МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

Методичні вказівки
до виконання контрольних робіт
і розрахунково-графічних завдань
на тему «Кінематика складного руху точки»
для студентів спеціальності G9 (131) «Прикладна механіка»
всіх форм навчання

2026

Методичні вказівки до виконання до виконання контрольних робіт і розрахунково-графічних завдань на тему «Кінематика складного руху точки» для студентів спеціальності G9 (131) «Прикладна механіка» всіх форм навчання. / Укл.: В.І. Пожуєв, А.В. Пожуєв, В.Г. Шевченко, О.С. Омельченко – Запоріжжя, НУ «Запорізька політехніка», 2026 – 69 с.

Укладачі:

д-р ф-м. наук, професор	В.І. Пожуєв,
к.т.н., доцент	А.В. Пожуєв,
к.т.н., доцент	В.Г. Шевченко
ст. викладач	О.С Омельченко

Рецензент,

к.т.н., доцент	А.А. Скребцов

Відповідальний
за випуск:

ст. викладач	О.С Омельченко

Затверджено
на засіданні кафедри
«Теоретична та прикладна механіка»
Протокол № 4 від 25 грудня 2026 р.

Рекомендовано до видання
НМК ТФ
Протокол №2 від 28.01.26 р.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Однією з дуже важливих тем в курсі теоретичної механіки є кінематичне дослідження складного руху точки. Справа в тому, що на використанні теорії складного руху ґрунтується застосування усіх чотирьох теорем динаміки системи, зокрема законів збереження кількості руху системи, руху її центра мас, збереження кінетичного моменту. У той же час сприйняття теорії і практики складного руху є досить складним для студентів. У зв'язку зі сказаним виникає нагальна необхідність дати методичні рекомендації і надати на прикладах практичні навички для розв'язання задач кінематики складного руху.

Дані методичні вказівки в переважній своїй частині присвячені методам кінематичного дослідження складного руху точки у випадку, коли переносний рух є обертальним (плоским або просторовим). Такі задачі часто зустрічаються на практиці і є значно складнішими ніж у випадку поступального переносного руху. На дану тему студенти виконують міні контрольну К-5, приклади з якої детально розглянуті тут, а також отримують індивідуальні розрахунково-графічні завдання, кілька варіантів яких також детально проаналізовані в даному посібнику. Що стосується двох інших видів переносного руху (поступального і плоско-паралельного), то алгоритм розв'язання задач і відповідні приклади наведені в розділі 5 книги [3].

1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З КІНЕМАТИКИ СКЛАДНОГО РУХУ ТОЧКИ

Досить часто в задачах кінематики і динаміки буває доцільно, а іноді і просто необхідно, розглядати рух точки (тіла) одночасно по відношенню до двох систем координат, одна із яких виконує заданий (відомий) рух по відношенню до іншої (головної), що умовно приймається нерухомою. В таких випадках вводиться поняття про складений або складний рух точки.

Визначення 1. Складним або «**абсолютним**» називається рух точки по відношенню до системи координат, що вважається нерухомою, рух тієї ж точки по відношенню до рухомої системи координат називається **відносним**, а рух рухомої системи координат по відношенню до нерухомої називається **переносним**.

Увага! При аналізі складного руху точки доцільно використовувати прийом, який можна умовно називати **«правилом голки і клею»**, суть якого полягає в наступному: щоб виділити із складеного руху його відносну частину треба подумки за допомогою втикання голки в тіло, з яким пов'язана рухома система координат, зупинити цей рух і тоді відносним рухом буде рух точки по нерухомому тілу. Навпаки, якщо подумки за допомогою клею зупинити («приклеїти») точку до тіла в тому положенні, де вона знаходиться в даний момент часу, тобто сумістити її з тією точкою рухомої системи координат, в якій вона зараз знаходиться, то її характеристиками у переносному русі будуть характеристики вказаної точки рухомого тіла. Використання такого наглядного прийому дозволяє просто виділяти складові частини абсолютного руху точки.

Зазначимо, що **основна задача кінематики складного руху точки** полягає в тому, щоб, знаючи відносний і переносний рухи точки, знайти її абсолютний рух і відповідно визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки в цьому русі. Навпаки, будь-який рух точки або тіла відносно даної, умовно нерухомої системи відліку, можна розглядати як складний і розкласти на складові рухи – відносний і переносний, з цією метою необхідно обрати систему рухомих осей, рух якої відомий, і знайти рух точки відносно цієї рухомої системи. Такий прийом розкладання руху точки на складові рухи буває корисним тоді, коли при відповідному виборі рухомої системи відліку відносний і переносний рухи виявляються більш простими, ніж рух точки відносно нерухомої системи відліку. Нагадаємо, що зокрема такий підхід з введенням допоміжної рухомої системи координат застосовується в теоретичній механіці при виведенні основних формул кінематики плоскопаралельного руху тіла [1], а також при доведенні **теореми Кьоніга** для обчислення кінетичної енергії механічної системи [2].

Визначення 2. Швидкість точки по відношенню до основної системи координат називається **абсолютною** і в подальшому позначається як $\bar{v}_a$.

Визначення 3. Відносною швидкістю $\bar{v}_r$ називається швидкість точки по відношенню до рухомої системи координат.

Увага! Зазначимо, що згідно з записаним вище «правилом голки і клею» для виділення і показу на рисунку вектора $\bar{v}_r$ необхідно подумки за допомогою втикання голки зупинити у просторі або на площині рух тіла, з яким пов'язана рухома система відліку і тоді швидкість точки у тому русі, який тепер залишився, і буде відносною.

Визначення 4. Швидкість тієї, незмінно пов'язаної з рухомими осями координат точки, з якою в даний момент часу співпадає рухома точка, називається її **переносною** швидкістю і позначається $\bar{v}_e$.

Увага! Якщо уявити собі, що відносний рух точки відбувається поверхнею твердого тіла, з яким жорстко пов'язані осі рухомої системи координат, то переносною швидкістю рухомої точки в даний момент часу буде швидкість тієї точки тіла, у якій ми за допомогою «правила голки і клею» подумки приклеїли нашу рухому точку.

Для прикладу на рис. 1.1, 1.2, 1.3 показані напрямки відносної і переносної швидкостей для трьох випадків складного руху: при переміщенні точки вздовж радіуса круглої платформи, що обертається навколо осі, перпендикулярної до площини платформи (рис. 1.1); коли точка рухається по меридіану сфери, що обертається навколо вертикальної осі (рис. 1.2); кулька рухається в жолобі колеса, що котиться без ковзання по горизонтальній прямій (рис. 1.3) (випадок плоско-паралельного переносного руху).

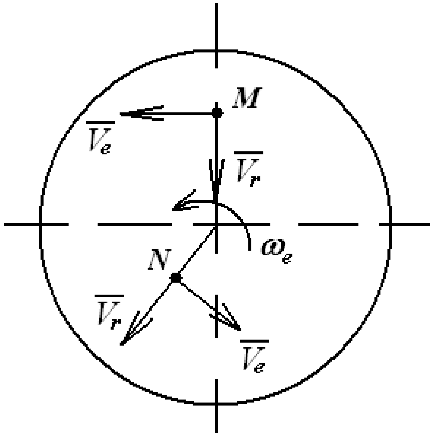

Рисунок 1.1 – Переміщення точки вздовж радіуса круглої платформи, що обертається навколо осі, перпендикулярної до площини платформи

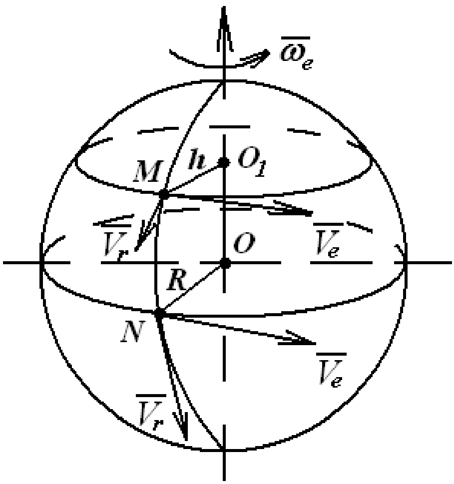

Рисунок 1.2 – Точка рухається по меридіану сфери, що обертається навколо вертикальної осі

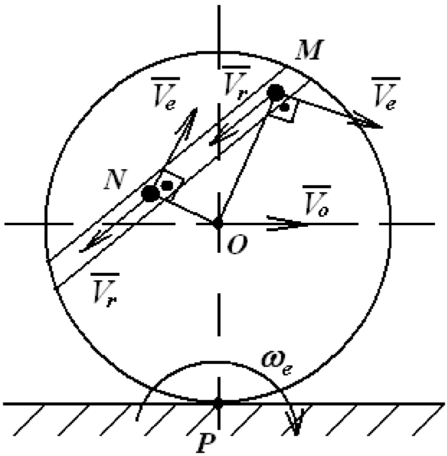

Рисунок 1.3 – Кулька рухається в жолобі колеса, що котиться без ковзання по горизонтальній прямій

Увага! Важливо звернути увагу на те, що коли переносний рух буде обертальним (рис. 1.2) або плоскопаралельним (рис. 1.3), то різні точки M і N тіла, з яким пов’язані рухомі осі, будуть мати в загальному випадку різні і за величиною, і за напрямком швидкості. Лише в тому випадку, коли переносний рух буде поступальним, у всіх точок тіла швидкості будуть однаковими і $\bar{v}_e$ не буде залежати від того, з якою точкою тіла в даний момент часу співпадає рухома точка.

Увага! У наведених на рис. 1.2 ситуаціях $\bar{v}_e$ направлена перпендикулярно до відрізку, який з’єднує відповідну точку з віссю обертання у бік, який визначається напрямком кутової швидкості на рис. 1.1 і 1.2. В останньому випадку (рис. 1.3) треба спочатку за допомогою миттєвого центру швидкостей (точки P) знайти миттєву кутову швидкість $\omega_e = v_o/R$ Модулі вектора $\bar{v}_e$ у перших двох випадках знаходяться як добуток модуля кутової швидкості на відстань від даної точки до осі обертання $v_e = h \cdot \omega_e$. В третьому випадку згідно з основною теоремою кінематики плоско паралельного руху:

$$v_e = \bar{v}_O + \bar{v}_{MO}, \text{або } \bar{v}_e = \bar{v}_O + \bar{v}_{NO},$$

де, $$v_{MO} = MO \cdot \omega_e, \quad v_{NO} = NO \cdot \omega_e, \quad \omega_e = v_o/R.$$

Залежність між трьома швидкостями $\bar{v}_a, \bar{v}_e$ і $\bar{v}_r$ дається наступною теоремою про додавання швидкостей.

Теорема 1. Абсолютна швидкість точки при складному русі дорівнює геометричній сумі переносної й відносної швидкості:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r. \tag{1}$$

Увага! Згідно з формулою (1) абсолютну швидкість можна знаходити шляхом побудови паралелограму швидкостей (рис. 1.4), і якщо при цьому відомий кут α між переносною і відносною швидкостями, то тоді модуль абсолютної швидкості можна знаходити використовуючи теорему косинусів:

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 - 2v_e v_r \cos\alpha}.$$

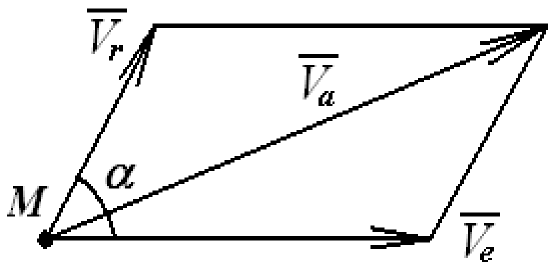

Рисунок 1.4 – Побудова паралелограму швидкостей

Увага! На практиці, як правило, ми будемо використовувати формулу (1) у поєднанні з добре відомим із статики методом проектування. Для цього більш зручно обирати рухому систему координат, яка разом з тілом, з яким вона пов'язана, виконує переносний для точки *M* рух, і проектуючи формулу (1) на осі цієї в загальному випадку просторової системи знайти для заданого моменту часу три числа за формулами:

$$v_{ax} = v_{ex} + v_{rx};$$

$$v_{ay} = v_{ey} + v_{ry};$$

$$v_{az} = v_{ez} + v_{rz}.$$

Після цього модуль і направляючі косинуси абсолютної швидкості в рухомій системі координат знаходяться за відомими формулами векторної алгебри:

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2};$$

$$cos(\widehat{x, \bar{v}_a}) = \frac{v_{ax}}{v_a}, \qquad cos(\widehat{y, \bar{v}_a}) = \frac{v_{ay}}{v_a},$$

$$cos(z, \bar{v}_a) = \frac{v_{az}}{v_a}.$$

Визначення 5. Прискорення точки *M* у її русі по відношенню до умовно нерухомої системи відліку називається **абсолютним** і позначається як $\overline{W}_a$.

Увага! З такого визначення випливає, що абсолютне прискорення повинне враховувати усі фактори (причини), які можуть викликати зміну абсолютної швидкості як за величиною, так і за напрямком.

Визначення 6. Прискорення, яке має точка у своєму русі по відношенню до рухомої системи координат називається **відносним** і позначається як $\overline{W}_r$.

Увага! Якщо згадати, що згідно з визначенням [1], прискорення виникає і тоді, коли швидкість змінюється за величиною, і тоді, коли змінюється напрямок вектора швидкості, то із визначення 6 можна зробити висновок, що прискорення $\overline{W}_\gamma$ характеризує лише зміну відносної швидкості у відносному русі, тобто зміну $\bar{v}_\gamma$ лише за рахунок відносного руху, оскільки згідно з «правилом голки і клею» ми подумки виключаємо переносний рух і не враховуємо, що за рахунок такого руху відносна швидкість, як мінімум, може змінити свій напрямок у просторі або на площині. Врахування цього фактору приводить до введення окремого прискорення, про яке ми скажемо нижче.

Визначення 7. **Переносним** прискоренням, яке позначається як $\overline{W}_e$, називається прискорення тієї незмінно пов’язаної з рухомою системою координат точки, з якою в даний момент часу збігається точка, що рухається.

Увага! Як і у випадку розмови при переносну швидкість $\bar{v}_e$, для знаходження $\overline{W}_e$ ми подумки згідно з «правилом голки і клею» «приклеюємо» нашу точку M до поверхні, якою вона рухається, і тоді вектор $\overline{W}_e$ відповідає (характеризує) за зміну $\bar{v}_e$, яка викликана виключно переносним рухом, оскільки ми «виключили» відносний рух і не враховуємо, зокрема, як видно із рис. 1.1, 1.2 і 1.3, що за рахунок відносного руху точка переходить в положення, де в неї інша відстань від осі обертання, а значить $\bar{v}_e$, як мінімум, змінюється за величиною. Для врахування цього фактору, знову так, як і у випадку зміни $\bar{v}_r$, треба вводити окреме прискорення.

В книзі [1] детально показано, як, виходячи з теореми про додавання швидкостей шляхом диференціювання за часом, доводиться наступна теорема про додавання прискорень.

Теорема 2 (теорема Коріоліса). Абсолютне прискорення точки при складному русі геометрично складається із трьох прискорень: переносного, яке характеризує зміну переносної швидкості в переносному русі, відносного, яке характеризує зміну відносної швидкості у відносному русі й прискорення Коріоліса, що характеризує зміну переносної швидкості у відносному русі й відносної швидкості в переносному русі.

$$\overline{W}_a = \overline{W}_e + \overline{W}_r + \overline{W}_c \,. \qquad (2)$$

Увага! Виведення формули (2) наведено в параграфі 2.25 книги [1], а механічна ілюстрація останнього твердження теореми про $\overline{W}_c$ на прозорому прикладі подано в параграфі 2.27 [1].

Увага! Зрозуміло, що практична реалізація формули (2) можлива тільки в поєднанні з методом проекцій, про який детально сказано вище в рекомендаціях по використанні теореми про додавання швидкостей. До того ж треба врахувати, що в конкретних задачах в правій частині в залежності від видів переносного і відносного рухів може стояти не три, а п’ять (при переносному обертальному русі) і навіть шість векторів (при плоско паралельному переносному русі) і у найбільш загальному випадку формула (2) приймає такий вигляд:

$$\overline{W}_a = \overline{W}_o + \overline{W}_{MO}^{\text{об}} + \overline{W}_{MO}^{\text{віс}} + \overline{W}_r^{\tau} + \overline{W}_r^{n} + \overline{W}_c. \qquad (3)$$

2 ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ПО ЗНАХОДЖЕННЮ $\overline{W}_e, \overline{W}_r, \overline{W}_c$. ПРАВИЛО М.Є. ЖУКОВСЬКОГО

1. В залежності від характеру (виду) переносного руху при обчисленні методами кінематики твердого тіла **переносного прискорення** можуть зустрічатися такі три ситуації.

а) **поступальний переносний рух**;

У цьому випадку у всіх точок тіла, з яким пов'язана рухома система координат, прискорення однакові за величиною і напрямком, тому:

$$\overline{W}_e = \overline{W}_o;$$

б) **обертальний переносний рух;**

Тут можливі дві ситуації, які показані на рис. 2.1, 2.2. В обох випадках справедлива формула кінематики обертального руху твердого тіла:

$$\overline{W}_e = \overline{W}_e^{\text{об}} + \overline{W}_e^{\text{віс}},$$

і тоді на рис. 1.5 і 1.6 показані напрямки складових вектора $\overline{W}_e$ у плоскому (рис. 2.1) і просторовому (рис. 2.2) випадках:

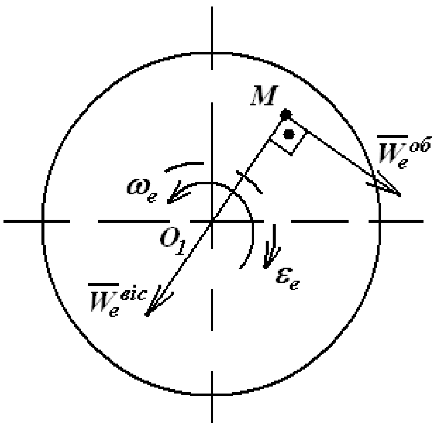

Рисунок 2.1 – Напрямки складових вектора $\overline{W}_e$ у плоскому випадку

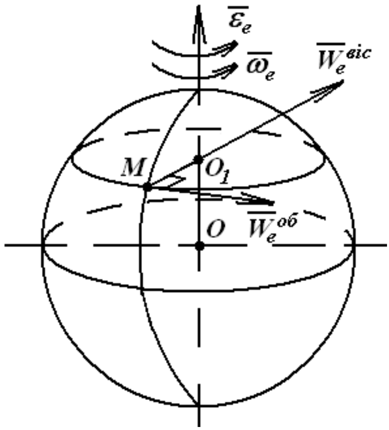

Рисунок 2.2 – Напрямки складових вектора $\bar{W}_e$ у просторовому випадку

Модулі цих прискорень в обох випадках знаходяться за формулами:

$$W_e^{\text{об}} = O_1M \cdot \varepsilon_e; \qquad W_e^{\text{віс}} = O_1M \cdot \omega_e^2;$$

в) **плоскопаралельний переносний рух** (рис. 2.3).

