

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ
З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
(І семестр)

для студентів спеціальностей
«Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку»
усіх форм навчання

2013

Розрахунково-графічні завдання з математичного аналізу (І семестр) для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку» усіх форм навчання / Укл.: В.М. Онуфрієнко, Н.В. Сніжко, Н.М. Антоненко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2013. – 50 с.

Укладачі: В.М. Онуфрієнко, професор, д.ф.-м.н.
Н.В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.
Н.М. Антоненко, ст. викл., к.ф.-м.н.

Експерт
спеціальності: В.С. Кабак, доцент, к.т.н.

Рецензент: В.П.Чумаченко, професор, д.ф.-м.н.

Відповідальний
за випуск: Н.В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.

Затверджено
Радою загальнотехнічного
факультету ЗНТУ
Протокол № 1
від 11.09.13

Затверджено
на засіданні кафедри загальної
математики ЗНТУ
Протокол № 1
від 04.09.13

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Границі та неперервність	6
2 Похідна та її застосування	11
3 Функції багатьох змінних	22
4 Інтеграли та їх застосування	26
5 Ряди	37
Література	50

ВСТУП

Як відомо, одним з видів самостійної роботи студентів є виконання на протязі семестру типових розрахункових завдань. Їхньою метою є відпрацювання практичних вмінь та навичок. Вони покликані допомогти студентам більш глибоко засвоїти теоретичний матеріал і навчитися застосовувати набуті знання для розв'язання практичних задач. Запропоновані типові розрахунково-графічні завдання відповідають курсу «Математичний аналіз», який читається для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку» у I семестрі.

Даний практикум охоплює практично всі основні розділи I семестру даного курсу; тут містяться завдання по всіх темах курсу, запропоновано 30 варіантів завдань для самостійної роботи. Крім того, наведений список рекомендованої літератури, як основної, так і додаткової.

Типові розрахунково-графічні завдання виконуються протягом семестру, що забезпечує студентам систематичне вивчення курсу на основі опрацювання рекомендованих підручників та посібників, самостійного пошуку необхідних літературних джерел та матеріалів, їх аналізу та узагальнення, самостійного дослідження та письмового викладення практичних питань.

Номер варіанту студент обирає за номером у списку в журналі. Робота виконується українською або російською мовою в письмовій формі, бажано в зошиті у клітинку. Необхідно залишати поля для приміток. На титульному аркуші роботи потрібно вказати назву предмету, спеціальність, групу та курс, прізвище, ім'я та по батькові студента, прізвище викладача, який приймає роботу.

В типовому розрахунково-графічному завданні студент повинен розв'язати подані задачі методами, вказаними у завданнях, а також зробити всі необхідні креслення (графічні розв'язки). При цьому студентові необхідно показати набуті теоретичні знання з курсу.

При виконанні роботи можна використовувати як лекційний матеріал та матеріал практичних занять, так і допоміжну літературу, наведену в кінці даного посібника. Перед виконанням завдань рекомендується спочатку вивчити відповідний теоретичний матеріал,

потім розібратись у розв'язаннях задач, які виконувались на практичних заняттях, і тільки після цього приступати до виконання власне типової розрахунково-графічної роботи.

При оцінюванні роботи показником її якості є, перш за все, те, наскільки студент самостійно і правильно розв'язав поставлені задачі та зрозумів зміст отриманих розв'язків. З цією метою при захисті роботи студенту можуть бути задані додаткові питання, в тому числі і з теоретичного матеріалу, який виноситься на іспит.

Робота, яка відповідає зазначеним вимогам, подається на кафедру викладачу для перевірки і наступного захисту у формі співбесіди у визначений термін (як правило, під час модульного контролю). На захисті роботи студент повинен вміти:

- викласти зміст поставлених задач та довести їхні розв'язки;
- відповісти на запитання щодо змісту одержаних розв'язків;
- відповісти на додаткові питання.

Позитивні результати захисту роботи оформлюються відповідною кількістю рейтингових балів. Роботи, які не відповідають зазначеним вимогам, не зараховуються і повертаються студенту для доопрацювання із зазначенням терміну повторного захисту.

