac{\partial u}{\partial x} ((x + y)^3 \sin x + \psi(x)) = P(x, y)$ ,

$$3(x + y)^2 \sin x + (x + y)^3 \cos x + \psi'(x) = 3(x + y)^2 \sin x + (x + y)^3 \cos x.$$

Звідси  $\psi'(x) = 0$ ,  $\psi(x) = C = \text{const}$ . Тоді  $u = (x + y)^3 \sin x + C$ . Остаточоно одержуємо розв'язок в неявному вигляді  $u = \text{const}$ , або  $(x + y)^3 \sin x = \text{const}$ . ▷

## 2.8 Огляд інших випадків

Досі розглядалися випадки, коли рівняння (2.1) першого порядку було можливо подати в нормальній формі (2.2). Тепер розглянемо випадки, коли  $y'$  виразити через  $x$  і  $y$  не вдається.

1°. Нехай  $F$  залежить лише від  $y'$ , тобто (2.1) має вигляд

$$F(y') = 0,$$

причому (недиференціальне) рівняння  $F(t) = 0$  має принаймні один дійсний корінь  $t_0$ :  $F(t_0) = 0$ . Число  $t_0$  може бути і невідомим. Покладемо  $y' = t_0$ , тоді  $y(x) = t_0x + C$ ,  $t_0 = \frac{y-C}{x}$ . Тоді загальний розв'язок неявно буде заданий рівнянням  $F(t_0) = 0$ , тобто

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0.$$

2°. Нехай  $F$  залежить лише від  $y'$  і  $x$ , але не залежить від  $y$ , тобто (2.1) набуває вигляду

$$F(x, y') = 0.$$

Обмежимося випадком, коли з цього рівняння вдається знайти  $x$ , тобто звести рівняння до вигляду

$$x = \varphi(y').$$

Покладемо  $y' = t$ . Оскільки  $y' = \frac{dy}{dx}$ , то  $dy = y' \cdot dx = t \cdot dx$ . Але з початкового рівняння  $dx = d(\varphi(y')) = d(\varphi(t)) = \varphi'_t dt$ , і тоді

$$dy = t \cdot \varphi'_t dt,$$

$$y = \int t \cdot \varphi'_t dt + C.$$

Тоді загальний розв'язок параметрично буде заданий системою

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t), \\ y(t) = \int t \cdot \varphi'_t dt + C. \end{cases}$$

3°. Нехай  $F$  залежить лише від  $y'$  і  $y$ , але не залежить від  $x$ , тобто (2.1) має вигляд

$$F(y, y') = 0.$$

Обмежимося випадком, коли з цього рівняння вдається знайти  $y$ , тобто звести рівняння до вигляду

$$y = \varphi(y').$$

Знову покладемо  $y' = t$ . Оскільки  $y' = \frac{dy}{dx}$ , то

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{d(\varphi(y'))}{t} = \frac{d(\varphi(t))}{t} = \frac{\varphi'_t dt}{t},$$

$$x = \int \frac{\varphi'_t dt}{t} + C.$$

Тоді загальний розв'язок параметрично буде заданий системою

$$\begin{cases} x(t) = \int \frac{\varphi'_t dt}{t} + C, \\ y(t) = \varphi(t). \end{cases}$$

Далі розглянемо більш складні випадки, коли в рівнянні наявні і  $x$ , і  $y$ , і  $y'$ .

4°. А) Припустимо, рівнянню  $F(x, y, y') = 0$  вдалося надати вигляду

$$y = f(x, y').$$

Покладемо  $y' = p$ . З вихідного рівняння маємо:

$$\begin{aligned}y &= f(x, p), \\ dy &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}, \\ p &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}.\end{aligned}$$

Це рівняння вже можна вважати розв'язаним відносно похідної:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}} = G(x, p),$$

оскільки функція  $f(x, p)$  відома. Припустимо, це рівняння вдалося розв'язати, і його інтеграл  $\Phi(x, p, C) = 0$ . Тоді загальний розв'язок неявно-параметрично буде заданий системою

$$\begin{cases} \Phi(x, p, C) = 0, \\ y = f(x, p). \end{cases}$$

Величина  $p$  відіграє роль параметру.

4°. Б) Припустимо, рівнянню  $F(x, y, y') = 0$  вдалося надати вигляду

$$x = f(y, y').$$

Знову покладемо  $y' = p$ . З початкового рівняння маємо:

$$\begin{aligned}x &= f(y, p), \\ dx &= \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp.\end{aligned}$$

Оскільки  $y' = \frac{dy}{dx}$ , то  $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy}{p}$ , і ми отримуємо:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{p} &= \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp, \\ \frac{1}{p} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}.\end{aligned}$$

Це рівняння вже можна вважати розв'язаним відносно похідної:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}} = H(y, p),$$

оскільки функція  $f(y, p)$  відома. Припустимо, це рівняння вдалося розв'язати, і його інтеграл  $\Phi(y, p, C) = 0$ . Тоді загальний розв'язок неявно-параметрично буде заданий системою

$$\begin{cases} \Phi(y, p, C) = 0, \\ x = f(y, p). \end{cases}$$

Величина  $p$  також відіграє роль параметру.

## 2.9 Питання для перевірки

1. Який найбільш загальний вигляд звичайних ДР першого порядку відносно функції  $y(x)$ ?
2. Що таке нормальна форма ДР першого порядку?
3. Як розв'язують ДР з відокремлюваними змінними?
4. Як виглядає однорідне ДР першого порядку? Яка заміна змінних зводить однорідне ДР першого порядку до ДР з відокремлюваними змінними?
5. Як виглядає лінійне ДР першого порядку? Які два методи його розв'язування ви знаєте?
6. З яких двох етапів складається метод Лагранжа (метод варіації довільної сталої) розв'язування лінійних ДР першого порядку?
7. В чому полягає метод Бернуллі розв'язування лінійних ДР першого порядку?
8. Як виглядає рівняння Бернуллі?
9. Які два підхода до розв'язування рівняння Бернуллі ви знаєте?
10. Яка заміна змінних зводить рівняння Бернуллі до лінійного ДР?
11. Що таке «рівняння в повних диференціалах»?

## 3 РІВНЯННЯ, ЯКІ ДОПУСКАЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

Звичайне ДР  $n$ -го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (3.1)$$

Його загальним розв'язком є  $n$ -параметричне сімейство функцій вигляду  $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ .

На жаль, універсальних методів розв'язування таких ДР не існує. Але, припускаючи певні властивості функції  $F$ , іноді вдається побудувати аналітичні розв'язки. Далі розглядаються випадки, коли можливо знизити порядок ДР (3.1).

### 3.1 Випадок відсутності функції і її декількох похідних

Нехай рівняння (3.1) не містить в явному вигляді функцію  $y$  і  $(k-1)$  її перших похідних, тобто має вигляд:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Заміна  $p(x) = y^{(k)}(x)$  знижує порядок на  $k$  одиниць, і рівняння набуває вигляду:

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Після знаходження функції  $p(x)$  її інтегрують  $k$  разів поспіль за змінною  $x$ .

◁ *Приклад 3.1.* Розглянемо рівняння третього порядку

$$y''' + \lambda y'' = 0.$$

Воно не містить функцію  $y$  і її першу похідну  $y'$ . Позначимо  $p(x) = y''(x)$ , тоді  $y''' = p'$ , і рівняння набуває вигляду

$$p' + \lambda p = 0.$$

Знизили порядок на дві одиниці (з третього до першого). Маємо:  $\frac{dp}{dx} = -\lambda p$ ,  $\frac{dy}{p} = -\lambda dx$ ,  $\ln |p| = -\lambda x + \ln |C_1|$ ,  $p(x) = C_1 e^{-\lambda x}$ .  
Тоді

$$y' = \int y'' dx = \int p(x) dx = \int C_1 e^{-\lambda x} dx = -\frac{C_1}{\lambda} e^{-\lambda x} + C_2,$$

$$y = \int y' dx = \int \left( -\frac{C_1}{\lambda} e^{-\lambda x} + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + C_2 x + C_3,$$

що і є загальним розв'язком. Він містить три довільних сталих  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . Так і має бути, оскільки рівняння – третього порядку.  $\triangleright$

### 3.2 Випадок відсутності аргументу

Нехай рівняння (3.1) не містить в явному вигляді аргумент  $x$ , тобто має вигляд:

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

В цьому випадку порядок вдається знизити на одиницю.

Введемо заміну  $p(y) = y'$ . Тоді

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p = pp',$$

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} \cdot p\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} \cdot p\right)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \\ &= \left( \frac{d^2 p}{dy^2} p + \left( \frac{dp}{dy} \right)^2 \right) \cdot p = p \left[ pp'' + (p')^2 \right] \end{aligned}$$

і т.д. Звертаємо особливу увагу на наступну обставину. В даному випадку  $x$  відсутній, і роль «нового» незалежного аргументу виконує змінна  $y$ , (яка в рівнянні є функцією, а не аргументом). Роль «нової» функції тепер якраз і виконує  $y' = p(y)$ . Тому в наведених вище виразах «штрих» в лівих частинах слід розуміти як символ похідної за «старим» аргументом  $x$ , а в правих –

за «новим» аргументом  $y$ . Наприклад, рівняння  $y'' = pp'$  слід розуміти в такий спосіб:  $y''_{xx} = pp'_y$ , тобто  $\frac{d^2y}{dx^2} = p(y) \cdot \frac{dp}{dy}$ .

◁ *Приклад 3.2.* Розв'язати рівняння  $yy'' - 2(y')^2 = 0$ .

У рівнянні відсутній  $x$ , тому вводимо заміну  $p(y) = y'$ . Тоді  $y'' = pp'$ , і рівняння набуває вигляду

$$ypp' - 2p^2 = 0, \quad p \left( y \frac{dp}{dy} - 2p \right) = 0.$$

Або  $p = 0$ ,  $y' = 0$ ,  $y = C = \text{const}$ , або

$$y \frac{dp}{dy} = 2p, \quad \frac{dp}{p} = \frac{2 dy}{y}.$$

Отримали рівняння з відокремленими змінними (тобто порядок зменшився з другого до першого). Інтегруємо його:

$$\ln |p| = 2 \ln |y| + \ln |C_1|, \quad p = C_1 y^2, \quad \frac{dy}{dx} = C_1 y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx.$$

Ще раз інтегруємо:

$$-\frac{1}{y} = C_1 x + C_2, \quad y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}. \triangleright$$

◁ *Приклад 3.3.* Розглянемо рівняння другого закону Ньютона для матеріальної точки масою  $m$ , що рухається під дією сили  $F$ , в проекції на вісь  $Ox$ :

$$mx'' = F(x, x', t).$$

Тут  $F(x, x', t)$  – сила, яка діє на точку,  $t$  – «старий» аргумент,  $x(t)$  – «стара» функція, яка задає рівняння руху. В загальному випадку це рівняння є дуже складним.

Обмежимося випадком, коли сила  $F$  залежить лише від положення (координати) точки. Тобто, нехай  $F = F(x)$  і не залежить від швидкості  $v = x'$  і часу  $t$  явно. Саме такими є сили пружності  $F(x) = kx$  і всесвітнього тяжіння  $F(x) = \frac{GMm}{x^2}$ . Тоді виникає рівняння:

$$mx'' = F(x).$$

Оскільки «старий» аргумент  $t$  тут відсутній, то «стару» функцію  $x$  будемо вважати «новим» аргументом, а «нову» функцію

(замість  $p$ ) введемо заміною  $v(x) = \frac{dx}{dt}$ . Тоді

$$x'' = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v,$$

і рівняння набуває вигляду

$$mv \frac{dv}{dx} = F(x).$$

Отримали рівняння першого порядку. Його інтегрування після відокремлення змінних призводить до результату:

$$\frac{mv^2}{2} = \int F(x) dx + C,$$

де в правій частині виникає робота змінної сили. Отримали теорему про кінетичну енергію.

З урахуванням позначення  $v = x'$  останнє рівняння є рівнянням першого порядку. Величина  $v = x'$  може бути виражена в явному вигляді і проінтегрована безпосередньо.  $\triangleright$

### 3.3 Питання для перевірки

1. В яких випадках можна знизити порядок ДР? Які заміни змінної застосовують для зниження порядку?
2. Нехай  $p(y) = y'_x$ , де  $y = y(x)$ . Доведіть, що  $\frac{d^2 y}{dx^2} = p \cdot \frac{dp}{dy}$ .

# 4 ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

## 4.1 Основні означення

◆ **Означення 4.1.** Неоднорідним лінійним звичайним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку зі змінними коефіцієнтами називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \quad (4.1)$$

Тут  $a_k(x)$ ,  $k = \overline{1, n}$  – деякі функції аргументу  $x$ . Рівняння (4.1), є неоднорідним за рахунок наявності правої частини  $f(x)$ .

◆ **Означення 4.2.** Однорідним лінійним звичайним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку зі змінними коефіцієнтами, яке відповідає рівнянню (4.1), називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \quad (4.2)$$

Отже, з неоднорідного ДР відповідне йому однорідне виникає при відкиданні правої частини  $f(x)$ .

◆ **Означення 4.3.** Неоднорідним лінійним звичайним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x). \quad (4.3)$$

Тут  $a_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  – деякі числа.

◆ **Означення 4.4.** Однорідним лінійним звичайним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами, яке відповідає рівнянню (4.3), називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0. \quad (4.4)$$

Зручно спочатку побудувати теорію однорідних рівнянь, і вже потім враховувати наявність правих частин.

## 4.2 Однорідні лінійні рівняння

Розглянемо теореми, які стосуються ДР (4.2), (4.4).

## 4.2.1 Принцип суперпозиції

■ **Теорема 4.1.** Нехай кожна з функцій  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  є частинним розв'язком лінійного однорідного ДР. Тоді суперпозиція (лінійна комбінація)  $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$  цих функцій також є розв'язком цього ДР при довільних  $C_1, C_2$ .

□ *Доведення.* За умовою теореми функція  $y_1(x)$  є розв'язком рівняння (4.4), тому

$$y_1^{(n)} + a_1y_1^{(n-1)} + a_2y_1^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y_1' + a_ny_1 = 0.$$

Аналогічно, функція  $y_2(x)$  також є розв'язком рівняння (4.4):

$$y_2^{(n)} + a_1y_2^{(n-1)} + a_2y_2^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y_2' + a_ny_2 = 0.$$

Домножимо перше рівняння на  $C_1$ , а друге – на  $C_2$ , і додамо їх. Групуючи відповідні доданки, отримуємо:

$$\begin{aligned} & [C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)}] + [C_1a_1y_1^{(n-1)} + C_2a_1y_2^{(n-1)}] + \dots + \\ & + [C_1a_{n-1}y_1' + C_2a_{n-1}y_2'] + [C_1a_ny_1 + C_2a_ny_2] = 0. \end{aligned}$$

Винесемо за дужки кожний коефіцієнт  $a_k$ . Крім того, врахуємо, що похідна суми дорівнює сумі похідних (і це стосується першої похідної, другої похідної і т.д.). Тоді

$$\begin{aligned} & [C_1y_1 + C_2y_2]^{(n)} + a_1 [C_1y_1 + C_2y_2]^{(n-1)} + \dots + \\ & + a_{n-1} [C_1y_1 + C_2y_2]' + a_n [C_1y_1 + C_2y_2] = 0. \end{aligned}$$

Замінюючи всюди  $C_1y_1 + C_2y_2$  на  $y$ , отримуємо:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0,$$

що збігається з рівнянням (4.4). Це і означає, що  $y = C_1y_1 + C_2y_2$  є розв'язком рівняння (4.4). □

**Зауваження 1.** Доведена теорема узагальнюється на випадок довільної кількості розв'язків  $y_k(x)$ , які утворюють суперпозицію. Справді, до функцій  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , які є розв'язками, приєднаємо функцію  $y_3(x)$ , яка теж є розв'язком. За доведеним  $C_1y_1 + C_2y_2$  є розв'язком (ми можемо його називати першим), і за умовою  $y_3(x)$  є розв'язком (ми можемо його називати другим). Тоді за доведеним суперпозиція  $\tilde{C}_1(C_1y_1 + C_2y_2) + \tilde{C}_2y_3$

також є розв'язком. В такий спосіб можна продовжувати приєднання наступних розв'язків.

**Зауваження 2.** При доведенні теореми ми не спирались на те, залежать чи не залежать величини  $a_k$  від  $x$ . Тому доведена теорема справедлива і в разі ДР (4.4), і в разі ДР (4.2).

**Зауваження 3.** Доведену теорему можна назвати **принципом суперпозиції** (принципом накладання) розв'язків лінійного однорідного ДР за аналогією до численних випадків, коли загальний результат виникає при накладанні («змішуванні в певній пропорції») окремих внесків *без їх взаємного впливу*.

Отже, доведена теорема в подальшому спонукає нас шукати загальний розв'язок лінійного однорідного ДР  $n$ -го порядку у вигляді суперпозиції

$$y_{\text{одн}}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x). \quad (4.5)$$

◁ *Приклад 4.1.* Розглянемо рівняння  $y'' - 5y' + 6y = 0$ . Переконаємось, що кожна з функцій  $y_1(x) = e^{2x}$ ,  $y_2(x) = e^{3x}$  є частинним розв'язком:

$$y_1' = (e^{2x})' = 2e^{2x}, \quad y_1'' = (2e^{2x})' = 4e^{2x}.$$

Підставляємо цю функцію в ліву частину нашого рівняння:

$$y_1'' - 5y_1' + 6y_1 = 4e^{2x} - 5 \cdot 2e^{2x} + 6 \cdot e^{2x} = 0.$$

Отже, функція  $y_1(x) = e^{2x}$  є розв'язком ДР. Аналогічно,

$$y_2' = (e^{3x})' = 3e^{3x}, \quad y_2'' = (3e^{3x})' = 9e^{3x}.$$

Підставляємо цю функцію в ліву частину нашого рівняння:

$$y_2'' - 5y_2' + 6y_2 = 9e^{3x} - 5 \cdot 3e^{3x} + 6 \cdot e^{3x} = 0.$$

Отже, функція  $y_2(x) = e^{3x}$  – теж розв'язок ДР. Тоді за принципом суперпозиції функція

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

також є розв'язком, причому при довільних і незалежних  $C_1$ ,  $C_2$ . Те, що знайдений розв'язок є загальним, ми ще не довели. Поки маємо лише непряму вказівку на загальність: кількість довільних сталих в сімействі функцій  $y(x, C_1, C_2)$  – дві, і це вичерпує порядок рівняння. ▷

## 4.2.2 Вронскіан

♦ **Означення 4.5.** Нехай  $y_i(x)$  – розв'язки деякого однорідного ДР. Кажуть, що сукупність цих розв'язків утворює **фундаментальну систему розв'язків (ФСР)**, якщо 1) їх кількість дорівнює порядку рівняння і 2) усі розв'язки  $y_i(x)$  лінійно незалежні. Самі розв'язки  $y_i(x)$  називають **фундаментальними**.

Суперпозиція (4.5) будь-яких розв'язків (в тому числі і фундаментальних), взятих в довільній кількості, є розв'язком; це випливає з теореми 4.1. Питання в тому, чи буде ця суперпозиція загальним розв'язком. Виявляється, що так, але лише у випадку, коли складові  $y_i(x)$  утворюють ФСР (ми доведемо це в наступному пункті). А зараз наведемо приклад, коли вимоги означення ФСР порушуються, і це призводить до втрати загальності розв'язку.

< *Приклад 4.2.* Розглянемо рівняння  $y'' - 5y' + 6y = 0$ . Вище ми вже встановили, що  $y_1(x) = e^{2x}$ ,  $y_2(x) = e^{3x}$  – розв'язки. Очевидно, вони лінійно незалежні, тобто не існує таких чисел  $\alpha$ ,  $\beta$ , не рівних нулю одночасно, за яких виконується тотожність  $\alpha e^{2x} + \beta e^{3x} \equiv 0$ . Крім того, порядок рівняння ( $n = 2$ ) вичерпується кількістю цих розв'язків. Отже, вони утворюють ФСР. Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок

$$y_{\text{одн}}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}. \quad (4.6)$$

1) Порушимо першу вимогу означення ФСР. Нехай кількість врахованих в (4.5) фундаментальних розв'язків недостатня (менша за порядок рівняння). Тоді загальність розв'язку втрачається. Справді, замість двох фундаментальних розв'язків  $y_1$ ,  $y_2$  обмежимось одним, і покладемо  $y = C_1 y_1 = C_1 e^{2x}$ . Очевидно, цей розв'язок не є загальним: ні при якому значенні  $C_1$  з нього не зможе виникати, наприклад, розв'язок  $y = e^{3x}$ , який виникає з (4.6) при  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 1$ .

2) Порушимо другу вимогу означення ФСР. Припустимо, ми сформуvalи систему функцій  $y_1^* = e^{2x}$ ,  $y_2^* = 5e^{2x}$ . Вони різні, і кожна з них є розв'язком. Але ці розв'язки лінійно залежні:  $y_2^* = 5y_1^*$ . Спроба за зразком (4.5) сформуvalати загальний розв'язок призводить до виразу

$$y = C_1 y_1^* + C_2 y_2^*.$$

Здавалося б, ми вичерпали обидва ступеня свободи, і тому цей

розв'язок є загальним. Насправді ж

$$y = C_1 y_1^* + C_2 y_2^* = C_1 y_1^* + C_2 \cdot 5y_1^* = (C_1 + 5C_2) y_1^*.$$

Позначаючи  $C = C_1 + 5C_2$ , отримуємо  $y = C y_1^*$ . Отже, фактично вичерпано лише один ступінь свободи з двох; отриманий розв'язок не є загальним (з нього, як і раніше, неможливо отримати, наприклад, частинний розв'язок  $y = e^{3x}$ ). Справа в тому, що система функцій  $y_1^*, y_2^*$  (на відміну від системи функцій  $y_1, y_2$ ) не утворює ФСР, оскільки містить лінійну залежність.  $\triangleright$

Отже, для гарантування загальності розв'язку нам потрібна **ознака лінійної незалежності функцій**. Її сформульовано і доведено польським математиком Юзефом Вронським.

■ **Теорема 4.2.** Якщо система функцій  $y_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , на деякому відрізку  $x \in [a; b]$  є лінійно залежною, то визначник Вронського цих функцій на цьому відрізку дорівнює нулю:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

□ **Доведення.** За означенням лінійної залежності система функцій  $y_i(x)$  є лінійно залежною, якщо існують числа  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , з яких хоча б одне відмінне від нуля, такі, що

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0.$$

Це не є рівняння відносно  $x$ , яке може виконуватись при деяких  $x$ , а саме тотожність, виконана для будь-яких  $x \in [a; b]$ . Тому її можна диференціювати.

Покладемо  $\alpha_1 \neq 0$  (якщо це не так, то завжди можна змінити нумерацію цих функцій). Позначимо

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \beta_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \quad \cdots, \quad \beta_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_1}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} y_1(x) &\equiv -\beta_2 y_2(x) - \beta_3 y_3(x) - \cdots - \beta_n y_n(x), \\ y_1'(x) &\equiv -\beta_2 y_2'(x) - \beta_3 y_3'(x) - \cdots - \beta_n y_n'(x), \\ y_1''(x) &\equiv -\beta_2 y_2''(x) - \beta_3 y_3''(x) - \cdots - \beta_n y_n''(x), \quad \cdots, \end{aligned}$$

$$y_1^{(n-1)}(x) \equiv -\beta_2 y_2^{(n-1)}(x) - \beta_3 y_3^{(n-1)}(x) - \dots - \beta_n y_n^{(n-1)}(x).$$

Заповнимо цими похідними перший стовпець вронскіана (визначника Вронського). Додамо до першого стовпця другий, попередньо помножений на  $\beta_2$ , третій, попередньо помножений на  $\beta_3$ , і т.д. аж до останнього стовпця. Тоді перший стовпець буде складатися лише з нулів, тому  $W = 0$ . Це і треба було довести.  $\square$

**Наслідок.** Якщо  $W \neq 0$ , то функції лінійно незалежні.

Власне, цей наслідок і є ознакою лінійної незалежності функцій.

$\triangleleft$  *Приклад 4.3.* Обчислимо вронскіан функцій  $y_1 = \cos x$ ,  $y_2 = \sin x$ . Маємо:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x \equiv 1 \neq 0.$$

Отже, розглядувані функції  $y_1$ ,  $y_2$  є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі. Їх можна вносити до ФСР.  $\triangleright$

Лінійна залежність двох функцій може бути наявною на одному інтервалі і відсутньою на іншому.

$\triangleleft$  *Приклад 4.4.* Розглянемо функції

$$y_1 = \begin{cases} e^x, & x < 0; \\ \cos x, & x \geq 0, \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} e^x, & x < 0; \\ \sin x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, вони є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі, розташованому праворуч від нуля. Але вони лінійно залежні на будь-якому інтервалі, розташованому ліворуч від нуля.  $\triangleright$

$\triangleleft$  *Приклад 4.5.* Задано функції  $y_1 = e^{\lambda x}$ ,  $y_2 = e^{\mu x}$ . Дослідимо їх на лінійну залежність. Маємо:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & e^{\mu x} \\ \lambda e^{\lambda x} & \mu e^{\mu x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda+\mu)x}(\mu - \lambda).$$

Якщо  $\mu = \lambda$ , то  $W = 0$ , і функції  $y_1$ ,  $y_2$  є лінійно залежними на будь-якому інтервалі. Їх не можна вносити до ФСР. Якщо  $\mu \neq \lambda$ , то  $W \neq 0$ , і функції  $y_1$ ,  $y_2$  є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі. Їх можна вносити до ФСР.  $\triangleright$

$\triangleleft$  *Приклад 4.6.* Задано функції  $y_1 = x^r e^{\lambda_1 x}$ ,  $y_2 = x^s e^{\lambda_1 x}$ . Дослідимо їх на лінійну залежність. Маємо:

$$W = \begin{vmatrix} x^r e^{\lambda_1 x} & x^s e^{\lambda_1 x} \\ r x^{r-1} e^{\lambda_1 x} + x^r \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & s x^{s-1} e^{\lambda_1 x} + x^s \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{2\lambda_1 x} x^r (s x^{s-1} + x^s \lambda_1) - e^{2\lambda_1 x} x^s (r x^{r-1} + x^r \lambda_1) = \\
&= e^{2\lambda_1 x} x^{r+s-1} (s - r).
\end{aligned}$$

Якщо  $s \neq r$ , то  $W \neq 0$ , і функції  $y_1, y_2$  є лінійно незалежними. Їх можна вносити до ФСР.  $\triangleright$

### 4.2.3 Про загальність розв'язку

■ **Теорема 4.3.** Нехай функції  $y_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , є частинними розв'язками однорідного лінійного диференціального рівняння  $n$ -го порядку, і нехай вони утворюють ФСР. Тоді загальний розв'язок цього ДР подається суперпозицією (4.5)

$$y_{\text{одн}}(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x). \quad (4.5)$$

□ *Доведення.* Приєднаємо до ДР довільні початкові умови у вигляді

$$\begin{cases}
y(0) = y_0^{(0)}, \\
y'(0) = y_0^{(1)}, \\
y''(0) = y_0^{(2)}, \\
\quad \dots, \\
y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}.
\end{cases}$$

Отримали задачу Коші. Будемо виходити з того, що її розв'язок  $Y(x)$  існує і є єдиним.

Щоб довести, що суперпозиція (4.5) є загальним розв'язком, достатньо довести, що при будь-яких значеннях  $y_0^{(k-1)}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , початкових умов існують числа  $C_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , за яких наша суперпозиція  $y_{\text{одн}}(x)$  буде збігатись з розв'язком  $Y(x)$ . Справді, існування таких  $C_i$  доведе, що будь-який розв'язок  $Y(x)$  міститься всередині сімейства (4.5), тобто це сімейство узагальнює всі такі можливі розв'язки. При цьому, оскільки розв'язок задачі Коші за даних початкових умов є єдиним, то замість виконання тотожності  $y_{\text{одн}}(x) \equiv Y(x)$  достатньо обмежитись значенням  $x = 0$  і забезпечити виконання системи

$$\begin{cases}
y_{\text{одн}}(0) = Y(0), \\
y'_{\text{одн}}(0) = Y'(0), \\
y''_{\text{одн}}(0) = Y''(0), \\
\quad \dots, \\
y_{\text{одн}}^{(n-1)}(0) = Y^{(n-1)}(0).
\end{cases}$$

Продиференціюємо суперпозицію (4.5) потрібну кількість разів і підставимо її в ліві частини рівнянь цієї системи, а задані початкові умови – в праві частини. При цьому утворюється система лінійних аглебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів  $C_i$ . Легко бачити, що визначник цієї системи і є вронскіаном фундаментальних розв'язків  $y_i(x)$ , обчисленим при  $x = 0$ . Він не вироджений, оскільки фундаментальні розв'язки утворюють ФСР. Отже, розв'язок цієї системи рівнянь (сукупність значень  $C_i$ ) існує і є єдиним, що і треба було довести. Зауважимо, доведене стосується і рівнянь (4.2), і рівнянь (4.4).  $\square$

$\triangleleft$  *Приклад 4.7.* Для рівняння  $y'' - 5y' + 6y = 0$  в прикладі 4.1 було показано, що функції  $y_1(x) = e^{2x}$ ,  $y_2(x) = e^{3x}$  є частинними розв'язками. В прикладі 4.5 було показано, що такі розв'язки лінійно незалежні. Оскільки порядок рівняння ( $n = 2$ ) вичерпується кількістю знайдених розв'язків, то вони утворюють ФСР. Тоді розв'язок  $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$  є загальним.  $\triangleright$

### 4.3 Однорідні лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Знаходження фундаментальних розв'язків  $y_k(x)$  при довільних залежностях  $a_j = a_j(x)$  є складною задачею. Вона значно спрощується, якщо  $a_j$  – сталі. Тому тепер обмежимося лише випадком однорідних лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

В цьому випадку фундаментальні розв'язки  $y_k(x)$  за допомогою підстановки Ейлера шукають у вигляді

$$y_k(x) = e^{\lambda x}. \quad (4.7)$$

Відповідно, похідні дорівнюють

$$y'_k(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad y''_k(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y_k^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Після підстановки цих похідних до (4.4) одержимо

$$e^{\lambda x} (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) = 0.$$

Многочлен

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (4.8)$$

назвемо **характеристичним многочленом**, що відповідає однорідному рівнянню (4.4). Тоді після підстановки Ейлера і скорочення на  $e^{\lambda x}$  це рівняння зводиться до алгебраїчного рівняння  $n$ -го степеня:

$$F(\lambda) = 0.$$

Його називають **характеристичним рівнянням**, яке відповідає заданому однорідному диференціальному рівнянню зі сталими коефіцієнтами. Його корені і є шукані числа  $\lambda_k$ .

### 4.3.1 Випадок простих дійсних коренів

Нехай виявилось, що всі  $n$  коренів характеристичного рівняння є різними дійсними числами. Тоді функції  $y_k(x) = e^{\lambda_k x}$  є лінійно незалежними. Тому вони утворюють ФСР. Тоді загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

◁ *Приклад 4.8.* Розв'язати рівняння  $y'' - 8y' + 15y = 0$ . Розглядуване рівняння є лінійним однорідним звичайним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Йому відповідає характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$ . Його корені  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 5$ . Тому фундаментальні розв'язки  $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{3x}$ ,  $y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{5x}$ . Тоді загальний розв'язок

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x}. \triangleright$$

◁ *Приклад 4.9.* Розв'язати рівняння  $y'' - 2y' = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ . Його корені  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Тому фундаментальні розв'язки  $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^0 = 1$ ,  $y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{2x}$ . Тоді загальний розв'язок

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 + C_2 e^{2x}. \triangleright$$

### 4.3.2 Одна важлива формула

Отримаємо вираз, якого набуває ліва частина ДР (4.4)

$$L \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = \sum_{k=0}^n a_k y^{(n-k)} \quad (4.4 \text{ A})$$

при підстановці до неї функції  $y = x^\alpha Q_s(x)e^{\mu x}$ , де  $Q_s(x)$  – многочлен  $s$ -го степеня і  $\alpha$  – деяке натуральне число або нуль, тобто функції

$$y = x^\alpha (q_0 x^s + q_1 x^{s-1} + \dots + q_{s-1} x + q_s) e^{\mu x} = \sum_{m=0}^s q_m x^{s+\alpha-m} e^{\mu x}. \quad (4.9)$$

Спочатку розв'яжемо **допоміжну задачу** про підстановку функції

$$\overline{y}_r = x^r e^{\mu x}. \quad (4.10)$$

до лівої частини ДР (4.4). Декілька її перших похідних:

$$\begin{aligned} \overline{y}_r' &= \{x^r\}' e^{\mu x} + x^r \cdot \mu e^{\mu x} = e^{\mu x} (\mu x^r + \{x^r\}'), \\ \overline{y}_r'' &= \mu e^{\mu x} (\mu x^r + \{x^r\}') + e^{\mu x} (\mu \{x^r\}' + \{x^r\}'') = \\ &= e^{\mu x} (\mu^2 x^r + 2\mu \{x^r\}' + \{x^r\}''), \\ \overline{y}_r''' &= \mu e^{\mu x} (\mu^2 x^r + 2\mu \{x^r\}' + \{x^r\}'') + e^{\mu x} (\mu^2 \{x^r\}' + 2\mu \{x^r\}''' + \{x^r\}''') = \\ &= e^{\mu x} (\mu^3 x^r + 3\mu^2 \{x^r\}' + 3\mu \{x^r\}'' + \{x^r\}''') \end{aligned}$$

і т.д. Взагалі, за формулою Лейбніца<sup>1</sup> маємо:

$$\begin{aligned} \overline{y}_r^{(k)} &= e^{\mu x} \left( C_k^0 \mu^k x^r + C_k^1 \mu^{k-1} \{x^r\}' + \dots + C_k^k \{x^r\}^{(k)} \right) = \\ &= e^{\mu x} \sum_{p=0}^k C_k^p \mu^{k-p} \{x^r\}^{(p)}. \end{aligned}$$

Тут  $C_k^p = \frac{k!}{p!(k-p)!}$  – кількість сполучень із  $k$  елементів по  $p$  елементів. Надаючи параметру  $k$  послідовно значення  $n, n-1, \dots, 0$ , одержуємо:

$$\begin{aligned} \overline{y}_r^{(n)} &= e^{\mu x} \sum_{p=0}^n C_n^p \mu^{n-p} \{x^r\}^{(p)}, \\ \overline{y}_r^{(n-1)} &= e^{\mu x} \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p \mu^{n-1-p} \{x^r\}^{(p)}, \\ \overline{y}_r^{(n-2)} &= e^{\mu x} \sum_{p=0}^{n-2} C_{n-2}^p \mu^{n-2-p} \{x^r\}^{(p)}, \quad \dots, \\ \overline{y}_r^{(1)} &= \overline{y}_r' = e^{\mu x} \sum_{p=0}^1 C_1^p \mu^{1-p} \{x^r\}^{(p)} = e^{\mu x} (\mu x^r + \{x^r\}'), \\ \overline{y}_r^{(0)} &= \overline{y}_r = e^{\mu x} \sum_{p=0}^0 C_0^p \mu^{-p} \{x^r\}^{(p)} = e^{\mu x} x^r. \end{aligned}$$

Підставляємо ці похідні до (4.4 А). Для цього перше з наведених рівнянь домножимо на  $a_0$ , друге – на  $a_1$  і т.д., останнє – на  $a_n$ , і додамо їх. При цьому організуємо такий порядок групування доданків. Спочатку згрупуємо тільки

<sup>1</sup>Відома формула Лейбніца  $n$ -кратного диференціювання добутку двох функцій:  $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$ .

перші доданки (при  $p = 0$ ) усіх сум; вони містять  $\{x^r\}^{(0)} = x^r$  і присутні у кожній сумі. Потім згрупуємо тільки другі доданки (при  $p = 1$ ) усіх сум; вони містять  $\{x^r\}'$  і присутні у кожній сумі, крім останньої. Далі згрупуємо тільки треті доданки (при  $p = 2$ ) усіх сум; вони містять  $\{x^r\}''$  і присутні у кожній сумі, крім двох останніх. Продовжимо процес поступового зростання номеру похідної від  $x^r$ . Тоді в передостанню групу (при  $\{x^r\}^{(n-1)}$ ) увійдуть передостанній доданок першої суми і останній доданок другої суми (при  $p = n - 1$ ). Останню групу (при  $\{x^r\}^{(n)}$ ) буде представлено лише останнім доданком (при  $p = n$ ) першої суми. Крім того, тимчасово (для скорочення запису) розділимо ліву і праву частини утворюваної рівності на  $e^{-\mu x}$ . Тоді

$$\begin{aligned} & \left\{ a_0 \overline{y_r}^{(n)} + a_1 \overline{y_r}^{(n-1)} + a_2 \overline{y_r}^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \overline{y_r}' + a_n \overline{y_r} \right\} e^{-\mu x} = \\ & = x^r [a_0 C_n^0 \mu^n + a_1 C_{n-1}^0 \mu^{n-1} + \dots + a_{n-1} C_1^0 \mu + a_n C_0^0] + \\ & + \{x^r\}' [a_0 C_n^1 \mu^{n-1} + a_1 C_{n-1}^1 \mu^{n-2} + \dots + a_{n-2} C_2^1 \mu + a_{n-1} C_1^1] + \\ & + \{x^r\}'' [a_0 C_n^2 \mu^{n-2} + a_1 C_{n-1}^2 \mu^{n-3} + \dots + a_{n-3} C_3^2 \mu + a_{n-2} C_2^2] + \\ & + \dots + \{x^r\}^{(n-1)} [a_0 C_n^{n-1} \mu + a_1 C_{n-1}^{n-1}] + \{x^r\}^{(n)} [a_0 C_n^n]. \end{aligned}$$

Як бачимо, тут вираз у перших квадратних дужках правої частини дорівнює значенню характеристичного многочлену в точці  $\mu$ :

$$a_0 \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \dots + a_{n-1} \mu + a_n = F(\mu).$$

Вираз у других квадратних дужках правої частини дорівнює відповідній першій похідній:

$$a_0 n \mu^{n-1} + a_1 (n-1) \mu^{n-2} + \dots + a_{n-2} 2 \mu + a_{n-1} = F'(\mu).$$

Вираз у третій квадратних дужках правої частини дорівнює половині відповідної другої похідної:

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{n(n-1)}{2} \mu^{n-2} + a_1 \frac{(n-1)(n-2)}{2} \mu^{n-3} + \dots + \\ & + a_{n-3} \frac{3 \cdot 2}{2} \mu + a_{n-2} \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} F''(\mu). \end{aligned}$$

Для узагальнення цих результатів розглянемо квадратні дужки, які є співмножником при  $\{x^r\}^{(m)}$ ,  $m = 0, n$ . Легко переконатись, що цей вираз дорівнює

$$[ \ ]_m = \sum_{j=0}^{n-m} a_j C_{n-j}^m \mu^{n-m-j}.$$

Методом математичної індукції доведемо, що

$$[ \ ]_m = \frac{1}{m!} F^{(m)}(\mu),$$

тобто доведемо, що

$$\frac{1}{m!} F^{(m)}(\mu) = \sum_{j=0}^{n-m} a_j C_{n-j}^m \mu^{n-m-j}. \quad (\text{A})$$

На першому кроці при  $m = 0$  маємо:

$$\frac{1}{0!} F^{(0)}(\mu) = \sum_{j=0}^{n-0} a_j C_{n-j}^0 \mu^{n-0-j}, \quad F(\mu) = \sum_{j=0}^n a_j \mu^{n-j},$$

що очевидно. На другому кроці будемо вважати, що рівняння (A) вже виконано, і з використанням цього перевіримо виконання рівняння

$$\frac{1}{(m+1)!} F^{(m+1)}(\mu) = \sum_{j=0}^{n-(m+1)} a_j C_{n-j}^{m+1} \mu^{n-(m+1)-j}. \quad (\text{B})$$

Продиференціюємо рівняння (A) за змінною  $\mu$ . Оскільки в сумі (A) останній доданок (при  $j = n - m$ ) не залежить від  $\mu$ , то після диференціювання він зникне. Отже, діапазон сумування за  $j$  можна зсувати на одиницю зверху. Тоді

$$\frac{1}{m!} F^{(m+1)}(\mu) = \sum_{j=0}^{n-m-1} a_j C_{n-j}^m (n-m-j) \mu^{n-m-j-1}.$$

Розділимо це рівняння на  $m+1$ :

$$\frac{1}{(m+1)!} F^{(m+1)}(\mu) = \sum_{j=0}^{n-m-1} a_j \frac{C_{n-j}^m (n-m-j)}{m+1} \mu^{n-m-j-1}.$$

Отже, порівнюючи з (B), залишається довести, що

$$C_{n-j}^{m+1} = \frac{C_{n-j}^m (n-m-j)}{m+1}.$$

Маємо:

$$\frac{(n-j)!}{(m+1)!(n-j-m-1)!} = \frac{(n-j)!(n-m-j)}{m!(n-j-m)!(m+1)!},$$

$$\frac{1}{(n-j-m-1)!} = \frac{(n-m-j)}{(n-j-m)!},$$

що очевидно. Другий крок методу математичної індукції вичерпано. Тоді при підстановці функції  $\overline{y_r}$  (4.10) до (4.4 A) отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{L|_{y=\overline{y_r}}}{e^{\mu x}} &= \left[ a_0 \overline{y_r}^{(n)} + a_1 \overline{y_r}^{(n-1)} + a_2 \overline{y_r}^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \overline{y_r}' + a_n \overline{y_r} \right] e^{-\mu x} = \\ &= x^r \frac{F(\mu)}{0!} + \{x^r\}' \frac{F'(\mu)}{1!} + \{x^r\}'' \frac{F''(\mu)}{2!} + \dots + \\ &+ \{x^r\}^{(n-1)} \frac{F^{(n-1)}(\mu)}{(n-1)!} + \{x^r\}^{(n)} \frac{F^{(n)}(\mu)}{n!} = \sum_{k=0}^n \{x^r\}^{(k)} \frac{F^{(k)}(\mu)}{k!}, \\ L|_{y=\overline{y_r}=x^r e^{\mu x}} &= \sum_{k=0}^n a_k \{x^r e^{\mu x}\}^{(n-k)} = e^{\mu x} \sum_{k=0}^n \{x^r\}^{(k)} \frac{F^{(k)}(\mu)}{k!} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Розв'яжемо тепер **основну задачу** про підстановку функції (4.9) до виразу (4.3 A). Маємо:

$$L = \sum_{k=0}^n a_k y^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n a_k \left( \sum_{m=0}^s q_m (x^{s-m+\alpha} e^{\mu x}) \right)^{(n-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{m=0}^s q_m (e^{\mu x} x^{s-m+\alpha})^{(n-k)} = \sum_{m=0}^s q_m \left( \sum_{k=0}^n a_k (e^{\mu x} x^{s-m+\alpha})^{(n-k)} \right).$$

Ми врахували, що  $(n-k)$ -а похідна суми дорівнює сумі відповідних похідних, і винесли константи  $q_m$  за знак диференціювання; потім змінили порядок сумування. В останньому виразі внутрішня сума і є (4.11), отримувана при значенні  $r = s - m + \alpha$ . Тоді

$$L|_{y=x^\alpha Q_s(x)e^{\mu x}} = e^{\mu x} \sum_{m=0}^s q_m \left( \sum_{k=0}^n \{x^{s-m+\alpha}\}^{(k)} \frac{F^{(k)}(\mu)}{k!} \right). \quad (4.12)$$

### 4.3.3 Випадок кратних дійсних коренів

Може статися, що деякий корінь (наприклад,  $\lambda_1$ ) є кратним кратності  $p$ . Тоді в розкладанні характеристичного многочлену на множники міститься множник  $(\lambda - \lambda_1)^p$ , якому відповідають корені

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p.$$

Формально це породжує  $p$  однакових розв'язків

$$y_1 = y_2 = \dots = y_p = e^{\lambda_1 x}.$$

Ясно, що система цих функцій є лінійно залежною, і тому ФСР не утворює. Отже, суперпозиція цих функцій надає нам розв'язок, але він не є загальним. Справді, відповідний фрагмент суперпозиції має вигляд

$$C_1 y_1 + C_2 y_1 + \dots + C_p y_1 = (C_1 + C_2 + \dots + C_p) y_1.$$

Позначаючи  $C_1 + C_2 + \dots + C_p = C$ , переконаємось, що цей фрагмент містить лише одну довільну сталу  $C$  замість  $p$  довільних сталих. Отже, така суперпозиція містить на  $(p - 1)$  ступенів свободи менше, ніж очікувалось.