Тут треба попередньо за допомогою миттєвого центру швидкостей за формулами:

$$\omega_e = \frac{v_o}{R}, \qquad \varepsilon_e = \frac{W_o^\tau}{R};$$

обчислити миттєву кутову швидкість і миттєве кутове прискорення і, якщо циліндр котиться без проковзування не горизонтально, а циліндричною поверхнею, то враховуючи і $\bar{W}_o^n$, будемо мати таку формулу:

$$\bar{W}_e = \bar{W}_o^\tau \text{ і } \bar{W}_o^n$$

є заданими (відомими), а модулі $\bar{W}_{MO}^{\text{об}}$ і $\bar{W}_{MO}^{\text{віс}}$ знаходяться за формулами:

$$\bar{W}_{MO}^{\text{об}} = OM \cdot \varepsilon_e, \; \bar{W}_{MO}^{\text{віс}} = OM \cdot \omega_e^2.$$

Якщо циліндр рухається по горизонталі, то $W_o^n = 0$.

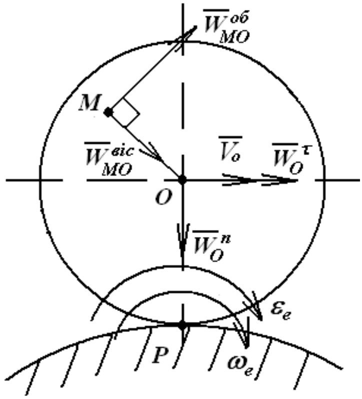

Рисунок 2.3 – Випадок плоскопаралельного переносного руху

2. Відносне прискорення $\overline{W}_r$ знаходиться методами кінематики точки і в залежності від способу завдання руху найчастіше зустрічаються такі дві ситуації:

а) відносний рух точки задано **координатним способом** у вигляді таких трьох формул:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = (t).$$

Тоді шляхом подвійного диференціювання знаходимо проекції відносного прискорення на осі рухомої системи координат:

$$W_{rx} = \ddot{x}, \quad W_{ry} = \ddot{y}, \quad W_{rz} = \ddot{z};$$

і ці проекції потім використовуємо при проектуванні формулі (2) на осі цієї ж системи координат. Якщо потрібно знати модуль відносного прискорення, то для заданого моменту часу він знаходиться за формулою:

$$W_r = \sqrt{W_{rx}^2 + W_{ry}^2 + W_{rz}^2};$$

б) відносний рух задано **натуральним способом,** тобто відома траєкторія відносного руху точки поверхнею рухомого твердого тіла, на цій траєкторії проведена розмітка (обрано початок, масштаб і додатній напрямок) і відомий закон відносного руху вздовж траєкторії у вигляді $\sigma = \sigma(t)$. Тоді спочатку знаходимо відносну швидкість за формулою:

$$v_r = \frac{d\sigma}{dt}, \quad \bar{v}_r = v_r \bar{\tau},$$

де $\bar{\tau}$ – одиничний вектор дотичної до траєкторії, який завжди направлений в додатному напрямку відліку дугової координати, і в залежності від знаку v_γ визначаємо напрямок руху точки. Після цього виходячи з формули:

$$\bar{W}_r = W_r^\tau \cdot \bar{\tau} + W_r^n \cdot \bar{n};$$

знаходимо дотичне і нормальне прискорення точки у відносному русі за такими формулами:

$$W_r^\tau = \frac{dv_r}{dt}, \qquad W_r^n = \frac{v_r^2}{\rho},$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії в даній точці, $\bar{n}$ – одиничний вектор головної нормалі. Тепер легко побудувати вектор $\bar{W}_r$ (рис. 2.4)

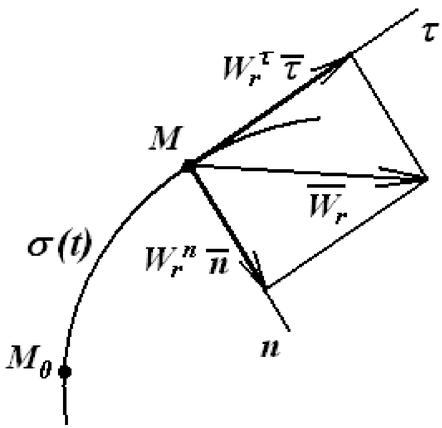

Рисунок 2.4 – Побудова вектору $\bar{W}_r$ при криволінійному русі

3. **Прискорення Коріоліса $\bar{W}_c$**, яке визначає у вигляді векторного добутку:

$$\bar{W}_c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r);$$

на практиці доцільно знаходити в два етапи, а саме, спочатку за відомою формулою для модуля векторного добутку знаходимо величину вектора $\overline{W}_c$:

$$W_c = 2\omega_e v_r \cdot sin(\overline{\omega}, \hat{} \bar{v}_r);$$

а потім за правилом М.Є. Жуковського знаходимо напрямок, для чого необхідно виконати наступну послідовність дій (рис. 2.5):

1) перенести вектор $\overline{\omega}_e$ паралельно самому собі у точку М;

2) провести через точку М площину, перпендикулярну до вектора $\overline{\omega}_e$;

3) спроектувати вектор $\bar{v}_r$ на побудовану таким чином площину і знайти його проекцію $\bar{v}_\rho^1$;

4) повернути в даній площині вектор $\bar{v}_r^1$ на 90° у бік обертання.

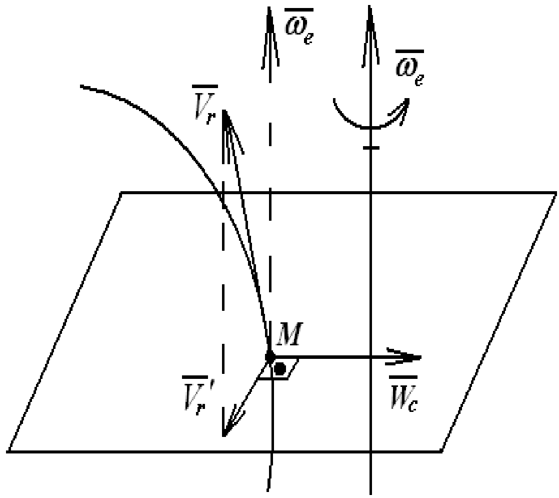

Рисунок 2.5 – Визначення напрямку прискорення Коріолісу

Отриманий після виконання останньої дії напрямок і буде напрямком $\overline{W}_c$.

Увага! Слід запам’ятати, що у випадках, коли переносний і відносний рухи відбуваються в одній площині (дивись рис. 1.1, 1.3, 2.1, 2.3) відпадає необхідність у виконанні другого і третього пунктів записаної вище послідовності дій і у цих ситуаціях напрямок вектора $\overline{W}_c$ знаходиться шляхом повороту вектора $\bar{v}_r$ на 90° у бік обертання.

Увага! Варто запам'ятати випадки, коли не виникає прискорення Коріоліса, яке часто ще називають **поворотним**. Таких випадків три, а саме:

1) $W_c = 0$, коли $\omega_e = 0$, тобто переносний рух є поступальним, або ж, рухома система координат змінює напрямок обертання на протилежний;

2) $W_c = 0$, коли $v_r = 0$, це відбувається в ті моменти часу, коли точка у своєму відносному русі змінює напрямок руху на протилежний;

3) $W_c = 0$, коли $\bar{v}_r \| \bar{\omega}_e$, тобто в ті моменти часу, коли вектор відносної швидкості направлений вздовж (паралельно) осі переносного обертання, зрозуміло, що ця ситуація може бути лише в так званих просторових задачах (дивись рис. 1.2, 2.2).

3 ПОРЯДОК РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ КІНЕМАТИКИ СКЛАДНОГО РУХУ ТОЧКИ

1. Проаналізувати рух точки, подумки виділити абсолютний, відносний і переносний рухи. Обрати нерухому і рухому системи координат.

2. Для заданого моменту часу визначити положення рухомої точки на рухомому тілі.

3. Методами кінематики твердого тіла визначити переносну швидкість $\bar{v}_e$ і показати її на рисунку.

4. Застосовуючи методи кінематики точки, визначити і показати на рисунку відносну швидкість $\bar{v}_r$.

5. Використовуючи теорему про додавання швидкостей і метод проекцій, знайти абсолютну швидкість $\bar{v}_a$.

6. Застосовуючи в залежності від виду переносного руху відповідні формули кінематики твердого тіла, знайти і показати на рисунку усі складові переносного прискорення точки $\bar{W}_e$.

7. Методами кінематики точки знайти відносне прискорення $\bar{W}_\gamma$ (або його складові $\bar{W}_r^\tau$ і $\bar{W}_r^n$) і показати їх на рисунку.

8. Використовуючи правило Жуковського і формулу для обчислення модуля, знайти і показати на рисунку прискорення Коріоліса $\bar{W}_c$.

9. За допомогою теореми Коріоліса про додавання прискорень і методу проекцій визначити абсолютне прискорення точки.

Увага! У випадку так званих просторових задач на дану тематику, коли тіло, вздовж якого рухається точка, описує тривимірну фігуру і обидві системи координат (нерухома і рухома) мають три осі доцільно, а можливо і просто необхідно, на одному рисунку показувати як фронтальний вид тіла (вид зі сторони осі *Ox*) так і боковий вид (вид зі сторони осі *Oy*). Такий подвійний рисунок допомагає наглядно зображати напрямки усіх векторів швидкостей і прискорень і правильно їх спроектувати на кожну із трьох рухомих осей координат.

4 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІЗ МІНІ КОНТРОЛЬНОЇ К-5 «ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ У ВИПАДКУ ОБЕРТАЛЬНОГО ПЕРЕНОСНОГО РУХУ»

Увага! Усі задачі даної контрольної роботи можна розбити на дві групи:

1) плоский переносний рух – коли плоске тіло обертається навколо осі, яка перпендикулярна до площини, в якій рухається тіло; 2) просторовий переносний рух, коли плоске тіло обертається навколо осі, описуючи при цьому просторову (тривимірну) фігуру.

Увага! Зазначимо, що з точку зору кінематичного аналізу, зокрема знаходження і побудови на рисунку складових відносного прискорення, зокрема векторів $\overline{W}_r^\tau$ і $\overline{W}_r^n$, у кожній з двох визначених вище двох груп задач можуть виникати одна із таких двох ситуацій: 1) відносний рух точки на пластині є прямолінійним; 2) траєкторією відносного руху є крива. Тому всього під час виконання міні контрольної роботи може зустрітися одна із чотирьох можливих тут комбінацій 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, де 1.1 означає плоский переносний і прямолінійний відносний рухи і зрозумілі три інші варіанти. В даному розділі саме в такій послідовності наведені приклади виконання міні контрольної К-5.

Увага! У випадку плоского переносного руху для визначення переносної швидкості і переносного прискорення, а також кутів, які ці вектори утворюють з осями плоскої рухомої системи координат нам треба буде використовувати **теореми синусів і косинусів**.

Нагадаємо, що для довільного трикутника (рис. 4.1) справедливі такі рівності:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}-\text{(теорема синусів)};$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}-\text{(теорема косинусів)}.$$

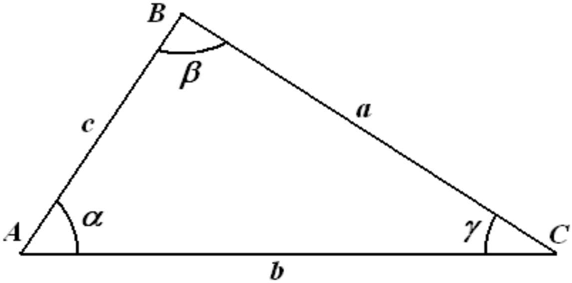

Рисунок 4.1 – Теореми синусів та косинусів для довільного трикутника

Приклад 1. (рис. 4.2). Точка M рухається диском згідно з законом $S = AM = f(t)$. Диск обертається навколо нерухомої осі, яка проходить через точку O_1 і перпендикулярна до площини диску у напрямку, показаному стрілкою, з кутовою швидкістю $\omega = const$. Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M в момент t_1, якщо:

$$f(t) = 3t^3(см), \omega = 4c^{-1}, \alpha = 30°, R = 100c\ , a = 40см\ , t_1 = 3c.$$

Примітка. На рисунку точка M показана в області додатних значень $S(S > 0)$.

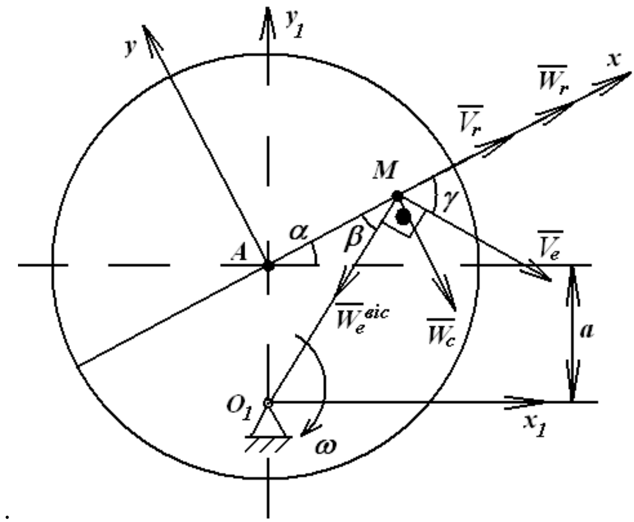

Рисунок 4.2 – Приклад 1

Розв'язання.

1. Точка *M* виконує складний рух, оскільки вона рухається вздовж прямої згідно з заданим законом і одночасно обертається разом з диском навколо осі, перпендикулярної до площини диску. При цьому переносним рухом в даній задачі є обертання диску навколо вказаної осі (навколо точки O_1), а відносним є прямолінійний рух за заданим законом по заданій прямій. Обираємо нерухому систему координат $O_1x_1y_1$ і рухому Axy, при цьому вісь Ax направлена прямою, вздовж якої рухається точка *M* (рис. 4.2).

2. Для проведення обчислень в першу чергу треба знайти конкретне числове значення довжини відрізку *AM* за формулою:

$$AM = S(t_1) = 3t^3|_{t=3} = 81 \text{ см}.$$

3. Застосовуючи «правило голки і клею» фіксуємо положення точки *M* так, щоб відстань *AM* дорівнювала 81 см і з'єднуємо точку *M* у цьому положенні з віссю (центром) обертання в точці O_1. Тоді $\bar{v}_e$ направлена перпендикулярно до відрізку O_1M у бік, вказаний напрямком $\omega_e = \omega$, а за модулем ця швидкість знаходиться так:

$$v_e = O_1M \cdot \omega.$$

Проведемо аналіз трикутника O_1AM. В ньому відомі дві сторони $O_1A = a$ і $AM = 81\text{см},$ а також кут між ними $\angle O_1AM = 90° + 30° = 120°$. Тоді за теоремою косинусів будемо мати:

$$O_1M = \sqrt{a^2 + AM^2 - 2a \cdot AM \cdot cos\, 120°} =$$

$$= \sqrt{40^2 + 81^2 - 2 \cdot 40 \cdot 81 \cdot 0{,}5} = 107 \text{ см}$$

Тоді:

$$v_e = 107 \cdot 4 = \frac{428 \text{ см}}{\text{с}} = 4{,}28 \text{ м/с}.$$

Для подальшого застосування нам знадобиться кут, який вектор $\bar{v}_e$ утворює з віссю *Ax*. Тому за теоремою синусів знайдемо спочатку кут $\beta = AMO_1$.

$$\frac{sin\,\beta}{O_1A} = \frac{sin\,120°}{O_1M} \Rightarrow sin\,\beta = \frac{O_1A}{O_1M} sin\,120° = \frac{40}{107} \cdot 0{,}86 = 0{,}3;$$

$$\beta = \arcsin 0{,}3 = 17°;$$

Тоді $\gamma = 120° - 90° - 17° = 13°$.

4. Застосовуючи «правило голки і клею», зупиняємо подумки обертання платформи і бачимо, що у відносному русі точка рухається прямою *AM* і оскільки очевидно, що похідна від заданої функції завжди додатна, то рух відбувається вправо і вгору, у цей бік і направляємо вектор $\bar{v}_\gamma$ (рис. 4.2), а його модуль знаходимо так:

$$v_r = \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=t_1} = 9t^2|_{t=3} = 81\,\frac{\text{см}}{\text{с}} = 0{,}81\text{м/с}.$$

5. Для знаходження абсолютної швидкості використовуємо формулу (1), яку проектуємо на осі показаної на рис. 4.2 рухомої системи координат, будемо мати:

$$v_{ax} = v_e \cos\gamma + v_r = 4{,}28 \cdot 0{,}3 + 0{,}81 = 2{,}04\,\text{м/с};$$

$$v_{ay} = -v_e \sin\gamma = -4{,}28 \cdot 0{,}96 = -4{,}11\text{м/с};$$

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{2{,}04^2 + 4{,}11^2} = 4{,}56\text{ м/с}.$$

6. При визначенні $\bar{W}_e$ звернемо увагу на те, що у випадку обертального переносного руху в загальному випадку і плоского і просторового руху справедлива формула:

$$\bar{W}_e = \bar{W}_e^{\text{об}} + W_e^{\text{віс}};$$

при цьому вектор $\bar{W}_e^{\text{об}}$ направлений перпендикулярно до відрізку O_1M у бік, який визначається знаком ε_e, але у нас за умовою $\omega_e = \omega = const$, тобто $\varepsilon_e = 0$, і тоді згідно з формулою для модуля обертального прискорення:

$$W_e^{\text{об}} = O_1M \cdot \varepsilon_e = 0.$$

Тобто в даній задачі переносне прискорення співпадає з вісеспрямованим прискоренням, яке завжди направлене від точки *M* до осі (до точки O_1) (рис. 4.2), а за модулем знаходиться так:

$$W_e = W_e^{\text{віс}} = O_1M \cdot \omega_e^2 = 107 \cdot 16 = 1712\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2} = 17{,}12\text{ м/с}^2.$$

7. При визначенні $\overline{W}_r$ звернемо увагу на те, що оскільки відносний рух в задачах міні контрольної К-5 задається натуральним способом, то в загальному випадку і плоского, і просторового переносного руху треба виходити з формули:

$$\overline{W}_r = \overline{W}_r^{\tau} + \overline{W}_r^{n}.$$

Але, оскільки в даній задачі відносний рух є прямолінійним, то $W_r^n = 0$, а вектор $\overline{W}_r^{\tau}$ направлений по прямій *АК* в який саме бік визначається після диференціювання і підставлення замість *t* заданого значення t_1 у нас будемо мати:

$$\overline{W}_r^{\tau} = \left.\frac{dv_r}{dt}\right|_{t=t_1} = 18t|_{t=3} = 54\ \text{см/с}^2 = 0{,}54\ \text{м/с}^2.$$

Знак плюс тут означає, що вектор $\overline{W}_{\gamma} = \overline{W}_{\gamma}^{\tau}$ направлений у бік додатного відліку координати *S*, тобто вгору і вправо (рис. 4.2).