1 ГРАНИЦІ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Завдання 1.1. Обчислити границю.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - 9x + 10}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x + 1}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{-5x^2 + 11x - 2}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 9x - 35}{x^2 - 5x - 14}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 + 6x - 45}{3x^2 - 10x + 3}$.
6. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 3x + 15}{x^2 - 6x - 27}$.
7. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 11x + 5}{x^2 - 2x - 35}$.
8. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{3x^2 + 25x + 8}{2x^2 + 15x - 8}$.
9. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 16}$.
10. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^3 + 27}$.
11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 12x + 20}{x^2 - 5x + 6}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{6 + x - x^2}$.
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 5x}{x^3 - x^2 + 2x}$.
14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$.
15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 5x + 6}$.
16. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 + x - x^2}{x^3 - 27}$.
17. $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{27x^3 - 1}{3x^2 + 2x - 1}$.
18. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}$.
19. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x - 2}$.
20. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$.
21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$.
22. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$.
23. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 20}$.
24. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^2 + 11x - 3}$.
25. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{2x^2 - 7x + 3}$.
26. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4}$.
27. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 4x - 5}$.
28. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + x - 2}$.
29. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{7x^2 + 4x - 3}$.
30. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 - 16}$.

Завдання 1.2. Обчислити границю.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x + 1}{x^3 + 5x^2 + 2}$.
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 8x^2 + 3}{5 + 2x - x^3}$.

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8-5x^2-5x^5}{x^5+6x+8}$.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4-x^2-7}{8x^4+x+5}$.
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$.
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+14x^2}{1+x+2x^2}$.
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$.
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6+4x-2x^4}{x+3x^2+6x^4}$.
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^3+x}{2x^3-3x+2}$.
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$.
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+7x}{10x^3-x^2+5}$.
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$.
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3-x^2+4x}{7x^3+5}$.
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-2x^2+14x}{10x^3+3x^3+x-1}$.
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-5x+2}{6x^2+3x+1}$.
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4-x^2+5}{4x^4+1}$.
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2+3x-5}{2x^2-3x+2}$.
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4-12x^2+2}{3x^4+8x-3}$.
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{27x^2+5x}{18-4x-9x^2}$.
21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x-2}{3x^3-x-4}$.
22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+3x-7}{5x^2+3x+1}$.
23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$.
24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4+x+1}{6x^4-x^3+2x}$.
25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$.
26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3-x^2+10}{10x^3+5x+1}$.
27. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$.
28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2+9x+3}{x^2-3x+4}$.
29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^4+x^2+x}{x^4-5x-2}$.
30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+15x+3}{2x^2+25x-3}$.

Завдання 1.3. Обчислити границю.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-4x+1}{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$.
3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}{3x^2+4x+1}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+6}}{2x^2-7x-15}$.
6. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+x-20}{\sqrt{2x+17}-\sqrt{x+12}}$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7x}}$.

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+16} - 4}{\sqrt{x^2+64} - 8}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{2x+7} - 5}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{2x} - x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+30} - 5}{x^3 + 125}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16+x} - 4}{4x^2 + 4x}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{\sqrt{x-4} - \sqrt{8-x}}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{6-x}}{x^2 + 4x + 3}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{10+x} - 3}{\sqrt{15-x} - 4}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5} - 2}{\sqrt{x+7} - 4}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 2x - 15}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x+7} - 4}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 4x^2}{\sqrt{1+3x^2} - 1}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{8+x} - 3}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x^3 - 1}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x+7}}{x^2 + 6x + 8}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{4+x} - 3}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4} - 4}{x^2 - 16}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{x^2+16}}{5x^2}.$$

Завдання 1.4. Обчислити границю.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-3x}{5-3x} \right)^x. \quad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-x} \right)^{3x}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x}.$$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x} \right)^{-2x}$.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{-x}$.
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+5} \right)^{x+1}$.
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{3+2x} \right)^{-x}$.
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+2} \right)^{x-2}$.
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{3-2x}$.
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-2x}{1-2x} \right)^{x+1}$.
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}$.
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}$.
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x}$.
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2-3x}$.
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x}$.
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{3} \right)^{-5x}$.
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}$.
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}$.
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}$.
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x} \right)^{2x+1}$.
21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{3-2x}$.
22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2}$.
23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4}$.
24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x} \right)^{-3x}$.
25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1}$.
26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{2x}$.
27. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-3} \right)^{x-5}$.
28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3}$.
29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2}$.
30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2}$.