Отже, фундаментальні розв'язки  $y_k = e^{\lambda_1 x}$ ,  $k = \overline{1, p}$ , потрібно модифікувати так, щоб відновити їх лінійну незалежність. Пропонується кожному наступному з цих функцій **домножити на наступний степінь аргументу**, тобто покласти

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = x e^{\lambda_1 x}, \quad y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, \quad y_p = x^{p-1} e^{\lambda_1 x}. \quad (4.13)$$

Доведемо наступне. Нехай  $\lambda_1$  – корінь кратності  $p$ . Тоді 1) усі функції (4.13) – розв'язки рівняння (4.4); 2) вони є лінійно незалежними.

1) Кожна з функцій (4.13) має вигляд (4.10), тому при підстановці до (4.4) згідно з (4.11) отримуємо:

$$e^{\lambda_1 x} \sum_{k=0}^n \{x^r\}^{(k)} \frac{F^{(k)}(\lambda_1)}{k!} = 0, \quad r = \overline{0, p-1}.$$

Але за рахунок кратності кореня маємо:

$$F(\lambda_1) = F'(\lambda_1) = F''(\lambda_1) = \dots = F^{(p-1)}(\lambda_1) = 0.$$

Отже, в сумі відсутні доданки з номерами  $k = \overline{0, p-1}$ . Решта доданків також дорівнює нулю, оскільки їх номери  $k \geq p$ , звідки  $k > r$ , і  $\{x^r\}^{(k)} \equiv 0$ . Отже, рівняння виконано.

2) Доведемо лінійну незалежність системи функцій (4.13).

Зауважимо, попарної лінійної незалежності цих функцій, доведеної в прикладі 4.6, ще недостатньо для лінійної незалежності системи цих функцій. Наприклад, функції  $y_1(x) \equiv 1$ ,  $y_2(x) = x$ ,  $y_3(x) = 1 - x$  попарно лінійно незалежні:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \\ W_{23} &= \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2' & y_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1-x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \\ W_{31} &= \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ y_3' & y_1' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Але система цих функцій лінійно залежність містить:  $y_1 \equiv y_2 + y_3$ .

Доведення лінійної незалежності системи функцій (4.13) з використанням визначника Вронського є занадто громіздким. Простіше скористатись означенням лінійної незалежності. Достатньо довести, що тотожність  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_p y_p \equiv 0$  можлива лише за умови  $C_1 = C_2 = \dots = C_p = 0$ . Маємо:

$$\begin{aligned} &C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_p y_p = \\ &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + \dots + C_p x^{p-1} e^{\lambda_1 x} = \\ &= e^{\lambda_1 x} (C_1 + C_2 x + \dots + C_p x^{p-1}). \end{aligned}$$

Оскільки  $e^{\lambda_1 x} \neq 0$ , то  $C_1 + C_2 x + \dots + C_p x^{p-1} \equiv 0$ . Методом невизначених коефіцієнтів при усіх степенях  $x$  з нульового по  $(p-1)$ -й маємо:  $C_1 = C_2 = \dots = C_p = 0$ , що і потрібно було довести.

Тепер, якщо деякий корінь  $\lambda_1$  характеристичного рівняння є кратним кратності  $p$ , то для формування відповідного внеску

до ФСР кожний наступний фундаментальний розв'язок вигляду  $e^{\lambda_1 x}$  слід домножувати на наступний степінь аргумента аж до вичерпання кратності (тобто до  $p - 1$ -го степеня включно).

◁ Приклад 4.10. Розв'язати рівняння  $y'' - 2y' + y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ , або  $(\lambda - 1)^2 = 0$ . Його корінь  $\lambda_1 = 1$  кратності  $p = 2$ . Отже, ФСР:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x, \quad y_2 = xe^{\lambda_1 x} = xe^x,$$

і кратність кореня вичерпано. Тоді загальний розв'язок

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^x + C_2 x e^x = e^x (C_1 + C_2 x). \triangleright$$

◁ Приклад 4.11. Розв'язати рівняння  $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$ , або  $(\lambda - 2)^3 = 0$ . Його корінь  $\lambda_1 = 2$  кратності  $p = 3$ . Отже, ФСР:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{2x}, \quad y_2 = xe^{\lambda_1 x} = xe^{2x}, \quad y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x} = x^2 e^{2x},$$

і кратність кореня вичерпано. Тоді загальний розв'язок

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = \\ &= C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 x^2 e^{2x} = e^{2x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2). \triangleright \end{aligned}$$

◁ Приклад 4.12. Розв'язати рівняння  $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = 0$ , або

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda - 3) = 0.$$

Його корені  $\lambda_1 = 1$  кратності  $p = 2$  і  $\lambda_2 = 3$ . Отже, внесок до ФСР, який відповідає першому кореню:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x, \quad y_2 = xe^{\lambda_1 x} = xe^x,$$

і кратність першого кореня вичерпано. Крім того, за рахунок другого кореня до ФСР приєднуємо ще одну функцію:

$$y_3 = e^{\lambda_2 x} = e^{3x}.$$

Тоді загальний розв'язок

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{3x}. \triangleright$$

◁ *Приклад 4.13.* Розв'язати рівняння  $y''' = 0$ . Це рівняння можна розв'язати трикратним інтегуванням:

$$y'' = \int y''' dx = \int 0 dx = 0 + C_1 = C_1,$$

$$y' = \int y'' dx = \int C_1 dx = C_1x + C_2,$$

$$y = \int y' dx = \int (C_1x + C_2) dx = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Отже, загальний розв'язок – довільний квадратний тричлен. Проте, цікаво, як спрацює викладена теорія. Характеристичне рівняння  $\lambda^3 = 0$ . Його корінь  $\lambda_1 = 0$  кратності  $p = 3$ . Отже, ФСР:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^0 = 1,$$

$$y_2 = xe^{\lambda_1 x} = xe^0 = x,$$

$$y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x} = x^2 e^0 = x^2,$$

і кратність кореня вичерпано. Тоді загальний розв'язок

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 + C_2 x + C_3 x^2,$$

тобто загальний розв'язок – довільний квадратний тричлен. ▷

#### 4.3.4 Початкові відомості про комплексні числа

В цьому пункті розглянемо комплексні числа і елементарні операції з ними. Викладення обмежимо лише обсягом, необхідним для роботи з подальшим матеріалом.

**Комплексним** називають число вигляду  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Величину  $i$  називають **уявною одиницею**; вона має властивість  $i^2 = -1$ . Звичайно,  $i$  не є дійсним числом (квадрати дійсних чисел невід'ємні).

Число  $x \in \mathbb{R}$  називають **дійсною частиною** комплексного числа  $z$  (пишуть  $x = \operatorname{Re} z$ , *real* – дійсний), а число  $y \in \mathbb{R}$  (не символ  $iy$ , а тільки число  $y$ ) – **уявною частиною** комплексного числа  $z$  (пишуть  $y = \operatorname{Im} z$ , *imaginary* – уявний). Якщо  $\operatorname{Re} z = 0$ , тобто  $z = iy$ , кажуть, що  $z$  є **суто уявним** числом.

Розглянемо окремий випадок, коли  $\operatorname{Im} z = 0$ . В цьому разі маємо:  $z = x + i0 = x \in \mathbb{R}$ . Отже, множина комплексних чисел

є узагальненням множини дійсних чисел, тобто кожне дійсне число можна розглядати як окремий випадок комплексного числа. Але комплексні числа – це об'єкти нової, більш складної математичної природи. Тому для них потрібно вводити нові означення операцій додавання, множення, піднесення до степеню тощо. Нові означення при їх застосуванні до окремого випадку дійсних чисел повинні виявляти звичні нам властивості. Наприклад, додавання дійсних чисел має комутативну (переставну) властивість  $a + b = b + a$  і асоціативну (сполучну) властивість  $(a + b) + c = a + (b + c)$ . Отже, означення суми комплексних чисел треба сформулювати так, щоб ці властивості виконувались при додаванні будь-яких комплексних чисел. Тоді вони будуть виконані в тому числі і для дійсних чисел, а отже, операція додавання комплексних чисел буде узагальнювати відому операцію додавання дійсних чисел.

Відповідно, множення дійсних чисел має комутативну (переставну) властивість  $ab = ba$ , асоціативну (сполучну) властивість  $(ab)c = a(bc)$ , і дистрибутивну (розподільну) властивість відносно додавання  $a(b + c) = ab + ac$ . Отже, означення добутку комплексних чисел треба сформулювати так, щоб ці властивості виконувались при множенні будь-яких комплексних чисел.

Дійсне число  $x$  можна зобразити точкою на координатній прямій  $Ox$ , використовуючи значення  $x$  в якості координати. Відповідно, комплексне число  $z = x + iy$  можна зобразити точкою  $(x, y)$  на координатній площині  $Oxy$ . Природно домовитись про наступне: два комплексних числа є рівними, якщо точки, які зображують їх на площині  $Oxy$ , збігаються. Звідси випливає **означення рівності комплексних чисел**:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2; \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \end{cases}$$

Якщо з рівнянь останньої системи не виконано хоча б одне, то  $z_2 \neq z_1$ . При цьому жодне з чисел  $z_1, z_2$  не є більшим чи меншим<sup>2</sup> за інше; вони просто не дорівнюють одне одному.

---

<sup>2</sup>Поняттям «більше», «менше» (т.зв. *відношенням порядку*) теж треба давати означення. В разі дійсних чисел це просто: якщо числа  $x_1, x_2$  зображуються на осі  $Ox$  точками  $A_1, A_2$ , і точка  $A_2$  розташована з правого боку від точки  $A_1$ , то  $x_2 > x_1$ , а якщо точки збігаються, то  $x_2 = x_1$ . А на площині (на відміну від прямої) існує нескінченно багато напрямків, вдовж яких можна рухатись від однієї точки до іншої. Обрати серед них якийсь особливий «напрямок збільшення»

**Сумою двох комплексних чисел називають** комплексне число, яке обчислюється за правилом:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Виконання комутативності і асоціативності легко перевірити самостійно. Наочним аналогом додавання комплексних чисел є додавання векторів на площині в координатах (в проєкціях).

**Добутком двох комплексних чисел називають** комплексне число, яке обчислюється за правилом:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Виконання комутативності, асоціативності і дистрибутивності відносно додавання легко перевірити самостійно.

Обчислимо  $i^2$ . За означенням добутку маємо:

$$\begin{aligned} i^2 &= i \cdot i = (0 + i1) \cdot (0 + i1) = \\ &= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = -1 + i0 = -1. \end{aligned}$$

Ця обставина в поєднанні з наведеними властивостями дозволяє поводитись з комплексними числами так, ніби вони є многочленами. Іншими словами, при переході до комплексних чисел у нас зберігаються права групувати доданки та співмножники, зводити подібні члени, виносити спільний множник за дужки, розкривати дужки тощо.

◁ *Приклад 4.14.* Обчислимо значення виразу  $(1 + i)(2 - i)$ :

$$\begin{aligned} (1 + i)(2 - i) &= 1 \cdot 2 - 1 \cdot i + i \cdot 2 - i \cdot i = \\ &= 2 - i + 2i - i^2 = 2 + i - (-1) = 3 + i. \triangleright \end{aligned}$$

Наступна операція – **комплексне спряження**. Так називають зміну знаку уявної частини комплексного числа на протилежний. Якщо  $z = x + iy$ , то  $\bar{z} = x + i\bar{y} = x - iy$ . Очевидно, точки, які зображають числа  $z$  і  $\bar{z}$ , симетричні одна одній відносно осі  $Ox$ . Цікаво зауважити, що добуток  $z \cdot \bar{z}$  завжди є дійсним невід'ємним числом:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 \geq 0.$$

неможливо, оскільки всі напрямки рівноправні. Тому на множині комплексних чисел поняття «більше», «менше» взагалі не визначають. Математики кажуть, що множина комплексних чисел (на відміну від множини дійсних чисел) є невпорядкованою.

Це відкриває шлях до ділення комплексних чисел ( $z_2 \neq 0$ ):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Розглянемо квадратне рівняння  $az^2 + bz + c = 0$ . Нехай його дискримінант  $D = b^2 - 4ac < 0$ . В цьому випадку рівняння *дійсних* коренів не має. Але комплексні корені існують. Знайдемо їх. Позначимо  $D_1 = -D$ ,  $D_1 > 0$ . Тоді

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-D_1}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{D_1}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{D_1}}{2a}.$$

Позначимо  $x = -\frac{b}{2a}$ ,  $y = \frac{\sqrt{D_1}}{2a}$  – дійсні числа. Тоді корені рівняння  $z_{1,2} = x \pm iy$ . Отже, **якщо коефіцієнти квадратного рівняння з від'ємним дискримінантом є дійсними числами, то корені рівняння – комплексні, комплексно спряжені один до одного.**

Після введення основних арифметичних дій (порівняння, додавання, множення, спряження, ділення) розглянемо ще піднесення числа  $e$  до комплексного степеня. Це роблять за допомогою **формули Ейлера**, яка має вигляд:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (4.14)$$

Степінь з комплексним показником – це величина, яка теж потребує означення. Наведена формула Ейлера як раз і відіграє роль такого означення. Покажемо, що воно узгоджується з розвиненнями відповідних елементарних функцій в ряд Маклорена. Для експоненти маємо збіжний ряд:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Нехай  $z$  – комплексне. Домовимось  $e^z$  розуміти в сенсі суми цього ряду (також комплексної!) в точці  $z$ . Зокрема, при  $z = i\varphi$  маємо:

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{i^2\varphi^2}{2!} + \frac{i^3\varphi^3}{3!} + \frac{i^4\varphi^4}{4!} + \frac{i^5\varphi^5}{5!} + \frac{i^6\varphi^6}{6!} + \frac{i^7\varphi^7}{7!} + \dots$$

Враховуючи, що  $i^1 = i$ ,  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$  і т.д., отримуємо:

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \dots =$$

$$= \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \right) + \\ + i \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots \right) = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Отже, формула Ейлера не протирічить узагальненню рядів Маклорена для експоненти, синуса і косинуса на випадок комплексних значень аргументу.

Формулою Ейлера можна скористатись для подання синуса і косинуса у вигляді комбінації експонент. Формула (4.14) справедлива для будь-яких кутів  $\varphi$ , і в тому числі для протилежного кута  $-\varphi$ . Враховуючи парність косинуса і непарність синуса, маємо:

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi.$$

Додаючи це рівняння до (4.14), позбавимось синуса, а віднімаючи його від (4.14), позбавимось косинуса. Отримаємо:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \quad (4.15)$$

### 4.3.5 Випадок простих комплексних коренів

Нехай характеристичний многочлен розкладено на множники, і один з них виявився квадратним тричленом з від'ємним дискримінантом. Подальше розкладання на множники в дійсних числах неможливе, і корені – комплексно спряжені, тобто мають вигляд

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib.$$

При  $b \neq 0$  маємо  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ , тому відповідна пара розв'язків

$$\tilde{y}_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(a+ib)x}, \quad \tilde{y}_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(a-ib)x}$$

лінійної залежності не містить. Отже, ці розв'язки є фундаментальними і можуть бути внесеними до ФСР. Внесок цієї пари в загальний розв'язок становить  $A\tilde{y}_1 + B\tilde{y}_2$ , причому  $A, B$  можуть виявитись і комплексним числами. Маємо:

$$A\tilde{y}_1 + B\tilde{y}_2 = Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x} = \\ = e^{ax} (Ae^{ibx} + Be^{-ibx}) = \\ = e^{ax} [A(\cos bx + i \sin bx) + B(\cos bx - i \sin bx)] =$$

$$= e^{ax} [(A + B) \cos bx + (iA - iB) \sin bx].$$

Позначимо  $A + B = C_1$ ,  $iA - iB = C_2$ . Тоді внесок має вигляд

$$A\tilde{y}_1 + B\tilde{y}_2 = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx.$$

Отже, в разі комплексно спряжених коренів замість пари фундаментальних розв'язків

$$\tilde{y}_1 = e^{(a+ib)x}, \quad \tilde{y}_2 = e^{(a-ib)x}$$

зручно користуватись парою фундаментальних розв'язків

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_2 = e^{ax} \sin bx.$$

◁ *Приклад 4.15.* Розв'язати рівняння  $y'' + 9y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 9 = 0$ , його корені  $\lambda_{1,2} = a \pm ib = \pm 3i$ . Отже,  $a = 0$ ,  $b = 3$ , ФСР

$$y_1 = e^{ax} \cos bx = \cos 3x, \quad y_2 = e^{ax} \sin bx = \sin 3x.$$

Тоді загальний розв'язок

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x. \triangleright$$

◁ *Приклад 4.16.* Розв'язати рівняння  $y'' - 6y' + 13y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$ , його корені

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i.$$

Тоді  $a = 3$ ,  $b = 2$ , ФСР

$$y_1 = e^{ax} \cos bx = e^{3x} \cos 2x, \quad y_2 = e^{ax} \sin bx = e^{3x} \sin 2x.$$

Тоді загальний розв'язок

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x. \triangleright$$

◁ *Приклад 4.17.* Розв'язати рівняння

$$y^{(4)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4 = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0,$$

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda^2 + 4) = 0.$$

Корені  $\lambda_{1,2} = 1$  (кратності  $p = 2$ ),  $\lambda_{3,4} = \pm 2i$ . Тоді ФСР

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x, \quad y_3 = \cos 2x, \quad y_4 = \sin 2x.$$

Зауважимо, тут комплексно спряженим кореням  $\lambda_{3,4}$  відповідають фундаментальні розв'язки  $y_3, y_4$ , які включаються до ФСР незалежно від факту кратності дійсного кореня  $\lambda_{1,2}$ . Цю кратність враховано рівністю  $y_2 = xy_1$ .

Тоді загальний розв'язок:

$$y = \sum_{k=1}^4 C_k y_k = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x. \triangleright$$

$\triangleleft$  *Приклад 4.18.* Отримати рівняння вільних коливань електричного заряду в послідовному коливальному контурі з параметрами: індуктивність котушки  $L$ , ємність конденсатора  $C$ , омичний опір дротів  $R$ .

Нехай заряд конденсатора в момент часу  $t$  дорівнює  $Q(t)$ . Струм в контурі  $I = Q'(t)$ . ЕРС самоіндукції в котушці за законом Фарадея  $\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} = -LQ''$ . Напруга на котушці дорівнює  $U_L = -\mathcal{E} = LQ''$ . Напруга на резисторі  $U_R = IR = Q'R$ . Напруга на конденсаторі за означенням електроємності  $U_C = \frac{Q}{C}$ . Оскільки коливання вільні, то джерела в контурі відсутні. Тоді за правилом Кірхгофа  $U_L + U_R + U_C = 0$ ,

$$LQ'' + Q'R + \frac{Q}{C} = 0.$$

Позначимо  $\beta = \frac{R}{2L}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ . Отримуємо ДР:

$$Q'' + 2\beta Q' + \omega_0^2 Q(t) = 0.$$

Характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$ . Дискримінант

$$D = (2\beta)^2 - 4\omega_0^2 = -4(\omega_0^2 - \beta^2) = -4\omega^2 = (2i\omega)^2.$$

Тут позначено  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} > 0$ ; враховано, що при малому омичному опорі  $\beta < \omega_0$ . Тоді корені характеристичного рівняння  $\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm 2i\omega}{2} = -\beta \pm i\omega$ . Тоді ФСР

$$Q_1(t) = e^{-\beta t} \cos \omega t, \quad Q_2(t) = e^{-\beta t} \sin \omega t.$$

Загальний розв'язок ДР:

$$Q(t) = C_1 Q_1(t) + C_2 Q_2(t) = e^{-\beta t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

Це є відоме рівняння *вільних* затухаючих коливань. Зауважимо, за наявності втрат енергії вони відбуваються з частотою  $\omega$ , трохи меншою за частоту  $\omega_0$  *власних* коливань. ▷

### 4.3.6 Випадок кратних комплексних коренів

Нехай тепер характеристичний многочлен ДР після розкладання на множники містить співмножник  $(\lambda^2 + u\lambda + v)^p$ , де  $u, v \in \mathbb{R}$ , і дискримінант  $u^2 - 4v < 0$ . Тоді подальше розкладання на множники можливо тільки з використанням комплексно спряжених коренів. Нехай вони дорівнюють  $\lambda_1 = a + ib$ ,  $\lambda_2 = a - ib$ . Очевидно, кожен з них є кратним кратності  $p$ :

$$(\lambda^2 + u\lambda + v)^p = (\lambda - \lambda_1)^p (\lambda - \lambda_2)^p.$$

Це, аналогічно до (4.13), породжує  $2p$  таких фундаментальних розв'язків:

$$\begin{aligned} y_1^+ &= e^{\lambda_1}, & y_1^- &= e^{\lambda_2}, \\ y_2^+ &= x e^{\lambda_1}, & y_2^- &= x e^{\lambda_2}, \\ y_3^+ &= x^2 e^{\lambda_1}, & y_3^- &= x^2 e^{\lambda_2}, \\ & \dots, \\ y_p^+ &= x^{p-1} e^{\lambda_1}, & y_p^- &= x^{p-1} e^{\lambda_2}. \end{aligned}$$

Вище ми довели: якщо функція  $\varphi(x) = e^{\lambda x}$  є розв'язком і корінь  $\lambda$  є кратним кратності  $p$ , то функції  $\psi_r(x) = x^r \varphi(x)$  також є розв'язками при  $r = \overline{1, p-1}$ , причому система функцій  $\varphi(x)$ ,  $\psi_r(x)$  лінійно незалежна. При цьому для доведення не мало значення, корінь  $\lambda$  є дійсним чи комплексним. Тому цей висновок справедливий і зараз. Отже, функції  $y_k^\pm$ ,  $k = \overline{1, p}$ , утворюють внесок до ФСР, який відповідає парі комплексно спряжених коренів  $\lambda_{1,2}$  кратності  $p$  кожний.

Користуватись функціями  $y_k^\pm$  незручно, оскільки вони містять комплексні значення  $a \pm ib$ . Доведемо, що при побудові ФСР кожен парю функцій  $y_k^\pm$  можна замінити парю функцій

$$f_k(x) = x^{k-1} e^{ax} \cos bx, \quad g_k(x) = x^{k-1} e^{ax} \sin bx.$$

Нехай деякий фрагмент  $Y(x)$  загального розв'язку подано у вигляді лінійної комбінації функцій  $y_k^+$ ,  $y_k^-$  з довільними коефіцієнтами  $\alpha$ ,  $\beta$ . Доведемо, що завжди існують коефіцієнти  $C_1$ ,  $C_2$  такої лінійної комбінації функцій  $f_k(x)$ ,  $g_k(x)$ , яка подає той самий фрагмент. Маємо:

$$Y(x) = \alpha y_k^+ + \beta y_k^- = C_1 f_k + C_2 g_k,$$

$$\alpha x^{k-1} e^{(a+ib)x} + \beta x^{k-1} e^{(a-ib)x} = C_1 x^{k-1} e^{ax} \cos bx + C_2 x^{k-1} e^{ax} \sin bx,$$

$$\alpha e^{ax} e^{ibx} + \beta e^{ax} e^{-ibx} = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx,$$

$$\alpha (\cos bx + i \sin bx) + \beta (\cos bx - i \sin bx) = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx.$$

Методом невизначених коефіцієнтів при функціях  $\cos bx$ ,  $\sin bx$  маємо:

$$\begin{cases} C_1 = \alpha + \beta; \\ C_2 = i\alpha - i\beta. \end{cases}$$

Отже, якщо деякий фрагмент  $Y(x)$  загального розв'язку може бути поданий у вигляді лінійної комбінації функцій  $y_k^\pm$  з коефіцієнтами  $\alpha$ ,  $\beta$ , то він також може бути поданий у вигляді лінійної комбінації функцій  $f_k$ ,  $g_k$  з коефіцієнтами  $C_1$ ,  $C_2$ . Це і означає, що при побудові ФСР **пару** функцій  $y_k^\pm$  **можна замінити парю** функцій  $f_k$ ,  $g_k$ .

Отже, якщо числа  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$  є коренями характеристичного рівняння кратності  $p$  кожний, то відповідний цим кореням внесок у ФСР може бути записаний у вигляді

$$\begin{aligned} & e^{ax} \cos bx, \quad e^{ax} \sin bx, \\ & x e^{ax} \cos bx, \quad x e^{ax} \sin bx, \\ & \dots, \\ & x^{p-1} e^{ax} \cos bx, \quad x^{p-1} e^{ax} \sin bx. \end{aligned}$$

◁ *Приклад 4.19.* Нехай характеристичний многочлен деякого ДР  $F(\lambda) = (\lambda^2 + 4)^3$ . Скласти загальний розв'язок.

Маємо  $F(\lambda) = 0$ ,  $(\lambda^2 - (2i)^2)^3 = 0$ ,  $(\lambda - 2i)^3 (\lambda + 2i)^3 = 0$ . Отже, корені  $\lambda_{1,2} = \pm 2i$  мають кратність  $p = 3$  кожний. При цьому  $a = \operatorname{Re} \lambda_1 = 0$ ,  $b = \operatorname{Im} \lambda_1 = 2$ . Тоді ФСР

$$y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x,$$

$$\begin{aligned}y_3 &= x \cos 2x, & y_4 &= x \sin 2x, \\y_5 &= x^2 \cos 2x, & y_6 &= x^2 \sin 2x.\end{aligned}$$

Загальний розв'язок  $y = \sum_{k=1}^6 C_k y_k,$

$$\begin{aligned}y &= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \\&+ C_3 x \cos 2x + C_4 x \sin 2x + C_5 x^2 \cos 2x + C_6 x^2 \sin 2x = \\&= (C_1 + C_3 x + C_5 x^2) \cos 2x + (C_2 + C_4 x + C_6 x^2) \sin 2x. \triangleright\end{aligned}$$

$\triangleleft$  *Приклад 4.20.* Нехай характеристичний многочлен деякого ДР  $F(\lambda) = (\lambda^2 + 4\lambda + 5)^2$ . Скласти загальний розв'язок. Знайдемо корені квадратного тричлена  $\lambda^2 + 4\lambda + 5$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

Отже,  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ , причому  $a = -2$ ,  $b = 1$ . Ці корені мають кратність  $p = 2$  кожний. Тоді ФСР

$$y_1 = e^{-2x} \cos x, \quad y_2 = e^{-2x} \sin x, \quad y_3 = x e^{-2x} \cos x, \quad y_4 = x e^{-2x} \sin x.$$

Загальний розв'язок:

$$\begin{aligned}y &= C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + C_3 x e^{-2x} \cos x + C_4 x e^{-2x} \sin x = \\&= e^{-2x} [(C_1 + C_3 x) \cos x + (C_2 + C_4 x) \sin x]. \triangleright\end{aligned}$$

## 4.4 Метод варіації довільних сталих

Тепер, коли однорідне рівняння (4.4) розв'язано, перейдемо до врахування правої частини, тобто до розв'язування рівняння (4.3). В цьому розділі вважатимемо, що права частина (4.3) має довільний вигляд  $f(x)$ . Метод, який буде викладено нижче, може бути поширений і на лінійні рівняння (4.1) зі змінними коефіцієнтами.

Нехай загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння вже відомий. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння можна знайти **методом Лагранжа (методом варіації довільних сталих)**. Розглянемо техніку застосування цього методу на прикладі лінійного рівняння третього порядку:

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = f(x). \quad (*)$$

Нехай вдалося підібрати функції  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$ , які утворюють ФСР. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{одн}}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x).$$

Тут  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  – довільні сталі. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння (\*) шукаємо методом варіації довільних сталих у вигляді:

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + C_3(x)y_3(x). \quad (A)$$

Фактично від задачі пошуку однієї функції  $y(x)$  ми переходимо до задачі пошуку трьох функцій:  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ ,  $C_3(x)$ . Тому треба мати три рівняння. В нашому розпорядженні поки є лише одне – рівняння (\*). Тому в процесі розв'язку треба побудувати ще два.

Диференціюємо рівняння (A):

$$y'(x) = C'_1 y_1 + C_1 y'_1 + C'_2 y_2 + C_2 y'_2 + C'_3 y_3 + C_3 y'_3.$$

Покладемо

$$C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + C'_3 y_3 = 0. \quad (**)$$

Тоді

$$y'(x) = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C_3 y'_3. \quad (B)$$

Диференціюємо рівняння (B):

$$y''(x) = C'_1 y'_1 + C_1 y''_1 + C'_2 y'_2 + C_2 y''_2 + C'_3 y'_3 + C_3 y''_3.$$

Покладемо

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C'_3 y'_3 = 0. \quad (***)$$

Тоді

$$y''(x) = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C_3 y''_3. \quad (D)$$

Диференціюємо рівняння (D):

$$y'''(x) = C'_1 y''_1 + C_1 y'''_1 + C'_2 y''_2 + C_2 y'''_2 + C'_3 y''_3 + C_3 y'''_3. \quad (G)$$

Аналогічно покласти  $C'_1 y''_1 + C'_2 y''_2 + C'_3 y''_3 = 0$  ми вже не можемо, бо усі три степеня свободи (для пошуку трьох функцій  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ) вже вичерпано трьома рівняннями (\*), (\*\*), (\*\*\*)

Підставимо тепер рівняння (A), (B), (D), (G) до рівняння (\*). Оскільки  $y_i(x)$  – розв'язки однорідного рівняння, то

$$y_i''' + a_1(x)y_i'' + a_2(x)y_i' + a_3(x)y_i \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Враховуючи це, рівняння (\*) після підстановки легко спростити до вигляду

$$C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + C_3' y_3'' = f(x).$$

Тоді система рівнянь (\*\*), (\*\*\*), (\*) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Матриця цієї системи є невинродженою, оскільки її визначник відмінний від нуля як визначник Вронського ФСР  $y_i(x)$ . Тоді її розв'язок  $(C_1' \ C_2' \ C_3')^T$  існує і є єдиним. Інтегруючи компоненти цього розв'язку, знаходимо функції  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ ,  $C_3(x)$ . Кожна з них при інтегруванні містить довільну сталу,  $C_{01}$ ,  $C_{02}$ ,  $C_{03}$  відповідно. Остаточо, розв'язком неоднорідного рівняння (\*) є вираз (A) при відомих функціях  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ ,  $C_3(x)$ . Цей вираз містить три степеня свободи за рахунок сталих  $C_{01}$ ,  $C_{02}$ ,  $C_{03}$ ; їх кількість відповідає порядку рівняння.

◁ *Приклад 4.21.* Рівняння  $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$  розв'язати методом Лагранжа (методом варіації довільних сталих).

Задане рівняння є неоднорідним. Відповідне однорідне рівняння має вигляд  $y'' + y = 0$ . Очевидно, функції  $y_1(x) = \cos x$ ,  $y_2(x) = \sin x$  утворюють ФСР. Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{\text{одн}}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння методом Лагранжа варіації довільних сталих шукаємо у вигляді:

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x. \quad (4.16)$$

В даний момент ми переходимо від задачі пошуку однієї функції  $y(x)$  до задачі пошуку двох функцій  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ . Але в нашому розпорядженні є лише одне рівняння – задане в умові задачі. Тому залишимо за собою право приєднати до нього

ще одне рівняння в довільний зручний нам спосіб. Міркування зручності конкретизуємо нижче.

Підставимо «проект розв'язку» (4.16) до розв'язуваного рівняння. Попередньо знайдемо похідні:

$$y' = C'_1 y_1 + C_1 y'_1 + C'_2 y_2 + C_2 y'_2 = (C'_1 y_1 + C'_2 y_2) + (C_1 y'_1 + C_2 y'_2).$$

При знаходженні другої похідної  $y''$  з'являться другі похідні  $C''_1(x)$ ,  $C''_2(x)$  шуканих функцій. Вважатимемо за зручне, щоб цього не сталося, тобто вимагатимемо, щоб вираз  $(C'_1 y_1 + C'_2 y_2)$  дорівнював нулю. Іншими словами, до заданого рівняння приєднаємо ще одне рівняння

$$C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0.$$

Тоді перша похідна набуває вигляду

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2,$$

і ми отримаємо:

$$y'' = C'_1 y'_1 + C_1 y''_1 + C'_2 y'_2 + C_2 y''_2.$$

Підставляючи цю похідну і «проект розв'язку» до розв'язуваного рівняння, а також позначаючи  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ , отримуємо:

$$(C'_1 y'_1 + C_1 y''_1 + C'_2 y'_2 + C_2 y''_2) + (C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x).$$

Перегрупуваючи доданки в лівій частині, маємо:

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C_1 (y''_1 + y_1) + C_2 (y''_2 + y_2) = f(x).$$

Тут  $(y''_1 + y_1) = 0$  і  $(y''_2 + y_2) = 0$ , оскільки  $y_1$  і  $y_2$  є розв'язками відповідного однорідного рівняння. Залишається:

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x).$$

Отже, отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно функцій  $C'_1$ ,  $C'_2$ :

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Матриця цієї системи не вироджена як вронскіан системи функцій, які утворюють ФСР. Тому розв'язок цієї системи рівнянь існує і є єдиним. Знайдемо його. Явний вигляд системи:

$$\begin{cases} C'_1 \cos x + C'_2 \sin x = 0, \\ -C'_1 \sin x + C'_2 \cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Домножимо перше рівняння на  $\cos x$ , а друге – на  $\sin x$ , і віднімемо з першого друге; виникає  $C'_1$ . Також домножимо перше рівняння на  $\sin x$ , а друге – на  $\cos x$ , і додамо їх; виникає  $C'_2$ :

$$\begin{cases} C'_1 = -\operatorname{tg} x, \\ C'_2 = 1. \end{cases}$$

Інтегруючи ці рівняння, знаходимо:

$$\begin{cases} C_1(x) = \ln \cos x + C_{01}, \\ C_2(x) = x + C_{02}. \end{cases}$$

Тоді остаточно загальний розв'язок (4.16) є

$$y(x) = (\ln \cos x + C_{01}) \cos x + (x + C_{02}) \sin x. \triangleright$$

$\triangleleft$  *Приклад 4.22.* Рівняння  $y'' - y = e^x \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$  розв'язати методом Лагранжа варіації довільних сталих.

Однорідне рівняння, яке відповідає умові задачі:  $y'' - y = 0$ . Очевидно, функції  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = e^{-x}$  є його розв'язками і вони утворюють ФСР. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння методом Лагранжа варіації довільних сталих шукаємо у вигляді

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

Позначаючи праву частину  $f(x) = e^x \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$ , маємо

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0, \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x); \end{cases} \quad \begin{cases} C'_1 e^x + C'_2 e^{-x} = 0, \\ C'_1 e^x - C'_2 e^{-x} = e^x \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right). \end{cases}$$

Єдиний розв'язок цієї системи

$$\begin{cases} C'_1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}, \\ C'_2 = e^{2x} \left( \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \right). \end{cases}$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$\begin{cases} C_1(x) = \ln x + \frac{1}{2x} + C_{01}, \\ C_2(x) = -\frac{e^{2x}}{2x} + C_{02}. \end{cases}$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$\begin{aligned}y(x) &= C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} = \\&= \left(\ln x + \frac{1}{2x} + C_{01}\right)e^x + \left(-\frac{e^{2x}}{2x} + C_{02}\right)e^{-x} = \\&= C_{01}e^x + C_{02}e^{-x} + e^x \ln x. \triangleright\end{aligned}$$

## 4.5 Неоднорідні лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною

Метод Лагранжа варіації довільних сталих є потужним засобом розв'язання ДР через свою універсальність (він «спрацює» для будь-якого вигляду правої частини). Але він занадто складний. В той же час, якщо вдасться підібрати хоча б один частинний розв'язок неоднорідного рівняння, то його загальний розв'язок знайти дуже просто. Для цього навіть не потрібно інтегрувати, і можна обмежитись лише елементарними операціями. Щоправда, для цього права частина повинна мати деякий спеціальний вигляд. Ми конкретизуємо його нижче.