8. Згідно з правилом Жуковського для випадку плоского переносного руху, про що ми попереджали вище, достатньо для знаходження напрямку прискорення Коріоліса повернути вектор $\bar{v}_{\gamma}$ на 90° у бік обертання платформи і тоді бачимо, що $\overline{W}_c$ направлено перпендикулярно до відрізку *АМ* вниз (рис. 4.2). Модуль цього прискорення, враховуючи, що у плоскому випадку вектор $\overline{W}_e$ завжди перпендикулярний до площини диску знаходимо так:

$$W_c = 2\omega_e v_r \sin(\overline{\omega}_e,^{\bar{v}_r}) = 2\omega_e v_r = 2\cdot 4\cdot 81 = 648\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2} = 6{,}48\ \text{м/с}^2.$$

9. Для знаходження абсолютного прискорення застосовуємо теорему Коріоліса. Враховуючи, що в нашій задачі із п’яти можливих доданків в правій частині формули (3) $\overline{W}_o \neq 0$ (лише у випадку плоскопаралельного переносного руху) відсутні $\overline{W}_{MO}^{\text{об}}$ і $\overline{W}_r^{n}$, приходимо до такого виразу:

$$\overline{W}_a = \overline{W}_e + \overline{W}_r^{\tau} + \overline{W}_c\ .$$

Проектуємо цю формулу на осі *Ax* і *Ay*:

$$W_{ax} = -W_e^{\text{віс}} \cos\beta + W_r^{\tau} = -17{,}12\cdot 0{,}96 + 0{,}54 = -15{,}9\ \text{м/с}^2;$$

$$W_{ay} = -W_e^{\text{віс}} \sin\beta + W_c = -17{,}12\cdot 0{,}63\quad + 6{,}48 = -4{,}3\ \text{м/с}^2;$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2} = \sqrt{(-15{,}9)^2 + (-4{,}3)^2} = 16{,}47 \text{ м/с}^2.$$

Приклад 2 (рис. 4.3). Точка M рухається по диску згідно до закону $S = AM = f_1(t)$. Диск обертається навколо нерухомої осі, що проходить через точку O_1 і перпендикулярна до площини диску у напрямку, вказаному стрілкою, зі сталою кутовою швидкістю $\omega = const$. Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M в момент t_1, якщо $f(t) = 20\pi(cos\frac{\pi}{4}t - 1)$ см, $\omega = 2\ c^{-1}$, $R = 80$см, $a = 30$ см, $t_1 = 2\ c$.

Примітка. На рисунку точка M показана в області додатних значень S ($S > 0$).

Розв'язання.

Точка M виконує складний рух, оскільки вона рухається по ободу диска згідно з заданим законом і одночасно обертається разом з диском навколо осі, перпендикулярної до площини диску. При цьому переносним рухом в даній задачі є обертання диску навколо вказаної осі (навколо точки O_1), а відносним є криволінійний рух точки ободом диску за заданим законом у вигляді $S = f_1(t)$. Обираємо нерухому систему координат $O_1x_1y_1$ і рухому O_1xy (рис. 4.3).

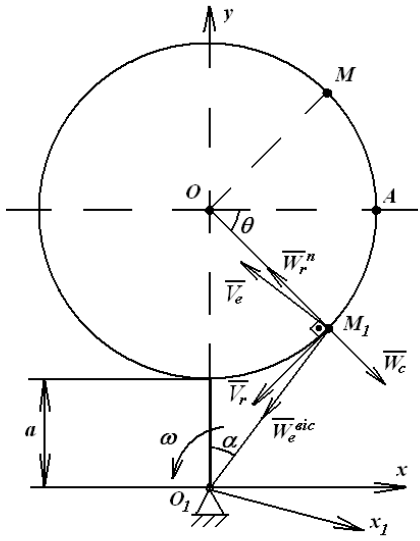

Рисунок 4.3 – Приклад 2

Знайдемо положення точки M на диску для заданого моменту часу за формулою:

$$AM_1 = f_1(t_1) = 20\pi\left(cos\frac{\pi}{4}\cdot 2 - 1\right) = -20\pi\text{см}.$$

Увага! Знак мінус тут означає, що в даний момент часу точка знаходиться не вище, а нижче прямої OA в положенні M_1 (рис. 4.3).

Увага! В тих задачах, де відносним рухом є переміщення точки M дугою кола доцільно ввести у розгляд центральний кут θ (рис. 4.3) за відомою формулою елементарної геометрії про залежність між довжиною дуги кола, радіусом і центральним кутом в радіанах. Тоді будемо мати:

$$\theta = \frac{S}{R} = -\frac{20\pi}{80} = -\frac{\pi}{4}.$$

3. Застосовуючи «правило голки і клею» фіксуємо положення рухомої точки так, щоб кут θ дорівнював 45°, з'єднуємо точку M_1 з точкою O_1, тоді $\bar{v}_e$ направлене перпендикулярно до відрізку O_1M_1 згідно з заданим напрямком ω вліво і вгору (рис. 4.3). За модулем ця швидкість знаходиться так:

$$v_e = O_1M_1\cdot\omega\,.$$

Щоб знайти відстань O_1M_1 бачимо, що в трикутнику O_1OM_1 відомі дві сторони:

$$O_1O = a + R = 30 + 80 = 110\text{ см},\; OM_1 = R = 80\text{ см}$$

і кут між ними $\angle O_1OM_1 = 90 - \theta = 45°$. Тоді за теоремою косинусів:

$$O_1M_1 = \sqrt{O_1O^2 + OM_1^2 - 2\cdot O_1O\cdot OM_1\cdot cos\,45} =$$

$$= \sqrt{110^2 + 80^2 - 2\cdot 110\cdot 80\cdot 0{,}7} = 78{,}6\text{ см}.$$

Тоді $v_e = 78{,}6\cdot 2 = 153{,}2\text{ см/с} = 1{,}53\text{ м/с}$.

Для подальшого нам треба знати кути, які вектор $\bar{v}_e$ утворює з рухомими осями координат, з цією метою знайдемо за допомогою теореми синусів кут $\alpha = \angle OO_1M_1$ в трикутнику O_1OM;

$$\frac{sin\,\alpha}{OM_1} = \frac{sin\,45°}{O_1M_1} \Rightarrow sin\,\alpha = \frac{OM_1}{O_1M_1}\cdot sin\,45° =$$

$$= \frac{80}{78{,}6} \cdot 0{,}7 = 0{,}71 \Rightarrow \alpha = \mathrm{a}rc\,sin\,0{,}71 = 45{,}5°.$$

4. Застосовуючи «правило голки і клею», подумки зупиняємо обертання платформи і бачимо, що у відносному русі точка рухається дугою кола. Тоді її відносна швидкість $\bar{v}_\gamma$ направлена по дотичній до кола в точці M_1, тобто перпендикулярно до радіуса OM_1, але в який саме бік, тобто вгору чи вниз визначиться після диференціювання закону руху і підставляння замість t заданого значення t_1. Будемо мати:

$$v_r = \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=t_1} = -20\pi \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left. sin\frac{\pi}{4}t \right|_{t=2} = -5\pi^2 = -50\,\frac{\text{см}}{\text{с}} = -0{,}5\ \text{м/с}.$$

Знак мінус тут означає, що вектор $\bar{v}_r$ направлений протилежно показаному на рис. 4.3 додатному напрямку, тобто вниз.

5. Для знаходження абсолютної швидкості застосовуємо формулу (1), яку проектуємо на осі показаної на рис. 4.3 рухомої системи координат, при цьому врахуємо, що вектор $\bar{v}_r$ утворює з віссю Ox кут $90° - \theta = 45°$, а вектор $\bar{v}_r$ має кут $90° - \alpha = 44{,}5°$, будемо мати:

$$v_{ax} = -v_e\,cos\,45° - v_r\,cos\,44{,}5° = -1{,}53 \cdot 0{,}7 - 0{,}5 \cdot 0{,}69 = -1{,}4.$$

$$v_{ay} = -v_e\,sin\,45° - v_r\,sin\,44{,}5° = 1{,}53 \cdot 0{,}7 - 0{,}5 \cdot 0{,}71 = 0{,}7.$$

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{1{,}4^2 + 0{,}7^2} = 0{,}7\sqrt{5} = 1{,}56\ \text{м/с}.$$

Якщо «приклеїти» точку в положенні M_1 до диску, то разом з диском вона виконує обертальний рух і оскільки, згідно з умовою задачі, обертання є рівномірним ($\omega = const$), то це означає що кутове прискорення $\varepsilon = 0$ і точка M_1 диску має лише вісеспрямоване прискорення, яке направлене від M_1 до O_1 (рис. 4.3), а його модуль знаходимо за формулою:

$$W_e = W_e^{\text{віс}} = O_1M_1 \cdot \omega^2 = 78{,}6 \cdot 4 = 314{,}4\ \text{см/с}^2 = 3{,}14\ \text{м/с}^2.$$

7. Зупинивши за «правилом голки і клею» обертання диску, бачимо, що відносний рух точки є криволінійним, а це означає, що справедлива така формула

$$\bar{W}_r = \bar{W}_r^\tau + \bar{W}_r^n = W_r^\tau \cdot \bar{\tau} + W_r^n \cdot \bar{n},$$

тобто на відміну від прикладу 1 тут виникає нормальне відносне прискорення $\overline{W}_{\gamma}^{n}$, яке направлене від точки M_1 до центру кола O (рис. 4.3), а за модулем знаходиться так:

$$W_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{(0{,}5)^2}{0{,}8} = 0{,}31\ \text{м/с}^2.$$

Прискорення $\overline{W}_r^{\tau}$ завжди направлене по дотичній, тобто тією ж прямою, що і вектор $\bar{v}_r$, але в який саме бік визначається диференціюванням формули для v_r з наступним підставлянням замість t заданого значення t_1. У нас будемо мати:

$$W_r^{\tau} = \frac{dv_{\gamma}}{dt}\bigg|_{t=t_1} = -5\pi^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot cos(\frac{\pi}{4}t)\bigg|_{t=2} = 0.$$

Це означає, що в даний конкретний момент часу тангенціальне відносне прискорення не виникає, тобто в даний момент часу відносна швидкість $\bar{v}_r$ не змінюється за величиною, але змінюється за напрямком, про що свідчить ненульове значення W_r^n.

8. Згідно з правилом Жуковського для плоского випадку для знаходження напрямку прискорення Коріоліса достатньо повернути у своїй площині $\bar{v}_r$ на 90° у бік обертання. Тоді із рис. 4.3 ми бачимо, що вектор $\overline{W}_c$ буде прикладеним у точці M_1 і направлений по радіусу OM_1 у бік протилежний руху до O (тобто від M_1 у зовнішній бік). Модуль цього прискорення з врахуванням того факту, що у плоскому випадку кут між векторами $\bar{v}_{\gamma}$ і $\overline{\omega}_e$ завжди прямий, тобто $sin(\widehat{\overline{\omega}_e,\ \bar{v}_2}) = 1$, знаходимо так:

$$W_c = 2\omega_e \cdot v_{\gamma} = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 2\ \text{м/с}^2.$$

9. Для знаходження абсолютного прискорення застосовуємо теорему про додавання прискорень (теорему Коріоліса), враховуючи, що в даному випадку формула (3) приймає такий вигляд:

$$\overline{W}_a = \overline{W}_e + \overline{W}_r^n + \overline{W}_c.$$

Проектуємо цю формулу на осі рухомої системи координат

$$W_{ax} = -W_e^{\text{віс}} \cdot sin\,\alpha - W_r^n\,cos\,\theta + W_c\,cos\,\theta =$$

$$= -3{,}14 \cdot 0{,}71 - 0{,}31 \cdot 0{,}7 + 2 \cdot 0{,}7 = -1{,}45;$$

$$W_{ay} = -W_e^{\text{віс}} \cdot cos\, a + W_r^n \, sin\, \theta - W_e \, sin\, \theta =$$

$$= -3{,}14 \cdot 0{,}69 - 0{,}31 \cdot 0{,}7 + 2 \cdot 0{,}7 = -3{,}43;$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2} = \sqrt{1{,}45^2 + 3{,}43^2} = 3{,}72 \text{ м/с}^2.$$

Приклад 3. (ситуація 2.1). Точка M рухається по диску згідно до закону $S = AM = f(t)$. Диск обертається навколо нерухомої осі O_1O_2, яка лежить у площині диску, у напрямку, вказаному стрілкою (рис. 4.4), з кутовою швидкістю $\omega = const$. Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M в момент часу t_1, якщо:

$$f(t) = 40\, sin\frac{\pi}{3}t(с\text{м}),\;\; \omega = 2\; c^{-1}, \alpha = 60°, R = 70 \text{ см},\; t_1 = 2\; c.$$

Примітка. Точка M показана на рисунку в області додатних значень $S(S > 0)$.

Розв'язання.

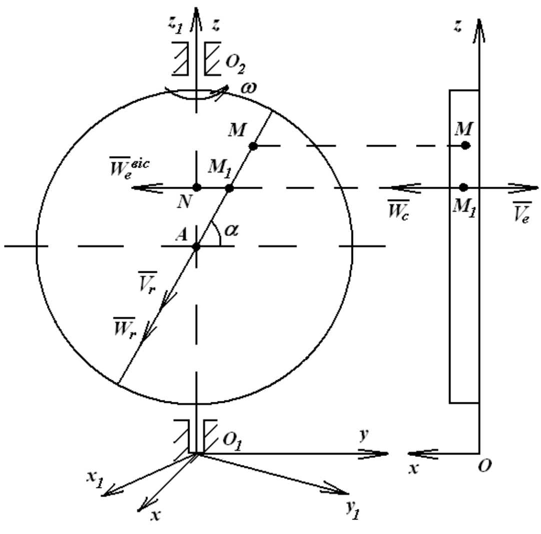

Рисунок 4.4 – Приклад 3

Точка M виконує складний рух, оскільки вона одночасно рухається по прямій згідно із заданим законом і, знаходячись на поверхні диску, обертається разом з ним. При цьому переносним рухом є обертання диску навколо нерухомої осі із заданою сталою кутовою швидкістю ω, а відносним є прямолінійний рух точки по нерухому диску. Оскільки при обертанні диск описує просторову фігуру (сферу), то це так звана просторова задача, яку ми умовно позначаємо першою цифрою 2, а відносний рух є прямолінійний, і цей випадок ми позначаємо другою цифровою 1. Тому – це ситуація 2.1. Обираємо нерухому систему координат $O_1x_1y_1z_1$ і рухому систему $Oxyz$, яка обертається разом з диском, причому ця система обирається так, щоб диск увесь час руху знаходився у площині yz.

Увага! Вище ми вже відзначали, що у випадку просторових задач необхідно поруч із основним рисунком правіше показувати у вигляді доповнення вид із додатного напрямку рухомої осі *y* (рис. 4.4) і одночасно використовувати обидва рисунки.

2. Знайдемо конкретне положення точки M для заданого моменту часу на своїй відносній траєкторії для заданого моменту часу t_1. Для цього, позначаючи це положення як M_1, підставляємо в заданий закон значення $t_1 = 2\ c$, будемо мати:

$$AM_1 = f(t_1) = 40 \cdot sin\frac{\pi}{3} \cdot t\Big|_{t=t_1} = 40\, sin\, 120° = 40 \cdot 0{,}86 = 34{,}4 \text{ см} \\ = 0{,}34 = \text{м}.$$

Показуємо тепер конкретне положення точки на рис. 4.4 зліва і справа і, оскільки при обчисленні ми отримали результат із знаком плюс, то згідно з приміткою це означає, що точка M_1 знаходиться на заданій прямій вище точки *A*.

3. За «правилом голки і клею» подумки приклеївши точку до диску в положенні M_1 бачимо, що швидкість цієї точки диску направлена перпендикулярно до площини диску від нас, тобто вздовж осі *Ox* у від'ємному напрямку і її можна показати так лише на правій частині рис. 4.4. Щоб знайти модуль цієї швидкості нам треба знати відстань від точки до осі обертання. Із рис. 4.4 легко побачити, що:

$$h = NM_1 = AM_1 \cdot cos\, 60° = 0{,}17 \text{ м}.$$

Тоді:

$$v_e = h \cdot \omega = 0{,}17 \cdot 2 = 0{,}34 \text{ м/с}.$$

4. Для знаходження $\bar{v}_r$ подумки за допомогою голки зупиняємо обертання платформи і тоді швидкість точки M у відносному русі направлена вздовж прямої AM, але в який саме бік стане відомим після диференціювання заданого закону відносного руху і наступної підстановки замість t заданого значення. Будемо мати:

$$v_r = \frac{dS}{dt}\bigg|_{t=t_1} = 40 \cdot \frac{\pi}{3} cos\frac{\pi}{3}t\bigg|_{t=2} = -\frac{40\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{20\pi}{3} = -20\,\frac{\text{см}}{\text{с}} =$$
$$= -0{,}2\ \text{м/с}.$$

Знак мінус тут означає, що швидкість $\bar{v}_\gamma$ направлена від точки M_1 до точки A, тобто по прямій вниз.

Увага! Звернемо увагу на те, що згідно з заданим законом відносного руху точки у вигляді $f(t) = 40\,sin\frac{\pi}{3}t$ матеріальна точка виконує гармонічні коливання вздовж показаної на рис. 4.4 прямої. При цьому при $t = 0$ точка знаходиться в положенні A, при $t = 1{,}5\ c$ вона максимально віддалилася від точки A до точки M_2 такої, що $AM_2 = 40$ см, і почала рухатися в зворотному напрямку, тобто вниз, і для $t = 2\ c$ рухаючись вниз, знаходилась в положенні M_1, де як ми визначили $AM_1 = 34{,}4$. Тому з механічної точки зору, а не тільки з математики, зрозумілий напрямок вектора $\bar{v}_r$.

5. Абсолютну швидкість $\bar{v}_a$ знаходимо за теоремою про додавання швидкостей, використовуючи формулу (1), але на відміну від двох попередніх прикладів тут треба проектувати цю формулу не на дві, а на три осі рухомої системи координат будемо мати:

$$v_{ax} = -v_e = -0{,}34,$$

$$v_{ay} = -v_r\,cos\,a = -0{,}2 \cdot 0{,}5 = -0{,}1,$$

$$v_{az} = -v_r\,sin\,\alpha = -0{,}2 \cdot 0{,}86 = -0{,}17,$$

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2} = \sqrt{0{,}34^2 + 0,1^2 + 0{,}17^2} = 0{,}4\ \text{м/с}.$$

Увага! Звернемо увагу на те, що в подібних задачах, коли навколо нерухомої осі обертається плоска фігура, по якій рухається матеріальна точка, вектор $\bar{v}_r$ завжди лежить у площині yz, а вектор $\bar{v}_e$ – перпендикулярний до цієї площини, тобто вони взаємно перпендикулярні і тоді можна використовувати таку формулу для знаходження модуля суми таких векторів:

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{0{,}34^2 + 0{,}2^2} = 0{,}4 \text{ м/с},$$

але більш універсальним є метод проектування на усі три осі координат, зокрема, він буде використовуватися і при визначенні абсолютного прискорення, коли в правій частині формули (3) більше ніж два доданки.

6. Застосовуючи «правило голки і клею», фіксуємо точку M в тому положенні M_1 на диску, в якому вона зараз знаходиться, і знаходимо прискорення точки диску в її обертанні разом з диском навколо нерухомої осі O_1O_2. Якби диск обертався нерівномірно, тобто було відомим кутове прискорення ε, то виникало б обертальне прискорення, яке в залежності від напрямку (знаку ε), було б направлене вздовж осі Ox в той чи інший бік. Але у нас за умовою $\varepsilon = 0$ (оскільки $\omega = const$) і тоді в даній задачі це прискорення відсутнє і точка M_1 має лише вісеспрямоване прискорення $\overline{W}_e^{\text{віс}}$, яке направлене від M_1 до осі (рис. 4.4) і за модулем знаходиться так:

$$W_e^{\text{віс}} = h \cdot \omega^2 = 0{,}17 \cdot 4 = 0{,}68 \text{ м/с}^2.$$

7. При визначенні $\overline{W}_r$ зупиняємо за допомогою голки диск і в першу чергу звертаємо увагу на вид траєкторії відносного руху точки з наступної причини: якщо траєкторією є пряма, то $\overline{W}_r = \overline{W}_r^\tau$, якщо крива, то $\overline{W}_r = \overline{W}_r^\tau + \overline{W}_r^n$. Оскільки в даній задачі ми рухаємося вздовж прямої AM, то $W_r^n = 0$ і повне прискорення точки у відносному русі направлене вздовж цієї прямої, а в яких саме бік визначиться після диференціювання за часом виразу для v_r з наступною підстановкою конкретного значення $t_1 = 2$ c. Будемо мати

$$W_r = W_r^\tau = \frac{dv_r}{dt}\bigg|_{t=t_1} = \frac{40\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{3}\left(-sin\frac{\pi}{3}t\right)\bigg|_{t=2} = -\frac{40\pi^2}{9} \cdot 0{,}86 =$$
$$= -38{,}2\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2} = -0{,}38 \text{ м/с}^2.$$

Знак мінус тут означає, що як і вектор $\bar{v}_r$, вектор $\overline{W}_r$ направлений вздовж прямої AM вниз (рис. 4.4).

8. Для визначення прискорення Коріоліса в просторових задачах, на відміну від розглянутих в прикладах 1 і 2 плоских випадків, треба виконати усі чотири пункти правила Жуковського, а саме:

1) подумки провести площину через точку M_1 перпендикулярну до осі обертання (в нашому випадку це буде площина, паралельна площині xy);

2) перенести вектор $\bar{\omega}$ в точку M_1;

3) спроектувати вектор $\bar{v}_r$ на проведену площину (очевидно, що в нашій задачі ця проекція $\bar{v}_r'$ ляже на пряму M_1N саме в напрямку від M_1 до N);

4) повернути $\bar{v}_r'$ на 90° у бік обертання (в даній задачі ми отримаємо, що вектор $\bar{W}_c$ буде направленим перпендикулярно до площини диску на нас, тобто в заданому напрямку осі Ox) і показуємо вектор $\bar{W}_c$ на правій частині рисунку 4.4.

Для знаходження модуля прискорення Коріоліса визначаємо, що між векторами $\bar{\omega}$ і $\bar{v}_r$ кут дорівнює $90° + \alpha = 90° + 60° = 150°$ і тоді за відомою формулою знаходимо:

$$W_c = 2\omega \cdot v_r\, sin(\widehat{\bar{\omega}, \bar{v}_r}) = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}4 \text{ м/с}.$$

9. Абсолютне прискорення точки находиться за допомогою теореми Коріоліса, при цьому, враховуючи, що в даній задачі $W_e^{\text{об}} = 0$ і $W_r^n = 0$, в розгорнутому вигляді формула (2) запишеться так:

$$\bar{W}_a = \bar{W}_e^{\text{віс}} + \bar{W}_r^\tau + \bar{W}_c.$$

На відміну від двох попередніх прикладів тепер цю формулу треба проектувати на три осі рухомої системи координат і будемо мати:

$$W_{ax} = W_c = 0{,}4;$$

$$W_{ay} = -W_e^{\text{віс}} - W_r \cdot cos\,\alpha = -0{,}68 - 0{,}38 \cdot 0{,}5 = -0{,}87;$$

$$W_{az} = -W_r\, sin\,\alpha = -0{,}38 \cdot 0{,}86 = -0{,}33;$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2} = \sqrt{0{,}4^2 + 0{,}87^2 + 0{,}33^2} = 1{,}01 \text{ м/с}^2.$$

Приклад 4. (ситуація 2.2). Точка M рухається по диску згідно з законом $S = AM = f(t)$ Диск обертається навколо нерухомої осі O_1O_2, що лежить у площині диску, у напрямку вказаному стрілкою з кутовою швидкістю $\omega = const$. Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки в момент t_1, якщо

$$f(t) = 60\pi t\, sin\frac{\pi}{3}t \text{ (см)};\quad \omega = 2\ c^{-1};\ R = 60 \text{ см};\quad t_1 = 0{,}5\ c.$$

Примітка. Точка М показана на рисунку 4.5 в області додатних значень $S(S > 0)$.

Розв'язання.

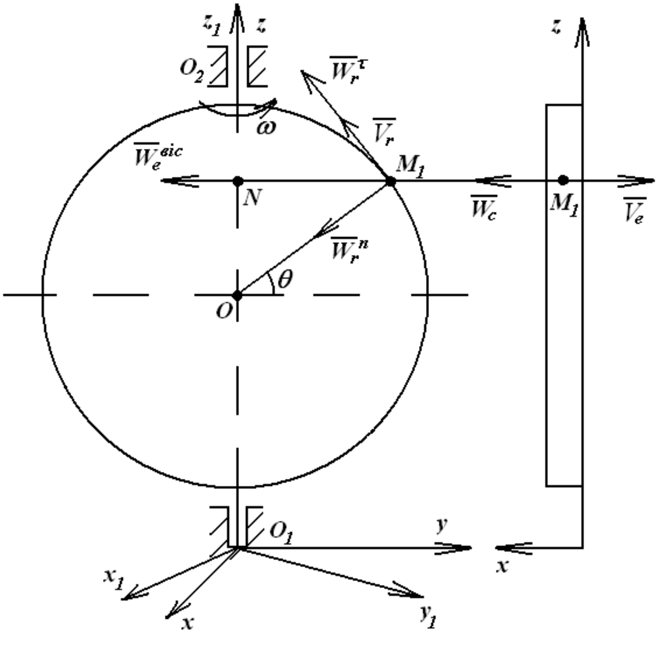

Рисунок 4.5 – Приклад 4

1. Проаналізуємо спочатку в загальному вигляді задану ситуацію. Точка рухається ободом диску згідно з заданим законом і одночасно обертається разом з ним. Звідси робимо висновок, що матеріальна точка M виконує складний рух, причому в даному випадку переносним для неї буде просторовий обертальний рух диску. Відносним рухом в даній задачі, на відміну від прикладу 3, буде криволінійним рух точки дугою кола заданого радіуса. Вводимо дві просторові системи координат: нерухому $O_1x_1y_1z_1$ і рухому O_1xyz, яка обертається разом з диском, причому осі обертаються так щоб диск увесь час знаходиться

в рухомій площині *yz* (рис. 4.5). Крім того, в правій частині рис. 4.5 показуємо додатково вид збоку, тобто з додатного напрямку рухомої осі O_1y. За нашою умовною класифікацією ця задача належить до ситуації під шифром 2.2, тобто переносний рух є обертальним просторовим (перша цифра 2), а відносний рух є криволінійним (друга цифра 2).

2. Щоб знайти конкретне положення точки на диску для заданого моменту часу треба підставити в закон відносного руху замість t задане значення t_1. Знаходимо:

$$AM_1 = f(t_1) = 60\pi \cdot \frac{1}{2} sin\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = 30\pi \cdot 0{,}45 = 15\pi = 47{,}1 \text{ см} = 0{,}47\text{м}.$$

Увага! В прикладі 2 ми вже відзначали, що у випадках, коли траєкторією відносного руху є дуга кола більш зручно замість лінійної величини (довжини дуги AM_1) перейти до відповідного центрального кута, який знаходиться за відомою формулою елементарної геометрії (рис. 4.5):

$$\theta = \frac{AM_1}{R} = \frac{15\pi}{60} = \frac{\pi}{4}.$$

Тепер зрозуміло, де точно знаходиться наша точка.

3. Щоб визначити переносну швидкість v_e подумки приклеюємо точку в положенні M_1 на диску і тоді згідно з формулою кінематики обертального руху твердого тіла за модулем ця швидкість знаходиться так:

$$v_e = h \cdot \omega,$$

де h – відстань від точки M_1 до осі обертання.

В нашому випадку (рис. 4.5) $h = M_1N = OM_1\, sin\,\theta$ і тоді:

$$v_e = R \cdot sin\frac{\pi}{4} \cdot \omega = 60 \cdot 0{,}7 \cdot 2 = 84 \text{ см/с} = 0{,}84 \text{ м/с};$$

при цьому вектор $\bar{v}_e$ направлений перпендикулярно до площини диску від нас, тобто у від'ємному напрямку осі O_1x і його можна показати тільки на правій частині рис. 4.5.

4. Для знаходження відносної швидкості $\bar{v}_r$ за «правилом голки і клею» подумки за допомогою голки зупиняємо диск і бачимо, що у відносному русі точка виконує криволінійний рух дугою кола. Тоді її

швидкість у цьому русі направлена по дотичній, тобто перпендикулярно до радіусу кола OM_1, але в який саме бік визначиться після диференціювання за часом заданого закону відносного руху з наступним підставлянням замість t його значення в заданий момент часу t_1 . Будемо мати:

$$v_r = \frac{dS}{dt}\bigg|_{t=t_1} = (60\pi\, sin\frac{\pi}{3}t + 60\pi t \cdot \frac{\pi}{3}cos\frac{\pi}{3}t)\bigg|_{t=0{,}5} =$$

$$= 60\pi\left(0{,}5 + \frac{\pi}{3}\cdot 0{,}86\right) = 263{,}8\ \text{см/с} = 2{,}64\ \text{м/с}.$$

Оскільки результат ми отримали зі знаком плюс, то це означає згідно з заданим додатнім напрямком відліку дугової координати *S*, що вектор $\bar{v}_r$ лежить в площині диску і направлений в точці M_1 перпендикулярно до OM_1 догори (рис. 4.5).

5. Абсолютна швидкість точки знаходиться за допомогою теореми про додавання швидкостей. Зазначимо, що в даній задачі, як і у прикладі 3, вектори $\bar{v}_e$ і $\bar{v}_r$ у формулі (1) взаємно перпендикулярні ($\bar{v}_e$ лежить в площині *yz*, а $\bar{v}_a$ направлений вздовж осі *Ox*), тому $\bar{v}_a$ є діагоналлю прямокутника, побудованого на цих векторах, і тоді за теоремою Піфагора будемо мати:

$$v_a\sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{0{,}84^2 + 2{,}64^2} = 2{,}78\ \text{м/с}.$$

Зрозуміло, що такий же результат ми отримаємо, якщо застосуємо до формули (1) метод проекцій, тоді будемо мати:

$$v_{ax} = -v_e = -0{,}84,$$

$$v_{ay} = -v_r\, sin\,\theta = -2{,}64 \cdot 0{,}7 = -1{,}85,$$

$$v_{az} = v_r\, cos\,\theta = 2{,}64 \cdot 0{,}7 = 1{,}85,$$

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2} = \sqrt{0{,}84^2 + (-1{,}85)^2 + 1{,}85^2} = 2{,}78\ \text{м/с}.$$

6. Як і у всіх трьох попередніх прикладах звернемо увагу на те, що обертальний переносний рух у нас відбувається без кутового прискорення, а це означає, що у всіх точок диску, окрім тих, що лежать на осі обертання, виникає лише вісеспрямоване прискорення і відсутнє

обертальне прискорення. Тому, приклеївши подумки нашу рухому точку в положенні M_1, бачимо, що її переносне прискорення направлене від точки M_1 по прямій MN (рис. 4.5), і його модуль знаходиться так:

$$W_e = W_e^{\text{віс}} = h \cdot \omega = NM_1 \cdot \omega^2.$$

Легко бачити, що:

$$NM_1 = OM_1 \cdot cos\,\theta = R \cdot cos\frac{\pi}{4} = 60 \cdot 0{,}7 = 42 \text{ см},$$

і тоді:

$$W_e = W_e^{\text{віс}} = 42 \cdot 4 = 168 \text{ см/с}^2 = 1{,}68 \text{ м/с}^2.$$

7. Оскільки відносний рух є криволінійним, то з кінематики точки відомо, що при цьому у точки виникає два прискорення і тоді справедлива формула:

$$\bar{W}_r = \bar{W}_r^{\tau} + \bar{W}_r^{n};$$

при цьому вектор $\bar{W}_r^{\tau}$ направлений по дотичній до траєкторії точки, тобто перпендикулярно до радіуса OM_1, але в який саме бік визначиться після диференціювання за часом виразу для v_r з наступною підстановкою замість t заданого значення t_1. Будемо мати:

$$W_r^{\tau} = \frac{dv_r}{dt}\bigg|_{t=t_1} =$$

$$= 60\pi \cdot \frac{\pi}{3} cos\frac{\pi}{3} t + 20\pi^2 cos\frac{\pi}{3}\tau - 20\pi^2 t\frac{\pi}{3} sin\frac{\pi}{3} t)\bigg|_{t=0{,}5} =$$

$$= 40\pi^2 \cdot 0{,}86 - \frac{10}{3}\pi^3 \cdot 0{,}5 = 278{,}6 \text{ см/с}^2 = 2{,}79 \text{ м/с}^2.$$

Знак плюс тут означає, що вектор $\bar{W}_r^{\tau}$ направлений у додатному напрямку відліку дугової координати, тобто, як і вектор $\bar{v}_r$, вгору (рис. 4.5).

Вектор $\bar{W}_r^{n}$ направлений від точки M_1 до центру кривизни траєкторії, тобто від M_1 до O (рис. 4.5), а його модуль знаходимо за формулою:

$$W_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{v_r^2}{R} = \frac{(2{,}64)^2}{0{,}6} = 11{,}6\ \text{м/с}^2.$$

8. Згідно з правилом Жуковського для визначення напрямку прискорення Коріоліса виконуємо подумки чотири пункти: 1) проводимо через точку M_1 площину, перпендикулярну до осі O_1O_2 (в нашому випадку слідом від цієї площини на лівій частині рис. 5.3 буде (пряма M_1N); переносимо в точку M_1 вектор $\bar{\omega}$; 3) проектуємо вектор $\bar{v}_r$ на проведену площину (в нашому випадку ця проекція $\bar{v}_r'$ ляже на пряму M_1N в напрямку від M_1 до N); повертаємо $\bar{v}_r'$ на $90°$ у бік обертання. Бачимо, що після усіх цих дій вектор $\bar{W}_c$ буде направленим на нас, тобто в додатному напрямку осі Ox і показуємо його на правій частині рис. 4.5.

Модуль цього прискорення знаходимо за формулою:

$$W_c = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}) = 2 \cdot 2 \cdot 2{,}64 \cdot 0{,}7 = 7{,}4\ \text{м/с}^2.$$

9. Для визначення абсолютного прискорення точки застосовуємо теорему Коріоліса, згідно з якою для даної задачі формула (2) в розгорнутому вигляді запишеться так:

$$\bar{W}_a = \bar{W}_e^{\text{віс}} + \bar{W}_r^{\tau} + \bar{W}_r^{n} + \bar{W}_c.$$

Проектуємо цю формулу на осі рухомої системи координат:

$$W_{ax} = W_e = 7{,}4;$$

$$W_{ay} = -W_e^{\text{віс}} - W_r^{\tau} \sin 45° - W_r^{n} \cos 45° = -1{,}68 - 2{,}79 \cdot 0{,}7 -$$

$$-11{,}6 \cdot 0{,}7 = -11{,}8;$$

$$W_{az} = W_r^{\tau} \cos 45° - W_e^{n} \sin 45° = 2{,}8 \cdot 0{,}7 - 11{,}6 \cdot 0{,}7 = -\,6{,}2;$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2} = \sqrt{7,4^2 + (-11,8)^2 + (-6,2)^2} = 15{,}2\ \text{м/с}^2.$$

5 ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ К-5 «КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ СКЛАДНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ»

Приклад 1. (ситуація 1.1) За заданим законом обертального руху пластини навколо нерухомої осі $\varphi = f_1(t)$ і відносного руху матеріальної точки M по пластині $S = AM = f_2(t)$ для заданих моментів часу t_1, t_2 і t_3 визначити абсолютні швидкості і абсолютні прискорення точки M, якщо $a = 20$см, $f_1(t) = 2(t^2 - t)$,
$f_2(t) = 20(t^3 - 2t^2)$, $t_1 = 1\ c$, $t_2 = 2\ c$, $t_3 = 2{,}5\ c$.

Розв'язання.

1. Зрозуміло, що точка M виконує складний рух, обертаючись разом з диском у вказаному стрілкою напрямку згідно із заданим законом обертання і переміщуючись по діагоналі квадрату по заданому закону зміни відстані AM. При цьому обертання платформи буде переносним рухом, а зміна положення точки M на діагоналі BD – відносним. Обираємо дві системи координат з початком у центрі обертання O: нерухому Ox_1y_1 і рухому Oxy, що обертається разом з диском, (рис. 5.1) причому вісь Ox цієї системи направляємо паралельно діагоналі BD, якою рухається точка M.

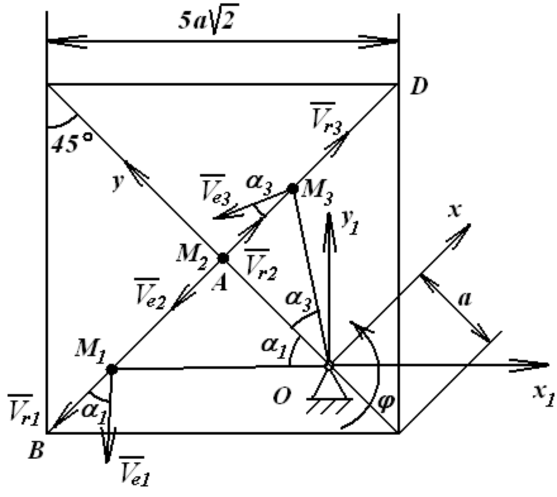

Рисунок 5.1 – Точка M виконує складний рух

2. Знайдемо три положення точки, які відповідають трьом заданим моментам часу. Спочатку за теоремою Піфагора знайдемо довжину діагоналі *BD:*

$$BD = \sqrt{(5a\sqrt{2})^2 + (5a\sqrt{2})^2} = 10 \cdot a = 10 \cdot 20 = 200 \text{ см} = 2 \text{ м}.$$

Тоді $AD = 0{,}5BD = 1$ м.

При $t = 1\ c,\ AM_1 = 20(1-2) = -20\ c\text{м} = -0{,}2$ м.

Знак мінус означає, що точка M_1 знаходиться на діагоналі нижче ніж точка *A* (рис. 5.1).

При $t_1 = 2\ c,\ \ AM_2 = 20(8-8) = 0$.

Це означає, що в даний момент часу точка *M* співпадає з точкою A.

При $t_3 = 2{,}5\ c,\ AM_3 = 20 \cdot (15{,}625 - 13{,}5) = 42{,}5 \text{ см} = 0{,}43$ м.