### 4.5.1 Теорема про загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння

■ **Теорема 4.4.** Загальний розв'язок неоднорідного лінійного ДР дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного лінійного ДР і будь-якого частинного розв'язку заданого неоднорідного ДР:

$$y(x) = y_{\text{одн}}(x) + y_*(x).$$

□ *Доведення.* Нехай  $y_*(x)$  – будь-який частинний розв'язок неоднорідного лінійного ДР (4.1). Його загальний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y(x) = z(x) + y_*(x). \quad (4.18)$$

Підставимо цей вираз до (4.1):

$$(z + y_*)^{(n)} + a_1(x)(z + y_*)^{(n-1)} + \dots +$$

$$+a_{n-1}(x)(z+y_*)' + a_n(x)(z+y_*) = f(x).$$

Оскільки похідна суми дорівнює сумі похідних, то

$$\begin{aligned} & (z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)z' + a_n(x)z) + \\ & + (y_*^{(n)} + a_1(x)y_*^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y_*' + a_n(x)y_*) = f(x). \end{aligned}$$

Але  $y_*$  є частинним розв'язком неоднорідного рівняння (4.1), тоді вираз у других дужках дорівнює  $f(x)$ . Залишається:

$$z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)z' + a_n(x)z = 0.$$

Отримали однорідне рівняння (4.2), яке відповідає неоднорідному рівнянню (4.1). Отже,  $z(x)$  має бути розв'язком відповідного однорідного рівняння (4.2), що і треба було довести.  $\square$

**Зауваження.** Очевидно, випадок сталих коефіцієнтів  $a_i$  є окремим випадком змінних коефіцієнтів, тому доведена теорема справедлива також і для ДР (4.3).

$\triangleleft$  *Приклад 4.23.* Розв'язати рівняння  $y' - y = 1 - 3x$ .

Розв'яжемо це рівняння двома способами: спочатку методом Лагранжа, а потім – методом невизначених коефіцієнтів.

1) Відповідне однорідне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними:  $\frac{dy}{dx} - y = 0$ ,  $\frac{dy}{y} = dx$ ,  $\ln |y| = x + \ln |C|$ ,  $y_{\text{одн}}(x) = Ce^x$ .

Загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння шукаємо методом варіації довільної сталої, тобто у вигляді

$$y = C(x)e^x, \quad y' = C'(x)e^x + C(x)e^x.$$

Тоді з умови задачі випливає:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(C'(x)e^x + C(x)e^x)}_{y'} - \underbrace{C(x)e^x}_y = 1 - 3x, \\ & C'(x)e^x = 1 - 3x, \quad C'(x) = (1 - 3x)e^{-x}, \\ & C(x) = \int C'(x) dx = \int (1 - 3x)e^{-x} dx = \\ & = \left\| \begin{array}{l} u = 1 - 3x \quad du = -3 dx \\ dv = e^{-x} dx \quad v = -e^{-x} \end{array} \right\| = (3x - 1)e^{-x} - 3 \int e^{-x} dx = \\ & = (3x - 1)e^{-x} + 3e^{-x} + C_0 = (3x + 2)e^{-x} + C_0. \end{aligned}$$

Тоді одержуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = C(x)e^x = ((3x + 2)e^{-x} + C_0) e^x = (3x + 2) + C_0 e^x.$$

II) В той же час, цю задачу можна розв'язати значно простіше, уникнувши інтегрування взагалі. **Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді, який нагадає праву частину рівняння і узагальнює її**, тобто:

$$y_*(x) = ax + b,$$

тоді  $y'_*(x) = a$ , і початкове рівняння набуває вигляду

$$a - (ax + b) = 1 - 3x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях  $x$  (двокрапка – символ коментаря):

$$\begin{array}{l|l} x^1: & -a = -3; \\ x^0: & a - b = 1. \end{array}$$

Методом невизначених коефіцієнтів отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів  $a$ ,  $b$ . Її розв'язок  $a = 3$ ,  $b = 2$ . Тоді  $y_*(x) = 3x + 2$ , і за теоремою 4.4 загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y(x) = y_{\text{одн}}(x) + y_*(x) = Ce^x + 3x + 2,$$

що збігається з відповіддю, отриманою методом варіації довільної сталої. Отже, теорема 4.4 дозволяє обмежитись лише елементарними операціями.  $\triangleright$

Теорема 4.4 легко узагальнюється на випадок складної правої частини вигляду  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ . Справді, нехай рівняння має вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f_1(x) + f_2(x). \quad (*)$$

Розглянемо також окремі рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f_1(x), \quad (**)$$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f_2(x). \quad (***)$$

Позначимо їх частинні розв'язки  $y_{*,1}(x)$ ,  $y_{*,2}(x)$ . Покладемо

$$y_*(x) = y_{*,1}(x) + y_{*,2}(x).$$

Загальний розв'язок  $y(x)$  неоднорідного рівняння (\*) шукаємо у вигляді:

$$y(x) = z(x) + y_*(x) = z(x) + y_{*,1}(x) + y_{*,2}(x). \quad (4.19)$$

Підставимо цей вираз до (\*):

$$\begin{aligned} & (z + y_{*,1} + y_{*,2})^{(n)} + a_1(z + y_{*,1} + y_{*,2})^{(n-1)} + \dots + \\ & + a_{n-1}(z + y_{*,1} + y_{*,2})' + a_n(z + y_{*,1} + y_{*,2}) = f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

Оскільки похідна суми дорівнює сумі похідних, то

$$\begin{aligned} & \left( z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z \right) + \\ & + \left( y_{*,1}^{(n)} + a_1 y_{*,1}^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y_{*,1}' + a_n y_{*,1} \right) + \\ & + \left( y_{*,2}^{(n)} + a_1 y_{*,2}^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y_{*,2}' + a_n y_{*,2} \right) = f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

Але  $y_{*,1}$  є частинним розв'язком неоднорідного рівняння (\*\*), тоді вираз у других дужках дорівнює  $f_1(x)$ . Аналогічно,  $y_{*,2}$  є частинним розв'язком неоднорідного рівняння (\*\*\*), тоді вираз у третій дужках дорівнює  $f_2(x)$ . Залишається:

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = 0.$$

Знову отримали однорідне рівняння, тому формулювання теореми 4.4 залишається незмінним і у випадку складної правої частини вигляду  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ . Але тепер ми можемо підбирати частинні розв'язки, виходячи з вигляду кожного доданку  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , **взятого окремо**, а не з вигляду всієї правої частини цілком. Ясно, що ці міркування легко узагальнити на випадок довільної скінченної кількості доданків  $f_j(x)$  в правій частині лінійного неоднорідного рівняння.

◁ *Приклад 4.24.* Розв'язати рівняння  $y' - y = 1 - 3x + 8e^{5x}$ .

Відповідне однорідне ДР є рівнянням з відокремлюваними змінними:  $\frac{dy}{dx} - y = 0$ ,  $\frac{dy}{y} = dx$ ,  $\ln|y| = x + \ln|C|$ ,  $y_{\text{одн}}(x) = Ce^x$ .

В правій частині неоднорідного рівняння можна виокремити два доданки:  $f_1(x) = 1 - 3x$  і  $f_2(x) = 8e^{5x}$ . Відповідні частинні розв'язки спробуємо шукати у вигляді

$$y_{*,1}(x) = Ax + B, \quad y_{*,2}(x) = De^{5x}.$$

Втім, можна одразу покласти

$$y_*(x) = y_{*,1}(x) + y_{*,2}(x) = Ax + B + De^{5x},$$

тоді  $y'_*(x) = A + 5De^{5x}$ , підставляємо у рівняння

$$(A + 5De^{5x}) - (Ax + B + De^{5x}) = 1 - 3x + 8e^{5x}.$$

Прирівняємо коефіцієнти при всіх функціях: степеневих і експоненціальній:

$$\begin{array}{l|l} x^1: & -A = -3; \\ x^0: & A - B = 1. \\ e^{5x}: & 5D - D = 8. \end{array}$$

Методом невизначених коефіцієнтів отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів  $A$ ,  $B$ ,  $D$ . Цікаво зауважити, що ця система розпадається на дві незалежні системи. З першої системи (перші два рівняння) можна знайти  $A$  і  $B$  **окремо** від  $D$ , а з другої (третє рівняння) –  $D$  **окремо** від  $A$  і  $B$ . Саме такі відокремлені системи ми і отримували би при розв'язуванні двох неоднорідних рівнянь з окремими правими частинами  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ .

Очевидні розв'язки:  $A = 3$ ,  $B = 2$ ,  $D = 2$ . Тоді

$$y_*(x) = 3x + 2 + 2e^{5x},$$

$$y(x) = y_{\text{одн}}(x) + y_*(x) = Ce^x + 3x + 2 + 2e^{5x}. \triangleright$$

## 4.5.2 Побудова частинного розв'язку. Нерезонансні випадки

### 4.5.2.1 Спеціальна права частина

Теорема 4.4 відкриває шлях до розв'язання ДР (4.3), але вона не містить пряму вказівку на спосіб знаходження частинного розв'язку  $y_*(x)$ . Методом невизначених коефіцієнтів вдається

виявити цей розв'язок, якщо вигляд, в якому його шукають, підібрано вдало (відповідні приклади наведено вище). Але система відносно шуканих коефіцієнтів може виявитись несумісною. Це не буде означати, що частинний розв'язок не існує взагалі. Це буде лише означати, що вигляд розв'язку підібрано невдало, і частинний розв'язок неможливо знайти саме в такому вигляді.

Обмежимося випадками, коли сумісність системи відносно шуканих коефіцієнтів гарантується. Виявляється, що *таку гарантію завжди можна надати* для правої частини вигляду

$$f(x) = P_s(x)e^{\mu x}, \quad (4.20)$$

де  $P_s(x)$  – многочлен  $s$ -го степеня. Такий вираз називають **спеціальною правою частиною**. Цей термін застосовують також до лінійної комбінації таких виразів.

Означення (4.20) охоплює багато практично значущих випадків. Беручи до уваги, що число  $\mu$  може бути комплексним, з вигляду (4.20) можна отримати многочлени, показникові функції, тригонометричні функції, а також їх комбінації.

◁ *Приклад 4.25.* Наприклад, при  $s = 0$ ,  $\mu = a + ib$  з використанням (4.14) маємо:

$$\begin{aligned} f(x) &= p_0 e^{(a+ib)x} = p_0 e^{ax} \cdot e^{ibx} = \\ &= p_0 e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) = e^{ax} (P \cos bx + Q \sin bx). \end{aligned}$$

Тут позначено  $P = p_0$ ,  $Q = ip_0$ . Справедливе також і обернене твердження: вираз  $e^{ax}(P \cos bx + Q \sin bx)$  при довільних  $P$ ,  $Q$  можна подати у вигляді комбінації спеціальних правих частин (4.20). Справді, з використанням (4.15) маємо:

$$\begin{aligned} e^{ax}(P \cos bx + Q \sin bx) &= e^{ax} \left( P \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} + Q \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} \right) = \\ &= e^{ax} \left( e^{ibx} \underbrace{\left\{ \frac{P}{2} + \frac{Q}{2i} \right\}}_{=M} + e^{-ibx} \underbrace{\left\{ \frac{P}{2} - \frac{Q}{2i} \right\}}_{=N} \right) = \\ &= M e^{(a+ib)x} + N e^{(a-ib)x} = M e^{\mu x} + N e^{\bar{\mu} x}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

В цьому розділі **доводиться існування** частинного розв'язку в певному вигляді **при різних сполученнях** значень  $s$  і  $\mu$ . Звичайно, найбільш загальним є випадок  $s \neq 0$ ,  $\mu = a + ib$ ,  $a, b \neq 0$ .

Але ми вважатимемо за краще наблизитись до нього поступово, розглядаючи попередньо більш прості окремі випадки.

Зауважимо також, що вигляд, в якому частинний розв'язок гарантовано існує, залежить від того, чи є число  $\mu$  коренем характеристичного рівняння. Інакше кажучи, нам буде важливо, чи виконано рівняння  $F(\mu) = 0$ , де використано позначення (4.8). Якщо ні – то випадок називають *нерезонансним*, а якщо так – то *резонансним*. Ці назви стануть зрозумілими при розгляді рівняння коливань.

Протягом найближчих семи підпунктів досліджуються нерезонансні випадки  $F(\mu) \neq 0$ .

#### 4.5.2.2 Випадок 1: $s = 0, \mu = 0$

Найпростіший випадок спеціальної правої частини виникає з (4.20) при  $s = 0$  і  $\mu = 0$ . Права частина набуває вигляду

$$f(x) = P,$$

де  $P = \text{const}$  – єдиний коефіцієнт многочлену. В цьому разі шукатимемо частинний розв'язок у вигляді

$$y_* = M = \text{const}. \quad (4.21)$$

Підставимо цей «проект розв'язку» до (4.3). Похідні від (4.21) дорівнюють нулю:  $y'_* = y''_* = \dots = y_*^{(n)} = 0$ , тому права частина (4.3) буде містити лише останній доданок. Рівняння набуває вигляду

$$a_n M = P.$$

Коефіцієнт  $a_n$  є вільним членом (4.8). Тому  $a_n = F(0)$ . Але  $\mu = 0$  не є коренем характеристичного многочлену:

$$F(0) = F(\mu)|_{\mu=0} \neq 0.$$

Це означає, що  $a_n \neq 0$ , тоді:

$$M = \frac{P}{a_n}.$$

Отже, якщо параметри спеціальної правої частини  $s = \mu = 0$ , то при  $F(0) \neq 0$  (тобто при  $a_n \neq 0$ ) гарантується існування частинного розв'язку  $y_*$  у формі (4.21).

◁ *Приклад 4.26.* Розв'яжемо рівняння  $y'' - 3y' + 2y = 8$ . Відповідне однорідне рівняння  $y'' - 3y' + 2y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ . Його корені  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . ФСР складається з функцій  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = e^{2x}$ . Загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{\text{одн}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ .

Праву частину ДР можна представити у вигляді  $8 = 8x^0 e^{0 \cdot x}$ , тобто вона є спеціальною правою частиною, параметри якої  $s = 0$ ,  $\mu = 0$ . При цьому  $\mu \neq \lambda_{1,2}$ . Тому згідно з (4.21) частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді  $y_* = M = \text{const}$ . Тоді  $y'_* = y''_* = 0$ , і ДР набуває вигляду:  $0 - 3 \cdot 0 + 2M = 8$ , звідки  $M = 4$ ,  $y_* = 4$ . Тоді остаточно:

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 4. \triangleright$$

#### 4.5.2.3 Випадок 2: $s = 0$ , $\mu \neq 0$

Нехай  $s = 0$ , і  $\mu \neq 0$ . Тоді права частина ДР має вигляд

$$f(x) = P e^{\mu x}.$$

В цьому разі шукатимемо частинний розв'язок у вигляді

$$y_* = M e^{\mu x}. \quad (4.22)$$

Підставимо цей «проект розв'язку» до (4.3). Оскільки

$$y_*^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k} (M e^{\mu x}) = M \mu^k e^{\mu x},$$

то ми отримаємо:

$$M \mu^n e^{\mu x} + a_1 M \mu^{n-1} e^{\mu x} + \dots + a_{n-1} M \mu e^{\mu x} + a_n M e^{\mu x} = P e^{\mu x},$$

$$M e^{\mu x} (\mu^n + a_1 \mu^{n-1} + a_2 \mu^{n-2} + \dots + a_{n-1} \mu + a_n) = P e^{\mu x},$$

$$M e^{\mu x} F(\mu) = P e^{\mu x}.$$

Оскільки  $F(\mu) \neq 0$ , то  $M = \frac{P}{F(\mu)}$ . Отже, можна гарантувати, що у випадку спеціальної правої частини з параметром  $s = 0$  і параметром  $\mu$ , який не є коренем характеристичного рівняння, частинний розв'язок  $y_*$  існує у формі (4.22).

◁ *Приклад 4.27.* Розв'яжемо рівняння  $y'' - 3y' + 2y = 36e^{5x}$ . Відповідне однорідне рівняння  $y'' - 3y' + 2y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ . Його корені  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . ФСР

складається з функцій  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = e^{2x}$ . Загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{\text{одн}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ .

Права частина ДР є спеціальною правою частиною з параметрами  $s = 0$ ,  $\mu = 5$ . При цьому  $\mu \neq \lambda_{1,2}$ . Тому згідно з (4.22) частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді  $y_* = M e^{5x}$ . Тоді  $y'_* = 5M e^{5x}$ ,  $y''_* = 25M e^{5x}$ , і неоднорідне ДР набуває вигляду:

$$25M e^{5x} - 3 \cdot 5M e^{5x} + 2 \cdot M e^{5x} = 36e^{5x},$$

звідки  $M = 3$ ,  $y_* = 3e^{5x}$ . Тоді остаточно:

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3e^{5x}. \triangleright$$

#### 4.5.2.4 Випадок 3: $s \neq 0$ , $\mu = 0$

Нехай  $\mu = 0$ , і  $s$  – натуральне число. Тоді права частина ДР є многочленом  $s$ -го степеня:

$$f(x) = P_s(x) = p_0 x^s + p_1 x^{s-1} + \dots + p_{s-1} x + p_s.$$

В цьому разі шукатимемо частинний розв'язок у вигляді многочлену того ж степеня  $s$ :

$$y_* = M_s(x) = m_0 x^s + m_1 x^{s-1} + \dots + m_{s-1} x + m_s. \quad (4.23)$$

Підставимо цей «проект розв'язку» до (4.3) і отримаємо тотожну рівність многочленів однакового степеня:

$$M_s^{(n)} + a_1 M_s^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} M_s'' + a_{n-1} M_s' + a_n M_s = P_s. \quad (4.24)$$

Перепишемо доданки лівої частини в зворотному порядку, підставляючи сюди (4.23):

$$\begin{aligned} & a_n (m_0 x^s + m_1 x^{s-1} + m_2 x^{s-2} + \dots + m_{s-2} x^2 + m_{s-1} x + m_s) + \\ & + a_{n-1} [s m_0 x^{s-1} + (s-1) m_1 x^{s-2} + \dots + 2 m_{s-2} x + m_{s-1}] + \\ & + a_{n-2} [s(s-1) m_0 x^{s-2} + (s-1)(s-2) m_1 x^{s-3} + \dots + 2 m_{s-2}] + \\ & + \dots + \text{const} = P_s(x) = p_0 x^s + p_1 x^{s-1} + \dots + p_{s-1} x + p_s. \end{aligned}$$

Тут кількість рядків в лівій частині залежить від співвідношення між  $n$  і  $s$ . Кожне наступне диференціювання знижує степінь

многочлену  $M_s(x)$  на одиницю:  $M_s$  є многочленом  $s$ -го степеня,  $M'_s$  є многочленом  $(s-1)$ -го степеня,  $M''_s$  є многочленом  $(s-2)$ -го степеня і т.д. Очевидно, усі похідні многочлена  $M_s$ , починаючи з  $(s+1)$ -ї, тотожно дорівнюють нулю. Тому декілька початкових доданків в лівій частині (4.24) можуть бути відсутніми. Наприклад, якщо  $n = 4$ , то загальний вигляд лівої частини є

$$M^{(4)} + a_1 M''' + a_2 M'' + a_3 M' + a_4 M.$$

Нехай при цьому  $s = 2$ , тоді  $M$  – квадратний тричлен,  $M'$  – лінійний двочлен,  $M''$  – константа,  $M''' \equiv M^{(4)} \equiv 0$ . Крім того, деякі рядки можуть зникнути, якщо відповідні коефіцієнти  $a_k$  дорівнюють нулю. Але кожний з шуканих коефіцієнтів  $m_k$  в лівій частині буде присутнім принаймні за рахунок першого рядка, оскільки  $a_n \neq 0$ . (Справді, при  $a_n = 0$  число  $\lambda = 0$  було б коренем характеристичного многочлену. Але тоді ми б отримали  $\mu = \lambda$ , що суперечить умові).

Для знаходження розв'язку (4.23) потрібно знайти  $(s+1)$  коефіцієнтів  $m_k$ ,  $k = \overline{0, s}$ . Для цього потрібно скласти  $(s+1)$  рівнянь. Скористаємось методом невизначених коефіцієнтів і прирівняємо коефіцієнти при степеневих функціях  $x^k$ , послідовно зменшуючи степінь  $k$  від  $s$  до нуля:

$$\begin{array}{l} x^s: \\ x^{s-1}: \\ x^{s-2}: \\ \dots \end{array} \left| \begin{array}{l} a_n m_0 = p_0; \\ a_n m_1 + a_{n-1} s m_0 = p_1; \\ a_n m_2 + a_{n-1} (s-1) m_1 + a_{n-2} s (s-1) m_0 = p_2; \\ \dots \end{array} \right.$$

Методом невизначених коефіцієнтів отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів  $m_k$ . Очевидно, розв'язок цієї системи існує і є єдиним. Справді, з першого рівняння можна знайти:  $m_0 = \frac{p_0}{a_n}$ , оскільки  $a_n \neq 0$ . З другого рівняння можна знайти  $m_1$  при відомому  $m_0$ , з третього –  $m_2$  при відомих  $m_1$  і  $m_0$  і т.д. Отже, можна гарантувати, що при  $F(0) \neq 0$  у випадку спеціальної правої частини з параметрами  $s \in \mathbb{N}$ ,  $\mu = 0$  (права частина – многочлен  $s$ -го степеня) частинний розв'язок  $y_*$  існує у формі (4.23).

◁ *Приклад 4.28.* Розв'яжемо рівняння

$$y'' - 6y' + 8y = 16x^3 - 36x^2 - 12x + 58.$$

Відповідне однорідне рівняння  $y'' - 6y' + 8y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ . Його корені  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 4$ . ФСР

складається з функцій  $y_1 = e^{2x}$ ,  $y_2 = e^{4x}$ . Загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{\text{одн}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$ .

Права частина ДР є спеціальною правою частиною з параметрами  $s = 3$ ,  $\mu = 0$ . При цьому  $\mu \neq \lambda_{1,2}$ . Тому згідно з (4.23) частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді  $y_* = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Маємо:

$$y'_* = 3ax^2 + 2bx + c, \quad y''_* = 6ax + 2b.$$

Тоді рівняння в умові задачі набуває вигляду:

$$\begin{aligned} (6ax + 2b) - 6(3ax^2 + 2bx + c) + 8(ax^3 + bx^2 + cx + d) &= \\ &= 16x^3 - 36x^2 - 12x + 58. \end{aligned}$$

Методом невизначених коефіцієнтів маємо систему:

$$\begin{array}{l|l} x^3: & 8a = 16; \\ x^2: & -18a + 8b = -36; \\ x^1: & 6a - 12b + 8c = -12; \\ x^0: & 2b - 6c + 8d = 58. \end{array}$$

Її розв'язок  $a = 2$ ,  $b = 0$ ,  $c = -3$ ,  $d = 5$ . Тоді частинний розв'язок неоднорідного ДР  $y_* = 2x^3 - 3x + 5$ . Тоді загальний розв'язок неоднорідного ДР:

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} + 2x^3 - 3x + 5. \triangleright$$

#### 4.5.2.5 Випадок 4: $s = 0$ , $\mu = ib$

Нехай права частина ДР дорівнює

$$f(x) = P \cos bx + Q \sin bx.$$

Тут  $b \neq 0$ , інакше ми б мали випадок 1 ( $s = \mu = 0 \Rightarrow f = \text{const}$ ). Зауважимо, одне з чисел  $P$ ,  $Q$  може дорівнювати нулю.

Розглядуваний випадок виникає при комбінуванні двох виразів (4.20) із суто уявними комплексно спряженими показниками  $\mu = ib$ ,  $\bar{\mu} = -ib$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , якщо покласти  $s = 0$ . Справді, з використанням подання (4.15) маємо:

$$f(x) = \frac{P}{2} (e^{ibx} + e^{-ibx}) + \frac{Q}{2i} (e^{ibx} - e^{-ibx}) =$$

$$= e^{ibx} \left( \frac{P}{2} + \frac{Q}{2i} \right) + e^{-ibx} \left( \frac{P}{2} - \frac{Q}{2i} \right).$$

При введенні замінін  $A_1 = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2i}$ ,  $A_2 = \frac{P}{2} - \frac{Q}{2i}$  права частина набуває вигляду  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , де

$$f_1(x) = A_1 e^{\mu x}, \quad f_2(x) = A_2 e^{\bar{\mu} x}.$$

Тоді вся справа зводиться до випадку 2: існують<sup>3</sup> числа  $B_1, B_2$  такі, що частинний розв'язок має вигляд:

$$y_*(x) = B_1 e^{\mu x} + B_2 e^{\bar{\mu} x}.$$

Тут за наслідком (4.19) теореми 4.4 частинні розв'язки, які відповідають функціям  $f_1(x), f_2(x)$ , знайдено окремо. З використанням формули (4.14) маємо далі:

$$\begin{aligned} y_* &= B_1(\cos bx + i \sin bx) + B_2(\cos bx - i \sin bx) = \\ &= (B_1 + B_2) \cos bx + (iB_1 - iB_2) \sin bx. \end{aligned}$$

Позначимо  $M = B_1 + B_2$ ,  $N = iB_1 - iB_2$ . Тоді можна вважати доведеним, що частинний розв'язок існує у вигляді

$$y_* = M \cos bx + N \sin bx. \quad (4.25)$$

Цілком можливо, що права частина (при  $P = 0$ ) має вигляд  $f(x) = Q \sin bx$ , тобто не містить косинуса. Підкреслимо, це зовсім не означає, що і частинний розв'язок не повинен його містити. Тобто, якщо спеціальна права частина має вигляд  $f(x) = Q \sin bx$ , то частинний розв'язок треба шукати у розширеному вигляді  $y_* = M \cos bx + N \sin bx$ , а не в скороченому вигляді  $y_* = N \sin bx$ , який формально узагальнює праву частину. Аналогічно, при правій частині  $f(x) = P \cos bx$  частинний

<sup>3</sup>У випадку 2 ніде не стверджувалось, що  $\mu$  – дійсне число, отже результат випадку 2 поширюється також і на комплексні значення  $\mu$ .

Зуважимо, якщо  $F(\mu) \neq 0$ , то  $F(\bar{\mu}) \neq 0$ . Справді, нехай це не так, і  $F(\bar{\mu}) = 0$ . Тоді  $\overline{F(\bar{\mu})} = \overline{0} = 0$ . Але

$$\overline{F(\bar{\mu})} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k (\bar{\mu})^{n-k}} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k (\bar{\mu})^{n-k}} = \sum_{k=0}^n a_k (\mu)^{n-k} = F(\mu) \neq 0,$$

і протиріччя отримано. Враховано, що  $a_k$  – дійсні числа, і  $\overline{a_k} = a_k$ . Отже, результат випадку 2 є застосовним.

розв'язок шукають як  $y_* = M \cos bx + N \sin bx$ , а не як  $y_* = M \cos bx$ .

◁ *Приклад 4.29.* Розв'яжемо рівняння  $y'' - 3y' + 2y = 10 \sin x$ . Відповідне однорідне рівняння  $y'' - 3y' + 2y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ . Його корені  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . ФСР складається з функцій  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = e^{2x}$ . Загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{\text{одн}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ .

З урахуванням подання (4.15) бачимо, що права частина ДР є комбінацією спеціальних правих частин з параметрами  $s = 0$ ,  $\mu = \pm ib = \pm i$ . При цьому  $\mu \neq \lambda_{1,2}$ . Тому згідно з (4.25) частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = M \cos x + N \sin x.$$

Маємо:

$$y'_* = -M \sin x + N \cos x, \quad y''_* = -M \cos x - N \sin x.$$

Тоді рівняння в умові задачі набуває вигляду:

$$\begin{aligned} &(-M \cos x - N \sin x) - 3(-M \sin x + N \cos x) + \\ &+ 2(M \cos x + N \sin x) = 10 \sin x. \end{aligned}$$

Методом невизначених коефіцієнтів маємо систему:

$$\begin{cases} \cos x: & -M - 3N + 2M = 0; \\ \sin x: & -N + 3M + 2N = 10. \end{cases}$$

Її розв'язок  $M = 3$ ,  $N = 1$ . Тоді частинний розв'язок неоднорідного ДР  $y_* = 3 \cos x + \sin x$ . Тоді загальний розв'язок неоднорідного ДР:

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3 \cos x + \sin x.$$

Зауважимо, в цьому прикладі права частина не містила косинуса, але в частинному розв'язку він виникає. ▷

◁ *Приклад 4.30.* Нехай матеріальна точка масою  $m$  здійснює коливання на пружині жорсткістю  $k$  під дією зовнішньої сили, яка змінюється з часом за гармонічним законом  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ . Знайдемо рівняння руху.

За другим законом Ньютона в проекції на напрямок дії сил маємо:  $mx'' = F_{\text{пруж}} + F(t)$ . За законом Гука сила пружності дорівнює  $F_{\text{пруж}} = -kx$ , тоді

$$mx'' = -kx + F_0 \cos \Omega t, \quad mx'' + kx = F_0 \cos \Omega t.$$

Позначимо  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ,  $f_0 = \frac{F_0}{m}$ . Тоді

$$x'' + \omega^2 x = f_0 \cos \Omega t.$$

Відповідне однорідне рівняння  $x'' + \omega^2 x = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ . Його корені  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ . ФСР складається з функцій  $y_1 = \cos \omega t$ ,  $y_2 = \sin \omega t$ . Загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{\text{одн}} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ .

Права частина ДР є комбінацією спеціальних правих частин з параметрами  $s = 0$ ,  $\mu = \pm i\Omega$ . В цьому прикладі будемо вважати, що  $\Omega \neq \omega$ . Тоді  $\mu \neq \lambda_{1,2}$ . Тому згідно з (4.25) частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді  $y_* = M \cos \Omega t + N \sin \Omega t$ . Маємо:

$$y_*' = -M\Omega \sin \Omega t + N\Omega \cos \Omega t,$$

$$y_*'' = -M\Omega^2 \cos \Omega t - N\Omega^2 \sin \Omega t.$$

Тоді рівняння в умові задачі набуває вигляду:

$$(-M\Omega^2 \cos \Omega t - N\Omega^2 \sin \Omega t) + \omega^2 (M \cos \Omega t + N \sin \Omega t) = f_0 \cos \Omega t.$$

Методом невизначених коефіцієнтів маємо систему:

$$\begin{cases} \cos \Omega t: & -M\Omega^2 + M\omega^2 = f_0; \\ \sin \Omega t: & -N\Omega^2 + N\omega^2 = 0. \end{cases}$$

Її розв'язок при  $\Omega \neq \omega$  є  $M = \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2}$ ,  $N = 0$ . Тоді частинний розв'язок неоднорідного ДР  $y_* = \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cdot \cos \Omega t$ . Тоді загальний розв'язок неоднорідного ДР:

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t.$$

Якщо обирати частоту  $\Omega$  зовнішньої сили близькою до частоти  $\omega$  власних коливань, то амплітуда  $M = \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2}$  вимушених коливань буде великою. При  $\Omega \rightarrow \omega$  отримуємо  $M \rightarrow \infty$ . В цьому і

полягає явище резонансу: амплітуда вимушених коливань збільшується, коли настає збіг частоти зовнішньої сили і частоти власних коливань. Саме за цим збігом ( $\mu = \lambda$ , де  $\lambda$  – корінь характеристичного рівняння, і  $F(\lambda) = 0$ ) ми і відрізняємо резонансні і нерезонансні випадки. Зокрема, випадок  $\Omega = \omega$  є резонансним; він буде розглянутий нижче.  $\triangleright$

$\triangleleft$  *Приклад 4.31.* Отримати рівняння вимушених коливань електричного заряду в послідовному коливальному контурі з параметрами: індуктивність котушки  $L$ , ємність конденсатора  $C$ , омичний опір дротів  $R$ . Джерело змінного струму з ЕРС  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t$ , яке живить цей контур, є ідеальним (внутрішній опір відсутній).

Нехай заряд конденсатора в момент часу  $t$  дорівнює  $Q(t)$ . Струм в контурі  $I = Q'(t)$ . ЕРС самоіндукції в котушці за законом Фарадея  $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt} = -LQ''$ . Напруга на котушці дорівнює  $U_L = -\mathcal{E}_s = LQ''$ . Напруга на резисторі  $U_R = IR = Q'R$ . Напруга на конденсаторі за означенням електроємності  $U_C = \frac{Q}{C}$ . За правилом Кірхгофа  $U_L + U_R + U_C = \mathcal{E}(t)$ ,

$$LQ'' + Q'R + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t.$$

Позначимо  $\beta = \frac{R}{2L}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L}$ . Отримуємо:

$$Q'' + 2\beta Q' + \omega_0^2 Q(t) = \varepsilon_0 \cos \Omega t.$$

Відповідне однорідне рівняння

$$Q'' + 2\beta Q' + \omega_0^2 Q(t) = 0.$$

Характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$ . Дискримінант

$$D = (2\beta)^2 - 4\omega_0^2 = -4(\omega_0^2 - \beta^2) = -4\omega^2 = (2i\omega)^2.$$

Тут позначено  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} > 0$ ; враховано, що при малому омичному опорі виконано нерівність  $\beta < \omega_0$ . Тоді корені характеристичного рівняння  $\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm 2i\omega}{2} = -\beta \pm i\omega$ . Маємо ФСР

$$Q_1(t) = e^{-\beta t} \cos \omega t, \quad Q_2(t) = e^{-\beta t} \sin \omega t.$$

Одержуємо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$Q_{\text{одн}}(t) = C_1 Q_1(t) + C_2 Q_2(t) = e^{-\beta t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

Права частина ДР є комбінацією спеціальних правих частин з параметрами  $s = 0$ ,  $\mu = \pm i\Omega$ . Оскільки  $\beta \neq 0$ , то  $\mu \neq \lambda_{1,2}$  (навіть у випадку  $\Omega = \omega$ ). Тому згідно з (4.25) частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді  $Q_* = M \cos \Omega t + N \sin \Omega t$ . Маємо:

$$\begin{aligned} Q'_* &= -M\Omega \sin \Omega t + N\Omega \cos \Omega t, \\ Q''_* &= -M\Omega^2 \cos \Omega t - N\Omega^2 \sin \Omega t. \end{aligned}$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду:

$$\begin{aligned} (-M\Omega^2 \cos \Omega t - N\Omega^2 \sin \Omega t) + 2\beta (-M\Omega \sin \Omega t + N\Omega \cos \Omega t) + \\ + \omega_0^2 (M \cos \Omega t + N \sin \Omega t) = \varepsilon_0 \cos \Omega t. \end{aligned}$$

Методом невизначених коефіцієнтів маємо систему:

$$\begin{cases} \cos \Omega t: & -M\Omega^2 + 2\beta N\Omega + M\omega_0^2 = \varepsilon_0; \\ \sin \Omega t: & -N\Omega^2 - 2\beta M\Omega + N\omega_0^2 = 0. \end{cases}$$

Її розв'язок при довільних  $\Omega$ :

$$M = \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) \varepsilon_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}, \quad N = \frac{2\beta \Omega \varepsilon_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}.$$

Тоді частинний розв'язок неоднорідного ДР

$$Q_* = M \cos \Omega t + N \sin \Omega t.$$

Одержуємо загальний розв'язок неоднорідного ДР:

$$Q = Q_{\text{одн}} + Q_* = e^{-\beta t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) + M \cos \Omega t + N \sin \Omega t$$

при вже відомих  $M$ ,  $N$ . Ці коефіцієнти, на відміну від  $C_1$ ,  $C_2$ , вже цілком визначено (при зміні початкових умов зміняться  $C_1$ ,  $C_2$ , але  $M$ ,  $N$  залишаться незмінними).

Отриманий результат заслуговує на обговорення. Навіть при малих втрахах енергії ( $\beta \ll \omega_0$ ,  $\omega \approx \omega_0$ ) внесок  $Q_{\text{одн}}(t) = e^{-\beta t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$  швидко згасає, причому за довільних початкових умов. Виникають коливання, що встановились:  $Q(t) = Q_*(t) = M \cos \Omega t + N \sin \Omega t$ . Вони є гармонічними і відбуваються з частотою  $\Omega$  змущуючої сили (а не з частотою  $\omega_0$  власних чи  $\omega$  вільних коливань). Маємо:

$$Q(t) = \sqrt{M^2 + N^2} \left( \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}} \cos \Omega t + \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}} \sin \Omega t \right).$$

Оскільки  $\left| \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}} \right| \leq 1$ ,  $\left| \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}} \right| \leq 1$ , то існує кут  $\varphi_0$  такий, що

$$\sin \varphi_0 = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}}.$$

Тоді коливання, що встановились:

$$Q(t) = \sqrt{M^2 + N^2} \sin(\Omega t + \varphi_0).$$

Їх амплітуда

$$Q_{\max} = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}.$$

Фізично явище резонансу спостерігається при частоті  $\Omega$ , за якої досягається максимум величини  $Q_{\max}$ , тобто мінімум функції  $f(\Omega) = (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2$ . Позначаючи  $z = \Omega^2$ , маємо:  $f = (\omega_0^2 - z)^2 + 4\beta^2 z$ . Очевидно, це квадратична функція, її графік – парабола вітками догори. Отже, мінімум досягається в точці, стаціонарній за першою похідною:

$$\frac{df}{dz} = 2(z - \omega_0^2) + 4\beta^2 = 0, \quad z_{\text{рез}} = \omega_0^2 - 2\beta^2.$$

Якщо  $R < \sqrt{\frac{2L}{C}}$  (а ця нерівність зазвичай виконується), то  $\omega_0^2 - 2\beta^2 > 0$ , і тоді існує резонансна частота

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{z_{\text{рез}}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \approx \omega_0.$$

Отже, як і завжди, резонанс виникає, коли частота  $\Omega$  змушуючої сили збігається з частотою  $\omega_0$  власних коливань.

З математичної точки зору розглянутий випадок не є резонансним, оскільки рівність  $\mu = \lambda$  не виконано. Справді, і  $\mu$ , і  $\lambda$  є комплексними числами, але  $\lambda$  містить дійсну частину  $\beta \neq 0$ , а  $\mu$  є суто уявним.  $\triangleright$

#### 4.5.2.6 Випадок 5: $s = 0$ , $\mu = a + ib$

Нехай права частина ДР має вигляд

$$f(x) = e^{ax}(P \cos bx + Q \sin bx).$$

Зокрема, одне з чисел  $P$ ,  $Q$  може дорівнювати нулю.

Розглядуваний випадок виникає при комбінуванні двох виразів (4.20) із комплексно спряженими показниками  $\mu = a + ib$ ,  $\bar{\mu} = a - ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , якщо покласти  $s = 0$ . Справді, з використанням подання (4.15) маємо:

$$f(x) = e^{ax} \left( P \cdot \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} + Q \cdot \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} \right) =$$

$$= e^{ax} \left[ e^{ibx} \left( \frac{P}{2} + \frac{Q}{2i} \right) + e^{-ibx} \left( \frac{P}{2} - \frac{Q}{2i} \right) \right].$$

При введенні заміни  $A_1 = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2i}$ ,  $A_2 = \frac{P}{2} - \frac{Q}{2i}$  права частина набуває вигляду

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{ax} [A_1 e^{ibx} + A_2 e^{-ibx}] = \\ &= A_1 e^{(a+ib)x} + A_2 e^{(a-ib)x} = A_1 e^{\mu x} + A_2 e^{\bar{\mu} x}. \end{aligned}$$

Тоді аналогічно до випадку 4 частинний розв'язок існує у вигляді

$$\begin{aligned} y_* &= B_1 e^{\mu x} + B_2 e^{\bar{\mu} x} = B_1 e^{(a+ib)x} + B_2 e^{(a-ib)x} = \\ &= B_1 e^{ax} \cdot e^{ibx} + B_2 e^{ax} \cdot e^{-ibx} = e^{ax} (B_1 e^{ibx} + B_2 e^{-ibx}) = \\ &= e^{ax} [B_1 (\cos bx + i \sin bx) + B_2 (\cos bx - i \sin bx)] = \\ &= e^{ax} [(B_1 + B_2) \cos bx + i(B_1 - B_2) \sin bx]. \end{aligned}$$

Позначаючи  $M = B_1 + B_2$ ,  $N = i(B_1 - B_2)$ , отримуємо:

$$y_* = e^{ax} (M \cos bx + N \sin bx). \quad (4.26)$$

Отже, доведено, що частинний розв'язок в розглядуваному випадку існує у вигляді (4.26).