3. Визначимо величину і напрямок переносної швидкості для кожного із трьох моментів часу, для цього, застосовуючи „правило голки і нитки" подумки приклеюємо матеріальну точки *M* послідовно в кожному з трьох положень M_1, M_2 і M_3 на плиті, з'єднуємо ці точки з центром обертання O і для того, щоб показати в якому саме напрямку, перпендикулярно до M_1O, M_2O і M_3O направлені вектори $\bar{v}_{e1}, \bar{v}_{e2}$ і $\bar{v}_{e3}$, спочатку обчислимо шляхом диференціювання заданого закону обертання пластики і підстановки замість t відповідного числового значення, кутову швидкість для кожного моменту часу. Будемо мати:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{df_1}{dt} = 2(2t-1).$$

Тоді, при $t = t_1$ $\qquad \omega_1 = 2(2t-1)|_{t=1} = 2\ c^{-1}$;

при $t = t_2$ $\qquad \omega_2 = 2(2t-1)|_{t=2} = 6\ c^{-1}$;

при $t = t_3$ $\qquad \omega_2 = 2(2t-1)|_{t=2{,}5} = 8\ c^{-1}$.

Оскільки у всіх трьох випадках кутова швидкість має знак плюс, то згідно з показаним на рис. 5.1 додатнім напрямком кута повороту це означає, що ω у всіх випадках направлена проти годинникової стрілки і у відповідності до цього показуємо на рис. 5.1 переносні швидкості точки у кожному з трьох положень. Для знаходження модулів цих швидкостей треба знати довжини відрізків M_1O, M_2O і M_3O. Оскільки за умовою задачі кут BAO прямий, то для знаходження OM_1 і OM_3 застосовуємо теорему Піфагора, враховуючи, що:

$$OM_2 = 0{,}5 \cdot BD - a = 0{,}5 \cdot 2 - 0{,}2 = 0{,}8 \text{ м},$$

тоді знаходимо

$$OM_1 = \sqrt{OM_2^2 + AM_1^2} = \sqrt{0,8^2 + 0,2^2} = 0{,}83 \text{ м}$$

$$OM_3 = \sqrt{OM_2^2 + AM_3^2} = \sqrt{0,8^2 + 0{,}43^2} = 0{,}91 \text{ м}.$$

Тепер знаходимо модулі переносних швидкостей

$$v_{e1} = OM_1 \cdot \omega_1 = 0{,}83 \cdot 2 = 1{,}66 \text{ м/с};$$

$$v_{e2} = OM_2 \cdot \omega_2 = 0{,}8 \cdot 6 = 4{,}8 \text{ м/с};$$

$$v_{e3} = OM_3 \cdot \omega_3 = 0{,}91 \cdot 8 = 7{,}28 \text{ м/с}.$$

Увага! Для застосування методу проекцій при обчисленні абсолютної швидкості нам треба буде знати кути, які вектори $\bar{v}_{e1}, \bar{v}_{e2}$ і $\bar{v}_{e3}$ утворюють з рухомими осями координат, зокрема, з віссю *Ox*. Для цього знайдемо кути α_1 і α_3 з відповідних прямокутних трикутників OM_2M_1 і OM_2M_3:

$$sin\,\alpha_1 = \frac{M_1M_2}{OM_1} = \frac{AM_1}{OM_1} = \frac{0{,}2}{0{,}83} = 0{,}22 \Rightarrow \alpha_1 = arcsin 0{,}22 = 12{,}6°;$$

$$sin\,\alpha_3 = \frac{M_2M_3}{OM_3} = \frac{AM_3}{OM_3} = \frac{0{,}43}{0{,}91} = 0{,}47 \Rightarrow \alpha_3 = arcsin\, 0{,}47 = 28°.$$

4. Для визначення відносної швидкості за допомогою голки подумки зупиняємо пластину, тоді видно, що відносним рухом в даній задачі є прямолінійне переміщення матеріальної точки паралельно осі *Ox* рухомої системи координат, але в який саме бік у кожному з трьох заданих моментів часу можна буде вказати лише після диференціювання заданої функції $f_2(t)$ і підстановки в отриману похідну замість t заданих значень $t_1, t_2,\ t_3$. В результаті будемо мати:

$$v_r = \frac{dS}{dt} = \frac{df_2}{dt} = 20(3t^2 - 4t).$$

Тоді для заданих моментів часу маємо такі значення:
при:

$$t_1 = 1\ c; \qquad v_{r1} = 20 \cdot (3t^2 - 4t)|_{t=1} = -20 \text{ см/с} = -0{,}2 \text{ м/с}.$$

Знак мінус тут означає, що згідно з показаним на рис. 5.1 заданим напрямком відліку координати S швидкість точки в положенні M_1 напрямлена по прямій вниз.

При $t_1 = 2\ c$:

$$v_{r2} = 20 \cdot (3t^2 - 4t)|_{t=2} = 80 \text{ см/с} = 0{,}8 \text{ м/с}.$$

Знак плюс тут означає, що в положенні M_1 швидкість відносного руху направлена вгору (рис. 5.1).

При $t_3 = 2{,}5\ c$:

$$v_{r3} = 20 \cdot (3t^2 - 4t)_{t=2,5} = 175 \text{ см/с} = 1{,}7\ 5\text{м/с}.$$

В цьому положенні відносна швидкість також направлена по прямій *BD* у бік точки *D* (рис. 5.1).

5. Абсолютну швидкість у кожному з трьох положень знаходимо за теоремою про додавання швидкостей, записуючи для кожного заданого моменту часу формулу (1) і проектуючи її на осі рухомої системи координат. В результаті будемо мати:

при $t = t_1 = 1\ c$:

$$v_{ax} = -v_{e1} \cos\alpha_1 - v_{r1} = -1{,}66 \cdot 0{,}98 - 0{,}2 = -1{,}83 \text{ м/с},$$

$$v_{ay} = -v_{e1} \sin\alpha_1 = -1{,}66 \cdot 0{,}22 = -0{,}37 \text{ м/с};$$

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{(-1{,}83)^2 + (-0{,}37)^2} = 1{,}87 \text{ м/с};$$

при $t = t_2 = 2\ c$:

$$v_{ax} = -v_{e2} + v_{r2} = -4{,}8 + 0{,}8 = -4 \text{ м/с};$$

$$v_{ay} = 0;$$

$$v_a = |v_{ax}| = 4 \text{ м/с};$$

при $t = t_3 = 2{,}5\ c$:

$$v_{ax} = -v_{e3} \cos\alpha_3 + v_{r3} = -7{,}28 \cdot 0{,}88 - 1{,}75 = -4{,}66 \text{ м/с};$$

$$v_{ay} = v_{e3} \sin\alpha_3 = 7{,}28 \cdot 0{,}47 = 3{,}42 \text{ м/с};$$

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{(-4{,}66)^2 + 3{,}42^2} = 5{,}8\text{м/с}.$$

6. Щоб знайти в кожному з трьох положень рухомої точки M дві компоненти її переносного прискорення в обертальному русі треба спочатку крім кутової швидкості пластин для t_1, t_2 і t_3, яку ми визначили раніше як ω_1, ω_2 і ω_3 , обчислити і кутові прискорення пластини в кожному з цих моментів часу шляхом диференціювання формули для ω з наступним підставленням замість t числових значень. Будемо мати:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 4\ c^{-2}.$$

Бачимо, що в даному випадку для заданої функції $f_1(t)$ друга похідна не залежить від часу, а значить однаково для всіх значень t. При цьому ε направлене проти годинникової стрілки (рис. 5.2).

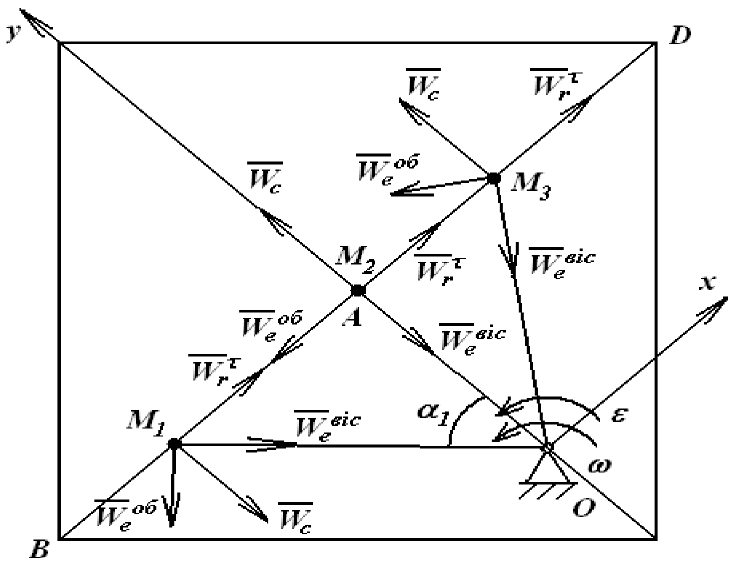

Рисунок 5.2 – Знаходження прискорень для даної ситуації

Оскільки при обертальному русі:

$$\overline{W}_e = \overline{W}_e^{\text{об}} + \overline{W}_e^{\text{віс}},$$

і $\overline{W}_e^{\text{об}}$ направлене перпендикулярно до відрізку, який з’єднує дану точку з віссю обертання у бік, який визначається знаком ε, то показуємо на рис. 5.2 $\overline{W}_e^{\text{об}}$ для всіх трьох положень точки, при цьому модулі показаних векторів знаходяться так:

при $t = t_1 = 1\ c$; $\quad W_e^{\text{об}} = OM_1 \cdot \varepsilon_1 = 0{,}83 \cdot 4 = 3{,}32\ \text{м/с}^2$;

при $t = t_2 = 2\ c$; $\quad W_e^{\text{об}} = OM_2 \cdot \varepsilon_2 = 0{,}8 \cdot 4 = 3{,}2\ \text{м/с}^2$;

при $t = t_3 = 2{,}5\ c$; $\quad W_e^{\text{об}} = OM_3 \cdot \varepsilon_3 = 0{,}91 \cdot 4 = 3{,}64\ \text{м/с}^2$.

Вектор $\overline{W}_e^{\text{віс}}$ завжди направлений від заданої точки до осі обертання, тому показуємо для всіх трьох положень вісеспрямоване прискорення на рис. 5.2, а модулі цих векторів обчислюємо за формулами:

при $t = t_1 = 1\ c$; $\quad W_e^{\text{віс}} = OM_1 \cdot \omega_1^2 = 0{,}83 \cdot 4 = 3{,}32\ \text{м/с}^2$;

при $t = t_2 = 2\ c$; $\quad W_e^{\text{віс}} = OM_2 \cdot \omega_2^2 = 0{,}8 \cdot 36 = 28{,}8\ \text{м/с}^2$;

при $t = t_3 = 2{,}5\ c$; $\quad W_e = OM_3 \cdot \omega_3^2 = 0{,}91 \cdot 64 = 57{,}74\ \text{м/с}^2$.

7. Оскільки у відносному русі точка *M* рухається прямолінійно і паралельно рухомій осі *Ox*, то у неї виникає лише відносне тангенціальне прискорення, яке направлене вздовж прямої *BD*, але в який саме бік у кожному з трьох положень визначиться лише після диференціювання за часом отриманого вище виразу для v_r і наступної підстановки замість t в кожен момент часу свого значення. Будемо мати:

$$W_r^\tau = \frac{dv_r}{dt} = 20(6t - 4).$$

Тоді знаходимо такі три значення:

при $t = t_1 = 1\ c$; $\quad W_r^\tau = 40\ \text{см/с}^2 = 0{,}4\ \text{м/с}^2$;

при $t = t_2 = 2\ c$; $\quad W_r^\tau = 160\ \text{см/с}^2 = 1{,}6\ \text{м/с}^2$;

при $t = t_3 = 2{,}5\ c$; $\quad W_r^\tau = 220\ \text{см/с}^2 = 2{,}2\ \text{м/с}^2$.

Зазначимо, що у всіх випадках ми отримали числові значення зі знаком плюс, а це означає, що у всіх трьох точках вектор $\overline{W}_r^\tau$ напрямлений по прямій *BD* вгору, тобто в додатному напрямку осі *Ox*.

8. При визначенні напрямку прискорення Коріоліса за правилом Жуковського нагадаємо, що у так званих плоских задачах, тобто коли

переносний рух відбувається на площині, в даному випадку – площині xy, достатньо повернути вектор відносної швидкості на 90° у напрямку кутової швидкості. Тоді, використовуючи показані на рис. 5.1 вектори $\bar{v}_r$, бачимо, що в точці M_1 вектор $\bar{W}_c$ направлений паралельно осі *Oy* у від'ємному напрямку, а в точках M_2 і M_3 – у додатному (рис. 5.2). При цьому для плоскої задачі модуль вектора $\bar{W}_c$ знаходиться за формулою:

$$W_c = 2\omega_e v_r$$

і для кожної з трьох точок знаходимо такі значення:

при $t = t_1 = 1\ c$; $\quad W_c = 2\omega_1 v_{r1} = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}8\ \text{м/с}^2$,

при $t = t_2 = 2\ c$; $\quad W_c = 2\omega_2 v_{r2} = 2 \cdot 6 \cdot 0{,}8 = 9{,}6\ \text{м/с}^2$,

при $t = t_3 = 2{,}5\ c$; $\quad W_c = 2\omega_3 v_{r3} = 2 \cdot 8 \cdot 1{,}75 = 28\ \text{м/с}^2$.

9. Абсолютне прискорення для усіх трьох моментів часу знаходимо за теоремою Коріоліса, яка в даному випадку записується так:

$$\bar{W}_a = \bar{W}_e^{\text{об}} + \bar{W}_e^{\text{віс}} + \bar{W}_r^{\tau} + \bar{W}_c.$$

Для кожного положення проектуємо цю формулу на осі рухомої системи координат і знаходимо наступні значення:

при $t = t_1 = 1\ c$:

$$W_{ax} = -W_e^{\text{об}} \cos\alpha_1 + W_e^{\text{віс}} \sin\alpha_1 + W_r^{\tau} = \\ = -3{,}32 \cdot 0{,}98 + 3{,}32 \cdot 0{,}22 + 0{,}4 = -2{,}1\ \text{м/с}^2;$$

$$W_{ay} = -W_e^{\text{об}} \sin\alpha_1 - W_e^{\text{віс}} \cos\alpha_1 - W_c = \\ = -3{,}32 \cdot 0{,}22 - 3{,}32 \cdot 0{,}98 - 0{,}8 = -4{,}8\ \text{м/с}^2;$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2} = \sqrt{(-2{,}1)^2 + (-4{,}8)^2} = 5{,}24\ \text{м/с}^2;$$

при $t = t_2 = 2\ c$:

$$W_{ax} = -W_e^{\text{об}} + W_r^{\tau} = -3{,}2 + 1{,}6 = -1{,}6\ \text{м/с}^2,$$

$$W_{ay} = -W_e^{\text{віс}} + W_c = -28{,}8 + 9{,}6 = -19{,}2\ \text{м/с}^2,$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2} = \sqrt{(-1,6)^2 + (-19,2)^2} = 19{,}3\ \text{м/с}^2;$$

при $t = t_3 = 2{,}5\ c$:

$$W_{ax} = -W_e^{\text{об}} \cdot \cos\alpha_3 - W_e^{\text{віс}} \cdot \sin\alpha_3 + W_r^{\tau} =$$

$$-3{,}63 \cdot 0{,}88 - 57{,}74 \cdot 0{,}47 + 2{,}2 = -28{,}2\ \text{м/с}^2;$$

$$W_{ay} = -W_e^{\text{об}} \cdot \sin a_3 - W_e^{\text{віс}} \cdot \cos a_3 + W_c =$$

$$3{,}63 \cdot 0{,}47 - 57{,}74 \cdot 0{,}88 + 28 = -21{,}4\ \text{м/с}^2;$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2} = \sqrt{(-28,2)^2 + (-21,4)^2} = 35{,}4\ \text{м/с}^2.$$

Приклад 2. (ситуація 1.2). За заданим законом обертального руху пластини навколо нерухомої осі $\varphi = f_1(t)$ і відносного руху матеріальної точки M по пластині $S = AM = f_2(t)$ визначити для заданих моментів часу t_1, t_2 і t_3 абсолютні швидкості і абсолютні прискорення точки M, якщо $h = 1{,}5R$, $f_1(t) = 2t^3 - 11t$, $f_2(t) = \frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t^2)$, $R = 0{,}5$, $t_1 = 1\ c$, $t_2 = 2\ c$, $t_3 = 3{,}5\ c$.

Розв'язання.

1. Точка M приймає участь одночасно в двох рухах: переміщується ободом круглої пластини за заданим законом і обертається в площині разом з пластиною. Навколо нерухомої осі, яка проходить через точку O перпендикулярно до площини пластини і додатній напрямок обертання показано на рис. 5.3 стрілкою. Зазначимо, що додатній напрямок відліку дугової координати S на рис. 5.2 визначено тим, що точка M показана без індексу в області додатних значень S ($S > 0$).

Вводимо дві системи координат з початком у точці O: нерухому Ox_1y_1 і систему Oxy, яка обертається разом з диском. Звернемо увагу на те, що переносний рух (обертання диску) відбувається в площині x_1y_1, тому перший індекс задачі 1, а відносний рух точки по ободу пластини є криволінійним, тобто має індекс 2, тому цю ситуацію ми позначаємо як 1.2.

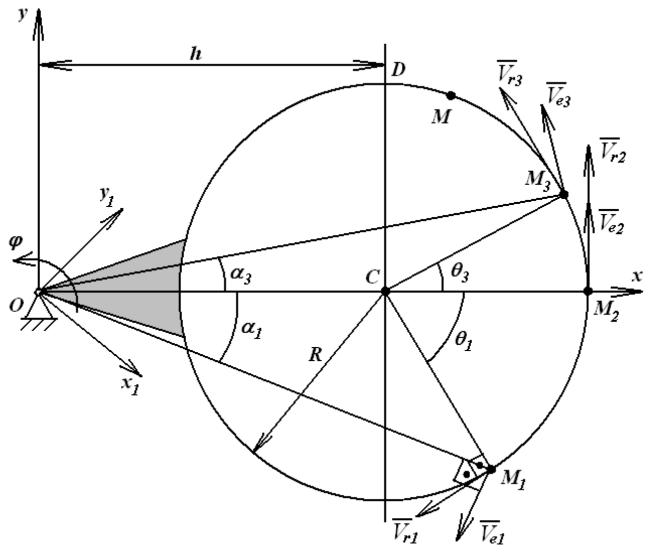

Рисунок 5.3 – Точка *M* приймає участь одночасно в двох рухах

2. Знайдемо три положення точки на пластині для заданих моментів часу $t_1,\ t_2$ і t_3, для чого послідовно підставляємо значення *t* в задану функцію $f_2(t)$ і знаходимо:

при $t = t_1 = 1\ c$; $\quad AM_1 = \frac{\pi}{3}R(1-2) = -\frac{\pi}{3}R(\text{см})$.

Увага! Вище, ми вже відзначили, що коли траєкторією точки є дуга кола, то доцільно замість довжини дуги ввести відповідний центральний кут за формулою:

$$\theta = \frac{S}{R},$$

Тоді при $t = t_1 = 1\ c$;

$$\theta = \frac{AM_1}{R} = -\frac{\pi}{3} = -60°.$$

Знак мінус тут означає, що точка M_1 знаходиться нижче точки *A* і радіус CM_1 утворює з горизонтом кут 60° (рис. 5.3).

При $t = t_2 = 2\ c$; $\quad AM_2 = \frac{\pi}{3}R \cdot (8-8) = 0.$

Це означає, що точка M_2 співпадає з точкою *A*.

При $t = t_3 = 3{,}5\ c$:

$$AM_3 = \frac{\pi}{3}R \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 \left(\frac{7}{2} - 2\right) = \frac{\pi}{2}R \cdot \frac{49}{4} = \frac{49}{8}\pi R.$$

Тоді:

$$\theta_3 = \frac{49}{8}\pi = \frac{\pi}{8} = 22{,}5°.$$

Положення точки M_3 показане на рис. 5.3.

3. Для визначення переносної швидкості для кожного моменту часу необхідно спочатку визначити кутову швидкість обертання пластини шляхом диференціювання заданої функції $f_1(t)$ і наступної підстановки в отриманий вираз замість t значень t_1, t_2 і t_3.

Знаходимо:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{df_1}{dt} = 6t^2 - 11.$$

Послідовно визначаємо:

при $t = t_1 = 1\ c$; $\quad \omega_1 = (6t^2 - 11)|_{t=1} = -5\ c^{-1}$.

Знак мінус тут означає, що ω_1 направлена в напрямку, протилежному показаному на рис. 5.3 додатному, тобто за годинниковою стрілкою.

При $t = t_2 = 1\ c$; $\quad \omega_2 = (6t^2 - 11)|_{t=2} = 13\ c^{-1}$.

Це означає, що ω_2 направлена проти годинникової стрілки.

При $t = t_3 = 3{,}5\ c$; $\quad \omega_3 = (6t^2 - 11)|_{t=3{,}5} = 63{,}5\ c^{-1}$.

Тобто ω_3 також направлена проти годинникової стрілки.

Тепер, для того щоб визначити переносну швидкість для кожного положення точки, з'єднуємо M_1, M_2 і M_3 з центром обертання O і тоді вектори $\bar{v}_e$ направлені перпендикулярно до OM_1, OM_2 і OM_3 у бік, який визначається знаком ω у цей момент часу. Побудовані за таким правилом $\bar{v}_{e1}, \bar{v}_{e2}$ і $\bar{v}_{e3}$ показані на рис. 5.3.

Для того, щоб визначити модулі цих векторів треба знайти довжини відрізків, що з'єднують точки M_1, M_2 і M_3 з точкою O. Для цього використовуємо теорему косинусів:

$$OM_1 = \sqrt{OC^2 + CM_1^2 - 2 \cdot OC \cdot CM_1 \cdot cos(180 - \theta_1)} =$$

$$R \cdot \sqrt{1,5^2 + 1^2 + 2 \cdot 1,5 \cdot 1 \cdot 0,5} = R\sqrt{4,75} = 0,5 \cdot 2,18 = 1,1 \text{ м.}$$

$$OM_2 = h + R = 2,5 \cdot R = 1,25 \text{ м;}$$

$$OM_3 = \sqrt{OC^2 + CM_3^2 - 2 \cdot OC \cdot CM_3 \cdot cos(180 - \theta_3)} =$$

$$R\sqrt{1,5^2 + 1^2 - 2 \cdot 1,5 \cdot 1 \cdot 0,92} = R\sqrt{6} = 0,5 \cdot 2,45 = 1,22 \text{ м.}$$

Після цього за формулою $v_e = h \cdot \omega$ знаходимо величини переносної швидкості для кожного з трьох положень точки.

При $t = t_1 = 1\ c$; $v_{e1} = OM_1 \cdot \omega_1 = 1,1 \cdot 5 = 5,5$ м/с,

при $t = t_2 = 2\ c$; $v_{e2} = OM_2 \cdot \omega_2 = 1,25 \cdot 13 = 16,25$ м/с,

при $t = t_3 = 3,5\ c$; $v_{e3} = OM_3 \cdot \omega_3 = 1,22 \cdot 63,5 = 77,5$ м/с.

Увага! В подальшому для застосування методу проекцій при визначенні абсолютної швидкості точки нам будуть потрібні кути, які утворюють вектори $\bar{v}_{e1}, \bar{v}_{e2}$ і $\bar{v}_{e3}$ з осями рухомої системи координат. Із рис. 5.3 легко бачити, що згідно з властивостями кутів із взаємно перпендикулярними сторонами кут між $\bar{v}_{e1}$ і віссю Oy дорівнює показаному тут куту α_1 і аналогічно кут α_3 рівний куту між $\bar{v}_{e3}$ і Oy. Кути α_1 і α_3 знаходимо за теоремою синусів.

Із ΔOCM_1:

$$\frac{sin\,\alpha_1}{CM_1} = \frac{sin(180 - \theta)}{OM_1} \Rightarrow sin\,\alpha = \frac{CM_1}{OM_1} sin\,\theta_1 =$$

$$= \frac{R}{R\sqrt{4,75}} \cdot sin\,60° = \frac{0,86}{\sqrt{4,75}} = \frac{0,86}{2,18} = 0,4;$$

$$\alpha_1 = arcsin 0,4 = 24°.$$

Із ΔOCM_3:

$$\frac{sin\,\alpha_3}{CM_3} = \frac{sin(180 - \theta_3)}{OM_3} \Rightarrow sin\,\alpha_3 = \frac{CM_3}{OM_3} sin\,\theta_3 = \frac{R}{R\sqrt{6}} 0,38 =$$

$$= \frac{0{,}38}{2{,}45} = 0{,}15; \alpha_3 = arcsin\, 0{,}15 = 8{,}5°.$$

4. При визначенні відносної швидкості $\bar{v}_r$ для кожного з трьох моментів часу $t_1,\ t_2, t_3$, перш за все зазначимо що, як відомо з кінематики точки, у випадку криволінійного руху швидкість направлена по дотичній до траєкторії в даному положенні. Звідси випливає, що у випадку, коли траєкторією руху є дуга кола швидкість у всіх точках перпендикулярна до радіуса, але в який саме бік визначиться після диференціювання за часом заданого закону відносного руху і підстановки в результат замість *t* конкретних значень $t_1,\ t_2, t_3$. Таким чином знаходимо:

$$v_r = \frac{dS}{dt} = \frac{df_2}{dt} = \frac{\pi}{3} R(3t^2 - 4t);$$

при

$$t = t_1 = 1c \qquad v_{r1} = -\frac{\pi}{3} R = -\frac{\pi}{6} = -0{,}53 \text{ м/с}.$$

Знак мінус тут означає, що в положенні M_1 відносна швидкість направлена перпендикулярно до CM_1 вниз (рис. 5.3).

При $t = t_2 = 2\ c$:

$$v_{r2} = \frac{\pi}{3} R \cdot 4 = \frac{2\pi}{3} = 2{,}12 \text{ м/с}.$$

Знак плюс тут означає, що вектор $\bar{v}_{r2}$ направлений в точці M_2 вертикально вгору (рис. 5.3).

При $t = t_3 = 3{,}5\ c$:

$$v_{r3} = \frac{\pi}{3} R \cdot 22{,}75 = \frac{22{,}75 \cdot \pi}{6} = 12{,}06 \text{ м/с}.$$

5. Абсолютна швидкість точки знаходиться за допомогою теореми про додавання швидкостей із застосуванням методу проекцій. Згідно з таким підходом необхідно для кожного з трьох показаних на рис. 5.3 положень точки спроектувати формулу (1) на осі рухомої системи координат. В результаті будемо мати:

при $t = t_1 = 1\ c$:

$$v_{ax} = -v_{e1} \sin a_1 - v_{r1} \sin \theta_1 = -5{,}5 \cdot 0{,}4 - 0{,}53 \cdot 0{,}86 = -2{,}7;$$

$$v_{ay} = -v_{e1}\cos\alpha_1 - v_{r1}\cos\theta_1 = -5{,}5\cdot 0{,}91 - 0{,}53\cdot 0{,}5 = -5{,}26;$$

$$v_{a1} = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{2,7^2 + 5,3^2} = 5{,}95 \text{ м/с};$$

при $t = t_2 = 2c$: $\quad v_{ax} = 0,$

$$v_{a2} = v_{ay} = v_{e2} + v_{r2} = 16{,}25 + 12{,}12 = 18{,}37 \text{ м/с};$$

при $t = t_3 = 3{,}5\ c,$

$$v_{ax} = -v_{e3}\sin\alpha_3 - v_{r3}\sin\theta_3 = -77{,}5\cdot 0{,}15 - 12{,}06\cdot 0{,}38 = -16{,}2;$$

$$v_{ay} = v_{e3}\cos a_3 + v_{r3}\cos\theta_3 = 77{,}5\cdot 0{,}99 + 12{,}06\cdot 0{,}92 = 88{,}8;$$

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{16,2^2 + 88,8^2} = 90{,}4 \text{ м/с}.$$

6. Оскільки переносний рух є обертальним і легко перевірити шляхом диференціювання закону зміни у часі кутової швидкості, що в даній задачі кутове прискорення може бути в деякі моменти часу ненульовим, то це означає, що справедлива формула:

$$\overline{W}_e = \overline{W}_e^{\text{об}} + \overline{W}_e^{\text{віс}}.$$

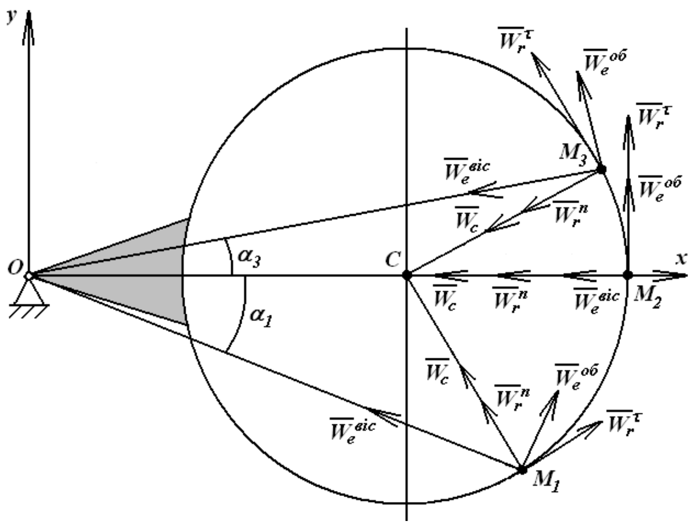

Рисунок 5.4 – Вектори прискорень для даного випадку

Вектор $\overline{W}_e^{\text{об}}$ завжди направлений перпендикулярно до відрізку, який з'єднує дану точку з віссю обертання, але в який саме бік визначається напрямком (знаком) кутового прискорення ε. Тому спочатку знаходимо для кожного заданого моменту часу кутове прискорення обертання пластинки за формулою:

$$\varepsilon = \frac{d\varphi}{dt} = 12t.$$

Тоді звідси будемо мати таке:

при $t = t_1 = 1\ c$; $\varepsilon_1 = 12\ c^{-2}$;

при $t = t_2 = 2\ c$; $\varepsilon_2 = 24\ c^{-2}$;

при $t = t_3 = 3{,}5\ c$; $\varepsilon_3 = 42\ c^{-2}$.

Зазначимо, що у всіх випадках ми маємо знак плюс, а це означає, що ε увесь час направлене проти годинникової стрілки і тоді показуємо на рис. 5.4 напрямки $\overline{W}_e^{\text{об}}$ у всіх трьох точках. Модулі цих векторів знаходимо так:

при $t = t_1 = 1\ c$; $W_e^{\text{об}} = OM_1 \cdot \varepsilon_1 = 1{,}1 \cdot 12 = 13{,}2\ \text{м/с}^2$;

при $t = t_2 = 2\ c$; $W_e^{\text{об}} = OM_2 \cdot \varepsilon_2 = 1{,}25 \cdot 24 = 30\ \text{м/с}^2$;

при $t = t_3 = 3{,}5\ c$; $W_e^{\text{об}} = OM_3 \cdot \varepsilon_3 = 1{,}22 \cdot 42 = 51{,}2\ \text{м/с}^2$.

Для кожного положення точки прискорення $\overline{W}_e^{\text{віс}}$ направлене від точки до осі обертання (рис. 5.4), а модулі цих векторів знаходимо так

при $t = t_1 = 1\ c$; $W_e^{\text{віс}} = OM_1 \cdot \omega_1^2 = 1{,}1 \cdot 25 = 27{,}5\ \text{м/с}^2$;

при $t = t_2 = 2\ c$; $W_e^{\text{віс}} = OM_2 \cdot \omega_2^2 = 1{,}25 \cdot 169 = 211{,}3\ \text{м/с}^2$;

при $t = t_3 = 3{,}5\ c$; $W_e^{\text{віс}} = OM_3 \cdot \omega_3^2 = 1{,}22 \cdot 63{,}5^2 = 4915\ \text{м/с}^2$.

7. Відносний рух в даній задачі є криволінійним, тому прискорення $\overline{W}_r$ можна подати як геометричну суму двох прискорень:

$$\overline{W}_r = \overline{W}_r^{\tau} + \overline{W}_r^{n},$$

при цьому для усіх трьох положень точки вектор $\overline{W}_r^{n}$ направлений від точки до центру кола, тобто до точки *C* (рис. 5.4), а його модуль знаходимо так:

при $t = t_1 = 1\ c$;

$$W_r^n = \frac{v_{r1}^2}{R} = \frac{0,5^2}{0,5} = \frac{0,5\text{м}}{\text{с}^2}$$

при

$$t = t_2 = 2\ c; \qquad W_r^n = \frac{v_{r2}^2}{R} = \frac{2,1^2}{0,5} = 8,8\ \text{м/с}^2;$$

при

$$t = t_3 = 3,5\ c \qquad W_r^n; = \frac{v_{r3}^2}{R} = \frac{12,1^2}{0,5} = 288\ \text{м/с}^2.$$

Вектор W_r^τ направлений перпендикулярно до відрізків CM_1, CM_2 і CM_3, але в який саме бік буде відомо після диференціювання за часом відносної швидкості і підставлення замість t значень t_1, t_2 і t_3. Будемо мати:

$$W_r^\tau = \frac{dv_r}{dt} = \frac{\pi}{3} R(6t - 4);$$

Тоді

при $t = t_1 = 1\ c$; $\qquad W_r^\tau = \frac{\pi}{3} R \cdot 2 = \frac{\pi}{3} = 1,055\ \text{м/с}^2$;

при $t = t_2 = 2\ c$; $\qquad W_r^\tau = \frac{\pi}{3} R \cdot 8 = \frac{4}{3}\pi = 4,25\ \text{м/с}^2$;

при $t = t_3 = 3,5\ c$; $\qquad W_r^\tau = \frac{\pi}{3} R \cdot 17 = \frac{17\pi}{6} = 8,5\ \text{м/с}^2$.

Знаки плюс у всіх трьох випадках означають, що усі три вектори $\overline{W}_r^\tau$ направлені перпендикулярно до відповідних радіусів у додатному напрямку відліку *S* (тобто проти годинникової стрілки) (рис. 5.4).

8. Згідно з правилом Жуковського для плоского випадку для знаходження напрямку прискорення Коріоліса $\overline{W}_c$ достатньо повернути вектор $\bar{v}_r$ для даного положення точки на 90° у напрямку кутової швидкості переносного руху для даного моменту часу. Легко переконатися, що у всіх трьох випадках вектор $\overline{W}_c$ буде направленим від точок M_1, M_2 і M_3 до точки *C* (рис. 5.4). При цьому модуль даного прискорення з врахуванням перпендикулярності осі обертання до площини, в якій лежать вектори $\bar{v}_r$ для кожної точки, знаходимо так:

при $t = t_1 = 1\ c$, $\quad W_c = 2\omega_1 \cdot v_{r1} = 2 \cdot 5 \cdot 0,53 = 5,3\ \text{м/с}^2$;

при $t = t_2 = 2\ c$, $\quad W_c = 2\omega_2 \cdot v_{r2} = 2 \cdot 13 \cdot 2,1 = 54,6\ \text{м/с}^2$;

при $t = t_3 = 3{,}5\ c$, $W_c = 2\omega_3 \cdot v_{r3} = 2 \cdot 63{,}5 \cdot 12{,}1 = 1536{,}7$ м/с^2.

9. Абсолютне прискорення для кожного заданого моменту часу знаходимо за теоремою Коріоліса, переписавши формулу (2) для даного випадку так:

$$\bar{W}_a = \bar{W}_e^{об} + \bar{W}_e^{віс} + \bar{W}_r^{\tau} + \bar{W}_r^{n} + \bar{W}_c.$$

Для кожного із трьох показаних на рис. 5.4
при $t = t_1 = 1\ c$,

$$W_{ax} = W_e^{об} \sin\alpha_1 - W_e^{віс} \cos\alpha_1 + W_r^{\tau} \sin\theta_1 - W_r^{n} \cos\theta_1 - W_c \cos\theta =$$
$$= 13{,}2 \cdot 0{,}4 - 27{,}5 \cdot 0{,}91 + 1{,}1 \cdot 0{,}86 - 0{,}5 \cdot 0{,}5 - 5{,}30{,}5 = -20{,}1 \text{ м/с}^2;$$

$$W_{ay} = -W_e^{об} \cos\alpha_1 - W_e^{віс} \sin\alpha_1 - W_r^{\tau} \cos\theta_1 - W_r^{n} \sin\theta_1 -$$
$$-W_c \sin\theta_1 = -13{,}2 \cdot 0{,}91 - 27{,}5 \cdot 0{,}4 - 1{,}1 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 \cdot 0{,}86 -$$
$$-5{,}3 \cdot 0{,}86 = -28{,}9 \text{ м/с}^2;$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2} = \sqrt{20,1^2 + 28,9^2} = 35{,}2 \text{ м/с}^2;$$

при $t = t_2 = 2\ c$:

$$W_{ax} = -W_e^{віс} - W_r^{n} - W_c = -211{,}3 - 8.8 - 54{,}6 = -274{,}7 \text{ м/с}^2;$$

$$W_{ay} = W_e^{об} + W_r^{\tau} = 30 + 4{,}2 = 34{,}2 \text{ м/с}^2;$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2} = \sqrt{274,7^2 + 34,2^2} = 277 \text{ м/с}^2;$$

при $t = t_3 = 3{,}5\ c$:

$$\mathrm{W}_{ax} = \mathrm{W}_e^{об} \sin\alpha_3 - W_e^{віс} \cos\alpha_3 + W_r^{\tau} \sin\theta_3 -$$
$$-W_r^{n} \cos\theta_3 - W_c \cos\theta_3 =$$
$$= -51{,}2 \cdot 0{,}15 - 4915 \cdot 0{,}99 - 8{,}5 \cdot 0{,}38 - 288 \cdot 0{,}92 - 1536{,}7 \cdot 0{,}92 =$$
$$= -6604 \text{ м/с}^{2;}$$

$$W_{ay} = W_e^{об} \cos\alpha_3 - W_e^{віс} \sin\alpha_3 + W_r^{\tau} \cos\theta_3 - W_r^{n} \sin\theta_3 -$$

$$-W_c \sin\theta_3 = 51{,}2 \cdot 0{,}99 - 4915 \cdot 0{,}15 + 8{,}5 \cdot 0{,}92 - 288 \cdot 0{,}38 -$$
$$-1536{,}7 \cdot 0{,}38 = -1360 \text{ м/с}^2;$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2} = \sqrt{6604^2 + 1360^2} = 6750 \text{ м/с}^2.$$

Приклад 3 (ситуація 2.1). За заданим законом обертального руху пластини навколо нерухомої осі $\varphi = f_1(t)$ і відносного руху матеріальної точки M по пластині $S = AM = f_2(t)$ визначити для заданих моментів часу t_1, t_2 і t_3 абсолютні швидкості і абсолютні прискорення точки M, якщо $a = 20$ см , $f_1(t) = 6t^2 - 3t^3$, $f_2(t) = 10(2t^3 - t) - 80,\ t_1 = 1\ c, t_2 = 1{,}5\ c,\ t_3 = 2\ c$.