Цілоком можливо, що права частина (при  $Q = 0$ ) має вигляд  $f(x) = P e^{ax} \cos bx$ , тобто не містить синуса. Підкреслимо, це зовсім не означає, що і частинний розв'язок не повинен його містити. Тобто, якщо спеціальна права частина має вигляд  $f(x) = P e^{ax} \cos bx$ , то частинний розв'язок треба шукати у розширеному вигляді  $y_* = e^{ax} (M \cos bx + N \sin bx)$ , а не в скороченому вигляді  $y_* = M e^{ax} \cos bx$ , який формально узагальнює праву частину. Аналогічно, при правій частині  $f(x) = Q e^{ax} \sin bx$  частинний розв'язок шукають як  $y_* = e^{ax} (M \cos bx + N \sin bx)$ , а не як  $y_* = N e^{ax} \sin bx$ .

◁ *Приклад 4.32.* Розв'яжемо рівняння  $y' + 5y = 34e^{3x} \cos 2x$ . Відповідне однорідне рівняння  $y' + 5y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda + 5 = 0$ . Його корінь  $\lambda = -5$ . ФСР містить лише функцію  $y_1 = e^{-5x}$ . Загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{\text{одн}} = C y_1 = C e^{-5x}$ .

Права частина ДР є комбінацією спеціальних правих частин з параметрами  $s = 0$ ,  $\mu = 3 \pm 2i$ . При цьому  $\mu \neq \lambda$ . Тому згідно з

(4.26) частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді  $y_* = e^{3x} (M \cos 2x + N \sin 2x)$ . Маємо:

$$\begin{aligned} y'_* &= 3e^{3x} (M \cos 2x + N \sin 2x) + e^{3x} (-2M \sin 2x + 2N \cos 2x) = \\ &= e^{3x} [(3M + 2N) \cos 2x + (3N - 2M) \sin 2x]. \end{aligned}$$

Тоді рівняння в умові задачі набуває вигляду:

$$e^{3x} [(3M + 2N + 5M) \cos 2x + (3N - 2M + 5N) \sin 2x] = 34e^{3x} \cos 2x.$$

Методом невизначених коефіцієнтів маємо систему:

$$\begin{cases} e^{3x} \cos 2x: & 8M + 2N = 34; \\ e^{3x} \sin 2x: & 8N - 2M = 0. \end{cases}$$

Її розв'язок  $M = 4$ ,  $N = 1$ . Тоді частинний розв'язок неоднорідного ДР  $y_* = e^{3x} (4 \cos 2x + \sin 2x)$ . Отримуємо загальний розв'язок неоднорідного ДР:

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = Ce^{-5x} + e^{3x} (4 \cos 2x + \sin 2x).$$

Зауважимо, в цьому прикладі узагальненням правої частини  $f(x) = 34e^{3x} \cos 2x$  згідно з (4.26) є вираз  $e^{3x} (M \cos 2x + N \sin 2x)$ , а не вираз  $Me^{3x} \cos 2x$ , який формально відповідає правій частині.  $\triangleright$

#### 4.5.2.7 Випадок 6: $s \neq 0$ , $\mu$ - дійсне

Нехай права частина ДР дорівнює

$$f(x) = P_s(x)e^{\mu x},$$

де  $P_s(x)$  є многочленом  $s$ -го степеня:

$$P_s(x) = p_0x^s + p_1x^{s-1} + \dots + p_{s-1}x + p_s = \sum_{j=0}^s p_j x^{s-j}.$$

В цьому разі шукатимемо частинний розв'язок у вигляді

$$y_* = M_s(x)e^{\mu x} = (m_0x^s + m_1x^{s-1} + \dots + m_{s-1}x + m_s) e^{\mu x}. \quad (4.27)$$

Підставимо цей «проект розв'язку» до (4.3). З використанням (4.12) при  $\alpha = 0$  (при цьому замість  $Q_s(x)$  з коефіцієнтами  $q_m$

маємо  $M_s(x)$  з коефіцієнтами  $m_j$ ; індекс підсумовування позначимо через  $j$ ) після скорочення на  $e^{\mu x}$  маємо:

$$\begin{aligned}
 & m_0 \left[ x^s F(\mu) + \{x^s\}' F'(\mu) + \{x^s\}'' \frac{F''(\mu)}{2} + \dots + \frac{\{x^s\}^{(n)} F^{(n)}(\mu)}{n!} \right] + \\
 & + m_1 \left[ x^{s-1} F(\mu) + \{x^{s-1}\}' F'(\mu) + \dots + \frac{\{x^{s-1}\}^{(n)} F^{(n)}(\mu)}{n!} \right] + \\
 & + m_2 \left[ x^{s-2} F(\mu) + \{x^{s-2}\}' F'(\mu) + \dots + \frac{\{x^{s-2}\}^{(n)} F^{(n)}(\mu)}{n!} \right] + \dots + \\
 & + m_{s-1} [x F(\mu) + F'(\mu)] + m_s F(\mu) = \sum_{j=0}^s p_j x^{s-j}.
 \end{aligned}$$

Методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, прирівнюючи коефіцієнти при функціях  $x^k$ . При цьому поступово зменшуємо  $k$  від  $s$  до нуля. Ми отримуємо  $(s+1)$  рівнянь для знаходження  $(s+1)$  коефіцієнтів  $m_k$  за відомими коефіцієнтами  $p_k$ ,  $k = \overline{0, s}$ :

$$\begin{array}{l|l}
 x^s: & m_0 F(\mu) = p_0; \\
 x^{s-1}: & m_1 F(\mu) + m_0 s F'(\mu) = p_1; \\
 x^{s-2}: & m_2 F(\mu) + m_1 (s-1) F'(\mu) + m_0 s(s-1) \frac{F''(\mu)}{2} = p_2; \\
 \dots & \dots \\
 x^1: & m_{s-1} F(\mu) + m_{s-2} \cdot 2 F'(\mu) + \dots = p_1; \\
 x^0: & m_s F(\mu) + m_{s-1} F'(\mu) + \dots = p_0.
 \end{array}$$

Ця система не вироджена, тобто її розв'язок існує і є єдиним. Справді, наведені рівняння зручно розв'язувати в послідовності «зверху донизу». З першого рівняння маємо:  $m_0 = \frac{p_0}{F(\mu)}$  (оскільки в усіх рівняннях  $F(\mu) \neq 0$ ). Знаючи  $m_0$ , з другого рівняння знаходимо  $m_1$ . Знаючи  $m_0$  і  $m_1$ , з третього рівняння знаходимо  $m_2$ , і т.д. Отже, в розглядуваному випадку існування частинного розв'язку гарантується у вигляді (4.27).

◁ *Приклад 4.33.* Розв'яжемо рівняння

$$y'' + 4y' + 3y = (15x + 83)e^{2x}.$$

Відповідне однорідне рівняння  $y'' + 4y' + 3y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ . Його корені  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -3$ . ФСР

складається з функцій  $y_1 = e^{-x}$ ,  $y_2 = e^{-3x}$ . Загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{\text{одн}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$ .

Множник  $\mu = 2$  в показнику степеня правої частини не є коренем характеристичного рівняння. Тому згідно з (4.27) частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді  $y_* = (ax + b)e^{2x}$ . Маємо:

$$y'_* = ae^{2x} + (ax + b) \cdot 2e^{2x} = (2ax + a + 2b)e^{2x},$$

$$y''_* = 2ae^{2x} + (2ax + a + 2b) \cdot 2e^{2x} = (4ax + 4a + 4b)e^{2x}.$$

Тоді рівняння в умові задачі набуває вигляду:

$$(4ax + 4a + 4b)e^{2x} + 4(2ax + a + 2b)e^{2x} + 3(ax + b)e^{2x} = (15x + 83)e^{2x},$$

$$(15ax + 8a + 15b)e^{2x} = (15x + 83)e^{2x}.$$

Методом невизначених коефіцієнтів маємо систему:

$$\begin{cases} xe^{2x}: & 15a = 15; \\ e^{2x}: & 8a + 15b = 83. \end{cases}$$

Її розв'язок  $a = 1$ ,  $b = 5$ . Тоді частинний розв'язок однорідного ДР  $y_* = (x + 5)e^{2x}$ . Одержуємо загальний розв'язок неоднорідного ДР:

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + (x + 5)e^{2x}. \triangleright$$

◁ *Приклад 4.34.* Розв'яжемо рівняння

$$y' - 2y = e^x(4x - 2x^2 - 3).$$

Відповідне однорідне рівняння  $y' - 2y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda - 2 = 0$ . Його корінь  $\lambda = 2$ . ФСР складається з однієї функції  $y_1 = e^{2x}$ . Загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{\text{одн}} = C e^{2x}$ .

Множник  $\mu = 1$  в показнику степеня правої частини не є коренем характеристичного рівняння. Тому згідно з (4.27) частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді  $y_* = (ax^2 + bx + c)e^x$ . Маємо:

$$y'_* = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x = [ax^2 + (2a + b)x + (b + c)]e^x.$$

Тоді рівняння в умові задачі набуває вигляду:

$$[ax^2 + (2a + b)x + (b + c)]e^x - 2(ax^2 + bx + c)e^x = e^x(4x - 2x^2 - 3),$$

$$[-ax^2 + (2a - b)x + (b - c)]e^x = (4x - 2x^2 - 3)e^x.$$

Методом невизначених коефіцієнтів маємо систему:

$$\begin{array}{l|l} x^2 e^x: & -a = -2; \\ x e^x: & 2a - b = 4; \\ e^x: & b - c = -3. \end{array}$$

Її розв'язок  $a = 2$ ,  $b = 0$ ,  $c = 3$ . Тоді частинний розв'язок однорідного ДР  $y_* = (2x^2 + 3)e^x$ . Одержуємо загальний розв'язок неоднорідного ДР:

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = Ce^{2x} + (2x^2 + 3)e^x. \triangleright$$

#### 4.5.2.8 Випадок 7: $s \neq 0$ , $\mu = a + ib$

Нарешті, перейдемо до найбільш загального випадку (серед нерезонансних). Нехай права частина ДР дорівнює

$$f(x) = e^{ax} (P_{s'}(x) \cos bx + Q_{s''}(x) \sin bx),$$

де  $P_{s'}(x)$ ,  $Q_{s''}(x)$  є многочленами (необов'язково однакових) степенів  $s'$ ,  $s''$ :

$$P_{s'}(x) = p_0 x^{s'} + p_1 x^{s'-1} + \dots + p_{s'-1} x + p_{s'},$$

$$Q_{s''}(x) = q_0 x^{s''} + q_1 x^{s''-1} + \dots + q_{s''-1} x + q_{s''}.$$

Зауважимо, один з многочленів  $P_{s'}$ ,  $Q_{s''}$  може дорівнювати нулю (бути відсутнім).

Розглядуваний випадок виникає при комбінуванні двох виразів (4.20) з комплексно спряженими показниками  $\mu = a + ib$ ,  $\bar{\mu} = a - ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Справді, з використанням подання (4.15) маємо:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{ax} \left( P_{s'}(x) \cdot \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} + Q_{s''}(x) \cdot \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} \right) = \\ &= e^{ax} \left[ e^{ibx} \left( \frac{P_{s'}(x)}{2} + \frac{Q_{s''}(x)}{2i} \right) + e^{-ibx} \left( \frac{P_{s'}(x)}{2} - \frac{Q_{s''}(x)}{2i} \right) \right]. \end{aligned}$$

Позначимо  $R_s(x) = \frac{P_{s'}(x)}{2} + \frac{Q_{s''}(x)}{2i}$ ,  $T_s(x) = \frac{P_{s'}(x)}{2} - \frac{Q_{s''}(x)}{2i}$  – деякі многочлени степеня  $s$ , де  $s = \max\{s', s''\}$  – більше з двох чисел

$s'$ ,  $s''$  (або одне з двох, якщо вони рівні<sup>4</sup>). Тоді

$$f(x) = e^{ax} (e^{ibx} R_s(x) + e^{-ibx} T_s(x)) = R_s(x)e^{\mu x} + T_s(x)e^{\bar{\mu}x}.$$

Тоді за попереднім підпунктом (застосовність результатів якого не обмежується випадком лише дійсних значень  $\mu$ ) частинний розв'язок існує у вигляді

$$\begin{aligned} y_* &= B_s(x)e^{\mu x} + C_s(x)e^{\bar{\mu}x} = B_s(x)e^{(a+ib)x} + C_s(x)e^{(a-ib)x} = \\ &= B_s(x)e^{ax} \cdot e^{ibx} + C_s(x)e^{ax} \cdot e^{-ibx} = e^{ax} (B_s(x)e^{ibx} + C_s(x)e^{-ibx}) = \\ &= e^{ax} [B_s(x) (\cos bx + i \sin bx) + C_s(x) (\cos bx - i \sin bx)] = \\ &= e^{ax} [(B_s(x) + C_s(x)) \cos bx + i (B_s(x) - C_s(x)) \sin bx]. \end{aligned}$$

Позначаючи  $M_s(x) = B_s(x) + C_s(x)$ ,  $N_s(x) = i(B_s(x) - C_s(x))$ , отримуємо:

$$y_* = e^{ax} (M_s(x) \cos bx + N_s(x) \sin bx). \quad (4.28)$$

Отже, доведено, що частинний розв'язок в розглядуваному випадку існує у вигляді (4.28).

Можливо, в правій частині один з многочленів  $P_{s'}(x)$ ,  $Q_{s''}(x)$  має менший степінь (або навіть повністю є відсутнім). Але в частинному розв'язку потрібно припускати наявність більшого степеня. Наприклад, якщо спеціальна права частина має вигляд  $f(x) = e^{ax} [(p_0x + p_1) \cos bx + q_0 \sin x]$ , то частинний розв'язок треба шукати у розширеному вигляді

$$y_* = e^{ax} [(m_0x + m_1) \cos bx + (n_0x + n_1) \sin x],$$

а не в скороченому вигляді  $y_* = e^{ax} [(m_0x + m_1) \cos bx + n_0 \sin x]$ , який формально узагальнює праву частину.

◁ *Приклад 4.35.* Розв'яжемо рівняння

$$y' = e^{6x} [(15x + 14) \cos 3x + \sin 3x].$$

---

<sup>4</sup>Сума двох многочленів навіть однакових степенів може виявитись многочленом меншого степеня. Наприклад, нехай  $P_2(x) = x - x^2$ ,  $Q_2(x) = x^2 + 1$ . Сума цих двох многочленів другого степеня є многочленом першого степеня:  $P_2(x) + Q_2(x) = x + 1 = R_1(x)$ . Але, позначаючи  $s = \max\{s', s''\}$ , ми нічого не втрачаємо. Зрештою, «зайві» коефіцієнти можна вважати рівними нулю. Проте, можна гарантувати, що степінь, більший за  $s$ , тут не з'явиться.

Тут достатньо проінтегрувати праву частину, але це складна задача. Знайдемо цей інтеграл, розв'язуючи рівняння за наведеною схемою. Відповідне однорідне рівняння має вигляд  $y' = 0$ , характеристичне рівняння  $\lambda = 0$ . ФСР складається з однієї функції  $y_1 = e^0 = 1$ , і загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{\text{одн}} = C$ .

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_* = e^{6x} [(Ax + B) \cos 3x + (Gx + D) \sin 3x].$$

Маємо:

$$\begin{aligned} y_*' &= 6e^{6x} [(Ax + B) \cos 3x + (Gx + D) \sin 3x] + \\ &+ e^{6x} [A \cos 3x - 3(Ax + B) \sin 3x + G \sin 3x + 3(Gx + D) \cos 3x] = \\ &= e^{6x} [\cos 3x \{x(6A + 3G) + (6B + A + 3D)\} + \\ &\quad + \sin 3x \{x(6G - 3A) + (6D - 3B + G)\}]. \end{aligned}$$

Методом невизначених коефіцієнтів отримуємо систему

$$\begin{array}{l|l} xe^{6x} \cos 3x: & 6A + 3G = 15; \\ e^{6x} \cos 3x: & 6B + A + 3D = 14; \\ xe^{6x} \sin 3x: & 6G - 3A = 0; \\ e^{6x} \sin 3x: & 6D - 3B + G = 1. \end{array}$$

Маємо:  $A = 2$ ,  $B = \frac{8}{5}$ ,  $G = 1$ ,  $D = \frac{4}{5}$ . Тоді частинний розв'язок

$$\begin{aligned} y_* &= e^{6x} \left[ \left( 2x + \frac{8}{5} \right) \cos 3x + \left( x + \frac{4}{5} \right) \sin 3x \right] = \\ &= \left( x + \frac{4}{5} \right) e^{6x} (2 \cos 3x + \sin 3x). \end{aligned}$$

Одержуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C + \left( x + \frac{4}{5} \right) e^{6x} (2 \cos 3x + \sin 3x).$$

В цьому прикладі  $s' = 1$ ,  $P_1(x) = 15x + 14$ ,  $s'' = 0$ ,  $Q_0(x) = 1$ . Але у частинному розв'язку більший (перший) степінь мають і многочлен  $M_1(x) = 2x + \frac{8}{5}$ , і многочлен  $N_1(x) = x + \frac{4}{5}$ .  $\triangleright$

## 4.5.3 Побудова частинного розв'язку. Резонансні випадки

### 4.5.3.1 Випадок многочлену в правій частині

Нехай  $f(x)$  є многочленом степеня  $s$ , і тому дорівнює

$$f(x) = p_0x^s + p_1x^{s-1} + \dots + p_s = P_s(x).$$

Це спеціальна права частина при  $\mu = 0$ ; її розглянуто у випадку 3 попереднього пункту. Але там вважалось, що  $a_n \neq 0$ . При цьому гарантувалось існування частинного розв'язку у вигляді

$$y_*(x) = m_0x^s + m_1x^{s-1} + \dots + m_s = M_s(x).$$

Нехай тепер  $a_n = 0$ , тобто число  $\lambda = 0$  є коренем характеристичного рівняння. Отже, виконано рівність  $\lambda = \mu$ , тобто трапився резонансний випадок. Висновок випадку 3 перестав «працювати»: ми більше не можемо гарантувати існування відповідного частинного розв'язку.

◁ *Приклад 4.36.* Розглянемо рівняння  $y'' - y' = 2x$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - \lambda = 0$  має корені  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ . ФСР складається з функцій  $y_1 = e^0 = 1$ ,  $y_2 = e^x$ , і загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння  $y_{\text{одн}} = C_1 + C_2e^x$ .

Права частина  $f(x) = 2x$  є спеціальною з параметрами  $s = 1$ ,  $\mu = 0$ . Цей випадок є резонансним, оскільки  $\mu = \lambda_1$ .

Спробуємо, узагальнюючи вигляд правої частини, шукати частинний розв'язок у вигляді  $y_*(x) = Ax + B$ . Маємо:

$$y'_*(x) = A, \quad y''_*(x) = 0.$$

Тоді ДР набуває вигляду  $0 - A = 2x$ . Прирівнюючи коефіцієнти при  $x$ , отримуємо протиріччя:  $0 = 2$ . Це не означає, що частинного розв'язку не існує; це лише означає, що частинний розв'язок не може мати вигляд  $y_*(x) = Ax + B$ . Отже, факт резонансу  $\mu = \lambda$  вимагає від нас переглянути спосіб знаходження частинного розв'язку. ▷

Припустимо, що корінь  $\lambda = 0$  має кратність  $\alpha$ . В тому числі, значення  $\alpha = 1$  не виключається. Тоді нулю дорівнюють коефіцієнти  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-\alpha+1}$ , але  $a_{n-\alpha} \neq 0$ . Введемо заміну  $z(x) = y^{(\alpha)}(x)$  (тут  $\alpha$  – номер похідної). Тоді ДР стає рівнянням  $(n - \alpha)$ -го порядку відносно  $z(x)$ . Коефіцієнт  $a_{n-\alpha} \neq 0$  тепер відіграє роль вільного члену нового характеристичного рівняння,

тому тепер число  $\lambda = 0$  не є його коренем, і випадок перестася бути резонансним. Тому (як і вище у випадку 3) гарантується існування частинного розв'язку у вигляді

$$z_* = y^{(\alpha)} = r_0 x^s + r_1 x^{s-1} + \dots + r_s = R_s(x).$$

Тепер послідовне інтегрування  $\alpha$  разів поспіль призведе до виникнення многочлену степеня  $(s + \alpha)$ . Його коефіцієнти при  $x^{\alpha-1}$ ,  $x^{\alpha-2}$  і т.д. залежать від довільних сталих інтегрування  $C_1, C_2, \dots, C_\alpha$  і можуть бути довільними. Зокрема, їх можна покласти рівними нулю (нагадаємо, нас влаштовує *будь-який* частинний розв'язок). Тоді доведено, що існує частинний розв'язок у вигляді

$$y_*(x) = m_0 x^{s+\alpha} + m_1 x^{s-1} + \dots + m_s x^\alpha + 0,$$

$$y_*(x) = x^\alpha (m_0 x^s + m_1 x^{s-1} + \dots + m_s) = x^\alpha M_s(x). \quad (4.29)$$

Зокрема, при  $\alpha = 0$  (випадок перестася бути резонансним) цей вираз збігається з результатом нерезонансного випадку 3.

В принципі, вираз (4.29) як многочлен  $(s + \alpha)$ -го степеня можна було подати і більш загально:  $Q_{s+\alpha}^*(x)$ . Але форма (4.29) не містить степенів  $x^{\alpha-1}$  і нижчих, що спрощує розрахунки.

◁ *Приклад 4.37.* Повернімось до попереднього прикладу, і знову розглянемо рівняння  $y'' - y' = 2x$ . «Резонансний» корінь  $\lambda = 0$  є простим, тобто кратним кратності  $\alpha = 1$ . Тоді, узагальнюючи вигляд правої частини, потрібно частинний розв'язок шукати у вигляді

$$y_*(x) = x^\alpha (Ax + B) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Маємо:

$$y_*'(x) = 2Ax + B, \quad y_*''(x) = 2A,$$

і ДР набуває вигляду

$$2A - (2Ax + B) = 2x.$$

Методом невизначених коефіцієнтів маємо систему:

$$\begin{array}{l|l} x^1: & -2A = 2; \\ x^0: & 2A - B = 0. \end{array}$$

Її розв'язок  $A = -1$ ,  $B = -2$ . Тоді частинний розв'язок однорідного ДР дорівнює  $y_* = -x^2 - 2x$ . Отримуємо загальний розв'язок неоднорідного ДР:

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 + C_2 e^x - x^2 - 2x. \triangleright$$

Розглянемо ще один приклад кратного резонансного кореня.

$\triangleleft$  *Приклад 4.38.* Розв'яжемо рівняння  $y''' - y'' = 4 - 12x$ . Воно має спеціальну праву частину з параметрами  $s = 1$ ,  $\mu = 0$ . Відповідне однорідне рівняння  $y''' - y'' = 0$ . Його характеристичне рівняння  $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ ,  $\lambda^2(\lambda - 1) = 0$  має корені  $\lambda_{1,2} = 0$  (кратний кратності  $\alpha = 2$ ) і  $\lambda_3 = 1$  (простий). ФСР складається з функцій  $y_1 = e^0 = 1$ ,  $y_2 = xy_1 = x$  (врахували кратність),  $y_3 = e^x$ . Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{\text{одн}} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$ .

З урахуванням правої частини за відсутності резонансу ми б шукали частинний розв'язок у вигляді  $y_* = Ax + B$ . Але трапився резонанс ( $\lambda_{1,2} = \mu$ ), причому резонансний корінь є кратним ( $\alpha = 2$ ). Тому частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді:

$$y_*(x) = x^\alpha (Ax + B) = x^2 (Ax + B) = Ax^3 + Bx^2.$$

Маємо:

$$y_*'(x) = 3Ax^2 + 2Bx, \quad y_*''(x) = 6Ax + 2B, \quad y_*'''(x) = 6A,$$

і ДР набуває вигляду

$$6A - (6Ax + 2B) = 4 - 12x.$$

Методом невизначених коефіцієнтів маємо систему:

$$\begin{array}{l} x^1: \\ x^0: \end{array} \left| \begin{array}{l} -6A = -12; \\ 6A - 2B = 4. \end{array} \right.$$

Її розв'язок  $A = 2$ ,  $B = 4$ . Тоді частинний розв'язок неоднорідного ДР дорівнює  $y_* = 2x^3 + 4x^2$ . Отримуємо загальний розв'язок неоднорідного ДР:

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + 2x^3 + 4x^2. \triangleright$$

### 4.5.3.2 Загальний випадок

Нехай  $f(x)$  має вигляд

$$f(x) = e^{\mu x} P_s(x) = e^{\mu x} (p_0 x^s + p_1 x^{s-1} + \dots + p_s),$$

причому число  $\mu$  є коренем характеристичного рівняння кратності  $\alpha$ , тобто

$$F(\mu) = F'(\mu) = \dots = F^{(\alpha-1)}(\mu) = 0, \quad F^{(\alpha)}(\mu) \neq 0.$$

Доведемо, що в цьому разі існує частинний розв'язок у вигляді

$$y_*(x) = x^\alpha e^{\mu x} M_s(x) = x^\alpha e^{\mu x} (m_0 x^s + m_1 x^{s-1} + \dots + m_s). \quad (4.30)$$

Підставимо (4.30) до (4.3). З використанням (4.12) (при цьому замість  $Q_s(x)$  з коефіцієнтами  $q_m$  маємо  $M_s(x)$  з коефіцієнтами  $m_j$ ; індекс підсумовування позначимо через  $j$ ) після скорочення на  $e^{\mu x}$  маємо:

$$\sum_{j=0}^s m_j \left( \sum_{k=0}^n \{x^{s-j+\alpha}\}^{(k)} \frac{F^{(k)}(\mu)}{k!} \right) = \sum_{j=0}^s p_j x^{s-j}.$$

Оскільки кратність кореня  $\mu$  дорівнює  $\alpha$ , то у внутрішній сумі лівої частини за рахунок співмножників  $F^{(k)}(\mu)$  відсутні доданки з номерами  $k = 0, \alpha - 1$ . Тому сумування достатньо розповсюдити лише на номери  $k = \overline{\alpha, n}$ :

$$\sum_{j=0}^s m_j \left( \sum_{k=\alpha}^n \{x^{s-j+\alpha}\}^{(k)} \frac{F^{(k)}(\mu)}{k!} \right) = \sum_{j=0}^s p_j x^{s-j}. \quad (4.31)$$

Очевидно,  $j$ -а внутрішня сума є многочленом, степінь якого дорівнює<sup>5</sup>  $s - j$ . Тоді (4.31) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & m_0 (a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + a_2 x^{s-2} + \dots + a_s) + \\ & + m_1 (b_0 x^{s-1} + b_1 x^{s-2} + \dots + b_{s-1}) + \\ & + m_2 (c_0 x^{s-2} + c_1 x^{s-2} + \dots + c_{s-2}) + \dots + \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Такий степінь після диференціювання  $\alpha$  разів посліпль матиме перший доданок  $\{x^{s-j+\alpha}\}^{(k)}$  (при  $k = \alpha$ ), причому за умовою  $F^{(\alpha)}(\mu) \neq 0$ . Решта доданків матимуть менший степінь або взагалі зникатимуть при диференціюванні.

$$+m_{s-1}(u_0x + u_1) + m_s v_0,$$

причому усі старші коефіцієнти  $a_0, b_0, c_0, \dots, u_0, v_0$  відмінні від нуля (і дорівнюють  $\frac{F^{(\alpha)}}{\alpha!}$ ). Тоді методом невизначених коефіцієнтів маємо систему рівнянь:

$$\begin{array}{l|l} x^s: & m_0 a_0 = p_0; \\ x^{s-1}: & m_1 b_0 + m_0 a_1 = p_1; \\ x^{s-2}: & m_2 c_0 + m_1 b_1 + m_0 a_2 = p_2; \\ \dots & \dots \\ x^1: & m_{s-1} u_0 + \dots + m_0 a_{s-1} = p_{s-1}; \\ x^0: & m_s v_0 + m_{s-1} u_1 + \dots + m_0 a_s = p_s. \end{array}$$

Очевидно, розв'язок цієї системи існує і є єдиним. Справді, наведені рівняння зручно розв'язувати послідовно «зверху донизу». З першого рівняння маємо:  $m_0 = \frac{p_0}{a_0}$ . Знаючи  $m_0$ , з другого рівняння знаходимо  $m_1$ . Знаючи  $m_0$  і  $m_1$ , з третього рівняння знаходимо  $m_2$ , і т.д. Отже, в розглядуваному випадку існування частинного розв'язку гарантується у вигляді (4.30).

### 4.5.3.3 Наслідки

Вважаючи  $\mu$  комплексним, формулу (4.30) можна застосувати до правої частини  $f(x) = e^{ax} (P_{s'}(x) \cos bx + Q_{s''}(x) \sin bx)$ , де  $P_{s'}(x), Q_{s''}(x)$  – многочлени степенів  $s', s''$ . Справді:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{ax} \left( P_{s'}(x) \cdot \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} + Q_{s''}(x) \cdot \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} \right) = \\ &= e^{ax} \left[ e^{ibx} \left( \frac{P_{s'}(x)}{2} + \frac{Q_{s''}(x)}{2i} \right) + e^{-ibx} \left( \frac{P_{s'}(x)}{2} - \frac{Q_{s''}(x)}{2i} \right) \right]. \end{aligned}$$

Очевидно, тут вирази в обидвох внутрішніх круглих дужках є многочленами, степінь яких дорівнює<sup>6</sup>  $s = \max\{s', s''\}$ . Тоді, позначаючи ці вирази через  $\tilde{P}_s(x), \tilde{Q}_s(x)$  відповідно, маємо:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{ax} \left( e^{ibx} \tilde{P}_s(x) + e^{-ibx} \tilde{Q}_s(x) \right) = \\ &= e^{(a+ib)x} \tilde{P}_s(x) + e^{(a-ib)x} \tilde{Q}_s(x) = e^{\mu x} \tilde{P}_s(x) + e^{\bar{\mu}x} \tilde{Q}_s(x). \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Сума двох многочленів навіть однакових степенів може виявитись многочленом меншого степеня; див. також виноску на с. 91

Якщо  $\mu$  є коренем кратності  $\alpha$  для характеристичного многочлену з дійсними коефіцієнтами, то  $\bar{\mu}$  також є коренем кратності  $\alpha$ . Тоді кожному доданку  $f_1(x) = e^{\mu x} \tilde{P}_s(x)$ ,  $f_2(x) = e^{\bar{\mu} x} \tilde{Q}_s(x)$  за (4.30) відповідає частинний розв'язок

$$y_{*,1}(x) = x^\alpha e^{\mu x} R_s(x), \quad y_{*,2}(x) = x^\alpha e^{\bar{\mu} x} T_s(x).$$

Тоді за формулою (4.19) частинний розв'язок існує у вигляді

$$\begin{aligned} y_*(x) &= y_{*,1}(x) + y_{*,2}(x) = x^\alpha [e^{\mu x} R_s(x) + e^{\bar{\mu} x} T_s(x)] = \\ &= x^\alpha [e^{(a+ib)x} R_s(x) + e^{(a-ib)x} T_s(x)] = \\ &= x^\alpha e^{ax} [e^{ibx} R_s(x) + e^{-ibx} T_s(x)] = \\ &= x^\alpha e^{ax} [(\cos bx + i \sin bx) R_s(x) + (\cos bx - i \sin bx) T_s(x)] = \\ &= x^\alpha e^{ax} [\cos bx (R_s(x) + T_s(x)) + \sin bx (iR_s(x) - iT_s(x))] = \\ &= x^\alpha e^{ax} (M_s(x) \cos bx + N_s(x) \sin bx), \\ y_*(x) &= x^\alpha e^{ax} (M_s(x) \cos bx + N_s(x) \sin bx). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Тут позначено<sup>7</sup>  $M_s(x) = R_s(x) + T_s(x)$ ,  $N_s(x) = iR_s(x) - iT_s(x)$ . Зокрема, вважаючи  $\mu$  дійсним числом, тобто покладаючи  $b = 0$ ,  $a = \mu$ , з (4.32) отримуємо (4.30).

Окрім спрощені форми виразу (4.32) при різних сполученнях значень  $s$ ,  $a$ ,  $b$  і відповідні їм вигляди частинного розв'язку подано в таблиці.

$f(x)$	$y_*(x)$
$P$	$Mx^\alpha$
$P e^{\mu x}$	$x^\alpha M e^{\mu x}$
$P_s(x)$	$x^\alpha M_s(x)$
$P \cos bx + Q \sin bx$	$x^\alpha (M \cos bx + N \sin bx)$
$e^{ax} (P \cos bx + Q \sin bx)$	$x^\alpha e^{ax} (M \cos bx + N \sin bx)$
$P_s(x) e^{\mu x}$	$x^\alpha M_s(x) e^{\mu x}$
$e^{ax} [P_{s'}(x) \cos bx + Q_{s''}(x) \sin bx]$	$x^\alpha e^{ax} [M_s(x) \cos bx + N_s(x) \sin bx],$ де $s = \max \{s', s''\}$

<sup>7</sup> Степені многочленів  $M$ ,  $N$  можуть виявитись і меншими за  $s$ . Але виходити з цього не можна, оскільки буде обмежено загальність міркувань. Припущення, що многочлени  $M$  і  $N$  мають степінь  $s$  (і гарантовано не вище!), не обмежує цю загальність.

Зауважимо, формула (4.32) охоплює також усі нерезонансні випадки спеціальної правої частини при введенні наступної домовленості. Якщо число  $\mu$  не є коренем характеристичного рівняння, то домовимось<sup>8</sup> це число вважати коренем кратності  $\alpha = 0$ . При цьому співмножник  $x^\alpha$  з виразів у правому стовпчику таблиці зникає. Вирази, які залишаються, збігаються з формулами, отриманими в нерезонансних випадках 1–7.

## 4.6 Питання для перевірки

1. Як виглядає неоднорідне лінійне звичайне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку зі змінними коефіцієнтами?
2. Як виглядає однорідне лінійне звичайне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку зі змінними коефіцієнтами?
3. Як виглядає неоднорідне лінійне звичайне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами?
4. Як виглядає однорідне лінійне звичайне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами?
5. Сформулюйте і доведіть принцип суперпозиції розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння.
6. Чи існує різниця у застосуванні принципу суперпозиції до лінійних однорідних ДР зі змінними і сталими коефіцієнтами?
7. Що таке фундаментальна система розв'язків (ФСР)?
8. Навіщо потрібна лінійна незалежність функцій, які утворюють ФСР?
9. Випишіть загальний вигляд визначника Вронського.
10. Визначник Вронського системи лінійно залежних функцій є вродженим. Доведіть це.

---

<sup>8</sup>Така домовленість є цілком природною. Якщо  $\mu$  є коренем характеристичного рівняння кратності  $\alpha$ , то розкладання характеристичного многочлену  $F(\lambda)$  на множники містить множник  $(\lambda - \mu)^\alpha$ . В разі нерезонансного випадку ( $F(\mu) \neq 0$ ) множник  $(\lambda - \mu)$  в цьому розкладанні не міститься, або міститься нуль разів, тобто  $\alpha = 0$ .

11. Сформулюйте і доведіть ознаку лінійної незалежності системи функцій на відрізку.
12. Наведіть приклади лінійно залежних (незалежних) функцій.
13. Лінійна комбінація функцій, які утворюють ФСР, при довільних коефіцієнтах подає загальний розв'язок лінійного однорідного ДР. Доведіть це.
14. Здійснюючи підстановку Ейлера  $y = e^{\lambda x}$ , лінійне ДР  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами легко звести до характеристичного рівняння. Випишіть його вигляд.
15. Як побудувати ФСР лінійного ДР  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо усі корені характеристичного рівняння є дійсними і простими?
16. Як побудувати ФСР лінійного ДР  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо деякі корені характеристичного рівняння є дійсними і кратними?
17. Що таке комплексне число? Що таке дійсна і уявна частини комплексного числа? Що таке суто уявне комплексне число?
18. Які два комплексних числа називають рівними?
19. Як виконують елементарні арифметичні дії з комплексними числами?
20. Що таке комплексне спряження?
21. Як виглядає формула Ейлера для експоненти з комплексним показником?
22. Як будують внесок до ФСР, який відповідає парі простих комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння?
23. Як будують внесок до ФСР, який відповідає парі кратних комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння?

24. Поясніть суть методу Лагранжа варіації довільних сталих на прикладі лінійного неоднорідного ДР другого порядку.
25. Сформулюйте і доведіть теорему про загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР.
26. Як знайти частинний розв'язок неоднорідного лінійного ДР методом невизначених коефіцієнтів?
27. Що таке спеціальна права частина?
28. Які випадки спеціальної правої частини є нерезонансними? резонансними? Наведіть приклади.
29. В якій формі шукають частинний розв'язок неоднорідного лінійного ДР за відсутності резонансу між параметрами спеціальної правої частини і коренями характеристичного рівняння? Розгляньте сім випадків.
30. В якій формі шукають частинний розв'язок неоднорідного лінійного ДР за наявності резонансу між параметрами спеціальної правої частини і коренями характеристичного рівняння? Як ця форма залежить від кратності цих коренів?

# 5 СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

## 5.1 Загальні поняття

Нехай  $t$  – незалежна дійсна змінна, і  $x_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$  – деякі функції, диференційовні потрібну кількість разів. Нехай між змінною  $t$ , функціями  $x_k(t)$  і їх похідними існує зв'язок, поданий рівнянням:

$$F \left( t; x_1, x_1', x_1'', \dots, x_1^{(m_1)}; \dots; x_n, x_n', x_n'', \dots, x_n^{(m_n)} \right) = 0.$$

Тут в круглих дужках у верхньому індексі вказано номер похідної. В наявності може бути одночасно декілька таких рівнянь (наприклад,  $\ell$  штук):

$$F_i \left( t; x_1, x_1', \dots, x_1^{(m_1)}; \dots; x_n, x_n', \dots, x_n^{(m_n)} \right) = 0, \quad i = \overline{1, \ell}. \quad (5.1)$$

♦ **Означення 5.1.** Систему рівнянь (5.1) називають **системою** (звичайних) **диференціальних рівнянь (СДР)**. Найбільше з чисел  $m_1, m_2, \dots, m_n$  називають **порядком СДР**.

Особливе місце серед СДР посідають СДР першого порядку, оскільки СДР довільного порядку *завжди може бути зведеною* до СДР першого порядку ціною відповідного збільшення кількості рівнянь. Для цього достатньо новою літерою позначити кожну функцію  $x_j(t)$  і усі її похідні, крім старшої.

◁ *Приклад 5.1.* Розглянемо систему двох ДР:

$$\begin{cases} F_1(t; x_1, x_1', x_1''; x_2, x_2', x_2'', x_2''') = 0, \\ F_2(t; x_1, x_1', x_1''; x_2, x_2', x_2'', x_2''') = 0. \end{cases}$$

Це СДР третього порядку, яка містить два рівняння. Введемо заміни  $y_1 = x_1$ ,  $y_2 = x_1'$ . Старшу похідну  $x_1''$  не замінємо. Натомість маємо  $x_1'' = (x_1')' = y_2'$ . Введемо також подальші заміни  $y_3 = x_2$ ,  $y_4 = x_2'$ ,  $y_5 = x_2'' = (x_2')' = y_4'$ . Старшу похідну  $x_2''$  не замінємо. Натомість маємо  $x_2''' = (x_2'')' = y_5'$ . Тепер наша система набуває вигляду

$$\begin{cases} F_1(t; y_1, y_2, y_2'; y_3, y_4, y_5, y_5') = 0, \\ F_2(t; y_1, y_2, y_2'; y_3, y_4, y_5, y_5') = 0. \end{cases}$$



◆ **Означення 5.3.** СДР першого порядку, подану у вигляді (5.3), називають **нормальною** (або *нормалізованою*). Число  $n$  іноді називають **порядком нормальної СДР**.

З цього означення випливає: у випадку нормальної СДР кожна перша похідна виражена через шукані функції, і усі вищі похідні відсутні.

Зокрема, при  $n = 1$  отримуємо СДР, що складається з одного рівняння, яке збігається з (2.2).

Надалі ми зосередимось лише на нормальних СДР.

◆ **Означення 5.4.** Кажуть, що впорядкована сукупність потрібної кількості функцій  $x_k = \varphi_k(t)$  є **розв'язком СДР**, якщо ці функції при підстановці до рівнянь СДР перетворюють кожне рівняння на тотожність в певному інтервалі значень  $t$ .