Розв'язування.

1. Точка M виконує складний рух, обертаючись разом з пластиною і рухаючись вздовж прямої BD поверхнею пластини (рис. 5.5).

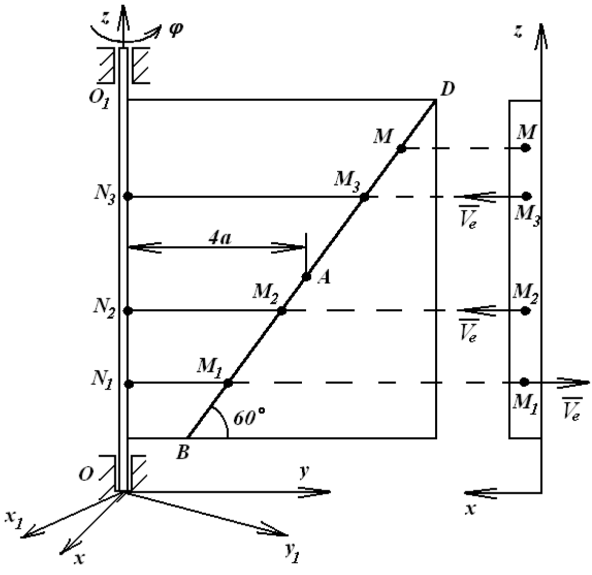

Рисунок 5.5 – Точка M виконує складний рух

При цьому додатній напрямок відліку кутової координати φ показано стрілкою і точка M показана у положенні додатного відліку координати S. Вводимо дві системи координат - нерухому $O_1x_1y_1z_1$ і рухому *Oxyz* причому осі рухомої системи обираємо так, щоб пластина увесь час знаходилася в площині *yz*. На правій частині рис. 19 показуємо додатково вид з додатного напрямку рухомої осі *Oy*, саме на цьому фрагменті рисунку будемо показувати вектори $\bar{v}_e, \bar{W}_e^{об}$ і $\bar{W}_c$.

Увага! Оскільки в даному випадку переносний рух (обертання пластини) відбувається у просторі, то згідно з нашою класифікацією задач перший індекс задачі 2, а оскільки відносний рух прямолінійний, то другий індекс 1, тому ми маємо справу з ситуацією 2.1.

2. Визначимо точно положення точки на пластині для кожного з трьох заданих моментів часу. Для цього послідовно підставляємо в задану функцію $f_2(t)$ замість *t* числові значення $t_1,\ t_2$ і t_3. Будемо мати:

при $t = t_1 = 1\ c,\qquad AM_1 = 10 \cdot (2 - 1) - 80 = -70$ см.

Знак мінус тут означає, що точка M_1 знаходиться нижче точки *A*, тобто зміщена у бік точки *B* (рис. 5.5).

При $t = t_2 = 1{,}5\ c,\qquad AM_2 = 10 \cdot (6{,}75 - 1{,}5) - 80 = -27{,}5$ см.

Точка M_2 знаходиться ближче до точки *A*, але як і M_1 – нижче від *A* (рис. 5.5):

при $t = t_3 = 2\ c,\ \ AM_3 = 10 \cdot (16 - 2) - 80 = 60$ см.

Точка M_3 розташована вище від точки *A* (рис. 5.5).

3. Для знаходження переносної швидкості $\bar{v}_e$ треба для кожного моменту часу знати кутову швидкість обертання пластини, а також відстань від даної точки до осі обертання. Кутову швидкість знаходимо шляхом диференціювання за часом закону обертання з наступною підстановкою замість *t* числових значень $t_1,\ t_2$ і t_3. Будемо мати:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{df_1}{dt} = 12t - 9t^2;$$

Тоді,

при $t = t_1 = 1\ c,\qquad \omega_1 = 12 - 9 = 3\ c^{-1};$

при $t = t_2 = 1{,}5\ c,\qquad \omega_2 = 18 - 20{,}25 = -2{,}25\ c^{-1};$

при $t = t_3 = 2\ c,\qquad \omega_3 = 24 - 36 = -12\ c^{-1}.$

Звідси бачимо, що для $t = t_1$ обертання відбувається в показаному на рис. 5.5 напрямку відліку φ, а для t_2 і t_3 – в протилежному до показаного напрямку. Відповідно до цього в момент часу t_1, тобто для точки M_1 швидкість направлена у від’ємному напрямку осі Ox, а в двох інших положеннях – в додатному (рис. 5.5).

Відстані до осі знаходяться очевидним способом:

при $t = t_1 = 1\ c$:

$$h_1 = M_1N_1 = 4a - AM_1 \cdot sin\,30° = 80 - 70 \cdot 0{,}5 = 45 \text{ см};$$

при $t = t_2 = 1{,}5\ c$:

$$h_2 = M_2N_2 = 4a - AM_2\,sin\,30° = 80 - 27{,}5 \cdot 0{,}5 = 66{,}2 \text{ см};$$

при $t = t_3 = 2\ c$:

$$h_3 = M_3N_3 = 4a + AM_3\,sin\,30° = 80 + 60 \cdot 0{,}5 = 110 \text{ см}.$$

Тепер модулі переносної швидкості для кожного з трьох положень точки знаходяться за формулою кінематики обертального руху твердого тіла

при $t = t_1 = 1\ c, \quad v_e = h_1 \cdot \omega_1 = 45 \cdot 3 = 125 \text{ см/с} = 1{,}25 \text{ м/с};$

при $t = t_2 = 1{,}5\ c$:

$$v_e = h_2 \cdot |\omega_2| = 66{,}2 \cdot 2{,}25 = 149 \text{ см/с} = 1{,}49 \text{ м/с};$$

при $t = t_3 = 2\ c$:

$$v_e = h_3 \cdot |\omega_3| = 110 \cdot 12 = 1320 \text{ см/с} = 13{,}2 \text{ м/с}.$$

4. Відносна швидкість точки M завжди направлена вздовж прямої BD, але в який саме бік визначиться лише після диференціювання заданої функції $f_2(t)$ і наступної підстановки замість t заданих значень $t_1,\ t_2$ і t_3. Будемо мати:

$$v_r = \frac{dS}{dt} = \frac{df_2}{dt} = 10(6t^2 - 1).$$

Тоді знаходимо:

при $t = t_1 = 1\ c,\ v_r = 10 \cdot (6 - 1) = 50 \text{ см/с} = 0{,}5 \text{ м/с};$

при $t = t_2 = 1{,}5\ c, \quad v_r = 10(13{,}5 - 1) = 125 \text{ см/с} = 1{,}25 \text{ м/с};$

при $t = t_3 = 2\ c,\ v_r = 10(24 - 1) = 230 \text{ см/с} = 2{,}3 \text{ м/с}.$

Знаки плюс тут означають, що у всіх трьох показаних на рис. 5.5 положеннях відносна швидкість направлена по прямій BD вгору.

5. Для визначення абсолютної швидкості треба застосувати теорему про додавання швидкостей, записуючи для кожного з трьох

положень точки формулу (1) з наступним проектуванням цієї формули на осі рухомої системи координат.

Увага! У всіх подібних просторових задачах вектор $\bar{v}_r$ лежить у площині yz, а вектор $\bar{v}_e$ направлений вздовж осі *Ox*, тобто ці два вектори взаємно перпендикулярні, і тоді можна не використовувати для знаходження $\bar{v}_a$ метод проекцій, а відразу скористатися формулою:

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2}.$$

Тоді в нашій задачі будемо мати:
при $t = t_1 = 1\ c$, $v_a = \sqrt{1{,}25^2 + 0{,}5^2} = 1{,}34$ м/с;
при $t = t_2 = 1{,}5\ c$, $v_a = \sqrt{1{,}49^2 + 1{,}25^2} = 1{,}95$ м/с;
при $t = t_3 = 2\ c$, $v_a = \sqrt{13{,}2^2 + 2{,}3^2} = 13{,}4$ м/с .

6. Оскільки переносним рухом є обертання пластини навколо нерухомої осі, то кожна точка пластини, в тому числі і точки M_1, M_2 і M_3, в яких у задані моменти часу знаходиться матеріальна точка *M* мають два прискорення і справедлива така формула:

$$\bar{W}_e = \bar{W}_e^{\text{об}} + \bar{W}_e^{\text{віс}};$$

при цьому вектор $\bar{W}_e^{\text{об}}$ завжди направлений перпендикулярно до пластини, тобто вздовж осі *Ox*, але в який саме бік залежить від знаку кутового прискорення ε для даного моменту часу.

Тому шляхом диференціювання за часом закону зміну кутової швидкості знаходимо:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(12t - 9t^2) = 12 - 18t.$$

Тоді будемо мати:
при $t = t_1 = 1\ c$, $\varepsilon_1 = 12 - 18 = -6\ c^{-2}$;
при $t = t_2 = 1{,}5\ c$, $\varepsilon_2 = 12 - 27 = -15\ c^{-2}$;
при $t = t_3 = 2\ c$, $\varepsilon_3 = 12 - 36 = -24\ c^{-2}$.

Звідси бачимо, що у всіх трьох випадках кутове прискорення направлене протилежно показаному на рис. 5.6 напрямку φ і тоді вектори $\bar{W}_e^{\text{об}}$ направлені у додатному напрямку осі *Ox* (рис. 5.6).

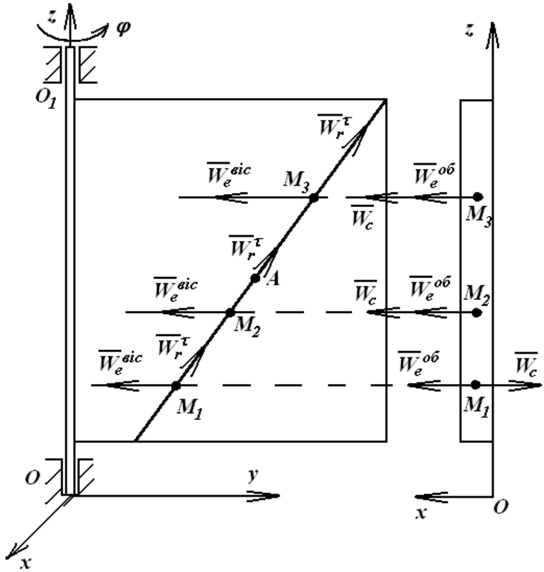

Рисунок 5.6 – Вектори прискорень для даного випадку

Їх модулі знаходимо так:
при $t = t_1 = 1\ c$, $W_e^{\text{об}} = h_1 \cdot |\varepsilon_1| = 45 \cdot 6 = 270\ \text{см/с}^2 = 2{,}7\ \text{м/с}^2$;
при $t = t_2 = 1{,}5\ c$,

$$W_e^{\text{об}} = h_2 \cdot |\varepsilon_2| = 66{,}2 \cdot 15 = 993\ \text{см/с}^2 = 9{,}93\ \text{м/с}^2;$$

при $t = t_3 = 2\ c$,

$$W_e^{\text{об}} = h_3 \cdot |\varepsilon_3| = 110 \cdot 24 = 2640\ \text{см/с}^2 = 26{,}4\ \text{м/с}^2$$

Вектор $\overline{W}_e^{\text{віс}}$ направлений від точки до осі (рис. 5.6), а його модулі в кожному з трьох положень точки знаходимо так:
при $t = t_1 = 1\ c$, $W_e^{\text{віс}} = h_1 \cdot \omega_1^2 = 45 \cdot 3^2 = 405\ \text{см/с}^2 = 4{,}05\ \text{м/с}^2$;
при $t = t_2 = 1{,}5\ c$, $W_e^{\text{віс}} = h_2 \cdot \omega_2^2 = 66{,}2 \cdot 2{,}25 = 334\ \text{см/с}^2 =$
$= 3{,}34\ \text{м/с}^2$;
при $t = t_3 = 2\ c$,

$$W_e^{\text{віс}} = h_3 \cdot \omega_3^2 = 110 \cdot 12^2 = 15840\ \text{см/с}^2 = 158{,}4\ \text{м/с}^2.$$

7. Відносний рух точки пластиною є прямолінійним, тому точка в кожен момент часу має лише тангенціальне прискорення, яке направлене вздовж прямої *BD*, але в який саме бік визначиться лише

після диференціювання за часом закону зміни відносної швидкості і наступної підстановки замість t числових значень t_1, t_2 і t_3. Знаходимо:

$$W_r^\tau = \frac{dv_r}{dt} = \frac{d}{dt}\big(10(6t^2 - 1)\big) = 120t.$$

Тоді:

при $t = t_1 = 1\ c$, $W_r^\tau = 120$ см/с^2 $= 1{,}2$ м/с^2;

при $t = t_2 = 1{,}5\ c$, $W_r^\tau = 180$ см/с^2 $= 1{,}8$ м/с^2;

при $t = t_3 = 2\ c$, $W_r^\tau = 240$ см/с^2 $= 2{,}4$ м/с^2.

Знаки плюс тут означають, що у всі три моменти часу вектор $\overline{W}_\gamma^\tau$ направлений вздовж *BD* догори (рис. 5.6).

8. При застосуванні правила Жуковського для визначення напрямку прискорення Коріоліса враховуємо наступне:

1) у всіх трьох точках вектор $\bar{v}_r$ направлене по *BD* догори, тому при проектуванні $\bar{v}_r$ на площину, перпендикулярну до осі обертання усі три вектори $\bar{v}_r'$ стануть паралельними *Oy* і усі три вектори $\bar{v}_r'$ направлені в додатному напрямку осі *Oy*;

2) вектор кутової швидкості $\overline{\omega}_1$ направлений вертикально вгору, тому в положенні M_1 вектор $\bar{v}_r'$ після повороту на 90° буде направлений у від'ємному напрямку осі *Ox* (рис. 5.6), а у двох інших положеннях M_2 M_3 – в додатному напрямку цієї осі (дивись знаки ω_1, ω_2 і ω_3 (рис. 5.6).

Протилежні напрямки вектора $\overline{\omega}_1$ і векторів $\overline{\omega}_2$ і $\overline{\omega}_3$ треба також враховувати при обчисленні модуля прискорення Коріоліса за формулою:

$$W_c = 2\omega v_r \sin(\widehat{\overline{\omega}, v_r}).$$

Оскільки $\angle(\overline{\omega}_1, \bar{v}_r) = 30°$, $\angle\overline{\omega}_2, \bar{v}_r) = 150°$, то приймаючи до уваги, що

$$\sin 30° = \sin 150° = 0{,}5,$$

знаходимо:

при $t = t_1 = 1\ c$,

$$W_c = 2 \cdot \omega_1 \cdot v_r \cdot 0{,}5 = 3 \cdot 50 = 150 \text{ см/с}^2 = 1{,}5 \text{ м/с}^2;$$

при $t = t_2 = 1{,}5\ c$,

$$W_c = 2 \cdot |\omega_2| \cdot v_r \cdot 0{,}5 = 2{,}25 \cdot 1{,}25 = 281 \text{ см/с}^2 = 2{,}81 \text{ м/с}^2;$$

при $t = t_3 = 2\ c$,

$$W_c = 2 \cdot |\omega_3| \cdot v_r \cdot 0{,}5 = 12 \cdot 230 = 2760\ \text{см/с}^2 = 27{,}6\ \text{м/с}^2.$$

Для знаходження абсолютного прискорення точки в кожен із трьох моментів часу застосовуємо теорему Коріоліса. При цьому формула (2) в розгорнутому вигляді в даній задачі записується так:

$$\bar{W}_a = \bar{W}_e^{\text{об}} + \bar{W}_e^{\text{віс}} + \bar{W}_r^{\tau} + \bar{W}_c.$$

Послідовно проектуємо цю векторну формулу для кожного моменту часу на три осі рухомої системи координат:
при $t = t_1 = 1\ c$,

$$W_{ax} = W_e^{\text{об}} - W_c = 2{,}7 - 1{,}5 = 1{,}2;$$

$$W_{ay} = -W_e^{\text{віс}} + W_r^{\tau} \cos 60° = -4{,}05 + 1{,}2 \cdot 0{,}5 = -3{,}45;$$

$$W_{az} = W_r^{\tau} \cdot \sin 60° = 1{,}2 \cdot 0{,}86 = 1{,}03;$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2} = \sqrt{1,2^2 + 3{,}45^2 + 1{,}03^2} = 3{,}84\ \text{м/с}^2;$$

при $t = t_2 = 1{,}5\ c$,

$$W_{ax} = W_e^{\text{об}} + W_c = 9{,}93 + 2{,}81 = 12{,}74;$$

$$W_{ay} = -W_e^{\text{віс}} + W_r^{\tau} \cos 60° = -3{,}34 + 1{,}8 \cdot 0{,}5 = -2{,}44;$$

$$W_{az} = W_r^{\tau} \cdot \sin 60° = 1{,}8 \cdot 0{,}86 = 1{,}55;$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2} = \sqrt{12{,}74^2 + 2{,}44^2 + 1{,}55^2} = 13\ \text{м/с}^2;$$

при $t = t_3 = 2\ c$,

$$W_{ax} = W_e^{\text{об}} + W_c = 26{,}4 + 27{,}6 = 54;$$

$$W_{ay} = -W_e^{\text{віс}} + W_r^{\tau} \cos 60° = -158{,}4 + 2{,}4 \cdot 0{,}5 = -156{,}2;$$

$$W_{az} = W_r^{\tau} \cdot \sin 60° = 2{,}4 \cdot 0{,}86 = 2{,}1;$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2} = \sqrt{54^2 + 156^2 + 2^2} = 165\text{м/с}^2.$$

Приклад 4 (ситуація 2.2). За заданим законом обертального руху пластини навколо нерухомої осі $\varphi = f_1(t)$ і відносного руху матеріальної точки M по пластині $S = AM = f_2(t)$ визначити для заданих моментів часу t_1, t_2 і t_3 абсолютні швидкості і абсолютні прискорення точки M, якщо $2h = 5R/3, R = 0{,}6$ м, $f_1(t) = 6t^2 - 3t^3$,

$$f_2(t) = \frac{\pi}{4}R(t - 2t^2), \qquad t_1 = 0{,}5\ c, t_2 = 1\ c, t_3 = 1{,}5\ c.$$

Розв'язання.

1. Точка M одночасно бере участь у двох рухах, а саме – обертається разом з пластиною і разом з цим рухається по ободу пластини. Такий рух являється складним і для його аналізу доцільно ввести дві системи координат: нерухому $O_1x_1y_1z_1$ і рухому $Oxyz$, яка обертається разом з пластиною, причому осі рухомої системи обираємо так, що під час усього руху пластина знаходилася в площині yz (рис. 5.7).