Це означення стосується СДР, поданих у довільному вигляді: (5.1), (5.2), (5.3). Розв'язок, визначений останнім означенням, є *частинним*. Як і в разі ДР, сукупність усіх частинних розв'язків утворює сімейство функцій, яке називають *загальним розв'язком*. Для виділення конкретного розв'язку з цього сімейства, на додаток до рівнянь системи, потрібно сформулювати також початкові умови. Якщо СДР нормалізована, то початкові умови достатньо<sup>1</sup> подати у вигляді  $x_k(t_0) = x_{0k}$ , де  $x_{0k}$  – деякі заздалегідь відомі числа. Зазвичай покладають  $t_0 = 0$ :

$$x_k(0) = x_{0k}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.4)$$

або у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{01}, \\ x_2(0) = x_{02}, \\ \dots, \\ x_n(0) = x_{0n}. \end{cases}$$

◆ **Означення 5.5.** Сукупність рівнянь (5.3) і початкових умов (5.4), взятих у відповідній кількості, називають **задачею Коші**.

Отже, з використанням наведених вище означень, *знайти розв'язок задачі Коші означає знайти впорядковану сукупність функцій  $x_k = \varphi_k(t)$ , які задовольняють 1) рівняння (5.3); 2) початкові умови (5.4).*

---

<sup>1</sup>Якщо СДР не нормалізована, то до її складу можуть входити не тільки перші, а ще й вищі похідні шуканих функцій. В цьому разі початкові умови накладають не тільки на початкові значення шуканих функцій, а ще на початкові значення їх похідних.

Можна довести наступне: якщо кожна функція  $f_k$  в (5.3) є диференційовною за кожним своїм аргументом, то розв'язок задачі Коші існує і є єдиним. Звичайно, для СДР (5.3) цей розв'язок є частинним.

Насправді диференційовність функцій  $f_k$  в (5.3) є доволі жорсткою (і тому надлишковою) вимогою. Ця вимога суттєво звужує клас функцій  $f_k$ , в разі використання яких розв'язок задачі Коші існує і є єдиним. Можна сформулювати і менш жорсткі вимоги (і це зробить клас функцій ширшим), за виконання яких розв'язок задачі Коші також буде існувати і буде єдиним. Оскільки ми не доводимо теорему про існування і єдиність розв'язку, то і потреби в обговоренні шляхів послаблення цих вимог немає.

В подальшому ми зосередимось лише на задачі Коші, хоча існують і інші задачі, які до неї не зводяться.

Розглянемо задачу, яка не зводиться до задачі Коші.

◁ *Приклад 5.2.* На проміжку  $t \in [0; \pi]$  знайти функцію  $x(t)$ , яка задовольняє 1) рівняння  $x'' + \omega^2 x = 0$ ; 2) додаткові умови  $x(0) = 0$ ,  $x(\pi) = 0$  і не дорівнює тотожно нулю.

Очевидно, загальний розв'язок має вигляд

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Тоді додаткові умови набувають вигляду

$$\begin{cases} C_1 \cos(\omega \cdot 0) + C_2 \sin(\omega \cdot 0) = 0; \\ C_1 \cos \pi\omega + C_2 \sin \pi\omega = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0; \\ C_1 \cos \pi\omega + C_2 \sin \pi\omega = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння випливає:  $C_1 = 0$  незалежно від  $C_2$ . Тоді друге рівняння набуває вигляду  $C_2 \sin \pi\omega = 0$ . Покласти тут  $C_2 = 0$  не можна, оскільки в цьому разі ми б отримали тільки тривіальний розв'язок  $x(t) \equiv 0$ . Залишається:  $\sin \pi\omega = 0$ ,  $\pi\omega = \pi n$ ,  $\omega = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Якщо виявиться, що число  $\omega$  в умові задачі не є цілим, то розв'язок задачі взагалі не існує, оскільки неможливо виконати додаткові умови. Якщо ж число  $\omega$  є цілим, то розв'язок задачі існує, але додаткових умов недостатньо, аби визначити його однозначно. Справді, якщо  $\omega \in \mathbb{Z}$ , то функція  $x(t) = C_2 \sin \omega t$  є розв'язком поставленої задачі при довільному  $C_2 \in \mathbb{R}$ . ▷

Ясно тепер, що розглянуту задачу аніяк не можна перетворити на задачу Коші: в цій задачі (на відміну від задачі Коші) розв'язок не завжди існує, а якщо і існує, то він не завжди є єдиним.

Задачі розглянутого типу і відповідні додаткові умови називають *крайовими*. Крайовим задачам присвячено окремі курси математики.

Для розв'язування СДР і відповідних задач Коші використовують метод виключення, методи заміни змінних, а також різні числові методи. Вказані методи цілком розроблені для лінійних СДР. Тому зупинимось на елементах теорії лінійних СДР.

## 5.2 Лінійні нормальні СДР

◆ **Означення 5.6.** Нормальна система диференціальних рівнянь називається **лінійною**, якщо кожна права частина (5.3) є функцією, лінійною за кожним аргументом  $x_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . При цьому лінійність за аргументом  $t$  не є обов'язковою.

Розглянемо випадок  $n = 2$ . В цьому разі наведене означення можна переформулювати так: нормальну СДР другого порядку називають лінійною, якщо її подано у вигляді:

$$\begin{cases} x_1' = f_{11}(t)x_1(t) + f_{12}(t)x_2(t) + g_1(t), \\ x_2' = f_{21}(t)x_1(t) + f_{22}(t)x_2(t) + g_2(t). \end{cases} \quad (5.5)$$

Введемо *функціональну*<sup>2</sup> матриці:

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Традиційне означення похідної в поєднанні з арифметикою матриць призводить до виникнення *поняття похідної від функціональної матриці*<sup>3</sup>, причому диференціювання відбувається поелементно:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}.$$

З урахуванням сказаного система (5.5) набуває легко осяжної форми:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{F}(t)\mathbf{X} + \mathbf{G}(t). \quad (5.6)$$

Очевидно, ця матрична форма залишається такою ж при зміні порядку СДР, і лише порядки введених функціональних матриць відповідно змінюються.

<sup>2</sup>Так називають матриці, елементами яких є функції, а не числа. Матриці (як квадратні, так і стовпці; як функціональні, так і числові) в цьому розділі позначаємо жирним шрифтом.

<sup>3</sup>Строго кажучи, для цього потрібно узагальнити поняття границі функції в точці, розповсюдивши його також на функції, значення яких є матрицями.

Формально вигляд (5.6) збігається з виглядом неоднорідного лінійного диференціального рівняння першого порядку. Тоді природно для матриці  $\mathbf{F}$  ввести назву «*матриця коефіцієнтів СДР*», а для матриці  $\mathbf{G}$  – «*стовпець вільних членів*».

У відповідності до термінології, прийнятої в попередньому розділі, якщо<sup>4</sup>  $\mathbf{F} = \text{const}$ , то СДР називають системою зі *сталими коефіцієнтами*, в іншому разі – зі *змінними коефіцієнтами*. Якщо  $\mathbf{G} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ , СДР називають *однорідною*, в іншому разі – *неоднорідною*. СДР (5.6) є неоднорідною. Однорідна СДР, яка їй відповідає, виникає при відкиданні стовпця вільних членів і має вигляд

$$\mathbf{X}' = \mathbf{F}(t)\mathbf{X}. \quad (5.7)$$

Аналогія з лінійним ДР першого порядку не вичерпується введеними термінами. В першу чергу, **принцип суперпозиції розповсюджується на однорідні лінійні СДР так само, як і на однорідні лінійні ДР.**

■ **Теорема 5.1.** Нехай стовпці

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \end{pmatrix}^T,$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1(t) & v_2(t) & \cdots & v_n(t) \end{pmatrix}^T$$

є розв'язками<sup>5</sup> СДР (5.7). Тоді стовпець  $\mathbf{W} = C_1\mathbf{U} + C_2\mathbf{V}$  також є розв'язком цієї СДР при довільних  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

□ *Доведення.* За умовою  $\mathbf{U}$  є розв'язком, тобто  $\mathbf{U}' = \mathbf{F}\mathbf{U}$ . Аналогічно,  $\mathbf{V}' = \mathbf{F}\mathbf{V}$ . Потрібно довести, що  $\mathbf{W}$  – також розв'язок, тобто потрібно довести, що  $\mathbf{W}' = \mathbf{F}\mathbf{W}$ . Маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}' &= (C_1\mathbf{U} + C_2\mathbf{V})' = C_1\mathbf{U}' + C_2\mathbf{V}' = \\ &= C_1\mathbf{F}\mathbf{U} + C_2\mathbf{F}\mathbf{V} = \mathbf{F}(C_1\mathbf{U} + C_2\mathbf{V}) = \mathbf{F}\mathbf{W}, \end{aligned}$$

що і потрібно було довести. □

*Зауваження.* Очевидно, ця теорема легко узагальнюється на випадок довільної кількості розв'язків.

<sup>4</sup>Мається на увазі поелементна рівність  $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{const} & \text{const} \\ \text{const} & \text{const} \end{pmatrix}$ .

<sup>5</sup>Нагадаємо, розв'язок СДР – це *впорядкована сукупність* потрібної кількості функцій, тобто «набір»  $\{x_k\}$ . Для впорядкування цих функцій їх зручно зображати як матричні елементи деякого стовпця, тобто подавати розв'язок у вигляді  $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{pmatrix}^T$ , або  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$ .

Нехай стовпець

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \end{pmatrix}^T$$

є деяким розв'язком однорідної СДР (5.7), а стовпець

$$\mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_n^{(2)} \end{pmatrix}^T$$

є деяким іншим розв'язком тієї ж СДР. За доведеною теоремою стовпець  $\mathbf{X} = C_1\mathbf{X}^{(1)} + C_2\mathbf{X}^{(2)}$  також є розв'язком. Питання тепер полягає в тому, чи є цей розв'язок загальним.

Як і у випадку лінійних однорідних рівнянь вищих порядків, на поставлене запитання можна відповісти «так» за виконання двох умов: 1) набір стовпців  $\mathbf{X}^{(k)}$  повинен бути повним; 2) ці стовпці повинні бути лінійно незалежними.

◆ **Означення 5.7.** Для лінійної однорідної СДР (5.7)  $n$ -го порядку утворимо функціональну квадратну матрицю  $\mathbf{R}(t)$  порядку  $n \times n$ , в якій  $k$ -й стовпець є розв'язком  $\mathbf{X}^{(k)}$ :

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Якщо стовпці цієї матриці лінійно незалежні (звичайно, для довільного моменту  $t$ ), то її називають **фундаментальною матрицею системи** (5.7), або **матрицею фундаментальних розв'язків**. Кожний окремий стовпець цієї матриці називають **фундаментальним розв'язком системи** (5.7).

■ **Теорема 5.2.** Загальний розв'язок лінійної однорідної СДР (5.7) може бути поданий у вигляді суперпозиції стовпців фундаментальної матриці:

$$\mathbf{X} = C_1\mathbf{X}^{(1)} + C_2\mathbf{X}^{(2)} + \cdots + C_n\mathbf{X}^{(n)}.$$

□ *Доведення.* До СДР (5.7) приєднаємо довільні початкові умови:  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ , або в розширеному вигляді

$$\mathbf{X}(0) \equiv \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{X}_0.$$

Утворюється задача Коші, розв'язок якої існує і є єдиним.

Нехай стовпці  $\mathbf{X}^{(k)}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , деякі розв'язки СДР (5.7), і вони утворюють фундаментальну матрицю  $\mathbf{R}(t)$  даної СДР. Те, що суперпозиція  $\mathbf{X} = \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{X}^{(k)}$  є розв'язком, випливає з доведеної вище теореми. Щоб довести, що цей розв'язок є загальним, достатньо довести, що довільний розв'язок задачі Коші міститься всередині цієї суперпозиції. Іншими словами, для довільного стовпця  $\mathbf{X}_0$  достатньо довести існування набору коефіцієнтів  $C_k$ , за яких виконано початкові умови.

Маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{X}^{(k)} = C_1 \mathbf{X}^{(1)} + C_2 \mathbf{X}^{(2)} + \dots + C_n \mathbf{X}^{(n)} = \\ &= C_1 \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + \dots + C_n \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_n^{(n)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1^{(1)} C_1 + x_1^{(2)} C_2 + \dots + x_1^{(n)} C_n \\ x_2^{(1)} C_1 + x_2^{(2)} C_2 + \dots + x_2^{(n)} C_n \\ \vdots \\ x_n^{(1)} C_1 + x_n^{(2)} C_2 + \dots + x_n^{(n)} C_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}, \\ \mathbf{X}(t) &= \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{R}(t) (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n)^T. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Отже, початкові умови набувають вигляду

$$\mathbf{R}(0) (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n)^T = \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0.$$

Отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів  $C_k$ . Її розв'язок:

$$(C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n)^T = \mathbf{R}^{-1}(0) \mathbf{X}_0.$$

Очевидно, він існує і є єдиним. Справді, матриця  $\mathbf{R}$  є фундаментальною, і тому не виродженою. Тоді обернена матриця  $\mathbf{R}^{-1}(0)$  існує і є єдиною.  $\square$

Розглянута теорема, на жаль, поки не відкриває шляхів до побудови загального розв'язку СДР, оскільки не надає способів знаходження фундаментальної матриці системи. До таких способів ми повернемося нижче.

Проте, якщо фундаментальна матриця відома, то доведена теорема відкриває шлях до розв'язання задачі Коші. Справді, користуючись виразом для стовпця коефіцієнтів  $C_k$ , розв'язок (5.8) задачі Коші зручно подати у компактному вигляді

$$\mathbf{X}_{\text{Коші}} = \mathbf{R}(t)\mathbf{R}^{-1}(0)\mathbf{X}_0. \quad (5.9)$$

## 5.3 Метод виключення

### 5.3.1 Загальний випадок

В п. 5.1 ми розглядали, як СДР вищого порядку можна звести до СДР першого порядку ціною збільшення кількості рівнянь. Розглянемо тепер обернену задачу: нормальну СДР, яка містить  $n$  рівнянь, звести до одного рівняння не вище  $n$ -го порядку відносно однієї шуканої функції. Обмежимося випадком  $n = 3$ , оскільки при збільшенні значення  $n$  якісні зміни алгоритму не відбуваються.

Нехай задано СДР (5.3) при  $n = 3$ :

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t; x_1, x_2, x_3), \\ x'_2 = f_2(t; x_1, x_2, x_3), \\ x'_3 = f_3(t; x_1, x_2, x_3). \end{cases} \quad (*)$$

Поставимо за мету побудувати диференціальне рівняння не вище третього порядку відносно шуканої функції  $x_1(t)$ , виключивши невідомі функції  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ .

Скористаємося правилом диференціювання складної функції однієї змінної у вигляді:

$$\frac{d}{dt} [\varphi(t; x(t), y(t), z(t))] = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Продиференціюємо перше рівняння системи (\*) за змінною  $t$ :

$$x''_1 = \frac{df_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt}.$$

Тут похідні  $\frac{dx_1}{dt} = x'_1 = f_1$ ,  $\frac{dx_2}{dt} = x'_2 = f_2$ ,  $\frac{dx_3}{dt} = x'_3 = f_3$  відомі з системи (\*) і виражені лише через аргумент  $t$  і функції  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  (але не через їх похідні). Отримуємо:

$$x''_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot f_3.$$

Очевидно, утворилась складна функція однієї змінної  $t$ :

$$x''_1 = \Phi_1(t; x_1, x_2, x_3),$$

яка не залежить від жодної похідної  $x'_1$ ,  $x'_2$ ,  $x'_3$ . Продиференціюємо її за змінною  $t$  за тим самим правилом:

$$\begin{aligned} x'''_1 &= \frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt} = \\ &= \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} \cdot f_1 + \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} \cdot f_2 + \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} \cdot f_3. \end{aligned}$$

Утворилась ще одна складна функція однієї змінної  $t$ :

$$x'''_1 = \Phi_2(t; x_1, x_2, x_3).$$

Отже, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t; x_1, x_2, x_3), \\ x''_1 = \Phi_1(t; x_1, x_2, x_3), \\ x'''_1 = \Phi_2(t; x_1, x_2, x_3). \end{cases} \quad (**)$$

В системі (\*\*) розглянемо усі рівняння, крім першого:

$$\begin{cases} x''_1 = \Phi_1(t; x_1, x_2, x_3), \\ x'''_1 = \Phi_2(t; x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Ця система не містить жодної похідної (крім похідних функції  $x_1$ ). Припустимо, її вдалося розв'язати<sup>6</sup> відносно усіх функцій, крім  $x_1$ , і її розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} x_2 = \Psi_1(t; x_1, x''_1, x'''_1), \\ x_3 = \Psi_2(t; x_1, x''_1, x'''_1). \end{cases}$$

---

<sup>6</sup>Мається на увазі аналітичне розв'язування без застосування інтегрування. В загальному випадку функції  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  можуть виявитись доволі громіздкими, тому хід розв'язування такої системи заздалегідь невідомий. Ми навіть не можемо гарантувати, що ця система взагалі може бути розв'язаною аналітично. Втім, це проблема теорії функцій багатьох змінних, а не теорії диференціальних рівнянь.

Тоді, підставляючи ці розв'язки до першого рівняння системи (\*\*), отримуємо наступне рівняння

$$x_1' = f_1(t; x_1, \Psi_1(t; x_1, x_1'', x_1'''), \Psi_2(t; x_1, x_1'', x_1''')). \quad (5.10)$$

Отже, з трьох рівнянь системи (\*) залишилось лише одне. Але воно тепер містить тільки одну невідому функцію  $x_1$ ; решту функцій тут виключено. «Розплатою» за виключення решти невідомих функцій є зростання порядку рівняння з першого до третього (принаймні, не вищого за третій).

Припустимо, що рівняння (5.10) розв'язано, і його загальний розв'язок є

$$x_1(t) = \varphi_1(t; C_1, C_2, C_3).$$

Тоді для знаходження решти функцій достатньо лише виконати операції диференціювання:

$$\begin{cases} x_2(t; C_1, C_2, C_3) = \Psi_1(t; \varphi_1, \varphi_1'', \varphi_1'''), \\ x_3(t; C_1, C_2, C_3) = \Psi_2(t; \varphi_1, \varphi_1'', \varphi_1'''). \end{cases}$$

Звичайно, загальним розв'язком початкової СДР (\*) буде впорядкована сукупність  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , кожна компонента якої залежить від  $t$ , а також від  $C_1, C_2, C_3$ .

Тепер для побудови частинного розв'язку потрібно визначити константи  $C_1, C_2, C_3$ . Якщо систему (\*) доповнити початковими умовами (5.4), то за їх допомогою залишається скласти (і далі розв'язати) систему

$$\begin{cases} x_1(0; C_1, C_2, C_3) = x_{01}, \\ x_2(0; C_1, C_2, C_3) = x_{02}, \\ x_3(0; C_1, C_2, C_3) = x_{03} \end{cases}$$

при відомій правій частині. Її розв'язок  $\{C_1, C_2, C_3\}$  і дозволить конкретизувати впорядковану сукупність  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , тобто знайти розв'язок задачі Коші.

Наприкінці цього пункту наведемо приклад виключення невідомої з нелінійної СДР без подальшого розв'язування утвореного ДР.

◁ *Приклад 5.3.* Виключимо  $x_2$  з системи

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1^2\sqrt{x_2}; \\ x_2' = e^{x_1}x_2^{3/2}. \end{cases}$$

Диференціюємо перше рівняння:

$$x_1'' = 4x_1x_1' \cdot \sqrt{x_2} + x_1^2 \cdot \frac{x_2'}{\sqrt{x_2}}.$$

Підставимо до правої частини перші похідні, визначені умовою задачі:

$$x_1'' = 4x_1 \cdot 2x_1^2 \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{x_2} + x_1^2 \cdot \frac{e^{x_1} x_2^{3/2}}{\sqrt{x_2}} = 8x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2 e^{x_1} = \Phi(x_1, x_2).$$

Звідси маємо:

$$x_2 = \frac{x_1''}{8x_1^3 + x_1^2 e^{x_1}} = \Psi(x_1, x_1'').$$

Тоді перше рівняння системи набуває вигляду

$$x_1' = 2x_1^2 \sqrt{\frac{x_1''}{8x_1^3 + x_1^2 e^{x_1}}} = 2x_1 \sqrt{\frac{x_1''}{8x_1 + e^{x_1}}},$$

і змінну  $x_2$  виключено.  $\triangleright$

### 5.3.2 Застосування методу виключення для лінійної нормальної СДР

Як однорідна, так і неоднорідна лінійна СДР може мати і сталі, і змінні коефіцієнти. Найскладнішим з цих чотирьох випадків є випадок неоднорідної лінійної СДР зі змінними коефіцієнтами. Застосуємо метод виключення саме до нього. Обмежимося системою другого порядку, тобто розглянемо СДР (5.5):

$$\begin{cases} x_1' = f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + g_1, \\ x_2' = f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + g_2. \end{cases} \quad (5.5)$$

Тут усі величини залежать від  $t$ . Продиференціюємо перше рівняння системи:

$$x_1'' = f'_{11}x_1 + f_{11}x_1' + f'_{12}x_2 + f_{12}x_2' + g_1'.$$

Підставимо сюди вирази для  $x_1'$ ,  $x_2'$ :

$$\begin{aligned} x_1'' &= f'_{11}x_1 + f_{11}(f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + g_1) + \\ &+ f'_{12}x_2 + f_{12}[f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + g_2] + g_1' = \\ &= (f'_{11} + f_{11}^2 + f_{12}f_{21})x_1 + [f'_{12} + f_{12}(f_{11} + f_{22})]x_2 + \\ &+ f_{11}g_1 + f_{12}g_2 + g_1' = \Phi_1(t; x_1, x_2) \end{aligned}$$

(позначення  $\Phi_1$  – відповідно до загального випадку, розглянутого в п. 5.3.1). Система з цього рівняння і першого рівняння системи (5.5) відповідає системі (\*\*\*) загального випадку. З останнього рівняння виключаємо змінну  $x_2$ :

$$x_2 = \frac{x_1'' - (f'_{11} + f_{11}^2 + f_{12}f_{21})x_1 - f_{11}g_1 - f_{12}g_2 - g_1'}{f'_{12} + f_{12}(f_{11} + f_{22})} = \Psi_1(t; x_1, x_1'')$$

(позначення  $\Psi_1$  – відповідно до загального випадку). Підставляючи цей вираз до першого рівняння системи (5.5), отримаємо диференціальне рівняння відносно шуканої функції  $x_1$ . Легко бачити, що воно буде лінійним неоднорідним ДР зі змінними коефіцієнтами. Знайшовши з нього  $x_1$ , далі знайдемо  $x_2$  за допомогою функції  $\Psi_1$ .

Розглянутий випадок все ще є складним. Подальші спрощення можливі за рахунок наступного. Якщо СДР – зі сталими коефіцієнтами, то  $f'_{ik} = 0$ . Якщо СДР при цьому ще й однорідна, то  $g_i = 0$ . В цьому разі для  $x_1$  виникає лінійне однорідне ДР зі сталими коефіцієнтами, а техніка розв'язування таких задач нам вже відома.

◁ *Приклад 5.4.* Розв'яжемо СДР

$$\begin{cases} x'_1 = 7x_1 - 5x_2, \\ x'_2 = 4x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Це лінійна однорідна СДР зі сталими коефіцієнтами. Продиференціюємо перше рівняння:

$$x''_1 = 7x'_1 - 5x'_2.$$

Підставимо сюди вирази для  $x'_1$ ,  $x'_2$  з умови задачі:

$$x''_1 = 7(7x_1 - 5x_2) - 5(4x_1 - 2x_2) = 29x_1 - 25x_2.$$

Виключимо звідси  $x_2$ :

$$x_2 = \frac{29x_1 - x''_1}{25}. \quad (***)$$

Підставимо цей вираз в перше рівняння умови задачі:

$$x'_1 = 7x_1 - 5 \cdot \frac{29x_1 - x''_1}{25}, \quad x'_1 = 7x_1 - \frac{29x_1 - x''_1}{5},$$

$$5x'_1 = 35x_1 - 29x_1 + x''_1, \quad x''_1 - 5x'_1 + 6x_1 = 0.$$

Змінну  $x_2$  виключили, а для змінної  $x_1$  отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ , його корені  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ . Тоді загальний розв'язок

$$x_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}.$$

Похідні:

$$x_1'(t) = 2C_1e^{2t} + 3C_2e^{3t}, \quad x_1''(t) = 4C_1e^{2t} + 9C_2e^{3t}.$$

Підставляючи ці вирази до (\*\*\*), отримуємо:

$$x_2 = \frac{29(C_1e^{2t} + C_2e^{3t}) - (4C_1e^{2t} + 9C_2e^{3t})}{25} = C_1e^{2t} + \frac{4}{5}C_2e^{3t}.$$

$$\text{Віповідь: } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \\ C_1e^{2t} + \frac{4}{5}C_2e^{3t} \end{pmatrix}. \triangleright$$

◁ Приклад 5.5. Розв'яжемо СДР

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - x_2 - 7t - 2, \\ x_2' = 3x_1 + x_2 - 9t - 1. \end{cases}$$

Це лінійна неоднорідна СДР зі сталими коефіцієнтами. Продиференціюємо перше рівняння за змінною  $t$ :

$$x_1'' = 5x_1' - x_2' - 7.$$

Підставимо сюди вирази для  $x_1'$ ,  $x_2'$  з умови задачі:

$$\begin{aligned} x_1'' &= 5(5x_1 - x_2 - 7t - 2) - (3x_1 + x_2 - 9t - 1) - 7 = \\ &= 22x_1 - 6x_2 - 26t - 16. \end{aligned}$$

Виразимо звідси  $x_2$ :

$$x_2 = \frac{22x_1 - 26t - 16 - x_1''}{6}. \quad (** **)$$

Підставимо цей вираз в перше рівняння умови задачі:

$$x_1' = 5x_1 - \frac{22x_1 - 26t - 16 - x_1''}{6} - 7t - 2,$$

$$6x_1' = 30x_1 - (22x_1 - 26t - 16 - x_1'') - 42t - 12,$$

$$x_1'' - 6x_1' + 8x_1 = 16t - 4.$$

Змінну  $x_2$  виключили, а для змінної  $x_1$  отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ , його корені  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 4$ . Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$x_{1, \text{одн}}(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{4t}.$$

Оскільки права частина є многочленом першого степеня і число  $\lambda = 0$  не є коренем характеристичного рівняння, то маємо нерезонансний випадок, і частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_{1,*}(t) = at + b, \quad x'_{1,*}(t) = a, \quad x''_{1,*}(t) = 0.$$

Неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$0 - 6a + 8(at + b) = 16t - 4.$$

Методом невизначених коефіцієнтів маємо систему:

$$\begin{array}{l|l} t^1: & 8a = 16; \\ t^0: & -6a + 8b = -4. \end{array}$$

Її розв'язок  $a = 2$ ,  $b = 1$ . Тоді частинний розв'язок неоднорідного ДР дорівнює  $x_{1,*}(t) = 2t + 1$ . Тоді загальний розв'язок неоднорідного ДР:

$$x_1(t) = x_{1, \text{одн}}(t) + x_{1,*}(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} + 2t + 1.$$

Похідні:

$$x'_1(t) = 2C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{4t} + 2, \quad x''_1(t) = 4C_1 e^{2t} + 16C_2 e^{4t}.$$

Підставляючи ці вирази до (\*\* \*\*), отримуємо:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{22(C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} + 2t + 1) - 26t - 16 - (4C_1 e^{2t} + 16C_2 e^{4t})}{6} = \\ &= 3C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} + 3t + 1. \end{aligned}$$

*Віповідь:*  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} + 2t + 1 \\ 3C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} + 3t + 1 \end{pmatrix}.$   $\triangleright$

## 5.4 Метод заміни

Цей метод ми розповсюдимо лише на лінійні СДР і обмежимося тільки т.зв. заміною Ейлера. Звичайно, термін «метод заміни» можна тлумачити і в більш широкий спосіб.

## 5.4.1 Загальна ідея

Цей підпункт присвячено побудові фундаментальної матриці  $\mathbf{R}(t)$ .

При розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами ми шукали фундаментальні розв'язки за допомогою *заміни (підстановки) Ейлера* (4.7):  $y = e^{\lambda x}$ , і далі будували суперпозицію цих розв'язків. Продемонструємо, як аналогічну заміну можна застосувати до лінійної однорідної СДР зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо СДР  $\mathbf{X}' = \mathbf{F}\mathbf{X}$  порядку  $n$ . Тут  $\mathbf{F}$  – квадратна матриця порядку  $n \times n$  зі сталими коефіцієнтами. Шукатимемо розв'язок у вигляді  $\mathbf{X} = \mathbf{U}e^{\lambda t}$  (мається на увазі поелементне множення на експоненціальний співмножник), де  $\mathbf{U} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)^T$  – стовпець висотою  $n$ . Матричні елементи  $u_i$  вважаємо константами. При підстановці СДР набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

або в матричній формі  $\mathbf{F}\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U}$ . Отже,  $\lambda$  повинно бути *власним значенням* матриці  $\mathbf{F}$ , а  $\mathbf{U}$  – *власним вектором*, який відповідає цьому значенню. Маємо:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_{11} - \lambda & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження матричних елементів  $u_i$ . Введемо матрицю  $\mathbf{A} = \mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}$ , де  $\mathbf{E}$  – одинична матриця. Тоді система (5.11) набуває вигляду  $\mathbf{A}\mathbf{U} = \{\mathbf{0}\}$  (права частина – стовпець висотою  $n$ , який складається з нулів). Оскільки система (5.11) є однорідною, то для існування нетривіальних розв'язків її матриця повинна бути виродженою. Отже, рівняння для знаходження власних чисел  $\lambda$  має вигляд  $\det \mathbf{A} = 0$ , або  $\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ . Це рівняння називають *характеристичним*. Воно є алгебраїчним рівнянням  $n$ -го степеня. Отже, воно має  $n$  коренів  $\lambda_k$  (з урахуванням їх кратностей). При підстановці кожного такого кореня до системи (5.11) з неї можна знайти нетривіальний стовпець-розв'язок

$$\mathbf{U}^{(k)} = \begin{pmatrix} u_1^{(k)} & u_2^{(k)} & \dots & u_n^{(k)} \end{pmatrix}^T.$$

Це породжує черговий частинний розв'язок  $\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{U}^{(k)}e^{\lambda_k t}$ . Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідної СДР:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{X}^{(k)} = \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{U}^{(k)} e^{\lambda_k t}.$$

Нагадаємо, фундаментальна матриця  $\mathbf{R}(t)$  – це матриця, стовпці якої є частинними розв'язками  $\mathbf{X}^{(k)}$ . Тоді той самий загальний розв'язок  $\mathbf{X}$  можна також подати у вигляді (5.8):

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{R}(t)\mathbf{C}.$$

Тут  $\mathbf{C} = (C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n)^T$  – стовпець довільних сталих  $C_k$ .

## 5.4.2 Випадок простих дійсних коренів

Розглянемо випадок, коли серед коренів  $\lambda_k$  немає кратних. В цьому разі система усіх стовпців  $\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{U}^{(k)} e^{\lambda_k t}$  є лінійно незалежною, а суперпозиція  $\mathbf{X} = \sum_{(k)} C_k \mathbf{U}^{(k)} e^{\lambda_k t}$  є загальним розв'язком.

◁ *Приклад 5.6.* Знову розв'яжемо СДР (див. приклад 5.4)

$$\begin{cases} x_1' = 7x_1 - 5x_2, \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Матриця СДР:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння  $\det(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}) = 0$  набуває вигляду

$$\det \begin{pmatrix} 7 - \lambda & -5 \\ 4 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad (7 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 \cdot (-5) = 0,$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Його корені  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ . Знайдемо стовпець  $\mathbf{U}^{(1)}$  власного вектора, який відповідає власному значенню  $\lambda_1$ . Для цього розв'яжемо систему (5.11) при використанні цього значення:

$$\begin{pmatrix} f_{11} - \lambda_1 & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 7 - 2 & -5 \\ 4 & -2 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, другий рядок лінійно залежить від першого, і його можна відкинути. З першого рядка знаходимо:  $5u_1^{(1)} - 5u_2^{(1)} = 0$ ,  $u_2^{(1)} = u_1^{(1)}$ . Тоді

$$\mathbf{U}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_1^{(1)} \end{pmatrix} = u_1^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В якості  $u_1^{(1)}$  можна обрати довільне число, відмінне від нуля. Справді, стовпець  $\mathbf{U}^{(1)}$  достатньо визначити з точністю до мультиплікативної сталої (тієї, на яку домножають), оскільки ми потім будемо домножати цей стовпець на  $\forall C_1 \in \mathbb{R}$ . Зручно покласти  $u_1^{(1)} = 1$ . Тоді перший фундаментальний розв'язок

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{U}^{(1)} e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Знайдемо тепер стовпець  $\mathbf{U}^{(2)}$  власного вектора, який відповідає власному значенню  $\lambda_2$ . Для цього розв'яжемо систему (5.11) при використанні цього значення:

$$\begin{pmatrix} f_{11} - \lambda_2 & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 7 - 3 & -5 \\ 4 & -2 - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Другий рядок знову можна відкинути. Маємо:  $4u_1^{(2)} - 5u_2^{(2)} = 0$ ,  $u_2^{(2)} = \frac{4}{5}u_1^{(2)}$ . Тоді

$$\mathbf{U}^{(2)} = \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ \frac{4}{5}u_1^{(2)} \end{pmatrix} = u_1^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Зручно покласти  $u_1^{(2)} = 1$ . Отже, другий фундаментальний розв'язок

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{U}^{(2)} e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Тоді загальний розв'язок СДР:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &\equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \mathbf{X}^{(1)} + C_2 \mathbf{X}^{(2)} = \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ C_1 e^{2t} + \frac{4}{5} C_2 e^{3t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

що збігається з відповіддю, отриманою вище в прикладі 5.4.

Формально отриманий розв'язок також може бути поданий за допомогою фундаментальної матриці у вигляді (5.8):

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & \frac{4}{5}e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \triangleright$$

### 5.4.3 Випадок простих комплексних коренів

Власні числа можуть виявитись комплексними. В цьому разі процедура залишається тією самою, ускладнюючись лише за рахунок залучення арифметики комплексних чисел.

◁ Приклад 5.7. Розв'яжемо СДР

$$\begin{cases} x_1' = 8x_1 - 13x_2, \\ x_2' = 5x_1 - 8x_2. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння  $\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) = 0$  набуває вигляду

$$\det \begin{pmatrix} 8 - \lambda & -13 \\ 5 & -8 - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad (8 - \lambda)(-8 - \lambda) - 5 \cdot (-13) = 0,$$

$$\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Знайдемо стовпець  $\mathbf{U}^{(1)}$  власного вектора, який відповідає власному значенню  $\lambda_1 = i$ . Система (5.11) набуває вигляду:

$$\begin{pmatrix} 8 - i & -13 \\ 5 & -8 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Другий рядок відкидаємо як лінійно залежний<sup>7</sup>. З першого рядка знаходимо:  $(8-i)u_1^{(1)} - 13u_2^{(1)} = 0$ ,  $u_2^{(1)} = \frac{8-i}{13}u_1^{(1)}$ . Тоді

$$\mathbf{U}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ \frac{8-i}{13}u_1^{(1)} \end{pmatrix} = u_1^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{8-i}{13} \end{pmatrix}.$$

Зручно покласти  $u_1^{(1)} = 13$ . Одержуємо перший фундаментальний розв'язок

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{U}^{(1)}e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8-i \end{pmatrix} e^{it}.$$

Знайдемо стовпець  $\mathbf{U}^{(2)}$  власного вектора, який відповідає власному значенню  $\lambda_2 = -i$ . Система (5.11) набуває вигляду:

$$\begin{pmatrix} 8+i & -13 \\ 5 & -8+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Другий рядок відкидаємо як лінійно залежний<sup>8</sup>. З першого рядка знаходимо:  $(8+i)u_1^{(2)} - 13u_2^{(2)} = 0$ ,  $u_2^{(2)} = \frac{8+i}{13}u_1^{(2)}$ . Тоді

$$\mathbf{U}^{(2)} = \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ \frac{8+i}{13}u_1^{(2)} \end{pmatrix} = u_1^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{8+i}{13} \end{pmatrix}.$$

Зручно покласти  $u_1^{(2)} = 13$ . Одержуємо другий фундаментальний розв'язок

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{U}^{(2)}e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8+i \end{pmatrix} e^{-it}.$$

Отже, загальний розв'язок СДР:

$$\mathbf{X} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \mathbf{X}^{(1)} + C_2 \mathbf{X}^{(2)} = C_1 \begin{pmatrix} 13 \\ 8-i \end{pmatrix} e^{it} + C_2 \begin{pmatrix} 13 \\ 8+i \end{pmatrix} e^{-it}.$$

Коефіцієнти заданої СДР – дійсні числа. Природно було би і розв'язок отримати як вираз, який містить дійсні коефіцієнти. Це можливо зробити, вважаючи числа  $C_1$ ,  $C_2$  комплексними. Покладемо<sup>9</sup>:

$$C_1 = M + iN, \quad C_2 = M - iN.$$

З використанням формули Ейлера (4.14) отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (M + iN) \begin{pmatrix} 13 \\ 8-i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) + (M - iN) \begin{pmatrix} 13 \\ 8+i \end{pmatrix} (\cos t - i \sin t) = \\ &= \begin{pmatrix} 13(M + iN) + 13(M - iN) \\ (8-i)(M + iN) + (8+i)(M - iN) \end{pmatrix} \cos t + \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Другий рядок виникає, якщо перший поелементно домножити на  $\frac{8+i}{13}$ .

<sup>8</sup>Другий рядок виникає, якщо перший поелементно домножити на  $\frac{8-i}{13}$ .

<sup>9</sup>Числа  $M$ ,  $N$  в загальному випадку теж слід розглядати як комплексні. Якби числа  $M$ ,  $N$  були дійсними, то перехід від  $C_1$ ,  $C_2$  до  $M$ ,  $N$  був би прихованою формою твердження про те, що числа  $C_1$ ,  $C_2$  є комплексно спряженими одне до одного. При цьому розв'язок, якщо його розуміти як комплексний, перестав би бути загальним.

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{13(M+iN) - 13(M-iN)}{(8-i)(M+iN) - (8+i)(M-iN)} \right) i \sin t = \\
& = \left( \frac{26M}{16M+2N} \right) \cos t + \left( \frac{26iN}{16iN-2iM} \right) i \sin t = \\
& = \left( \frac{26M \cos t - 26N \sin t}{(16M+2N) \cos t + (2M-16N) \sin t} \right) \cdot \triangleright
\end{aligned}$$

Виконані процедури можуть видаватись громіздкими. Але найбільш складну їх частину – роботу з комплексними числами – можна значно спростити. Покажемо, як це зробити.

Розглянемо лінійну однорідну СДР з матрицею  $\mathbf{F}$ , елементи якої є дійсними числами. Нехай деяке власне число  $\lambda$  виявилось комплексним,  $\lambda = a + ib$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ); йому відповідає власний вектор  $\mathbf{U}$ , матричні елементи якого теж є комплексними числами. Очевидно, оскільки матричні елементи матриці  $\mathbf{F}$  є дійсними числами, то число  $\bar{\lambda} = a - ib$  також буде власним, і йому буде відповідати власний вектор  $\bar{\mathbf{U}}$  (комплексне спряження відбувається поелементно). Тоді фундаментальні розв'язки можуть бути записаними у вигляді  $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)} = \mathbf{U}e^{\lambda t}$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}^{(2)} = \bar{\mathbf{U}}e^{\bar{\lambda}t}$ , а їх внесок в загальну суперпозицію

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \tilde{C}_1 \tilde{\mathbf{X}}^{(1)} + \tilde{C}_2 \tilde{\mathbf{X}}^{(2)} = \tilde{C}_1 \mathbf{U}e^{(a+ib)t} + \tilde{C}_2 \bar{\mathbf{U}}e^{(a-ib)t}, \\
\mathbf{X}e^{-at} &= \tilde{C}_1 \mathbf{U}e^{ibt} + \tilde{C}_2 \bar{\mathbf{U}}e^{-ibt}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Введемо стовпці

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{2} (\mathbf{U} + \bar{\mathbf{U}}), \quad \mathbf{V}_2 = \frac{1}{2i} (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}).$$

Ці стовпці є дійсною і уявною частинами стовпця  $\mathbf{U}$ . Справді, легко отримати:

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}_1 + i\mathbf{V}_2, \quad \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{V}_1 - i\mathbf{V}_2.$$

Тоді з використанням формули Ейлера (4.14) рівняння (5.12) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}e^{-at} &= \tilde{C}_1 (\mathbf{V}_1 + i\mathbf{V}_2) (\cos bt + i \sin bt) + \tilde{C}_2 (\mathbf{V}_1 - i\mathbf{V}_2) (\cos bt - i \sin bt) = \\
&= \tilde{C}_1 \mathbf{V}_1 \cos bt + \tilde{C}_1 i \mathbf{V}_1 \sin bt + \tilde{C}_1 i \mathbf{V}_2 \cos bt - \tilde{C}_1 \mathbf{V}_2 \sin bt + \\
&+ \tilde{C}_2 \mathbf{V}_1 \cos bt - \tilde{C}_2 i \mathbf{V}_1 \sin bt - \tilde{C}_2 i \mathbf{V}_2 \cos bt - \tilde{C}_2 \mathbf{V}_2 \sin bt = \\
&= \cos bt \left[ \mathbf{V}_1 (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) + \mathbf{V}_2 (\tilde{C}_1 i - \tilde{C}_2 i) \right] + \\
&+ \sin bt \left[ \mathbf{V}_1 (\tilde{C}_1 i - \tilde{C}_2 i) - \mathbf{V}_2 (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) \right].
\end{aligned}$$

Позначимо  $C_1 = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$ ,  $C_2 = \tilde{C}_1 i - \tilde{C}_2 i$ . Тоді

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}e^{-at} &= \cos bt (C_1 \mathbf{V}_1 + C_2 \mathbf{V}_2) + \sin bt (C_2 \mathbf{V}_1 - C_1 \mathbf{V}_2) = \\
&= C_1 (\mathbf{V}_1 \cos bt - \mathbf{V}_2 \sin bt) + C_2 (\mathbf{V}_2 \cos bt + \mathbf{V}_1 \sin bt), \\
\mathbf{X} &= C_1 (\mathbf{V}_1 e^{at} \cos bt - \mathbf{V}_2 e^{at} \sin bt) + C_2 (\mathbf{V}_2 e^{at} \cos bt + \mathbf{V}_1 e^{at} \sin bt).
\end{aligned}$$

Позначимо тепер

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{V}_1 e^{at} \cos bt - \mathbf{V}_2 e^{at} \sin bt, \quad \mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{V}_2 e^{at} \cos bt + \mathbf{V}_1 e^{at} \sin bt. \tag{5.13}$$

Остаточно, згідно з принципом суперпозиції отримуємо:

$$\mathbf{X} = C_1 \mathbf{X}^{(1)} + C_2 \mathbf{X}^{(2)}.$$

Звичайно, тут виписано не загальний розв'язок, а лише його фрагмент, який відповідає парі власних чисел  $\lambda = a \pm ib$  (в разі, коли вони є простими коренями). Фактично ми здійснили перехід<sup>10</sup> від пари фундаментальних розв'язків  $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{X}}^{(2)}$  до пари фундаментальних розв'язків  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}$  (5.13), в результаті якого формально дії з комплексними числами значно спрощуються і зводяться до виділення дійсної і уявної частин. Таким чином, пропонується елементарний алгоритм:

1. Розв'язавши характеристичне рівняння, знайти власне число  $\lambda = a + ib$  і виділити в ньому дійсну частину  $a$  і уявну частину  $b$ .
2. Знайти відповідний власний вектор  $\mathbf{U}$  і виділити в ньому дійсну частину  $\mathbf{V}_1$  і уявну частину  $\mathbf{V}_2$ .
3. За формулами (5.13) знайти два фундаментальні розв'язки  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}$ .
4. За принципом суперпозиції побудувати загальний розв'язок (або відповідний внесок до нього).

< Приклад 5.8. Повернемося до прикладу 5.7. Там ми отримали  $\lambda = \pm i$ , отже,  $a = 0$ ,  $b = 1$ . Відповідний власний вектор

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді за формулами (5.13) отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin t = \begin{pmatrix} 13 \cos t \\ 8 \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \\ \mathbf{X}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} \sin t = \begin{pmatrix} 13 \sin t \\ 8 \sin t - \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Остаточно, за принципом суперпозиції отримуємо:

$$\mathbf{X} = C_1 \mathbf{X}^{(1)} + C_2 \mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 13C_1 \cos t + 13C_2 \sin t \\ (8C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + 8C_2) \sin t \end{pmatrix}.$$

Ця відповідь в точності збігатиметься з отриманою раніше, якщо тут покласти  $C_1 = 2M$ ,  $C_2 = -2N$ . Цікаво зауважити, що в цьому разі шукати другий власний вектор  $\mathbf{U}^{(2)} = \bar{\mathbf{U}}$  не знадобилось, оскільки він вже врахований формулами (5.13). ▷

## 5.4.4 Випадок кратних коренів

В разі кратних коренів  $\lambda_k$  викладена теорія значно ускладнюється. Нехай корінь  $\lambda_k$  має кратність  $p$ . Кількість лінійно незалежних власних векторів  $\mathbf{U}^{(k)}$ , які йому відповідають, може дорівнювати  $p$ , але може виявитись і меншою. Який з випадків станеться – залежить від властивостей матриці  $\mathbf{F}$ . Наприклад, якщо матриця самоспряжена (ермітова), то кількість лінійно незалежних власних векторів, які відповідають кратному кореню, буде збігатись із його

<sup>10</sup>Нагадаємо, такий перехід ми вже робили в п. 4.3.5.

кратністю  $p$ . В цьому разі фундаментальна матриця  $\mathbf{R}$  системи будується як звичайно – зі стовпців  $\mathbf{X}^{(k)}$ . Якщо ж лінійно незалежних власних векторів не вистачає, то їх доповнюють векторами  $\mathbf{U}^{(k)}te^{\lambda_k t}$ ,  $\mathbf{U}^{(k)}t^2e^{\lambda_k t}$ , і т.д.

Зауважимо, що приєднати розв'язок  $\mathbf{U}^{(k)}te^{\lambda_k t}$  до розв'язку  $\mathbf{U}^{(k)}e^{\lambda_k t}$  означає припуститись помилки: два таких стовпці лінійно залежні (їх компоненти пропорційні з коефіцієнтом пропорційності  $t$ ), і матриця, утворена з їх використанням, не є фундаментальною.

Спробуємо шукати розв'язок у вигляді  $\mathbf{X} = \mathbf{U}te^{\lambda t} + \mathbf{V}e^{\lambda t}$ , де  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  – деякі стовпці з констант. Підставимо цей «проект розв'язку» до однорідної СДР (5.7):

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}te^{\lambda t} + \mathbf{V}e^{\lambda t})' &= \mathbf{F}(\mathbf{U}te^{\lambda t} + \mathbf{V}e^{\lambda t}), \\ \mathbf{U}e^{\lambda t} + \mathbf{U}\lambda te^{\lambda t} + \mathbf{V}\lambda e^{\lambda t} &= \mathbf{F}\mathbf{U}te^{\lambda t} + \mathbf{F}\mathbf{V}e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Методом невизначених коефіцієнтів отримуємо систему матричних рівнянь:

$$\begin{cases} te^{\lambda t}: & \mathbf{U}\lambda = \mathbf{F}\mathbf{U}; \\ e^{\lambda t}: & \mathbf{U} + \mathbf{V}\lambda = \mathbf{F}\mathbf{V}. \end{cases}$$

Отже,  $\mathbf{U}$ , як і раніше, є власним вектором, який відповідає власному числу  $\lambda$ . Тоді, вважаючи  $\mathbf{U}$  відомим, отримуємо рівняння для знаходження  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{F}\mathbf{V} - \lambda\mathbf{V} = \mathbf{U}, \quad (\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{V} = \mathbf{U}.$$

Звісно, матриця  $(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})$  є виродженою, тому з останнього рівняння достатньо знайти хоча б один розв'язок  $\mathbf{V}$ .

◁ *Приклад 5.9.* Розв'яжемо задачу Коші для СДР

$$\begin{cases} x_1' = 6x_1 - x_2, \\ x_2' = 25x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

з початковими умовами  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 4$ .

Матриця коефіцієнтів і стовпець початкових умов:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 25 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння  $\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ ,

$$\det \begin{pmatrix} 6 - \lambda & -1 \\ 25 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad (6 - \lambda)(-4 - \lambda) + 25 = 0, \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Єдине власне число – це  $\lambda = 1$  (кратності 2). Знайдемо відповідний власний вектор:

$$\begin{pmatrix} 6 - 1 & -1 \\ 25 & -4 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = 5u_1,$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 5u_1 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Зручно обрати  $u_1 = 1$ , тоді  $\mathbf{U} = (1 \ 5)^T$ , і перший фундаментальний розв'язок

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{U}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} e^t \\ 5e^t \end{pmatrix}.$$

Стовпець  $\mathbf{V}$  знайдемо з матричного рівняння  $(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{V} = \mathbf{U}$ :

$$\begin{pmatrix} 6 - 1 & -1 \\ 25 & -4 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Обидва рівняння цієї системи зводяться до рівняння  $5v_1 - v_2 = 1$ . Зручно<sup>11</sup> покласти  $v_1 = 1$ . Тоді  $v_2 = 4$ ,  $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}^T$ , і другий фундаментальний розв'язок отримуємо у вигляді

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{U}te^{\lambda t} + \mathbf{V}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} te^t + e^t \\ 5te^t + 4e^t \end{pmatrix}.$$

Тоді фундаментальна матриця

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t + e^t \\ 5e^t & 5te^t + 4e^t \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$\det \mathbf{R} = 5te^{2t} + 4e^{2t} - 5te^{2t} - 5e^{2t} = -e^{2t} \neq 0.$$

Отже, знайдена матриця і справді є фундаментальною. Обернена до неї:

$$\mathbf{R}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -5te^{-t} - 4e^{-t} & te^{-t} + e^{-t} \\ 5e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді за формулою (5.9) маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\text{Коші}} &= \begin{pmatrix} e^t & te^t + e^t \\ 5e^t & 5te^t + 4e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^t & te^t + e^t \\ 5e^t & 5te^t + 4e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t + e^t \\ 5te^t + 4e^t \end{pmatrix}. \triangleright \end{aligned}$$

У випадку більш високих кратностей у «проект розв'язку» додають вищі степені аргументу, наприклад:  $\mathbf{X} = \mathbf{U}t^2e^{\lambda t} + \mathbf{V}te^{\lambda t} + \mathbf{W}e^{\lambda t}$ .

## 5.4.5 Випадок неоднорідної СДР

Досі підстановкою Ейлера ми розв'язували однорідні лінійні СДР (5.6). Звернемось тепер до побудови розв'язку неоднорідної лінійної СДР (5.7). Метод, який ми зараз застосуємо, є узагальненням методу Лагранжа варіації довільних сталих (див. п. 4.4).

Нехай потрібно розв'язати задачу Коші для СДР (5.6). Тимчасово відкидаючи стовпець  $\mathbf{G}(t)$  вільних членів, одержуємо лінійну однорідну СДР (5.7).

Нехай її загальний розв'язок отримано у вигляді  $\mathbf{X}_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^v C_k \mathbf{X}^{(k)}$ . Нехай з усіх стовпців  $\mathbf{X}^{(k)}$  складено фундаментальну матрицю системи  $\mathbf{R}$ . Тоді аналогічно до (5.8) маємо:  $\mathbf{X}_{\text{одн}} = \mathbf{R}(t) (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n)^T$ .

Шукатимемо розв'язок неоднорідної СДР (5.6) в такому самому вигляді, як і  $\mathbf{X}_{\text{одн}}$ , тільки будемо вважати матричні елементи  $C_k$  не сталими, а шуканими функціями. Для цього утворимо матрицю-стовпець

$$\mathbf{C}(t) = (C_1(t) \ C_2(t) \ \dots \ C_n(t))^T$$

і задамося виглядом шуканого розв'язку:  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{C}(t)$ . Підставляючи його до (5.6), отримуємо:

$$(\mathbf{R}\mathbf{C})' = \mathbf{F}\mathbf{R}\mathbf{C} + \mathbf{G}, \quad \mathbf{R}'\mathbf{C} + \mathbf{R}\mathbf{C}' = \mathbf{F}\mathbf{R}\mathbf{C} + \mathbf{G}.$$

<sup>11</sup>Нагадаємо, нас влаштує будь-який розв'язок  $\mathbf{V}$ .

Тут стовпець  $\mathbf{R}'\mathbf{C}$  є розв'язком однорідної СДР, тобто  $\mathbf{R}'\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{R}\mathbf{C}$ . Тоді залишається  $\mathbf{R}\mathbf{C}' = \mathbf{G}$ . Але матриця  $\mathbf{R}$  – невироджена як фундаментальна. Тому обернена до неї  $\mathbf{R}^{-1}$  існує і є єдиною. Домноживши останнє матричне рівняння на цю обернену матрицю зліва, отримуємо:  $\mathbf{C}'(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{G}(t)$ . Тоді

$$\mathbf{C}(t) = \int \mathbf{C}'(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{R}^{-1}(\tau)\mathbf{G}(\tau) d\tau + \mathbf{C}_0.$$

Тут  $\mathbf{C}_0 = (C_{01} \quad C_{02} \quad \dots \quad C_{0n})^T$  – стовпець довільних сталих. Тому загальний розв'язок неоднорідної СДР має вигляд

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{C}(t) = \mathbf{R}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{R}^{-1}(\tau)\mathbf{G}(\tau) d\tau + \mathbf{R}(t)\mathbf{C}_0.$$

Перетворимо тепер цей розв'язок на розв'язок задачі Коші. Нехай початкові умови задано у вигляді  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$ , де  $\mathbf{X}_0$  – стовпець заздалегідь відомих чисел. Підставляючи до загального розв'язку значення  $t = t_0$ , отримуємо:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{R}(t_0) \int_{t_0}^{t_0} \mathbf{R}^{-1}(\tau)\mathbf{G}(\tau) d\tau + \mathbf{R}(t_0)\mathbf{C}_0.$$

Тут інтеграл дорівнює нулю, оскільки обчислюється на відрізку довжиною нуль. Тоді  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{R}(t_0)\mathbf{C}_0$ , звідки  $\mathbf{C}_0 = \mathbf{R}^{-1}(t_0)\mathbf{X}_0$  (ми вже вказали, що обернена матриця існує і є єдиною). Остаточно, розв'язок задачі Коші для неоднорідної СДР:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{R}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{R}^{-1}(\tau)\mathbf{G}(\tau) d\tau + \mathbf{R}(t)\mathbf{R}^{-1}(t_0)\mathbf{X}_0.$$

Часто покладають  $t_0 = 0$ . В цьому разі

$$\mathbf{X}_{\text{Коші}}(t) = \mathbf{R}(t) \int_0^t \mathbf{R}^{-1}(\tau)\mathbf{G}(\tau) d\tau + \mathbf{R}(t)\mathbf{R}^{-1}(0)\mathbf{X}_0. \quad (5.14)$$

Ця загальна формула для окремого випадку однорідної СДР ( $\mathbf{G} \equiv \{0\}$ ) перетворюється на отриману вище формулу (5.9).

◁ *Приклад 5.10.* Розв'яжемо задачу Коші для СДР

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - x_2 - 7t - 2, \\ x_2' = 3x_1 + x_2 - 9t - 1 \end{cases}$$

з початковими умовами  $x_1(0) = 4$ ,  $x_2(0) = 6$  методом Лагранжа (варіації довільних сталих).

З умови задачі згідно обраним вище позначенням маємо:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -7t - 2 \\ -9t - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння:

$$\det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad (5 - \lambda)(1 - \lambda) + 3 = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Корені  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 4$ . У випадку першого кореня власний вектор знаходимо з системи

$$\begin{pmatrix} 5-2 & -1 \\ 3 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси  $u_2^{(1)} = 3u_1^{(1)}$ ,

$$\mathbf{U}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ 3u_1^{(1)} \end{pmatrix} = u_1^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Зручно покласти  $u_1^{(1)} = 1$ . Тоді  $\mathbf{U}^{(1)} = (1 \quad 3)^\top$ , і

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{U}^{(1)} e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

У випадку другого кореня власний вектор знаходимо з системи

$$\begin{pmatrix} 5-4 & -1 \\ 3 & 1-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси  $u_2^{(2)} = u_1^{(2)}$ ,

$$\mathbf{U}^{(2)} = \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_1^{(2)} \end{pmatrix} = u_1^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Зручно покласти  $u_1^{(2)} = 1$ . Тоді  $\mathbf{U}^{(2)} = (1 \quad 1)^\top$ , і

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{U}^{(2)} e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}.$$

З використанням знайдених стовпців фундаментальних розв'язків будемо фундаментальну матрицю системи:

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ 3e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Її визначник  $\det \mathbf{R}(t) = e^{6t} - 3e^{6t} = -2e^{6t} \neq 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Отже, обернена матриця  $\mathbf{R}^{-1}(t)$  існує. Очевидно, вона дорівнює

$$\mathbf{R}^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-2t} & e^{-2t} \\ 3e^{-4t} & -e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Зокрема,

$$\mathbf{R}^{-1}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Підінтегральна функція в (5.14):

$$\mathbf{R}^{-1}(\tau) \mathbf{G}(\tau) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-2\tau} & e^{-2\tau} \\ 3e^{-4\tau} & -e^{-4\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7\tau - 2 \\ -9\tau - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2\tau}(-2\tau + 1) \\ e^{-4\tau}(-12\tau - 5) \end{pmatrix}.$$

Інтеграл від цієї матриці обчислюємо поелементно. Інтегруючи частинами, для першого матричного елемента маємо:

$$\int_0^t \frac{1}{2} e^{-2\tau} (-2\tau + 1) d\tau = \left\| \begin{array}{l} u = -2\tau + 1 \\ dv = e^{-2\tau} d\tau \\ v = -\frac{1}{2} e^{-2\tau} \end{array} \right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{2\tau - 1}{2} e^{-2\tau} \Big|_0^t - \int_0^t e^{-2\tau} d\tau \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{2t - 1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\tau} \Big|_0^t \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{2t - 1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (e^{-2t} - 1) \right] = \frac{t}{2} e^{-2t}.
\end{aligned}$$

Аналогічно для другого матричного елемента маємо:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{1}{2} e^{-4\tau} (-12\tau - 5) d\tau = \left\| \begin{array}{l} u = -12\tau - 5 \quad du = -12 d\tau \\ dv = e^{-4\tau} d\tau \quad v = -\frac{1}{4} e^{-4\tau} \end{array} \right\| = \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{12\tau + 5}{4} e^{-4\tau} \Big|_0^t - 3 \int_0^t e^{-4\tau} d\tau \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{12t + 5}{4} e^{-4t} - \frac{5}{4} + \frac{3}{4} e^{-4\tau} \Big|_0^t \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( 3t + \frac{5}{4} \right) e^{-4t} - \frac{5}{4} + \frac{3}{4} (e^{-4t} - 1) \right] = \left( \frac{3t}{2} + 1 \right) e^{-4t} - 1.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\mathbf{R}(t) \int_0^t \mathbf{R}^{-1}(\tau) \mathbf{G}(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ 3e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{t}{2} e^{-2t} \\ \left( \frac{3t}{2} + 1 \right) e^{-4t} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + 1 - e^{4t} \\ 3t + 1 - e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Для другого доданку (5.14) маємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(t) \mathbf{R}^{-1}(0) \mathbf{X}_0 &= \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ 3e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ 3e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} + 3e^{4t} \\ 3e^{2t} + 3e^{4t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Додаючи два останні стовпці, остаточно отримуємо:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2t + 1 - e^{4t} \\ 3t + 1 - e^{4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} + 3e^{4t} \\ 3e^{2t} + 3e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} + 2e^{4t} + 2t + 1 \\ 3e^{2t} + 2e^{4t} + 3t + 1 \end{pmatrix}. \triangleright$$

## 5.5 Питання для перевірки

1. Що таке СДР?
2. Що називають порядком СДР?
3. Чому системи диференціальних рівнянь першого порядку посідають особливе місце серед усіх СДР?
4. Як СДР вищого порядку звести до СДР першого порядку?  
Як змінюється кількість рівнянь СДР при її зведенні до СДР першого порядку?
5. Як виглядають рівняння СДР першого порядку?

6. Як виглядають рівняння нормальної СДР?
7. Що таке розв'язок СДР?
8. Чим відрізняються частинний і загальний розв'язки СДР?
9. Що таке задача Коші для СДР? Що означає знайти розв'язок задачі Коші для СДР?
10. Для нормальної СДР сформулюйте достатню умову існування і єдиності розв'язку задачі Коші.
11. Що таке крайова задача? Чому крайова задача не може бути зведеною до задачі Коші?
12. Що таке лінійна нормальна СДР? Чи обов'язково рівняння лінійної СДР повинні лінійно залежати від аргументу? Від шуканих функцій?
13. Що таке функціональна матриця? Як обчислюють її похідну?
14. Як виглядає лінійна неоднорідна СДР у матричній формі?
15. Як виглядає лінійна однорідна СДР у матричній формі?
16. Чим відрізняються лінійні СДР зі сталими та змінними коефіцієнтами?
17. Що таке матриця коефіцієнтів лінійної СДР?
18. Що таке стовпець вільних членів лінійної СДР?
19. Як за допомогою засобів лінійної алгебри впорядкувати шукані функції, сукупність яких утворює частинний розв'язок лінійної СДР?
20. Сформулюйте та доведіть принцип суперпозиції розв'язків лінійної СДР. На яку кількість розв'язків він розподжується?
21. Що таке фундаментальні розв'язки лінійної однорідної СДР? Як фундаментальний розв'язок подати у матричному вигляді?

22. Що таке фундаментальна матриця? Як її складають з використанням фундаментальних розв'язків?
23. Яка розмірність фундаментальної матриці лінійної однорідної СДР?
24. Як побудувати загальний розв'язок лінійної однорідної СДР, використовуючи її фундаментальні розв'язки?
25. Як подати у матричній формі загальний розв'язок лінійної однорідної СДР з використанням фундаментальної матриці системи?
26. Які методи розв'язування СДР вам відомі?
27. В чому полягає суть методу виключення?
28. До яких СДР можна застосовувати метод виключення?
29. Як виглядає підстановка Ейлера, яку застосовують при розв'язуванні лінійних однорідних СДР?
30. В чому полягає загальна ідея використання підстановки Ейлера при розв'язуванні лінійних СДР?
31. Що таке власне число матриці?
32. Як знаходять власні числа матриці? Що таке характеристичне рівняння?
33. Що таке власний вектор матриці? Як його знайти?
34. Як записати частинний розв'язок лінійної однорідної СДР з використанням власного вектора  $\mathbf{U}^{(k)}$ , який відповідає власному числу  $\lambda_k$ ?
35. Чи можуть матричні елементи власного вектора матриці системи бути комплексними числами? Як це впливає на вигляд частинного розв'язку?
36. Скільки лінійно незалежних власних векторів може відповідати власному числу кратністю  $p$ ? Від чого це залежить?
37. Як розв'язують неоднорідні лінійні СДР методом Лагранжа (методом варіації довільних сталих)?

## 6 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

**Задача 1.** Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

- В-1.  $2yy' = (y^2 + 1)(3x^2 + \cos x)$ .    В-2.  $y' = 2xe^{y-x^2}$ .  
В-3.  $2y'\sqrt{1+e^x} = e^x(y^2 + 1)$ .    В-4.  $y'\sqrt{1-x^2} = y$ .  
В-5.  $(x^2 + 9)y' = 3\cos^2 y$ .    В-6.  $(3y^2 + 4y^3)y' = 2e^{2x}$ .  
В-7.  $y'\sin^2 x = 2y + 3$ .    В-8.  $y'\sin x = \sqrt{1-y^2}\cos x$ .  
В-9.  $y' = (y^2 - 1)\cos 2x$ .    В-10.  $yy'\sqrt{1-x^2} = \sqrt{y^2 + 1}$ .  
В-11.  $y'(x^2 + 6)\cos y = 2xe^{-\sin y}$ .    В-12.  $xy' = y^2 + 4$ .  
В-13.  $y'x \cos y = 2 \ln x$ .    В-14.  $y'e^{x^3} = 3(y^2 + 1)x^2$ .  
В-15.  $8yy' = 3(2y^2 + 1)\sqrt{x+1}$ .

**Задача 2.** Розв'язати однорідне диференціальне рівняння.

- В-1.  $x^2y' = y^2 + xy$ .    В-2.  $xy' = 3(x + y)$ .  
В-3.  $y' = \frac{y}{x} + 2\sqrt{\frac{1+e^{y/x}}{e^{2y/x}}}$ .    В-4.  $2y' = \frac{3y}{x} + \frac{x}{y}$ .  
В-5.  $xy' = y \left[ 1 + \frac{1}{2(\ln y - \ln x)} \right]$ .    В-6.  $x^2y' = y^2 + xy + 9x^2$ .  
В-7.  $xyy' = y^2 + \frac{x^2}{\cos \frac{y}{x}}$ .    В-8.  $(xy^2 - x^3)y' = y^3$ .  
В-9.  $xy' = y + 2\sqrt{xy + 3x^2}$ .    В-10.  $y' = \frac{2x^3y + 3y^4}{x^4 + 3xy^3}$ .  
В-11.  $y' = \frac{2y^4 + x^2y^2 - x^3y}{2xy^3 - x^4}$ .    В-12.  $2x^2y' = y^2 + 2xy - x^2$ .  
В-13.  $xy' = y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ .    В-14.  $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{2ye^{y^2/x^2}}$ .  
В-15.  $2x^3yy' + x^4 + y^4 = 0$ .

**Задача 3.** Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку зі змінними коефіцієнтами.

- В-1.  $y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x}$ .    В-2.  $y' + 3x^2y = \cos x e^{-x^3}$ .  
В-3.  $y' + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}\sqrt{x}$ .    В-4.  $y' + y \cos x = 2xe^{x^2 - \sin x}$ .  
В-5.  $y' + 2xy = \frac{3x^2 - 5}{e^{x^2}}$ .    В-6.  $y' - y \cos x = \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{1-x^2}}$ .  
В-7.  $y' + 3x^2y = 5x^4 e^{-x^3}$ .    В-8.  $y' + \frac{y}{1+x^2} = \frac{2 \cos 2x}{e^{\arctan x}}$ .  
В-9.  $y' - 3y \cos 3x = \frac{1}{x} e^{\sin 3x}$ .    В-10.  $y' + \frac{y}{x^2} = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$ .  
В-11.  $y' - 2xy = e^{x^2} \operatorname{ctg} x$ .    В-12.  $y' - 7x^6y = \frac{2xe^{x^7}}{x^2 + 1}$ .  
В-13.  $y' + (2x + 5)y = \frac{3 \operatorname{ctg} 3x}{e^{x^2 + 5x}}$ .    В-14.  $y' - \frac{y}{x \ln x} = 2 \ln x$ .  
В-15.  $y' - \frac{2y}{x} = e^x x^2$ .

**Задача 4.** Розв'язати нелінійне диференціальне рівняння першого порядку.

- В-1.  $y' (2e^{2y} - 2xy) = y^2$ .      В-2.  $y' (3 \cos 3y - 4xy^3) = y^4$ .  
 В-3.  $y' \left( \frac{2y}{y^2+1} - x \cos y \right) = \sin y$ .      В-4.  $y' \left( \frac{1}{y^2+1} - \frac{x}{y} \right) = \ln y$ .  
 В-5.  $y' (\operatorname{ctg} y - 2xye^{y^2}) = e^{y^2}$ .      В-6.  $y' \left( \frac{2}{y^2-1} - \frac{x}{\cos^2 y} \right) = \operatorname{tg} y$ .  
 В-7.  $y' (5y^4 - x \sin 2y) = \sin^2 y$ .      В-8.  $y' \left( \frac{1}{y} - 4xy^3 \right) = y^4$ .  
 В-9.  $y' \left( \frac{1}{y^2} - 3x \cos 3y \right) = \sin 3y$ .      В-10.  $y' (e^y + x \sin y) = \cos y$ .  
 В-11.  $y' \left( \frac{3y^2}{y^3+1} - 2xy \right) = y^2$ .      В-12.  $y' \left( \frac{2y}{(y^2+1)^2} - xe^y \right) = e^y$ .  
 В-13.  $y' \left( 2 \cos 2y - \frac{x}{\cos^2 y} \right) = \operatorname{tg} y$ .      В-14.  $y' \left( \frac{1}{1+y^2} + \frac{x}{\sin^2 y} \right) = \operatorname{ctg} y$ .  
 В-15.  $y' \left( \frac{1}{y} - \frac{x}{1+y^2} \right) = \operatorname{arctg} y$ .

**Задача 5.** Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі. Виконати перевірку.

- В-1.  $y' - y \operatorname{ctg} x = y^2 \sin x$ .      В-2.  $y' - \frac{2xy}{x^2+1} = \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot y\sqrt{y}$ .  
 В-3.  $y' - \frac{y}{x \ln x} = \frac{y^4 e^x}{3 \ln^3 x}$ .      В-4.  $y' - \frac{3x^2 y}{x^3+1} = \frac{2xy^2}{x^3+1}$ .  
 В-5.  $y' + \frac{y}{x} = xy^2 e^x$ .      В-6.  $y' - 2xy + 2xy^3 = 0$ .  
 В-7.  $y' - \frac{y}{x+3} = \sqrt{y}$ .      В-8.  $y' - \frac{2y}{2x+5} = \frac{(2x+5)^3 e^{3x}}{y^2}$ .  
 В-9.  $y' - \frac{3y}{x} = 4x^2 \sqrt{xy}$ .      В-10.  $y' - \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{2x^3}{y} e^{2 \operatorname{tg} x}$ .  
 В-11.  $y' - \frac{xy}{x^2+1} = 2\sqrt{y}\sqrt{x^2+1}$ .      В-12.  $y' - 3x^2 y = 3x^2 y^2 e^{-x^3}$ .  
 В-13.  $y' - \frac{2y}{x} = 2xe^x \sqrt{y}$ .      В-14.  $y' - \frac{(4x^3+1)y}{x^4+x} = \frac{y^4 \sin 3x}{(x^4+x)^3}$ .  
 В-15.  $y' - y \cos x = \frac{(2x+3)y^2}{e^{\sin x}}$ .

**Задача 6.** Розв'язати диференціальне рівняння в повних диференціалах.

- В-1.  $(2x + 3x^2y) dx + x^3 dy = 0$ .  
 В-2.  $(2y^2 + 9x^2y) dx + (4xy + 3x^3) dy = 0$ .  
 В-3.  $(2y + 3y^2) dx + (2x + 6xy) dy = 0$ .  
 В-4.  $(y^3 - 2xy) dx + (3xy^2 - x^2) dy = 0$ .  
 В-5.  $(y^2 + 2y^4) dx + (2xy + 8xy^3) dy = 0$ .  
 В-6.  $(6xy + 2y^2) dx + (3x^2 + 4xy) dy = 0$ .  
 В-7.  $(4xy + 9x^2y^2) dx + (2x^2 + 6x^3y) dy = 0$ .  
 В-8.  $(6xy^2 - 2y^3) dx + (6x^2y - 6xy^2) dy = 0$ .  
 В-9.  $(8xy^3 + 3y^2) dx + (12x^2y^2 + 6xy) dy = 0$ .

$$\text{B-10. } (4xy^4 - 9x^2y) dx + (8x^2y^3 - 3x^3) dy = 0.$$

$$\text{B-11. } (6x^2y^2 + y) dx + (4x^3y + x) dy = 0.$$

$$\text{B-12. } (2y^3 + 2xy^2) dx + (6xy^2 + 2x^2y) dy = 0.$$

$$\text{B-13. } (2xy^2 - 2y^3) dx + (2x^2y - 6xy^2) dy = 0.$$

$$\text{B-14. } (2xy + 3y^2) dx + (x^2 + 6xy) dy = 0.$$

$$\text{B-15. } (2y^4 - 2xy) dx + (8xy^3 - x^2) dy = 0.$$

**Задача 7.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння другого порядку, якщо рівняння не містить а) шукану функцію; б) аргумент.

$$\text{B-1. а) } \begin{cases} y'' - \frac{y'}{x} = 8x^2, \\ y(1) = 3, \\ y'(1) = 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y'' = 2 \operatorname{tg} 2y \cdot (y')^2, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{B-2. а) } \begin{cases} y'' + \frac{2y'}{x} = 4x, \\ y(3) = 9, \\ y'(3) = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3(y')^2 = y^4 + yy'', \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{B-3. а) } \begin{cases} y'' + \frac{2xy'}{x^2+1} = \frac{2}{x^2+1}, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2(y')^2 + yy'' = \frac{2}{y}, \\ y(0) = \frac{4}{3}, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{B-4. а) } \begin{cases} xy'' = y' + 4x, \\ y(1) = 2, \\ y'(1) = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} yy'' = 2y^2 + (y')^2, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$\text{B-5. а) } \begin{cases} y'' = 2y' \operatorname{tg} x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y'y'' = 18y, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

$$\text{B-6. а) } \begin{cases} y'' = \frac{(x-1)y'}{x} + \frac{e^x}{x^3}, \\ y(1) = e, \\ y'(1) = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y^3 y'' = y', \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{B-7. а) } \begin{cases} x^3 y'' = (y')^3, \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (3y^2 + 1)y'' + 6y(y')^2 = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{B-8. а) } \begin{cases} 2(x+1)y'' = y', \\ y(0) = 5, \\ y'(0) = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y'y'' \cos^4 y = \sin y, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{B-9. а) } \begin{cases} (x+1)y'' + y' = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (y^2 + 1)y'' = 2y(y')^2, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

В-10. а) $\begin{cases} y'' = (y')^2 \cos 2x, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -2; \end{cases}$	б) $\begin{cases} y'' + \frac{2}{(2y+1)^3} = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$
В-11. а) $\begin{cases} y'' + \frac{y'}{2(x+1)} = x + 1, \\ y(0) = \frac{32}{15}, \\ y'(0) = \frac{7}{5}; \end{cases}$	б) $\begin{cases} y' y'' + e^{-3y} = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$
В-12. а) $\begin{cases} y'' + \frac{3y'}{2x} = 3\sqrt{x}, \\ y(1) = \frac{12}{5}, \\ y'(1) = 0; \end{cases}$	б) $\begin{cases} y' y'' \sin^4 2y + 2 \cos 2y = 0, \\ y(0) = \frac{\pi}{4}, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$
В-13. а) $\begin{cases} x^2 y'' + x y' = 1, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 1; \end{cases}$	б) $\begin{cases} y y'' + 3 (y')^2 = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = \frac{1}{4}. \end{cases}$
В-14. а) $\begin{cases} y'' + \frac{2x y'}{x^2 - 1} = \frac{2x}{x^2 - 1}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -1; \end{cases}$	б) $\begin{cases} (y')^2 y'' = 192 y^2, \\ y(0) = \frac{1}{4}, \\ y'(0) = \sqrt{2}. \end{cases}$
В-15. а) $\begin{cases} y'' + \frac{4y'}{x+1} = \frac{4}{x+1}, \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = 1; \end{cases}$	б) $\begin{cases} (5y^4 + 1)^3 y'' + 20y^3 = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

**Задача 8.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння методом Лагранжа (варіації довільних сталих). Зробити перевірку.

В-1. $y'' - 2y' + y = 36xe^x \ln x.$	В-2. $y'' - 2y' + y = 35x\sqrt{x}e^x.$
В-3. $y'' - 2y' + y = e^x \ln x.$	В-4. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$
В-5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + x}.$	В-6. $y'' - 2y' + y = -\frac{e^x}{x^2}.$
В-7. $y'' - 2y' + y = \frac{2e^x \ln x}{x}.$	В-8. $y'' - 2y' + y = \frac{3e^x}{2\sqrt{x}}.$
В-9. $y'' - 2y' + y = -\frac{e^x}{2x\sqrt{x}}.$	В-10. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1-x}.$
В-11. $y'' - 2y' + y = e^x \sqrt{x}.$	В-12. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}.$
В-13. $y'' - 2y' + y = \frac{9e^x \ln x}{2\sqrt{x}}.$	В-14. $y'' - 2y' + y = \frac{x+1}{x^2} \cdot e^x.$
В-15. $y'' - 2y' + y = \frac{x^2 + 1}{x^3} \cdot e^x.$	

**Задача 9.** Розв'язати задачу Коші для однорідного диференціального рівняння.

В-1. а)  $y'' - 3y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1;$   
 б)  $y'' - 2y' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3;$   
 в)  $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 1;$   
 г)  $y'' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -3;$

- A)  $y'' - 2y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3.$
- B-2. a)  $y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1;$   
 б)  $y'' + 2y' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0;$   
 в)  $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2;$   
 г)  $y'' + 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 2;$   
 А)  $y'' - 2y' + 5y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 4.$
- B-3. a)  $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4;$   
 б)  $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 7;$   
 в)  $y''' - 6y'' + 9y' - 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4, y''(0) = 16;$   
 г)  $y'' + 9y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 6;$   
 А)  $y'' - 4y' + 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 5.$
- B-4. a)  $y'' - 6y' + 5y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 11;$   
 б)  $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1;$   
 в)  $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3, y''(0) = 5;$   
 г)  $y'' + 16y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0;$   
 А)  $y'' - 4y' + 8y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 8.$
- B-5. a)  $y'' - 5y' + 6y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 7;$   
 б)  $y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 6;$   
 в)  $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4, y''(0) = 13;$   
 г)  $y'' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0;$   
 А)  $y'' + 2y' + 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -2.$
- B-6. a)  $y'' - 6y' + 8y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 4;$   
 б)  $y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -8;$   
 в)  $y''' + y'' - y' - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1;$   
 г)  $y'' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4;$   
 А)  $y'' + 2y' + 5y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 4.$
- B-7. a)  $y'' - 7y' + 10y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 10;$   
 б)  $y'' - 8y' + 16y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 7;$   
 в)  $y''' - 3y' + 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 2, y''(0) = 2;$   
 г)  $y'' + 9y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 3;$   
 А)  $y'' + 4y' + 5y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -6.$
- B-8. a)  $y'' - 7y' + 12y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4;$   
 б)  $y'' + 8y' + 16y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -2;$

- Б)  $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = 4$ ;  
 р)  $y'' + 16y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 8$ ;  
 А)  $y'' + 4y' + 8y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 6$ .
- B-9. а)  $y'' - y' - 2y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ;  
 б)  $y'' - 2y' + y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$ ;  
 Б)  $y''' + 2y'' - 7y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 8$ ,  $y''(0) = -11$ ;  
 р)  $y'' + y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ ;  
 А)  $y'' - 2y' + 10y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 4$ .
- B-10. а)  $y'' + y' - 2y = 0$ ,  $y(0) = 5$ ,  $y'(0) = -1$ ;  
 б)  $y'' + 2y' + y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -2$ ;  
 Б)  $y''' - 3y'' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 5$ ;  
 р)  $y'' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 А)  $y'' + 2y' + 10y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -4$ .
- B-11. а)  $y'' - 2y' - 3y = 0$ ,  $y(0) = 7$ ,  $y'(0) = 9$ ;  
 б)  $y'' - 4y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 Б)  $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -2$ ,  $y''(0) = 13$ ;  
 р)  $y'' + 9y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 6$ ;  
 А)  $y'' - 4y' + 13y = 0$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 1$ .
- B-12. а)  $y'' + 2y' - 3y = 0$ ,  $y(0) = 6$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 б)  $y'' + 4y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ ;  
 Б)  $y''' - 12y'' + 16y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$ ,  $y''(0) = 8$ ;  
 р)  $y'' + 16y = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 0$ ;  
 А)  $y'' + 4y' + 13y = 0$ ,  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = 4$ .
- B-13. а)  $y'' + y' - 6y = 0$ ,  $y(0) = 5$ ,  $y'(0) = 10$ ;  
 б)  $y'' - 6y' + 9y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 5$ ;  
 Б)  $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 0$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = -3$ ;  
 р)  $y'' + y = 0$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 0$ ;  
 А)  $y'' - 6y' + 10y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -3$ .
- B-14. а)  $y'' - y' - 6y = 0$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = -8$ ;  
 б)  $y'' + 6y' + 9y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -5$ ;  
 Б)  $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -2$ ,  $y''(0) = 8$ ;  
 р)  $y'' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 6$ ;  
 А)  $y'' + 6y' + 10y = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -9$ .