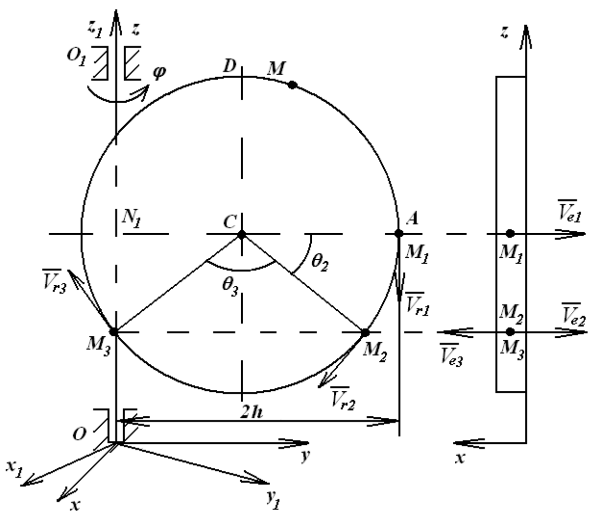

Рисунок 5.7 – Схема до прикладу 4

Звернемо увагу на те, що для зображення переносної швидкості, обертального прискорення і прискорення Коріоліса зручно в правій частині рис. 5.7 показати вид з додатного напрямку осі Oy. Згідно з запровадженою нами умовою класифікацією задач ситуація, яка зараз розглядається, має індекс 2.2, тобто переносний рух відбувається у просторі (перша цифра), а відносний рух – криволінійний (друга цифра).

2. Зазначивши, що за умовою задачі точка *M* без індексу на рис. 5.7 вказує додатній напрямок відліку дугової координати *S* (тобто вона показана там, де виконується умова $S > 0$, визначимо і покажемо на рис. 21 три конкретні положення матеріальної точки *M*, які вона займає в задані моменти часу t_1, t_2 і t_3. Для цього треба підставити у функцію $f_2(t)$ послідовно замість t числові значення, крім того перейти від довжини дуги кола до відповідного центрального кута, про що вже говорилося вище. Будемо мати:
при $t = t_1 = 0{,}5\ c$,

$$AM_1 = f_2(t) = \frac{\pi}{4}R(t - 2t^2)|_{t=0,5} = \frac{\pi}{4}R \cdot 0 = 0.$$

Це означає, що в даний момент часу точка знаходиться в точці *A*, тобто M_1 співпадає з *A*:
при $t = t_2 = 1\ c$,

$$AM_2 = f_2(t_2) = \frac{\pi}{4}R(t - 2t^2)|_{t=1} = -\frac{\pi}{4}R,\ \ \theta_2 = -\frac{\pi}{4};$$

при $t = t_3 = 1{,}5\ c$,

$$AM_3 = f_2(t_3) = \frac{\pi}{4}R(t - 2t^2)|_{t=1,5} = -\frac{3\pi}{4}R, \qquad \theta_3 = -\frac{3\pi}{4}.$$

Знаки мінус тут означають, що точки M_2 і M_3 знаходяться в нижній частині пластини (рис. 5.7).

3. Для знаходження переносної швидкості в кожному з показаних трьох положень точки треба знайти два параметри:

1) кутову швидкість обертання пластини в даний момент часу;

2) відстань від точки до осі обертання. Кутова швидкість знаходиться диференціюванням за часом заданого закону обертання і наступної підстановки замість t значень t_1, t_2 і t_3, тоді:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dt_1}{dt} = 12t - 9t^2;$$

при $t = t_1 = 0{,}5\ c$, $\quad \omega_1 = 6 - 2{,}25 = 3{,}75\ c^{-1}$;

при $t = t_2 = 1\ c$, $\quad \omega_2 = 12 - 9 = 3\ c^{-1}$;

при $t = t_3 = 1{,}5\ c, \quad \omega_3 = 18 - 20{,}25 = -2{,}25\ c^{-1}$.

Знаки тут означають, що ω_1 і ω_2 направлені в показаному на рис. 5.7 напрямку, а ω_3 – протилежно показаному. Тоді при t_1 і t_2 переносна швидкість $\bar{v}_e$ направлена у від'ємному напрямку осі Ox, а в положенні M_3 – в додатному (тобто на нас) (рис. 5.7).

Щоб знайти модулі цих швидкостей необхідно знати їх відстані від осі OO_1. Із рис. 5.7 геометричними міркуваннями знаходимо:

$$CN_1 = 2h - R = 5R/3 - R = 2R/3 = 1{,}23 = 0{,}4\ \text{м};$$

при $t = t_1 = 0{,}5\ c, \quad M_1N_1 = 2h = 5R/3 = 1$ м;

при $t = t_2 = 1\ c$,

$$M_2N_2 = CN_1 + CM_2 \cdot cos\,45° = 0{,}4 + R \cdot 0{,}7 = 0{,}82\ \text{м};$$

при $t = t_3 = 1{,}5\ c$,

$$M_3N_3 = CM_3\,cos\,45° - CN_1 = R \cdot 0{,}7 - 0{,}4 = 0{,}02\ \text{м}.$$

Увага! Звідси бачимо, що точка M_3 знаходиться лівіше від осі обертання і це означає, що вважаючи на знак ω_3 наше попереднє твердження про напрямок $\bar{v}_{e3}$ (рис. 5.7) невірне, і $\bar{v}_{e3}$ насправді як і $\bar{v}_{e1}, \bar{v}_{e2}$ направлене у від'ємному напрямку осі Ox, хоча і дуже малою за величиною, зважаючи на те, що точка M_3 практично знаходиться на осі обертання (M_3N_3 = 0,02 м).

Модулі переносних швидкостей для кожного з трьох моментів часу знаходимо так:

при $t = t_1 = 0{,}5\ c, \quad v_e = M_1N_1 \cdot |\omega_1| = 0{,}4 \cdot 3{,}75 = 1{,}5\ \text{м/с}$;

при $t = t_2 = 1\ c, \quad v_e = M_2N_2 \cdot |\omega_2| = 1 \cdot 3 = 3\ \text{м/с}$;

при $t = t_3 = 1{,}5\ c, \quad v_e = M_3N_3 \cdot |\omega_3| = 0{,}02 \cdot 2{,}25 = 0{,}045\ \text{м/с}$.

4. Оскільки відносним є рух точки дугою кола, то в кожен момент часу швидкість $\bar{v}_\gamma$ направлена перпендикулярно до радіуса, але в який саме бік це стане зрозумілим після диференціювання за часом заданого закону відносного руху з наступною підстановкою замість t значень t_1, t_2 і t_3, і врахуванням показаного на рис. 5.7 додатного напрямку відліку дугової координати S. Послідовно знаходимо:

$$v_{\gamma} = \frac{dS}{dt} = \frac{df_2}{dt} = \frac{\pi}{4}R(1-4t);$$

при $t = t_1 = 0{,}5\ c$,

$$v_r = \frac{\pi}{4}R(1-2) = -\frac{\pi}{4}R = -\frac{\pi}{4}0{,}6 = -0{,}48\ \text{м/с};$$

при $t = t_2 = 1\ c$,

$$v_r = \frac{\pi}{4}R\cdot(1-4) = -\frac{3\pi}{4}\cdot 0{,}6 = -1{,}44\ \text{м/с};$$

при $t = t_3 = 1{,}5\ c$,

$$v_r = \frac{\pi}{4}R\cdot(1-6) = -\frac{5\pi}{4}\cdot 0{,}6 = -2{,}4\ \text{м/с}.$$

Увага! Знаки мінус у всіх трьох випадках означають, що у всіх положеннях M_1, M_2 і M_3 вектори $\bar{v}_r$ направлені перпендикулярно до відповідних радіусів і точка рухається у від'ємному напрямку відліку S, тобто за годинниковою стрілкою (рис. 5.7).

5. Абсолютна швидкість точки знаходиться за теоремою про додавання швидкостей, шляхом запису для кожного з трьох положень формули (1). Зазначимо, що як і у попередньому прикладі, тут можна обійтися без проектування формули (1) на кожну з трьох осей координат, оскільки вектори $\bar{v}_e$ і $\bar{v}_r$ взаємно перпендикулярні і тоді модуль їх геометричної суми за правилом паралелограма, який в такому випадку стає прямокутником, знаходиться за допомогою формули Піфагора. Будемо мати:

при $t = t_1 = 0{,}5\ c$, $\quad v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{1{,}5^2 + 0{,}48^2} = 1{,}58\ \text{м/с};$

при $t = t_2 = 1\ c$, $\quad v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{3^2 + 1{,}44^2} = 3{,}32\ \text{м/с};$

при $t = t_3 = 1{,}5\ c$, $\quad v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{0{,}05^2 + 2{,}4^2} = 2{,}4\ \text{м/с}.$

6. Оскільки переносний рух є обертальним, то для визначення прискорень точки у цьому русі в першу чергу треба знати для кожного моменту часу кутову швидкість і кутове прискорення з якими обертається пластина. Кутові швидкості ми вже знайшли в третьому пункті, а для визначення прискорення диференціюємо за часом закон зміни кутової швидкості, а потім підставляємо замість t задані числові значення. Знаходимо:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 12 - 18t,$$

при $t = t_1 = 0{,}5\ c,\quad \varepsilon_1 = 12 - 9 = 3\ c^{-2}$;

при $t = t_2 = 1\ c,\quad \varepsilon_2 = 12 - 18 = -6\ c^{-2}$;

при $t = t_3 = 1{,}5\ c,\quad \varepsilon_3 = 12 - 27 = -15\ c^{-2}$.

Отримані тут знаки означають, що при $t = t_1$ ε направлене в показаному на рис. 5.8 для φ напрямку, а при $t = t_2$ і $t = t_3$ – в протилежний бік.

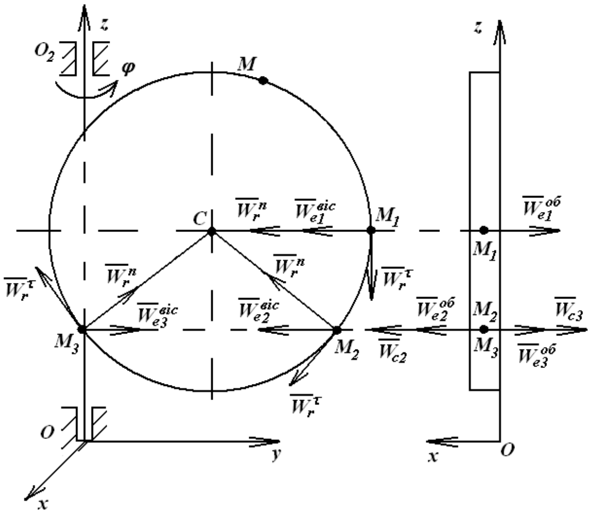

Рисунок 5.8 – Вектори прискорень для даного прикладу

Відповідно до цього і з врахуванням розташування точок M_1, M_2 і M_3 по відношенню до осі O_1O_2 показуємо на рис. 5.8 напрямки $\overline{W}_e^{об}$ в кожен момент часу, вектор $\overline{W}_{e2}^{об}$ – у додатному, $\overline{W}_{e3}^{об}$ – знову у від'ємному. Модулі цих векторів знаходимо за відомою формулою:

при $t = t_1 = 0{,}5\ c$,

$$W_e^{об} = h_1 \cdot |\varepsilon_1| = M_1N_1 \cdot |\varepsilon_1| = 1 \cdot 3 = 3\ м/с^2;$$

при $t = t_2 = 1\ c$,

$$W_e^{об} = h_2 \cdot |\varepsilon_2| = M_2N_2 \cdot |\varepsilon_2| = 0{,}82 \cdot 6 = 4{,}92\ м/с^2;$$

при $t = t_3 = 1{,}5\ c$,

$$W_e^{\text{об}} = h_3 \cdot |\varepsilon_3| = M_3N_3 \cdot |\varepsilon_3| = 0{,}02 \cdot 15 = 0{,}3\ \text{м/с}^2.$$

Вісеспрямоване прискорення $\overline{W}_e^{\text{віс}}$ у всіх положеннях направлене від точки до осі (рис. 5.8), а модулі знаходимо так:
при $t = t_1 = 0{,}5\ c$,

$$W_e^{\text{віс}} = h_1 \cdot \omega_1^2 = M_1N_1 \cdot \omega_1^2 = 1 \cdot 3{,}75^2 = 14{,}06\ \text{м/с}^2;$$

при $t = t_2 = 1\ c$,

$$W_e^{\text{віс}} = h_2 \cdot \omega_2^2 = M_2N_2 \cdot \omega_2^2 = 0{,}89 \cdot 9 = 7{,}38\ \text{м/с}^2;$$

при $t = t_3 = 1{,}5\ c$,

$$W_e^{\text{віс}} = h_3 \cdot \omega_3^2 = M_3N_3 \cdot \omega_3^2 = 0{,}02 \cdot 2{,}25 = 0{,}1\ \text{м/с}^2.$$

Відносний рух точки у нас криволінійний – тому виникає два прискорення і справедлива така формула:

$$\overline{W}_r = \overline{W}_r^{\tau} + \overline{W}_r^{n},$$

при цьому, вектор $\overline{W}_r^{\tau}$, як і вектор $\bar{v}_r$, направлений перпендикулярно до радіуса кола, але в який саме бік стане відомим після диференціювання виразу для v_r і наступної підстановки замість t конкретних значень t_1, t_2 і t_3. Будемо мати:

$$W_r^{\tau} = \frac{dv_r}{dt} = -\pi R = -0{,}6\pi = -1{,}88\ \text{м/с}^2.$$

Звідси бачимо, що у всі моменти часу тангенціальне прискорення приймає однакові за модулем значення і вектор $\overline{W}_r^{\tau}$ в точках M_1, M_2 і M_3 направлений у бік від’ємного відліку координати S (рис. 5.8).

Вектор $\overline{W}_r^{n}$ у всіх положеннях направлений від даної точки до центру кола (рис. 5.8), а його модуль знаходимо за формулою:

$$W_r^{n} = \frac{v_r^2}{R};$$

при $t = t_1 = 0{,}5\ c$,

$$W_r^{n} = \frac{0{,}48^2}{0{,}6} = 0{,}38\ \text{м/с}^2;$$

при $t = t_2 = 1\ c$,

$$W_r^n = \frac{1{,}44^2}{0{,}6} = 3{,}45\ \text{м/с}^2;$$

при $t = t_3 = 1{,}5\ c$,

$$W_r^n = \frac{2{,}4^2}{0{,}6} = 9{,}6\ \text{м/с}^2.$$

8. За правилом Жуковського відразу бачимо, що в положенні M_1 $W_c = 0$ оскільки вектор $\bar{v}_r \| \bar{\omega}$ (рис. 5.7). В положенні M_2 вектор $\bar{v}_r'$, який є проекцією вектора $\bar{v}_r$ на площину *xy* направлений у від'ємному напрямку осі *Oy* і, враховуючи знак ω_2, бачимо, що $\overline{W}_c$ направлене у додатному напрямку осі *Ox* (рис. 5.8). Аналогічні міркування показують, що в положенні M_3 прискорення Коріоліса направлене у від'ємному напрямку осі *Ox* (рис. 5.8). Оскільки в обох положеннях M_2 і M_3 кут між векторами $\bar{\omega}$ і $\bar{v}_r$ дорівнює $135°$ і $45°$, а $sin\,135° = sin\,45° = 0{,}7$, то модулі поворотного прискорення $\overline{W}_c$ знаходимо, з врахуванням значення кута, за відомою формулою:
при $t = t_2 = 1\ c$,

$$W_c = 2|\omega_2| \cdot |v_{r2}| \cdot 0{,}7 = 2 \cdot 3 \cdot 1{,}44 \cdot 0{,}7 = 6{,}05\ \text{м/с}^2,$$

при $t = t_3 = 1{,}5\ c$,

$$W_c = 2|\omega_3| \cdot |v_{r3}| \cdot 0{,}7 = 2 \cdot 2{,}25 \cdot 2{,}4 \cdot 0{,}7 = 7{,}56\ \text{м/с}^2.$$

9. Абсолютне прискорення точки знаходимо за теоремою Коріоліса, при цьому формула (2) в розгорнутому вигляді в нашій задачі запишеться так:

$$\overline{W}_a = \overline{W}_e^{\text{об}} + \overline{W}_e^{\text{віс}} + \overline{W}_r^{\tau} + \overline{W}_r^{n} + \overline{W}_c.$$

Послідовно проектуємо цю формулу на кожну з трьох осей рухомої системи у всіх трьох положеннях матеріальної точки *M*:
при $t = t_1 = 0{,}5\ c$,

$$W_{ax} = -W_e^{\text{об}} = -3;$$

$$W_{ay} = -W_e^{\text{віс}} - W_r^n = -14{,}06 - 0{,}38 = -14{,}44;$$

$$W_{az} = -W_r^{\tau} = -1{,}88;$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2} = \sqrt{3^2 + 14{,}44^2 + 1{,}88^2} = 14{,}85 \text{ м/с}^2.$$

при $t = t_2 = 1\ c$,

$$W_{ax} = W_e^{\text{об}} + W_c = 4{,}92 + 6{,}05 = 10{,}97;$$

$$W_{ay} = -W_e^{\text{віс}} - W_r^{\tau} \cos 45° - W_{\gamma}^{n} \sin 45° =$$

$$= -7{,}38 - 1{,}88 \cdot 0{,}7 - 3{,}45 \cdot 0{,}7 = -11;$$

$$W_{az} = -W_r^{\tau} \sin 45° + W_r^{n} \cos 45° = -1{,}88 \cdot 0{,}7 + 3{,}45 \cdot 0{,}7 = 1{,}1;$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2} = \sqrt{10{,}57^2 + 11^2 + 1,1^2} = 15{,}3 \text{ м/с}^2;$$

при $t = t_3 = 1{,}5\ c$,

$$W_{ax} = -W_e^{\text{об}} - W_c = -0{,}3 - 7{,}56 = -7{,}86;$$

$$W_{ay} = W_e^{\text{віс}} - W_r^{\tau} \cos 45° + W_r^{n} \sin 45 =$$

$$= 0{,}1 - 1{,}88 \cdot 0{,}7 + 9{,}6 \cdot 0{,}7 = 5{,}4;$$

$$W_{az} = W_r^{\tau} \sin 45° + W_r^{n} \cos 45° = 1{,}88 \cdot 0{,}7 + 9{,}6 \cdot 0{,}7 = 8{,}05;$$

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2} = \sqrt{7{,}86^2 + 5,4^2 + 8{,}05^2} = 12{,}5 \text{ м/с}^2.$$

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

1. Пожуєв В.І. Конспект лекцій з теоретичної механіки. Частина I. –Запоріжжя, 2007. – 140 с.

2. Пожуєв В.І. Конспект лекцій з теоретичної механіки. Частина II. –Запоріжжя, 2007. – 162 с.

3. Пожуєв А.В., Пожуєв В.І. Теоретична механіка. Ч. III. Додаткові матеріали до конспекту лекцій. – Запоріжжя: СТАТУС, 2020. – 236 с.