- В-15. а)  $y'' + 5y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -12$ ;  
 б)  $y'' - 8y' + 16y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 11$ ;  
 в)  $y''' + 6y'' + 9y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -4$ ,  $y''(0) = 15$ ;  
 г)  $y'' + 9y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 12$ ;  
 А)  $y'' - 6y' + 13y = 0$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 12$ .

**Задача 10.** Побудувати загальний розв'язок диференціального рівняння.

- В-1.  $y^{(IV)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$ .  
 В-2.  $y^{(IV)} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0$ .  
 В-3.  $y^{(IV)} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = 0$ .  
 В-4.  $y^{(IV)} - 8y''' + 32y'' - 64y' + 64y = 0$ .  
 В-5.  $y^{(IV)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$ .  
 В-6.  $y^{(IV)} + 4y''' + 14y'' + 20y' + 25y = 0$ .  
 В-7.  $y^{(IV)} + 8y''' + 26y'' + 40y' + 25y = 0$ .  
 В-8.  $y^{(IV)} + 8y''' + 32y'' + 64y' + 64y = 0$ .  
 В-9.  $y^{(IV)} - 4y''' + 24y'' - 40y' + 100y = 0$ .  
 В-10.  $y^{(IV)} + 4y''' + 24y'' + 40y' + 100y = 0$ .  
 В-11.  $y^{(IV)} - 12y''' + 62y'' - 156y' + 169y = 0$ .  
 В-12.  $y^{(IV)} - 8y''' + 42y'' - 104y' + 169y = 0$ .  
 В-13.  $y^{(IV)} + 12y''' + 62y'' + 156y' + 169y = 0$ .  
 В-14.  $y^{(IV)} + 8y''' + 42y'' + 104y' + 169y = 0$ .  
 В-15.  $y^{(IV)} + 12y''' + 56y'' + 120y' + 100y = 0$ .

**Задача 11.** Розв'язати задачу Коші для неоднорідного диференціального рівняння зі спеціальною правою частиною.

- В-1. а)  $y'' + y' - 6y = -4e^x$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = -3$ ;  
 б)  $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 2x - 4$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 5$ ;  
 в)  $y'' - 3y' + 2y = (6x + 1)e^{-x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ;  
 г)  $y'' - 4y' + 3y = 10 \cos x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ;  
 А)  $y'' - 3y' + 2y = 10e^{2x} \sin 2x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -5$ .
- В-2. а)  $y'' + 3y' - 4y = 6e^{2x}$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -1$ ;  
 б)  $y'' - 4y' + 3y = 6x^2 - 16x + 7$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ;  
 в)  $y'' - 4y' + 3y = (x - 2)e^{2x}$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 6$ ;  
 г)  $y'' - 4y' + 3y = 10 \sin x$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 4$ ;  
 А)  $y'' + 2y' - 3y = 26e^{2x} \cos x$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 5$ .
- В-3. а)  $y'' + 2y' - 3y = 5e^{2x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$ ;  
 б)  $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 - 10x + 6$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 4$ ;  
 в)  $y'' - 5y' + 4y = (2x + 1)e^{2x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ;

- р)  $y'' - 2y' - 3y = 10 \cos x$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = -2$ ;  
 А)  $y'' + 3y' - 4y = 50e^{-x} \sin x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -5$ .
- B-4. а)  $y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 4$ ;  
 б)  $y'' - 6y' + 5y = -5x^2 + 12x - 2$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -4$ ;  
 в)  $y'' - 5y' + 6y = (4x - 6)e^x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 8$ ;  
 р)  $y'' - 2y' - 3y = 10 \sin x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -3$ ;  
 А)  $y'' - 2y' - 8y = 26e^{3x} \sin x$ ,  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = -15$ .
- B-5. а)  $y'' - y' - 12y = -12e^x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 5$ ;  
 б)  $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 4x - 3$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 в)  $y'' - 6y' + 8y = (3x - 4)e^x$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 7$ ;  
 р)  $y'' + 2y' - 3y = 10 \cos x$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = -2$ ;  
 А)  $y'' - y' - 6y = 50e^{-x} \sin 2x$ ,  $y(0) = 5$ ,  $y'(0) = -15$ .
- B-6. а)  $y'' - 2y' - 8y = -9e^x$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 3$ ;  
 б)  $y'' - 6y' + 8y = 8x^2 + 4x - 10$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = -4$ ;  
 в)  $y'' - 7y' + 12y = (6x + 1)e^x$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 14$ ;  
 р)  $y'' + 2y' - 3y = 10 \sin x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -5$ ;  
 А)  $y'' - 6y' + 5y = 20e^x \cos 2x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -3$ .
- B-7. а)  $y'' - y' - 6y = -6e^x$ ,  $y(0) = 5$ ,  $y'(0) = 8$ ;  
 б)  $y'' + y' - 6y = -6x^2 + 8x + 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -6$ ;  
 в)  $y'' - y' - 2y = (2x - 5)e^x$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 р)  $y'' + 4y' + 3y = 10 \cos x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ;  
 А)  $y'' - 2y' - 3y = 10e^{2x} \sin x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -5$ .
- B-8. а)  $y'' - 3y' - 4y = -6e^x$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 13$ ;  
 б)  $y'' - y' - 2y = -4x^2 - 4x + 4$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -3$ ;  
 в)  $y'' - 2y' - 3y = (8x - 4)e^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -5$ ;  
 р)  $y'' + 4y' + 3y = 10 \sin x$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 0$ ;  
 А)  $y'' - y' - 2y = 10e^{2x} \cos x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 3$ .
- B-9. а)  $y'' - 2y' - 3y = -4e^x$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -1$ ;  
 б)  $y'' - 2y' - 3y = -3x^2 - 4x + 2$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 9$ ;  
 в)  $y'' - 3y' - 4y = (6x + 1)e^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -2$ ;  
 р)  $y'' + 3y' + 2y = 10 \cos x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ;  
 А)  $y'' - y = 10e^{2x} \cos x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$ .
- B-10. а)  $y'' - y' - 2y = -2e^x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -3$ ;

- б)  $y'' - 3y' - 4y = -4x^2 - 6x - 2$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -2$ ;  
 в)  $y'' - y' - 6y = (6x - 7)e^x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$ ;  
 г)  $y'' + 3y' + 2y = 10 \sin x$ ,  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = -1$ ;  
 а)  $y'' - 7y' + 12y = 10e^{2x} \cos x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$ .

- В-11. а)  $y'' - 7y' + 12y = 6e^x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$ ;  
 б)  $y'' - 4y' - 5y = -5x^2 - 13x - 2$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 11$ ;  
 в)  $y'' - 2y' - 8y = 9xe^x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -5$ ;  
 г)  $y'' + y' - 2y = 10 \cos x$ ,  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 а)  $y'' - 6y' + 8y = 5e^{2x} \cos 2x$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = -6$ .

- В-12. а)  $y'' - 6y' + 8y = 3e^x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$ ;  
 б)  $y'' - y' - 6y = -6x^2 - 2x + 8$ ,  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = -3$ ;  
 в)  $y'' - y' - 12y = (12x - 1)e^x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 7$ ;  
 г)  $y'' + y' - 2y = 10 \sin x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -2$ ;  
 а)  $y'' - 5y' + 6y = 2e^{2x} \sin x$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 7$ .

- В-13. а)  $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ;  
 б)  $y'' - 2y' - 8y = -8x^2 - 4x - 6$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 в)  $y'' + 3y' - 4y = (6x + 7)e^{2x}$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 4$ ;  
 г)  $y'' - y' - 2y = 10 \cos x$ ,  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = 1$ ;  
 а)  $y'' - 5y' + 4y = 10e^{2x} \cos x$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 1$ .

- В-14. а)  $y'' - 5y' + 4y = -2e^{2x}$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 7$ ;  
 б)  $y'' - 3y' - 10y = -10x^2 - 6x - 8$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -9$ ;  
 в)  $y'' + 2y' - 3y = (5x + 11)e^{2x}$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = -6$ ;  
 г)  $y'' - y' - 2y = 10 \sin x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -1$ ;  
 а)  $y'' - 4y' + 3y = 5e^x \cos x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

- В-15. а)  $y'' - 4y' + 3y = -e^{2x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$ ;  
 б)  $y'' + 2y' - 3y = -3x^2 + x + 4$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 5$ ;  
 в)  $y'' + y' - 2y = (4x + 5)e^{2x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 4$ ;  
 г)  $y'' - 3y' + 2y = 10 \cos x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -2$ ;  
 а)  $y'' - 3y' + 2y = 2e^{2x} \sin x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -2$ .

**Задача 12.** Розв'язати задачу Коші для неоднорідного диференціального рівняння зі спеціальною правою частиною. Врахувати збіг параметру  $\mu$  правої частини з коренем характеристичного рівняння.

- В-1. а)  $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 6$ ;

- б)  $y'' - 3y' + 2y = (2x + 3)e^{2x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$ ;  
 в)  $y'' - 2y' + y = (6x + 4)e^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 г)  $y'' + y = 12x \cos x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$ .
- B-2. а)  $y'' - 4y' + 3y = 4e^{3x}$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 7$ ;  
 б)  $y'' - 4y' + 3y = (4x + 6)e^{3x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$ ;  
 в)  $y'' - 2y' + y = (12x + 6)e^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ ;  
 г)  $y'' + y = 8x \sin x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .
- B-3. а)  $y'' - 5y' + 4y = 3e^{4x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 б)  $y'' - 5y' + 4y = (12x + 7)e^{4x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 5$ ;  
 в)  $y'' + 2y' + y = (18x + 2)e^{-x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ;  
 г)  $y'' + 4y = 16x \cos 2x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ .
- B-4. а)  $y'' - 6y' + 5y = -4e^{5x}$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 10$ ;  
 б)  $y'' - 5y' + 6y = (4x + 3)e^{3x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 4$ ;  
 в)  $y'' + 2y' + y = (6x - 4)e^{-x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -2$ ;  
 г)  $y'' + 4y = 32x \sin 2x$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 2$ .
- B-5. а)  $y'' - 5y' + 6y = -2e^{3x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 б)  $y'' - 6y' + 8y = (4x - 2)e^{4x}$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 8$ ;  
 в)  $y'' - 4y' + 4y = (6x - 2)e^{2x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 г)  $y'' + 9y = 72x \cos 3x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ .
- B-6. а)  $y'' - 6y' + 8y = -6e^{4x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -5$ ;  
 б)  $y'' - 7y' + 12y = (2x - 1)e^{4x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -4$ ;  
 в)  $y'' - 4y' + 4y = (12x + 2)e^{2x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$ ;  
 г)  $y'' + 9y = 36x \sin 3x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 3$ .
- B-7. а)  $y'' - 7y' + 10y = -6e^{5x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 5$ ;  
 б)  $y'' - y' - 2y = (6x + 2)e^{2x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -2$ ;  
 в)  $y'' + 4y' + 4y = (24x + 2)e^{-2x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -4$ ;  
 г)  $y'' + 16y = 64x \cos 4x$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 5$ .
- B-8. а)  $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 б)  $y'' - 2y' - 3y = (8x - 2)e^{3x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -2$ ;  
 в)  $y'' + 4y' + 4y = (6x + 8)e^{-2x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ;  
 г)  $y'' + 16y = 64x \sin 4x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -4$ .
- B-9. а)  $y'' - 8y' + 15y = 2e^{5x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 6$ ;

- б)  $y'' - 3y' - 4y = (10x + 2)e^{4x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$ ;  
 в)  $y'' - 6y' + 9y = (6x + 6)e^{3x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 4$ ;  
 г)  $y'' + y = 16x \cos x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 4$ .

- В-10. а)  $y'' - 9y' + 20y = 2e^{5x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 3$ ;  
 б)  $y'' - y' - 6y = (10x + 2)e^{3x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -2$ ;  
 в)  $y'' - 6y' + 9y = (12x + 2)e^{3x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ;  
 г)  $y'' + y = 20x \sin x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

- В-11. а)  $y'' - y' - 2y = 9e^{2x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 б)  $y'' - 2y' - 8y = (12x + 8)e^{4x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 5$ ;  
 в)  $y'' + 6y' + 9y = (12x - 2)e^{-3x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -3$ ;  
 г)  $y'' + 4y = 80x \cos 2x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$ .

- В-12. а)  $y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$ ;  
 б)  $y'' - y' - 12y = (14x + 9)e^{4x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -5$ ;  
 в)  $y'' + 6y' + 9y = (6x + 2)e^{-3x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -2$ ;  
 г)  $y'' + 4y = 96x \sin 2x$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 2$ .

- В-13. а)  $y'' - 3y' - 4y = 5e^{4x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 5$ ;  
 б)  $y'' + 3y' + 2y = (2x - 3)e^{-2x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -2$ ;  
 в)  $y'' - 8y' + 16y = (6x + 4)e^{4x}$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = -3$ ;  
 г)  $y'' + 9y = 36x \cos 3x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ .

- В-14. а)  $y'' - 4y' - 5y = 6e^{5x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 11$ ;  
 б)  $y'' + 4y' + 3y = (4x + 2)e^{-3x}$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -9$ ;  
 в)  $y'' - 8y' + 16y = (12x + 2)e^{4x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$ ;  
 г)  $y'' + 9y = 36x \sin 3x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 6$ .

- В-15. а)  $y'' - y' - 6y = 5e^{3x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -4$ ;  
 б)  $y'' + 5y' + 4y = (6x - 5)e^{-4x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -7$ ;  
 в)  $y'' + 8y' + 16y = (12x + 4)e^{-4x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -3$ ;  
 г)  $y'' + 16y = 64x \cos 4x$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 1$ .

**Задача 13.** Розв'язати задачу Коші для системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь.

В-1. 
$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - 2x_2, \\ x'_2 = 6x_1 - 6x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 5.$$

В-2. 
$$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 8x_2, \\ x'_2 = 6x_1 - 9x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 4.$$

$$\begin{array}{l}
\text{B-3.} \quad \begin{cases} x_1' = 2x_1 - 5x_2, \\ x_2' = x_1 - 4x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 8, \quad x_2(0) = 4. \\
\text{B-4.} \quad \begin{cases} x_1' = 3x_1 - 3x_2, \\ x_2' = 2x_1 - 4x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 3. \\
\text{B-5.} \quad \begin{cases} x_1' = 6x_1 - 3x_2, \\ x_2' = 9x_1 - 6x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 4. \\
\text{B-6.} \quad \begin{cases} x_1' = x_1 - x_2, \\ x_2' = 6x_1 - 4x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 9. \\
\text{B-7.} \quad \begin{cases} x_1' = 2x_1 - 2x_2, \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 3. \\
\text{B-8.} \quad \begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2, \\ x_2' = -x_1 - x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 0. \\
\text{B-9.} \quad \begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2, \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 3. \\
\text{B-10.} \quad \begin{cases} x_1' = 5x_1 - 8x_2, \\ x_2' = 3x_1 - 5x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 6, \quad x_2(0) = 4. \\
\text{B-11.} \quad \begin{cases} x_1' = 5x_1 - 6x_2, \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 2. \\
\text{B-12.} \quad \begin{cases} x_1' = 7x_1 - 8x_2, \\ x_2' = 4x_1 - 5x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 7, \quad x_2(0) = 4. \\
\text{B-13.} \quad \begin{cases} x_1' = 5x_1 - 2x_2, \\ x_2' = 6x_1 - 2x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 5. \\
\text{B-14.} \quad \begin{cases} x_1' = 7x_1 - 6x_2, \\ x_2' = 4x_1 - 3x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 4. \\
\text{B-15.} \quad \begin{cases} x_1' = 8x_1 - 5x_2, \\ x_2' = 6x_1 - 3x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 6, \quad x_2(0) = 7.
\end{array}$$

**Задача 14.** Розв'язати задачу Коші для системи неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь.

$$\begin{array}{l}
\text{B-1.} \quad \begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 - t + 4, \\ x_2' = 12x_1 - 6x_2 - 18t + 7, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 10. \\
\text{B-2.} \quad \begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 + 2t - 11, \\ x_2' = 12x_1 - 7x_2 + 4t - 46, \end{cases} \quad x_1(0) = 6, \quad x_2(0) = 5. \\
\text{B-3.} \quad \begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 - 8t + 2, \\ x_2' = 6x_1 - 5x_2 - 17t + 2, \end{cases} \quad x_1(0) = 7, \quad x_2(0) = 10. \\
\text{B-4.} \quad \begin{cases} x_1' = 7x_1 - 10x_2 - 4t + 25, \\ x_2' = 5x_1 - 8x_2 - 2t + 20, \end{cases} \quad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 5. \\
\text{B-5.} \quad \begin{cases} x_1' = 7x_1 - 4x_2 + t + 4, \\ x_2' = 10x_1 - 7x_2 + 4t + 14, \end{cases} \quad x_1(0) = 8, \quad x_2(0) = 14.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{B-6.} \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2 + 2t + 5, \\ x'_2 = 6x_1 - 4x_2 + 4t + 18, \end{cases} \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 9. \\
\text{B-7.} \quad \begin{cases} x'_1 = 7x_1 - 3x_2 - t - 10, \\ x'_2 = 18x_1 - 8x_2 - 2t - 26, \end{cases} \quad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 6. \\
\text{B-8.} \quad \begin{cases} x'_1 = 4x_1 - 3x_2 - 5t + 3, \\ x'_2 = 4x_1 - 4x_2 - 4t + 1, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 3. \\
\text{B-9.} \quad \begin{cases} x'_1 = 4x_1 - 3x_2 - 2t - 7, \\ x'_2 = 2x_1 - 3x_2 + 2t - 1, \end{cases} \quad x_1(0) = 7, \quad x_2(0) = 4. \\
\text{B-10.} \quad \begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 2x_2 + 2t + 1, \\ x'_2 = 12x_1 - 5x_2 + 6t + 4, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 7. \\
\text{B-11.} \quad \begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 2x_2 - 2t + 3, \\ x'_2 = 9x_1 - 4x_2 - 2t + 5, \end{cases} \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 4. \\
\text{B-12.} \quad \begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 4x_2 - 6t - 1, \\ x'_2 = 3x_1 - 3x_2 - 3t - 2, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 2. \\
\text{B-13.} \quad \begin{cases} x'_1 = 4x_1 - x_2 + 5t + 1, \\ x'_2 = 6x_1 - x_2 + 7t + 5, \end{cases} \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 5. \\
\text{B-14.} \quad \begin{cases} x'_1 = 9x_1 - 4x_2 - 5t + 2, \\ x'_2 = 12x_1 - 5x_2 - 7t + 3, \end{cases} \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 3. \\
\text{B-15.} \quad \begin{cases} x'_1 = 6x_1 - 4x_2 - 2t + 1, \\ x'_2 = 3x_1 - x_2 - 2t - 2, \end{cases} \quad x_1(0) = 7, \quad x_2(0) = 7.
\end{array}$$

**Задача 15.** Розв'язати задачу Коші для системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь з урахуванням кратності кореня характеристичного рівняння.

$$\begin{array}{l}
\text{B-1.} \quad \begin{cases} x'_1 = 5x_1 - x_2, \\ x'_2 = 16x_1 - 3x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 3. \\
\text{B-2.} \quad \begin{cases} x'_1 = 3x_1 - x_2, \\ x'_2 = 16x_1 - 5x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 3. \\
\text{B-3.} \quad \begin{cases} x'_1 = 4x_1 - x_2, \\ x'_2 = 9x_1 - 2x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2. \\
\text{B-4.} \quad \begin{cases} x'_1 = 2x_1 - x_2, \\ x'_2 = 9x_1 - 4x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2. \\
\text{B-5.} \quad \begin{cases} x'_1 = 6x_1 - x_2, \\ x'_2 = 16x_1 - 2x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 3. \\
\text{B-6.} \quad \begin{cases} x'_1 = 2x_1 - x_2, \\ x'_2 = 16x_1 - 6x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 3. \\
\text{B-7.} \quad \begin{cases} x'_1 = 5x_1 - x_2, \\ x'_2 = 9x_1 - x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{B-8.} & \begin{cases} x_1' = x_1 - x_2, \\ x_2' = 9x_1 - 5x_2, \end{cases} & x_1(0) = 1, & x_2(0) = 2. \\
\text{B-9.} & \begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2, \\ x_2' = 4x_1 - x_2, \end{cases} & x_1(0) = 1, & x_2(0) = 1. \\
\text{B-10.} & \begin{cases} x_1' = x_1 - x_2, \\ x_2' = 4x_1 - 3x_2, \end{cases} & x_1(0) = 1, & x_2(0) = 1. \\
\text{B-11.} & \begin{cases} x_1' = 4x_1 - x_2, \\ x_2' = 4x_1, \end{cases} & x_1(0) = 1, & x_2(0) = 1. \\
\text{B-12.} & \begin{cases} x_1' = x_1 - x_2, \\ x_2' = 9x_1 - 5x_2, \end{cases} & x_1(0) = 2, & x_2(0) = 5. \\
\text{B-13.} & \begin{cases} x_1' = 5x_1 - x_2, \\ x_2' = 4x_1 + x_2, \end{cases} & x_1(0) = 1, & x_2(0) = 1. \\
\text{B-14.} & \begin{cases} x_1' = 3x_1 - 9x_2, \\ x_2' = 4x_1 - 9x_2, \end{cases} & x_1(0) = 2, & x_2(0) = 1. \\
\text{B-15.} & \begin{cases} x_1' = 6x_1 - x_2, \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2, \end{cases} & x_1(0) = 1, & x_2(0) = 1.
\end{array}$$

## 7 РОЗВ'ЯЗОК ТИПОВОГО ВАРІАНТУ

**Задача 1.** Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(x + \sin x)(y + 1)y' = (1 + \cos x)(y^2 + 2y).$$

Маємо:

$$(x + \sin x)(y + 1)\frac{dy}{dx} = (1 + \cos x)(y^2 + 2y),$$
$$\frac{(y + 1) dy}{y^2 + 2y} = \frac{(1 + \cos x) dx}{x + \sin x},$$

і змінні відокремлено. Інтегруємо:

$$\int \frac{(y + 1) dy}{y^2 + 2y} = \int \frac{(1 + \cos x) dx}{x + \sin x}.$$

Введемо заміни  $y^2 + 2y = z$ ,  $(2y + 2) dy = dz$ ,  $(y + 1) dy = \frac{1}{2} dz$ ;  $x + \sin x = t$ ,  $(1 + \cos x) dx = dt$ . Маємо:

$$\int \frac{\frac{1}{2} dz}{z} = \int \frac{dt}{t}, \quad \ln |z| = 2 \ln |t| + \ln |C|, \quad z = Ct^2.$$

Вводимо обернені заміни:

$$y^2 + 2y = C(x + \sin x)^2.$$

Загальний розв'язок знайдено у неявному вигляді.

*Відповідь:*  $y^2 + 2y = C(x + \sin x)^2$ .

**Задача 2.** Розв'язати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} + xe^{-\sin \frac{y}{x}}.$$

З метою надати рівнянню вигляд, який містить лише похідну  $y'$  і відношення  $\frac{y}{x}$ , розділимо рівняння на  $x$ :

$$y' \cos \frac{y}{x} = \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} + e^{-\sin \frac{y}{x}}.$$

Очевидно, це однорідне рівняння. Введемо заміну  $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ ,  
 $y = xz$ ,  $y' = z + xz'$ . Маємо:

$$(z + xz') \cos z = z \cos z + e^{-\sin z},$$

$$z \cos z + xz' \cos z = z \cos z + e^{-\sin z}, \quad x \cos z \frac{dz}{dx} = e^{-\sin z}.$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними:

$$e^{\sin z} \cos z dz = \frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування знаходимо:

$$e^{\sin z} = \ln |x| + C, \quad e^{\sin \frac{y}{x}} = \ln |x| + C.$$

*Віповідь:*  $e^{\sin \frac{y}{x}} = \ln |x| + C$ .

**Задача 3.** Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку зі змінними коефіцієнтами:

$$y' + (3x^2 - 6x)y = \frac{e^{3x^2 - x^3}}{2\sqrt{x+1}}.$$

Розв'яжемо це рівняння методом варіації довільної сталої. Відповідне однорідне рівняння:

$$y' + (3x^2 - 6x)y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = (6x - 3x^2)y, \quad \frac{dy}{y} = (6x - 3x^2) dx.$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними. Інтегруючи, одержуємо:

$$\ln |y| = 3x^2 - x^3 + \ln |C|, \quad y_{\text{одн}} = Ce^{3x^2 - x^3}.$$

Тоді розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = C(x)e^{3x^2 - x^3}.$$

Підставляючи цей вираз в умову задачі, маємо:

$$C'e^{3x^2 - x^3} + Ce^{3x^2 - x^3}(6x - 3x^2) + (3x^2 - 6x)Ce^{3x^2 - x^3} = \frac{e^{3x^2 - x^3}}{2\sqrt{x+1}},$$

$$C' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}, \quad C(x) = \int C' dx = \int \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} + C_0.$$

Остаточно:

$$y = C(x)e^{3x^2-x^3} = (\sqrt{x+1} + C_0) e^{3x^2-x^3}.$$

*Віповідь:*  $y = (\sqrt{x+1} + C_0) e^{3x^2-x^3}$ .

**Задача 4.** Розв'язати нелінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' \left( \frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2} - \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} \right) = \arcsin y.$$

Це рівняння є нелінійним за змінною  $y$ , але змінна  $x$  входить до нього лише в першому степені. Тому переходимо до задачі пошуку оберненої функції  $x(y)$ . Маємо:

$$\frac{dy}{dx} \left( \frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2} - \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} \right) = \arcsin y,$$

$$\frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2} - \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y \cdot \frac{dx}{dy},$$

$$\frac{dx}{dy} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2} \arcsin y} = \frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2 \arcsin y}.$$

Розв'язок цієї задачі методом Бернуллі шукаємо у вигляді добутку  $x(y) = u(y) \cdot v(y)$ :

$$u'v + uv' + uv \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2} \arcsin y} = \frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2 \arcsin y},$$

$$\left( u' + u \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2} \arcsin y} \right) v + uv' = \frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2 \arcsin y},$$

Функцію  $u$  підберемо як частинний розв'язок рівняння

$$\frac{du}{dy} + u \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2} \arcsin y} = 0, \quad \frac{du}{u} = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2} \arcsin y}.$$

Отримали рівняння з відокремленими змінними. Його інтегрування призводить до результату:

$$\ln u = -\ln(\arcsin y), \quad u = \frac{1}{\arcsin y}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{\arcsin y} \cdot v' &= \frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2 \arcsin y}, & v' &= \frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2}, \\ v(y) &= \int v'(y) dy = \int \frac{(3-4y) dy}{(2y^2-3y)^2} = \left\| \begin{array}{l} 2y^2-3y = t \\ (4y-3) dy = dt \end{array} \right\| = \\ &= \int \frac{-dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2y^2-3y} + C. \end{aligned}$$

Остаточно маємо

$$x(y) = u(y) \cdot v(y) = \frac{1}{\arcsin y} \cdot \left( \frac{1}{2y^2-3y} + C \right).$$

*Віповідь:*  $x \arcsin y = \frac{1}{2y^2-3y} + C$ .

**Задача 5.** Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' - \frac{(2x+1)y}{x^2+x} = 3\sqrt[3]{(x^2+x)y^2} \cos x.$$

В лівій частині шукана функція  $y(x)$  міститься в першому степені, а в правій – в степені  $n = \frac{2}{3} \neq 1$ . Отже, це диференціальне рівняння Бернуллі з показником  $n = \frac{2}{3}$ . Розв'яжемо його методом Бернуллі, тобто шукатимемо загальний розв'язок у вигляді  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ . Нижче функцію  $u(x)$  оберемо на власний розсуд за міркуваннями зручності. Рівняння набуває вигляду

$$u'v + uv' - \frac{(2x+1)uv}{x^2+x} = 3\sqrt[3]{(x^2+x)u^2v^2} \cos x.$$

Групуємо перший і третій доданки в лівій частині:

$$\left( u' - \frac{(2x+1)u}{x^2+x} \right) v + uv' = 3\sqrt[3]{(x^2+x)u^2v^2} \cos x,$$

Отже, в якості  $u$  зручно обрати довільний частинний розв'язок рівняння  $u' - \frac{(2x+1)u}{x^2+x} = 0$ . Маємо:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(2x+1)u}{x^2+x}, \quad \frac{du}{u} = \frac{(2x+1)dx}{x^2+x}.$$

Виникло рівняння з відокремленими змінними. Після інтегрування одержуємо:

$$\ln |u| = \ln |x^2 + x|, \quad u = x^2 + x.$$

Тоді початкове рівняння набуває вигляду

$$uv' = 3\sqrt[3]{(x^2+x)u^2v^2} \cos x, \quad v' = 3\sqrt[3]{x^2+x} \cos x \cdot u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}$$

при вже відомій функції  $u(x)$ . Підставляючи її, знаходимо:

$$v' = 3v^{\frac{2}{3}} \cos x.$$

Це рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{dv}{dx} = 3v^{\frac{2}{3}} \cos x, \quad v^{-\frac{2}{3}} dv = 3 \cos x dx.$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$3v^{\frac{1}{3}} = 3 \sin x + \tilde{C}.$$

Позначаючи  $\tilde{C} = 3C$  і підносячи до кубу, знаходимо:

$$v = (\sin x + C)^3.$$

Остаточно маємо:

$$y = uv = (x^2 + x) (\sin x + C)^3.$$

Виконаємо перевірку:

$$\begin{aligned} & (2x+1)(\sin x + C)^3 + (x^2+x) \cdot 3(\sin x + C)^2 \cdot \cos x - \\ & - \frac{(2x+1)}{x^2+x} \cdot (x^2+x) (\sin x + C)^3 = \\ & = 3\sqrt[3]{(x^2+x)(x^2+x)^2(\sin x + C)^6} \cdot \cos x, \end{aligned}$$

$$(x^2 + x) \cdot 3(\sin x + C)^2 \cdot \cos x = 3 \sqrt[3]{(x^2 + x)^3 (\sin x + C)^6} \cos x,$$

що очевидно.

*Віповідь:*  $y = (x^2 + x) (\sin x + C)^3$ .

**Задача 6.** Розв'язати диференціальне рівняння в повних диференціалах:

$$(6xy^2 + 4y) dx + (6x^2y + 4x) dy.$$

За умовою маємо:  $P = 6xy^2 + 4y$ ,  $Q = 6x^2y + 4x$ ;  $\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy + 4$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy + 4$ . Отже, маємо повний диференціал деякої функції  $u(x, y)$  в лівій частині. Знайдемо цю функцію:

$$u = \int P dx = \int (6xy^2 + 4y) dx = 3x^2y^2 + 4xy + \varphi(y).$$

Тоді  $\frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^2 + 4xy + \varphi(y)) = Q(x, y)$ ,  $6x^2y + 4x + \varphi'(y) = 6x^2y + 4x + 4x$ ,  $\varphi'(y) = 0$ ,  $\varphi(y) = C_0$ . Розв'язок має вигляд  $u = \text{const}$ , або  $3x^2y^2 + 4xy = C$ .

*Віповідь:*  $3x^2y^2 + 4xy = C$ .

**Задача 7.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння другого порядку, якщо рівняння не містить а) шукану функцію; б) аргумент:

$$\text{а) } \begin{cases} xy'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}, \\ y(1) = 4, \\ y'(1) = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y'' = 8y^3, \\ y(0) = -1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

а) Рівняння не містить шукану функцію  $y(x)$ , тому позначимо новою літерою молодшу з наявних похідних:  $z(x) = y'(x)$ ,  $z'(x) = y''(x)$ . Початкова умова  $z(1) = y'(1) = 3$ . Отримали задачу Коші:

$$\begin{cases} xz' + z = \frac{1}{\sqrt{x}}, \\ z(1) = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} z' + \frac{z}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}}, \\ z(1) = 3. \end{cases}$$

Лінійне рівняння зі змінними коефіцієнтами розв'язуємо методом Бернуллі: нехай  $z(x) = u(x) \cdot v(x)$ . Маємо:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}}, \quad v \left( u' + \frac{u}{x} \right) + uv' = \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Підберемо функцію  $u(x)$ :

$$u' + \frac{u}{x} = 0, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}, \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln u = -\ln x, \quad u = \frac{1}{x}.$$

Тоді:

$$0 + \frac{1}{x} \cdot v' = \frac{1}{x\sqrt{x}}, \quad v' = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad v = 2\sqrt{x} + C_1,$$

$$z(x) = u(x) \cdot v(x) = \frac{2\sqrt{x} + C_1}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{C_1}{x}.$$

З початкових умов знайдемо  $C_1$ :

$$3 = \frac{2}{\sqrt{1}} + \frac{C_1}{1}, \quad C_1 = 1, \quad z(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}.$$

Тоді

$$y = \int y'(x) dx = \int z(x) dx = \int \left( \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx = 4\sqrt{x} + \ln|x| + C_2.$$

З початкових умов знайдемо  $C_2$ :

$$4 = 4\sqrt{1} + \ln|1| + C_2, \quad C_2 = 0.$$

Остаточно:  $y = 4\sqrt{x} + \ln|x|$ .

б) Рівняння не містить аргумент  $x$ , тому, вважаючи  $y$  новим незалежним аргументом, покладемо  $p(y) = y'$ . Маємо:

$$y'' = y''_{xx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'_y \cdot y' = pp'_y = pp'.$$

Тут похідна в правій частині береться за змінною  $y$ . Рівняння набуває вигляду  $pp' = 8y^3$ .

За початковими умовами при  $x = 0$  одночасно відбуваються дві рівності:  $y = -1$  і  $p(y) = y' = 2$ . Отже, початкова умова  $p|_{y=-1} = 2$ , або  $p(-1) = 2$ . Отримали задачу Коші:

$$\begin{cases} pp' = 8y^3, \\ p(-1) = 2. \end{cases}$$

Відокремлюючи змінні і інтегруючи, отримуємо:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = 8y^3, \quad p dp = 8y^3 dy, \quad \frac{p^2}{2} = 2y^4 + C_1.$$

З початкових умов знайдемо  $C_1$ :

$$\frac{2^2}{2} = 2 \cdot (-1)^4 + C_1, \quad C_1 = 0, \quad \frac{p^2}{2} = 2y^4, \quad p = 2y^2, \quad \frac{dy}{dx} = 2y^2.$$

Знову відокремлюємо змінні і інтегруємо:

$$\frac{dy}{y^2} = 2 dx, \quad -\frac{1}{y} = 2x + C_2.$$

З початкових умов знайдемо  $C_2$ :

$$-\frac{1}{-1} = 2 \cdot 0 + C_2, \quad C_2 = 1.$$

Тоді  $-\frac{1}{y} = 2x + 1$ . Остаточоно:  $y = -\frac{1}{2x+1}$ .

*Віповідь:* а)  $y = 4\sqrt{x} + \ln|x|$ ; б)  $y = -\frac{1}{2x+1}$ .

**Задача 8.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' - 2y' + y = 15e^x \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}}.$$

Зробити перевірку.

Запропоноване рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Але права частина  $f(x) = 15e^x \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}}$  не є спеціальною правою частиною вигляду (4.20). Тому розв'яжемо це рівняння методом Лагранжа (варіації довільних сталих).

Відповідне однорідне рівняння:  $y'' - 2y' + y = 0$ . Його характеристичне рівняння:  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ,  $(\lambda - 1)^2 = 0$ . Маємо корінь  $\lambda = 1$  кратності 2. Тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = xe^x$ . Загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{\text{одн}} = C_1y_1 + C_2y_2$ . Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння методом Лагранжа (варіації довільних сталих) шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

В цей момент ми переходимо від задачі пошуку однієї функції  $y(x)$  до задачі пошуку двох функцій  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ .

За алгоритмом утворення системи Лагранжа (4.17) складемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження

похідних  $C'_1(x)$ ,  $C'_2(x)$  шуканих функцій:

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15e^x \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix}.$$

За правилом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{vmatrix} = (1+x)e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x} \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ 15e^x \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}} & (1+x)e^x \end{vmatrix} = -15e^{2x}(x+1)\sqrt{x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 15e^x \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}} \end{vmatrix} = 15e^{2x} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}}.$$

Отже,

$$C'_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -15 \left( x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right), \quad C'_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 15 \left( x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int C'_1(x) dx = -15 \int \left( x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \\ &= -15 \left( \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) + C_{10} = -6x^{\frac{5}{2}} - 10x^{\frac{3}{2}} + C_{10}, \\ C_2(x) &= \int C'_2(x) dx = 15 \int \left( x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \\ &= 15 \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right) + C_{20} = 10x^{\frac{3}{2}} + 30x^{\frac{1}{2}} + C_{20}. \end{aligned}$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$\begin{aligned} y &= \left( -6x^{\frac{5}{2}} - 10x^{\frac{3}{2}} + C_{10} \right) e^x + \left( 10x^{\frac{3}{2}} + 30x^{\frac{1}{2}} + C_{20} \right) x e^x = \\ &= \left( -6x^{\frac{5}{2}} - 10x^{\frac{3}{2}} + C_{10} \right) e^x + \left( 10x^{\frac{5}{2}} + 30x^{\frac{3}{2}} + C_{20}x \right) e^x = \\ &= \left( 4x^{\frac{5}{2}} + 20x^{\frac{3}{2}} + C_{10} + C_{20}x \right) e^x = \\ &= \underbrace{\left( 4x^{\frac{5}{2}} + 20x^{\frac{3}{2}} \right) e^x}_{y_*} + \underbrace{\left( C_{10} + C_{20}x \right) e^x}_{y_{одн}}. \end{aligned}$$

Тут доданок

$$y_{\text{одн}} = (C_{10} + C_{20}x) e^x = C_{10}e^x + C_{20}xe^x = C_{10}y_1 + C_{20}y_2$$

є загальним розв'язком однорідного рівняння. Тому для перевірки достатньо до рівняння підставити лише частину

$$y_* = \left(4x^{\frac{5}{2}} + 20x^{\frac{3}{2}}\right) e^x$$

отриманого виразу. Ця функція, як ми зараз переконаємось, і є частинним розв'язком неоднорідного рівняння. Маємо:

$$\begin{aligned} y_*' &= \left(4 \cdot \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + 20 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right) e^x + \left(4x^{\frac{5}{2}} + 20x^{\frac{3}{2}}\right) (e^x)' = \\ &= \left(4x^{\frac{5}{2}} + 30x^{\frac{3}{2}} + 30x^{\frac{1}{2}}\right) e^x, \\ y_*'' &= \left(4 \cdot \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + 30 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 30 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) e^x + \\ &+ \left(4x^{\frac{5}{2}} + 30x^{\frac{3}{2}} + 30x^{\frac{1}{2}}\right) (e^x)' = \left(4x^{\frac{5}{2}} + 40x^{\frac{3}{2}} + 75x^{\frac{1}{2}} + 15x^{-\frac{1}{2}}\right) e^x. \end{aligned}$$

Підставляючи ці похідні до лівої частини початкового рівняння, отримуємо:

$$\begin{aligned} y_*'' - 2y_*' + y_* &= \left(4x^{\frac{5}{2}} + 40x^{\frac{3}{2}} + 75x^{\frac{1}{2}} + 15x^{-\frac{1}{2}}\right) e^x - \\ &- 2 \left[ \left(4x^{\frac{5}{2}} + 30x^{\frac{3}{2}} + 30x^{\frac{1}{2}}\right) e^x \right] + \left(4x^{\frac{5}{2}} + 20x^{\frac{3}{2}}\right) e^x = \\ &= 15x^{\frac{1}{2}} e^x + 15x^{-\frac{1}{2}} e^x = 15e^x \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 15e^x \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

що збігається з правою частиною  $f(x)$ . Отже, функція  $y_*$  і справді є частинним розв'язком неоднорідного рівняння, а сума  $y = y_* + y_{\text{одн}}$  – загальним розв'язком неоднорідного рівняння.

*Віповідь:*  $y = \left(4x^{\frac{5}{2}} + 20x^{\frac{3}{2}} + C_{10} + C_{20}x\right) e^x$ .

**Задача 9.** Розв'язати задачу Коші:

а)  $y'' + 6y' + 8y = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -8$ ;

б)  $y'' + 8y' + 16y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 3$ ;

в)  $y''' - 10y'' + 33y' - 36y = 0$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y''(0) = 2$ ;

г)  $y'' + 16y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -12$ ;

д)  $y'' + 6y' + 25y = 0$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 0$ .

а) Складемо характеристичне рівняння:  $\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$ . Його корені  $\lambda_1 = -4$ ,  $\lambda_2 = -2$ . Вони є дійсними і відмінними один від одного. Тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій  $y_1 = e^{-4x}$ ,  $y_2 = e^{-2x}$ . Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-2x}.$$

Для похідної маємо вираз  $y' = -4C_1 e^{-4x} - 2C_2 e^{-2x}$ . При використанні початкових умов виникає система рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ -4C_1 - 2C_2 = -8. \end{cases}$$

Маємо очевидний розв'язок  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 2$ . Тоді розв'язок задачі Коші (частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови)  $y = e^{-4x} + 2e^{-2x}$ .

б) Складемо характеристичне рівняння:  $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ . Його корінь  $\lambda_1 = -4$  має кратність 2. Тому фундаментальна система розв'язків складається з функції  $y_1 = e^{-4x}$  і приєднаної до неї функції  $y_2 = x e^{-4x}$ . Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}.$$

Для похідної маємо вираз  $y' = -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-4x} - 4C_2 x e^{-4x}$ . При використанні початкових умов виникає система рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ -4C_1 + C_2 = 3. \end{cases}$$

Маємо очевидний розв'язок  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 3$ . Тоді розв'язок задачі Коші  $y = 3x e^{-4x}$ .

в) Складемо характеристичне рівняння:  $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 33\lambda - 36 = 0$ . Нехай його корені  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ . Тоді характеристичне рівняння повинно мати вигляд

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0.$$

Розкриваючи дужки, легко переконатись, що вільний член лівої частини дорівнює  $-\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ , тобто  $-\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -36$ . Тому якщо

числа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  є цілими, то вони повинні бути дільниками числа  $-36$ . Отже, корені можуть знаходитись серед чисел  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$ . Методом підбору легко встановити, що число  $\lambda = 4$  є коренем рівняння. З урахуванням цього:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 10\lambda^2 + 33\lambda - 36 &= \lambda^3 - 4\lambda^2 - 6\lambda^2 + 33\lambda - 36 = \\ &= \lambda^2(\lambda - 4) - 6\lambda^2 + 24\lambda + 9\lambda - 36 = \\ &= \lambda^2(\lambda - 4) - 6\lambda(\lambda - 4) + 9(\lambda - 4) = \\ &= (\lambda - 4)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = (\lambda - 4)(\lambda - 3)^2. \end{aligned}$$

Отже, корені характеристичного рівняння  $\lambda_{1,2} = 3$  (кратності 2),  $\lambda_3 = 4$  (простий).

Зауважимо, знайти корені можна також за допомогою інтернет-ресурсу: [wolframalpha.com](http://wolframalpha.com). В рядок по центру екрану введіть послідовність символів  $x^3-10x^2+33x-36=0$  і натисніть клавішу «Enter».

За знайденими коренями будуюмо фундаментальну систему розв'язків:  $y_1 = e^{3x}$ ,  $y_2 = xe^{3x}$ ,  $y_3 = e^{4x}$ . Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + C_3e^{4x}.$$

Для похідних маємо вирази

$$y' = 3C_1e^{3x} + C_2e^{3x} + 3C_2xe^{3x} + 4C_3e^{4x},$$

$$y'' = 9C_1e^{3x} + 3C_2e^{3x} + 3C_2e^{3x} + 9C_2xe^{3x} + 16C_3e^{4x}.$$

При використанні початкових умов виникає система рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = -1, \\ 3C_1 + C_2 + 4C_3 = -1, \\ 9C_1 + 6C_2 + 16C_3 = 2. \end{cases}$$

Її розв'язок  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 3$ ,  $C_3 = -1$ . Тоді розв'язок задачі Коші  $y = 3xe^{3x} - e^{4x}$ .

г) Складемо характеристичне рівняння:  $\lambda^2 + 16 = 0$ . Його корені  $\lambda_{1,2} = \pm 4i$ . Тому фундаментальна система розв'язків складатиметься з функцій  $y_1 = \cos 4x$ ,  $y_2 = \sin 4x$ . Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

Для похідної маємо вираз  $y' = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x$ . При використанні початкових умов виникає система рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 = 2, \\ 4C_2 = -12. \end{cases}$$

Маємо очевидний розв'язок  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = -3$ . Тоді розв'язок задачі Коші  $y = 2 \cos 4x - 3 \sin 4x$ .

д) Складемо характеристичне рівняння:  $\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$ . Його корені

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i.$$

Тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій  $y_1 = e^{-3x} \cos 4x$ ,  $y_2 = e^{-3x} \sin 4x$ . Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-3x} \cos 4x + C_2 e^{-3x} \sin 4x.$$

Для похідної маємо вираз

$$\begin{aligned} y' &= -3C_1 e^{-3x} \cos 4x - 4C_1 e^{-3x} \sin 4x - \\ &\quad - 3C_2 e^{-3x} \sin 4x + 4C_2 e^{-3x} \cos 4x. \end{aligned}$$

При використанні початкових умов виникає система рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 = 4, \\ -3C_1 + 4C_2 = 0. \end{cases}$$

Маємо очевидний розв'язок  $C_1 = 4$ ,  $C_2 = 3$ . Тоді розв'язок задачі Коші  $y = 4e^{-3x} \cos 4x + 3e^{-3x} \sin 4x = (4 \cos 4x + 3 \sin 4x) e^{-3x}$ .  
Віповідь: а)  $y = e^{-4x} + 2e^{-2x}$ ; б)  $y = 3xe^{-4x}$ ; в)  $y = 3xe^{3x} - e^{4x}$ ; г)  $y = 2 \cos 4x - 3 \sin 4x$ ; д)  $y = (4 \cos 4x + 3 \sin 4x) e^{-3x}$ .

**Задача 10.** Побудувати загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y^{(IV)} - 12y''' + 56y'' - 120y' + 100y = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^4 - 12\lambda^3 + 56\lambda^2 - 120\lambda + 100 = 0.$$

Його корені, знайдені за допомогою wolframalpha.com, дорівнюють  $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$ . Тому розкладання лівої частини на множники повинно містити добуток

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) &= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = \\ &= \lambda^2 - (3 + i + 3 - i)\lambda + (3 + i)(3 - i) = \lambda^2 - 6\lambda + 10. \end{aligned}$$

Цей квадратний тричлен має бути дільником лівої частини:

$$\begin{array}{r|l} \lambda^4 - 12\lambda^3 + 56\lambda^2 - 120\lambda + 100 & \lambda^2 - 6\lambda + 10 \\ \hline \lambda^4 - 6\lambda^3 + 10\lambda^2 & \lambda^2 - 6\lambda + 10 \\ \hline -6\lambda^3 + 46\lambda^2 - 120\lambda & \\ -6\lambda^3 + 36\lambda^2 - 60\lambda & \\ \hline 10\lambda^2 - 60\lambda + 100 & \\ 10\lambda^2 - 60\lambda + 100 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Отже, характеристичний многочлен є повним квадратом:

$$\lambda^4 - 12\lambda^3 + 56\lambda^2 - 120\lambda + 100 = (\lambda^2 - 6\lambda + 10)^2.$$

Тому кожний з коренів  $\lambda_{1,2}$  є коренем другої кратності. Тоді до фундаментальної системи розв'язків входять функції

$$y_1 = e^{3x} \cos x, \quad y_2 = e^{3x} \sin x,$$

а також приєднані до них функції

$$y_3 = x e^{3x} \cos x, \quad y_4 = x e^{3x} \sin x.$$

Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 = \\ &= C_1 e^{3x} \cos x + C_2 e^{3x} \sin x + C_3 x e^{3x} \cos x + C_4 x e^{3x} \sin x. \end{aligned}$$

*Вігновідь:*  $y = C_1 e^{3x} \cos x + C_2 e^{3x} \sin x + C_3 x e^{3x} \cos x + C_4 x e^{3x} \sin x.$

**Задача 11.** Розв'язати задачу Коші для неоднорідного диференціального рівняння зі спеціальною правою частиною:

а)  $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$ ,  $y(0) = 6$ ,  $y'(0) = 10$ ;

б)  $y'' + 2y' - 8y = -8x^2 + 4x + 10$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -16$ ;

в)  $y'' - 6y' + 5y = (12x - 8)e^{-x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 7$ ;

г)  $y'' - 3y' + 2y = 10 \sin x$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 2$ ;

д)  $y'' - 7y' + 12y = 2e^{3x} \sin x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .

а) Однорідне рівняння:  $y'' - 3y' + 2y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$  має корені  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Як бачимо,  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ , тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = e^{2x}$ , а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції  $y_{\text{одн}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ .

Права частина  $f(x) = 2e^{3x}$  є спеціальною правою частиною з параметром  $\mu = 3$ , який не збігається з жодним з коренів  $\lambda_{1,2}$ . Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = a e^{3x},$$

який узагальнює вигляд правої частини. Маємо:

$$y'_* = 3a e^{3x}, \quad y''_* = 9a e^{3x}.$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$9a e^{3x} - 3 \cdot 3a e^{3x} + 2 \cdot a e^{3x} = 2e^{3x},$$

звідки  $a = 1$ . Тому  $y_* = e^{3x}$ , і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{3x}.$$

Маємо:

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 3e^{3x}.$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 6; \\ y'(0) = C_1 + 2C_2 + 3 = 10. \end{cases}$$

Її розв'язок  $C_1 = 3$ ,  $C_2 = 2$ . Остаточоно, розв'язок задачі Коші (частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови) має вигляд  $y = 3e^x + 2e^{2x} + e^{3x}$ .

б) Однорідне рівняння:  $y'' + 2y' - 8y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$  має корені  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -4$ . Як бачимо,  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ , тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій  $y_1 = e^{2x}$ ,  $y_2 = e^{-4x}$ , а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції  $y_{\text{одн}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}$ .

Права частина  $f(x) = -8x^2 + 4x + 10 = (-8x^2 + 4x + 10) \cdot e^0$  є спеціальною правою частиною з параметром  $\mu = 0$ , який не збігається з жодним з коренів  $\lambda_{1,2}$ . Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = q_0x^2 + q_1x + q_2,$$

який узагальнює вигляд правої частини. Маємо:

$$y_*' = 2q_0x + q_1, \quad y_*'' = 2q_0.$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$2q_0 + 2(2q_0x + q_1) - 8(q_0x^2 + q_1x + q_2) = -8x^2 + 4x + 10.$$

Методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему:

$$\begin{array}{l|l} x^2: & -8q_0 = -8; \\ x^1: & 4q_0 - 8q_1 = 4; \\ x^0: & 2q_0 + 2q_1 - 8q_2 = 10. \end{array}$$

Її розв'язок  $q_0 = 1$ ,  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = -1$ . Тоді  $y_* = x^2 - 1$ , і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} + x^2 - 1.$$

Маємо:

$$y' = 2C_1e^x - 4C_2e^{2x} + 2x.$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 - 1 = 3; \\ y'(0) = 2C_1 - 4C_2 = -16. \end{cases}$$

Її розв'язок  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 4$ . Остаточо, розв'язок задачі Коші має вигляд  $y = 4e^{-4x} + x^2 - 1$ .

в) Однорідне рівняння:  $y'' - 6y' + 5y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$  має корені  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 5$ . Як бачимо,  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ , тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = e^{5x}$ , а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції  $y_{\text{одн}} = C_1e^x + C_2e^{5x}$ .

Права частина  $f(x) = (12x - 8)e^{-x}$  є спеціальною правою частиною з параметром  $\mu = -1$ , який не збігається з жодним з

коренів  $\lambda_{1,2}$ . Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = (q_0x + q_1)e^{-x},$$

який узагальнює вигляд правої частини. Маємо:

$$y_*' = q_0e^{-x} - (q_0x + q_1)e^{-x} = (-q_0x + q_0 - q_1)e^{-x},$$

$$y_*'' = -q_0e^{-x} - (-q_0x + q_0 - q_1)e^{-x} = (q_0x - 2q_0 + q_1)e^{-x}.$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$(q_0x - 2q_0 + q_1)e^{-x} - 6(-q_0x + q_0 - q_1)e^{-x} + \\ + 5(q_0x + q_1)e^{-x} = (12x - 8)e^{-x}.$$

Методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему:

$$\begin{array}{l|l} xe^{-x}: & q_0 + 6q_0 + 5q_0 = 12; \\ e^{-x}: & (-2q_0 + q_1) - 6(q_0 - q_1) + 5q_1 = -8. \end{array}$$

Її розв'язок  $q_0 = 1$ ,  $q_1 = 0$ . Тоді  $y_* = xe^{-x}$ , і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1e^x + C_2e^{5x} + xe^{-x}.$$

Маємо:

$$y' = C_1e^x + 5C_2e^{5x} + e^{-x} - xe^{-x}.$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 2; \\ y'(0) = C_1 + 5C_2 + 1 = 7. \end{cases}$$

Її розв'язок  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 1$ . Остаточоно, розв'язок задачі Коші має вигляд  $y = e^x + e^{5x} + xe^{-x}$ .

г) Однорідне рівняння:  $y'' - 3y' + 2y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$  має корені  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Як бачимо,  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ , тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = e^{2x}$ , а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції  $y_{\text{одн}} = C_1e^x + C_2e^{2x}$ .

Права частина  $f(x) = 10 \sin x$  є комбінацією спеціальних правих частин з параметром  $\mu = 0 \pm 1i$ , який не збігається з жодним

з коренів  $\lambda_{1,2}$ . Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = M \cos x + N \sin x,$$

який узагальнює вигляд правої частини. Нагадаємо, з відсутності косинусу в правій частині не впливає, що цей косинус повинен бути відсутнім і в частинному розв'язку; його наявність ми припускаємо за допомогою доданку  $M \cos x$ . Маємо:

$$y'_* = -M \sin x + N \cos x, \quad y''_* = -M \cos x - N \sin x.$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} (-M \cos x - N \sin x) - 3(-M \sin x + N \cos x) + \\ + 2(M \cos x + N \sin x) = 10 \sin x. \end{aligned}$$

Методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему:

$$\begin{cases} \cos x: & -M - 3N + 2M = 0; \\ \sin x: & -N + 3M + 2N = 10. \end{cases}$$

Її розв'язок  $M = 3$ ,  $N = 1$ . Тоді  $y_* = 3 \cos x + \sin x$ , і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3 \cos x + \sin x.$$

Маємо:

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} - 3 \sin x + \cos x.$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + 3 = 4; \\ y'(0) = C_1 + 2C_2 + 1 = 2. \end{cases}$$

Її розв'язок  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ . Остаточно, розв'язок задачі Коші має вигляд  $y = e^x + 3 \cos x + \sin x$ .

д) Однорідне рівняння:  $y'' - 7y' + 12y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$  має корені  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 4$ . Як бачимо,  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ , тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій  $y_1 = e^{3x}$ ,  $y_2 = e^{4x}$ , а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції  $y_{\text{одн}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$ .

Права частина  $f(x) = 2e^{3x} \sin x$  є комбінацією спеціальних правих частин з параметром  $\mu = 3 \pm 1i$ , який не збігається з жодним з коренів  $\lambda_{1,2}$ . Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = e^{3x} (M \cos x + N \sin x),$$

який узагальнює вигляд правої частини. Нагадаємо, з відсутності косинусу в правій частині не впливає, що цей косинус повинен бути відсутнім і в частинному розв'язку; його наявність ми припускаємо за допомогою доданку  $M \cos x$ . Маємо:

$$\begin{aligned} y_*' &= 3e^{3x} (M \cos x + N \sin x) + e^{3x} (-M \sin x + N \cos x) = \\ &= e^{3x} [(3M + N) \cos x + (3N - M) \sin x], \\ y_*'' &= 3e^{3x} [(3M + N) \cos x + (3N - M) \sin x] + \\ &+ e^{3x} [-(3M + N) \sin x + (3N - M) \cos x] = \\ &= e^{3x} [(8M + 6N) \cos x + (8N - 6M) \sin x]. \end{aligned}$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} &e^{3x} [(8M + 6N) \cos x + (8N - 6M) \sin x] - \\ &- 7e^{3x} [(3M + N) \cos x + (3N - M) \sin x] + \\ &+ 12e^{3x} (M \cos x + N \sin x) = 2e^{3x} \sin x. \end{aligned}$$

Методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему:

$$\begin{array}{l|l} \cos x e^{3x}: & (8M + 6N) - 7(3M + N) + 12M = 0; \\ \sin x e^{3x}: & (8N - 6M) - 7(3N - M) + 12N = 2. \end{array}$$

Її розв'язок  $M = 1$ ,  $N = -1$ . Тоді  $y_* = e^{3x} (\cos x - \sin x)$ , і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + e^{3x} (\cos x - \sin x).$$

Маємо:

$$y' = 3C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{4x} + 3e^{3x} (\cos x - \sin x) + e^{3x} (-\sin x - \cos x).$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 1; \\ y'(0) = 3C_1 + 4C_2 + 3 - 1 = 1. \end{cases}$$

Її розв'язок  $C_1 = 1, C_2 = -1$ . Остаточню, розв'язок задачі Коші має вигляд  $y = e^{3x} - e^{4x} + e^{3x} (\cos x - \sin x)$ .

*Віповідь:* а)  $y = 3e^x + 2e^{2x} + e^{3x}$ ; б)  $y = 4e^{-4x} + x^2 - 1$ ;

в)  $y = e^x + e^{5x} + xe^{-x}$ ; г)  $y = e^x + 3 \cos x + \sin x$ ;

д)  $y = e^{3x} - e^{4x} + e^{3x} (\cos x - \sin x)$ .

**Задача 12.** Розв'язати задачу Коші для неоднорідного диференціального рівняння зі спеціальною правою частиною. Врахувати збіг параметру  $\mu$  правої частини з коренем характеристичного рівняння.

а)  $y'' - 2y' - 8y = 12e^{4x}, y(0) = 5, y'(0) = -8$ ;

б)  $y'' + 5y' + 6y = (2x - 3)e^{-3x}, y(0) = 5, y'(0) = -12$ ;

в)  $y'' + 8y' + 16y = (18x + 4)e^{-4x}, y(0) = 2, y'(0) = -7$ ;

г)  $y'' + 16y = 128x \sin 4x, y(0) = 2, y'(0) = 12$ .

а) Однорідне рівняння:  $y'' - 2y' - 8y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$  має корені  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$ . Як бачимо,  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ , тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій  $y_1 = e^{4x}, y_2 = e^{-2x}$ , а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції  $y_{\text{одн}} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$ .

Права частина  $f(x) = 12e^{4x}$  є спеціальною правою частиною з параметром  $\mu = 4$ , тому частинний розв'язок слід було б шукати у вигляді  $y_* = pe^{4x}$ . Але параметр  $\mu$  збігається з коренем  $\lambda_1$ , і ми маємо резонансний випадок. Кратність кореня  $\lambda_1$  дорівнює  $\alpha = 1$  (цей корінь є простим). Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = px^\alpha e^{4x} = px e^{4x}.$$

Маємо:

$$y'_* = pe^{4x} + 4pxe^{4x} = (4px + p)e^{4x},$$

$$y''_* = 4pe^{4x} + 4(4px + p)e^{4x} = (16px + 8p)e^{4x}.$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$(16px + 8p)e^{4x} - 2(4px + p)e^{4x} - 8pxe^{4x} = 12e^{4x},$$

звідки  $p = 2$ . Тоді  $y_* = 2xe^{4x}$ , і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x} + 2xe^{4x}.$$

Маємо:

$$y' = 4C_1 e^{4x} - 2C_2 e^{-2x} + 2e^{4x} + 8xe^{4x}.$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 5; \\ y'(0) = 4C_1 - 2C_2 + 2 = -8. \end{cases}$$

Її розв'язок  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 5$ . Остаточно,

$$y = 5e^{-2x} + 2xe^{4x}.$$

б) Однорідне рівняння:  $y'' + 5y' + 6y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$  має корені  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -3$ . Як бачимо,  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ , тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій  $y_1 = e^{-2x}$ ,  $y_2 = e^{-3x}$ , а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції  $y_{\text{одн}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$ .

Права частина  $f(x) = (2x - 3)e^{-3x}$  є спеціальною правою частиною з параметром  $\mu = -3$ , тому частинний розв'язок слід було б шукати у вигляді  $y_* = (q_0 x + q_1)e^{-3x}$ . Але параметр  $\mu$  збігається з коренем  $\lambda_2$ , і ми маємо резонансний випадок. Кратність кореня  $\lambda_2$  дорівнює  $\alpha = 1$ . Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = x^\alpha (q_0 x + q_1) e^{-3x} = (q_0 x^2 + q_1 x) e^{-3x}.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} y_*' &= (2q_0 x + q_1) e^{-3x} - 3(q_0 x^2 + q_1 x) e^{-3x} = \\ &= [-3q_0 x^2 + (2q_0 - 3q_1)x + q_1] e^{-3x}, \\ y_*'' &= [-6q_0 x + (2q_0 - 3q_1)] e^{-3x} - \\ &- 3[-3q_0 x^2 + (2q_0 - 3q_1)x + q_1] e^{-3x} = \\ &= [9q_0 x^2 + (-12q_0 + 9q_1)x + (2q_0 - 6q_1)] e^{-3x}. \end{aligned}$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} &[9q_0 x^2 + (-12q_0 + 9q_1)x + (2q_0 - 6q_1)] e^{-3x} + \\ &+ 5[-3q_0 x^2 + (2q_0 - 3q_1)x + q_1] e^{-3x} + \\ &+ 6(q_0 x^2 + q_1 x) e^{-3x} = (2x - 3) e^{-3x}. \end{aligned}$$

Легко бачити, що усі доданки, які містять  $x^2 e^{-3x}$ , взаємно знищуються. Тоді методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему:

$$\begin{array}{l} x e^{-3x}: \\ e^{-3x}: \end{array} \left| \begin{array}{l} (-12q_0 + 9q_1) + 5(2q_0 - 3q_1) + 6q_1 = 2; \\ (2q_0 - 6q_1) + 5q_1 = -3, \end{array} \right.$$

звідки  $q_0 = -1$ ,  $q_1 = 1$ . Тоді  $y_* = (x - x^2) e^{-3x}$ , і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + (x - x^2) e^{-3x}.$$

Маємо:

$$y' = -2C_1 e^{-2x} - 3C_2 e^{-3x} + (1 - 2x) e^{-3x} - 3(x - x^2) e^{-3x}.$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 5; \\ y'(0) = -2C_1 - 3C_2 + 1 = -12. \end{cases}$$

Її розв'язок  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 3$ . Остаточоно,

$$y = 2e^{-2x} + 3e^{-3x} + (x - x^2) e^{-3x}.$$

в) Однорідне рівняння:  $y'' + 8y' + 16y = 0$ . Характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$  має корінь  $\lambda_{1,2} = -4$  кратності  $\alpha = 2$ . Тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій  $y_1 = e^{-4x}$ ,  $y_2 = x e^{-4x}$ , а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції  $y_{\text{одн}} = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}$ .

Права частина  $f(x) = (18x + 4)e^{-4x}$  є спеціальною правою частиною з параметром  $\mu = -4$ , тому частинний розв'язок слід було б шукати у вигляді  $y_* = (q_0 x + q_1) e^{-4x}$ . Але параметр  $\mu$  збігається з коренем  $\lambda_{1,2}$ , і ми маємо резонансний випадок. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = x^\alpha (q_0 x + q_1) e^{-4x} = (q_0 x^3 + q_1 x^2) e^{-4x}.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} y_*' &= (3q_0 x^2 + 2q_1 x) e^{-4x} - 4(q_0 x^3 + q_1 x^2) e^{-4x} = \\ &= [-4q_0 x^3 + (3q_0 - 4q_1) x^2 + 2q_1 x] e^{-4x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y''_* &= [-12q_0x^2 + (6q_0 - 8q_1)x + 2q_1] e^{-4x} - \\
&- 4[-4q_0x^3 + (3q_0 - 4q_1)x^2 + 2q_1x] e^{-4x} = \\
&= [16q_0x^3 + (-24q_0 + 16q_1)x^2 + (6q_0 - 16q_1)x + 2q_1] e^{-4x}.
\end{aligned}$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&[16q_0x^3 + (-24q_0 + 16q_1)x^2 + (6q_0 - 16q_1)x + 2q_1] e^{-4x} + \\
&+ 8[-4q_0x^3 + (3q_0 - 4q_1)x^2 + 2q_1x] e^{-4x} + \\
&+ 16(q_0x^3 + q_1x^2) e^{-4x} = (18x + 4)e^{-4x}.
\end{aligned}$$

Легко бачити, що усі доданки, які містять  $x^3e^{-4x}$ ,  $x^2e^{-4x}$ , взаємно знищуються. Тоді методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему:

$$\begin{array}{l|l}
xe^{-4x}: & (6q_0 - 16q_1) + 16q_1 = 18; \\
e^{-4x}: & 2q_1 = 4,
\end{array}$$

звідки  $q_0 = 3$ ,  $q_1 = 2$ . Тоді  $y_* = (3x^3 + 2x^2) e^{-4x}$ , і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x} + (3x^3 + 2x^2) e^{-4x}.$$

Маємо:

$$\begin{aligned}
y' &= -4C_1e^{-4x} + C_2e^{-4x} - 4C_2xe^{-4x} + \\
&+ (9x^2 + 4x) e^{-4x} - 4(3x^3 + 2x^2) e^{-4x}.
\end{aligned}$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 2; \\ y'(0) = -4C_1 + C_2 = -7. \end{cases}$$

Її розв'язок  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 1$ . Остаточоно,

$$y = 2e^{-4x} + xe^{-4x} + (3x^3 + 2x^2) e^{-4x} = (3x^3 + 2x^2 + x + 2) e^{-4x}.$$

г) Однорідне рівняння:  $y'' + 16y = 0$ , характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 16 = 0$ , корені  $\lambda_{1,2} = 0 \pm 4i$ . Тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій  $y_1 = \cos 4x$ ,  $y_2 = \sin 4x$ , а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції  $y_{\text{одн}} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$ .

Права частина  $f(x) = 128x \sin 4x$  є комбінацією спеціальних правих частин з параметром  $\mu = 0 \pm 4i$ , тому випадок є резонансним. За рахунок цього частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} y_* &= x [(q_0x + q_1) \cos 4x + (q_2x + q_3) \sin 4x] = \\ &= (q_0x^2 + q_1x) \cos 4x + (q_2x^2 + q_3x) \sin 4x. \end{aligned}$$

(Нагадаємо, доданок у вигляді добутку многочлена і косинуса в частинному розв'язку повинен бути в наявності навіть попри те, що в правій частині диференціального рівняння такий добуток відсутній.) Маємо:

$$\begin{aligned} y_*' &= (2q_0x + q_1) \cos 4x - 4(q_0x^2 + q_1x) \sin 4x + \\ &+ (2q_2x + q_3) \sin 4x + 4(q_2x^2 + q_3x) \cos 4x = \\ &= [4q_2x^2 + (2q_0 + 4q_3)x + q_1] \cos 4x + \\ &+ [-4q_0x^2 + (2q_2 - 4q_1)x + q_3] \sin 4x, \\ y_*'' &= [8q_2x + (2q_0 + 4q_3)] \cos 4x - \\ &- 4[4q_2x^2 + (2q_0 + 4q_3)x + q_1] \sin 4x + \\ &+ [-8q_0x + (2q_2 - 4q_1)] \sin 4x + \\ &+ 4[-4q_0x^2 + (2q_2 - 4q_1)x + q_3] \cos 4x = \\ &= [-16q_0x^2 + (16q_2 - 16q_1)x + (2q_0 + 8q_3)] \cos 4x + \\ &+ [-16q_2x^2 + (-16q_0 - 16q_3)x + (2q_2 - 8q_1)] \sin 4x. \end{aligned}$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} &[-16q_0x^2 + (16q_2 - 16q_1)x + (2q_0 + 8q_3)] \cos 4x + \\ &+ [-16q_2x^2 + (-16q_0 - 16q_3)x + (2q_2 - 8q_1)] \sin 4x + \\ &+ 16[(q_0x^2 + q_1x) \cos 4x + (q_2x^2 + q_3x) \sin 4x] = 128x \sin 4x. \end{aligned}$$

Легко бачити, що усі доданки, які містять  $x^2 \cos 4x$ ,  $x^2 \sin 4x$ , взаємно знищуються. Тоді методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему:

$$\begin{array}{l|l} x \cos 4x: & (16q_2 - 16q_1) + 16q_1 = 0; \\ \cos 4x: & (2q_0 + 8q_3) = 0; \\ x \sin 4x: & (-16q_0 - 16q_3) + 16q_3 = 128; \\ \sin 4x: & (2q_2 - 8q_1) = 0, \end{array}$$

звідки  $q_2 = 0$ ,  $q_1 = 0$ ,  $q_0 = -8$ ,  $q_3 = 2$ . Тоді

$$y_* = -8x^2 \cos 4x + 2x \sin 4x,$$

і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x - 8x^2 \cos 4x + 2x \sin 4x.$$

Маємо:

$$y' = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x - \\ -16x \cos 4x + 32x^2 \sin 4x + 2 \sin 4x + 8x \cos 4x.$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 2; \\ y'(0) = 4C_2 = 12. \end{cases}$$

Її розв'язок  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 3$ . Отже,

$$y = 2 \cos 4x + 3 \sin 4x - 8x^2 \cos 4x + 2x \sin 4x.$$

*Віповідь:* а)  $y = 5e^{-2x} + 2xe^{4x}$ ; б)  $y = 2e^{-2x} + 3e^{-3x} + (x - x^2)e^{-3x}$ ;  
в)  $(3x^3 + 2x^2 + x + 2)e^{-4x}$ ; г)  $2 \cos 4x + 3 \sin 4x - 8x^2 \cos 4x + 2x \sin 4x$ .

**Задача 13.** Розв'язати задачу Коші для системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_1' = 7x_1 - 3x_2, \\ x_2' = 6x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

з початковими умовами  $x_1(0) = 2$ ,  $x_2(0) = 3$ .

Маємо лінійну однорідну СДР зі сталими коефіцієнтами. Продиференціюємо перше рівняння за змінною  $t$ :

$$x_1'' = 7x_1' - 3x_2'.$$

Підставимо сюди вирази для  $x_1'$ ,  $x_2'$  з умови задачі:

$$x_1'' = 7(7x_1 - 3x_2) - 3(6x_1 - 2x_2) = 31x_1 - 15x_2.$$

Виразимо звідси  $x_2$ :

$$x_2 = \frac{31x_1 - x_1''}{15}. \quad (*)$$

Підставимо цей вираз в перше рівняння умови задачі:

$$x_1' = 7x_1 - 3 \cdot \frac{31x_1 - x_1''}{15}, \quad 5x_1' = 35x_1 - (31x_1 - x_1''),$$

$$x_1'' - 5x_1' + 4x_1 = 0.$$

Функцію  $x_2$  виключили, а для функції  $x_1$  отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ , його корені  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 4$ . Загальний розв'язок

$$x_1(t) = C_1e^t + C_2e^{4t}.$$

Похідні:

$$x_1'(t) = C_1e^t + 4C_2e^{4t}, \quad x_1''(t) = C_1e^t + 16C_2e^{4t}.$$

Підставляючи ці вирази до (\*), отримуємо:

$$x_2 = \frac{31(C_1e^t + C_2e^{4t}) - (C_1e^t + 16C_2e^{4t})}{15} = 2C_1e^t + C_2e^{4t}.$$

Стовпець

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^t + C_2e^{4t} \\ 2C_1e^t + C_2e^{4t} \end{pmatrix}$$

є загальним розв'язком заданої СДР. Для отримання розв'язку задачі Коші треба константам  $C_1$ ,  $C_2$  надати таких значень, за яких виконуються початкові умови. З використанням цих умов отримуємо систему

$$\begin{cases} x_1(0) = C_1 + C_2 = 2, \\ x_2(0) = 2C_1 + C_2 = 3. \end{cases}$$

Її розв'язок  $C_1 = C_2 = 1$ . При підстановці цих значень до загального розв'язку отримуємо розв'язок задачі Коші.

*Віповідь:*  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + e^{4t} \\ 2e^t + e^{4t} \end{pmatrix}.$

**Задача 14.** Розв'язати задачу Коші для системи неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_1' = 7x_1 - 3x_2 - 2t + 3, \\ x_2' = 6x_1 - 2x_2 - 4t + 6 \end{cases}$$

з початковими умовами  $x_1(0) = 2$ ,  $x_2(0) = 2$ .

Маємо лінійну неоднорідну СДР зі сталими коефіцієнтами. Продиференціюємо перше рівняння за змінною  $t$ :

$$x_1'' = 7x_1' - 3x_2' - 2.$$

Підставимо сюди вирази для  $x_1'$ ,  $x_2'$  з умови задачі:

$$\begin{aligned} x_1'' &= 7(7x_1 - 3x_2 - 2t + 3) - 3(6x_1 - 2x_2 - 4t + 6) - 2 = \\ &= 31x_1 - 15x_2 - 2t + 1. \end{aligned}$$

Виразимо звідси  $x_2$ :

$$x_2 = \frac{31x_1 - 2t + 1 - x_1''}{15}. \quad (*)$$

Підставимо цей вираз в перше рівняння умови задачі:

$$\begin{aligned} x_1' &= 7x_1 - 3 \cdot \frac{31x_1 - 2t + 1 - x_1''}{15} - 2t + 3, \\ 5x_1' &= 35x_1 - (31x_1 - 2t + 1 - x_1'') - 10t + 15, \\ x_1'' - 5x_1' + 4x_1 &= 8t - 14. \end{aligned}$$

Функцію  $x_2$  виключили, а для функції  $x_1$  отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ , його корені  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 4$ . Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$x_{1, \text{одн}}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$$

Оскільки права частина є многочленом першого степеня і число  $\lambda = 0$  не є коренем характеристичного рівняння, то маємо нерезонансний випадок, і частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_{1,*}(t) = at + b, \quad x_{1,*}'(t) = a, \quad x_{1,*}''(t) = 0.$$

Неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$0 - 5a + 4(at + b) = 8t - 14.$$

Методом невизначених коефіцієнтів маємо систему:

$$\begin{array}{l|l} t^1: & 4a = 8; \\ t^0: & -5a + 4b = -14. \end{array}$$

Її розв'язок  $a = 2$ ,  $b = -1$ . Тоді частинний розв'язок неоднорідного ДР дорівнює  $x_{1,*}(t) = 2t - 1$ . Тому загальний розв'язок неоднорідного ДР:

$$x_1(t) = x_{1, \text{одн}}(t) + x_{1,*}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t} + 2t - 1.$$

Похідні:

$$x_1'(t) = C_1 e^t + 4C_2 e^{4t} + 2, \quad x_1''(t) = C_1 e^t + 16C_2 e^{4t}.$$

Підставляючи ці вирази до (\*), отримуємо:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{31(C_1 e^t + C_2 e^{4t} + 2t - 1) - 2t + 1 - (C_1 e^t + 16C_2 e^{4t})}{15} = \\ &= 2C_1 e^t + C_2 e^{4t} + 4t - 2. \end{aligned}$$

Стовпець

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{4t} + 2t - 1 \\ 2C_1 e^t + C_2 e^{4t} + 4t - 2 \end{pmatrix}$$

є загальним розв'язком заданої СДР. Для отримання розв'язку задачі Коші треба константам  $C_1$ ,  $C_2$  надати таких значень, за яких виконуються початкові умови. З використанням цих умов отримуємо систему

$$\begin{cases} x_1(0) = C_1 + C_2 - 1 = 2, \\ x_2(0) = 2C_1 + C_2 - 2 = 2. \end{cases}$$

Її розв'язок  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 2$ . При підстановці цих значень до загального розв'язку отримуємо розв'язок задачі Коші.

*Вігновізь:*  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + 2e^{4t} + 2t - 1 \\ 2e^t + 2e^{4t} + 4t - 2 \end{pmatrix}.$

**Задача 15.** Розв'язати задачу Коші для системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь з урахуванням кратності кореня характеристичного рівняння:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 4x_2, \\ x_2' = 9x_1 - 10x_2 \end{cases}$$

з початковими умовами  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 1$ .

Методом заміни аналогічну задачу розв'язано у прикладі 5.8. Тут застосуємо метод виключення. Продиференціюємо перше рівняння і підставимо до нього  $x'_1$  і  $x'_2$  з умови задачі:

$$x''_1 = 2x'_1 - 4x'_2 = 2(2x_1 - 4x_2) - 4(9x_1 - 10x_2) = -32x_1 + 32x_2.$$

Звідси  $x_2 = x_1 + \frac{1}{32}x''_1$ . Підставимо це до першого рівняння заданої системи:

$$x'_1 = 2x_1 - 4 \left( x_1 + \frac{1}{32}x''_1 \right), \quad x''_1 + 8x'_1 + 16x_1 = 0.$$

Характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$  має єдиний корінь  $\lambda = -4$ . Тоді загальний розв'язок  $x_1 = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t}$ . Похідні:

$$x'_1 = -4C_1e^{-4t} + C_2e^{-4t} - 4C_2te^{-4t} = (C_2 - 4C_1)e^{-4t} - 4C_2te^{-4t},$$

$$\begin{aligned} x''_1 &= -4(C_2 - 4C_1)e^{-4t} - 4C_2e^{-4t} + 16C_2te^{-4t} = \\ &= (16C_1 - 8C_2)e^{-4t} + 16C_2te^{-4t}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \frac{1}{32}x''_1 = \\ &= (C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t}) + \frac{1}{32}((16C_1 - 8C_2)e^{-4t} + 16C_2te^{-4t}) = \\ &= \left( \frac{3}{2}C_1 - \frac{1}{4}C_2 \right) e^{-4t} + \frac{3}{2}C_2te^{-4t}. \end{aligned}$$

З використанням початкових умов маємо систему:

$$\begin{cases} x_1(0) = C_1 = 1, \\ x_2(0) = \frac{3}{2}C_1 - \frac{1}{4}C_2 = 1. \end{cases}$$

Її розв'язок  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 2$ . Підставляючи ці значення до загального розв'язку, отримуємо розв'язок задачі Коші:

$$x_1 = e^{-4t} + 2te^{-4t}, \quad x_2 = e^{-4t} + 3te^{-4t}.$$

*Вігнорівь:*  $x_1 = e^{-4t} + 2te^{-4t}$ ,  $x_2 = e^{-4t} + 3te^{-4t}$ .

# Література

- [1] Гудименко Ф.С. Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ф.С. Гудименко, І.А. Павлюк, В.О. Волкова. – К. : Вища школа, 1972. – 156 с.
- [2] Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.2 : Учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М : «Оникс», 2003. – 416 с.
- [3] Еругин Н.П. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин, И.З. Штокало, П.С. Бондаренко. – К. : Вища школа, 1974. – 472 с.
- [4] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – изд. 4. – М. : Наука, 1971. – 576 с.
- [5] Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. – изд. 3. – М : Наука, 1986. – 272 с.
- [6] Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями: Учеб. пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – Изд. 8-е, испр. – М. : Либроком, 2013. – 256 с. (Вся высшая математика в задачах).
- [7] Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – изд. 5. – СПб. : Лань, 2003. – 832 с.

- [8] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 206 с.
- [9] Самойленко А.М. та ін. Диференціальні рівняння: Підручник / А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Либідь, 2003. – 600 с.
- [10] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – изд. 11, испр. – М. : URSS, 2016. – 512 с.
- [11] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А.Ф. Филиппов. – изд. 2. – М. : КомКнига, 2007. – 240 с.
- [12] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – М. : Ленанд, 2015. – 240 с.
- [13] Шкіль М.І. Звичайні диференціальні рівняння : Навч. посібник / М.І. Шкіль, М.А. Сотніченко. – К. : Вища школа, 1992. – 303 с.
- [14] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения / Л.Э. Эльсгольц. – изд. 3. – М. : ЛКИ, 2014. – 312 с.

*Навчальне видання*

**Анпілогов Дмитро Ігорович  
Сніжко Наталія Вікторівна**

**Диференціальні рівняння**

*Навчальний посібник*

Комп'ютерний набір *Анпілогов Д.І.*  
Верстання *Дяченко О.О.*

Підписано до друку 17.11.2019. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 10,17.  
Тираж 300 прим. Зам. № 1274.

Запорізький національний технічний університет  
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64  
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2394 від 27.12.2005.