Завдання 1.5. Обчислити границю.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}$.
8. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}$.
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}$.

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right)$. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$. 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$.
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}$. 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}$. 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}$.
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$. 17. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$. 18. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}$.
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}$. 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}$. 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}$.
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin x + \sin 7x}$. 23. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi/2 - x) \operatorname{tg} x$. 24. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{(\pi/2 - x)^2}$.
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}$. 26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}$. 27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}$.
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \arcsin x}$. 29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}$. 30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}$.

2 ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Завдання 2.1. Продиференціювати функцію.

1. $y = \frac{\arccos^2 2x}{th(4x-3)}$.
2. $y = \frac{sh^2(4x+2)}{\arctg x^2}$.
3. $y = \frac{\arccos 4x^5}{th^2 x}$.
4. $y = \frac{\arctg^2(2x+1)}{sh\sqrt{x}}$.
5. $y = \frac{\arcsin 4x^3}{ch^4 x}$.
6. $y = \frac{th^2(x-2)}{\arcsin 4x}$.
7. $y = \frac{cth^3(4x+2)}{\arcsin 5x}$.
8. $y = \frac{cth^3(5x-1)}{\arccos x^2}$.
9. $y = \frac{sh^5 x}{\arccos 4x}$.
10. $y = \frac{\sqrt{ch^5 x}}{\arctg 4x}$.
11. $y = \frac{\sqrt[4]{\arctg 4x}}{sh^2 2x}$.
12. $y = \frac{th^2(2x+6)}{\arccos 5x}$.
13. $y = \frac{\arcsin^3 4x}{sh(3x+1)}$.
14. $y = \frac{\arcsin^7 5x}{th x^3}$.
15. $y = \frac{th 4x^2}{\arctg^2 4x}$.
16. $y = \frac{cth^2(x+2)}{\arccos^2 4x}$.
17. $y = \frac{\arctg^4 5x}{sh\sqrt{x}}$.
18. $y = \frac{\arctg^3 2x}{ch(1/x)}$.
19. $y = \frac{\arccos 5x^3}{th^2 x}$.
20. $y = \frac{\arcsin 5x^2}{\cos\sqrt{x}}$.
21. $y = \frac{\sqrt[5]{ch 3x}}{\arctg(x+2)}$.
22. $y = \frac{\sqrt{sh^6 x}}{\arctg 5x}$.
23. $y = \frac{\arctg^3 3x}{th(3x+1)}$.
24. $y = \frac{\arctg^3 7x}{\sqrt[3]{cth x}}$.
25. $y = \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{th 2x}}$.
26. $y = \frac{\sqrt{\arccos 2x}}{ch^2 x}$.
27. $y = \frac{\arccos^3 5x}{th(x-2)}$.
28. $y = \frac{\arctg^3 x}{ch(2x-5)}$.
29. $y = \frac{\arcsin^2 8x}{ch(4x-2)}$.
30. $y = \frac{sh(x+3)}{\arctg\sqrt{x}}$.

Завдання 2.2. Продиференціювати функцію.

1. $y = (sh 3x)^{\arctg 2x}$.
2. $y = (cth\sqrt{x})^{\sin(x+3)}$.
3. $y = (\arctg x)^{th(3x+1)}$.

$$\begin{aligned}
& 4. y = (sh 5x)^{\arctg(x+2)}. \quad 5. y = (ctg 7x)^{sh(x+3)}. \quad 6. y = (\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}. \\
& 7. y = (tg 7x^5)^{\sqrt{x+2}}. \quad 8. y = (ctg 2x^3)^{\sin \sqrt{x}}. \quad 9. y = (tg 3x^4)^{\sqrt{x+3}}. \\
& 10. y = (\sin 4x)^{\arctg 1/x}. \quad 11. y = (sh 3x)^{\arctg(x+2)}. \quad 12. y = (\log_2(x+4))^{ctg 7x}. \\
& 13. y = (\ln(x+3))^{\sin \sqrt{x}}. \quad 14. y = (\sqrt{3x+2})^{\arctg 3x}. \quad 15. y = (\cos 5x)^{\arctg \sqrt{x}}. \\
& 16. y = (sh(x+2))^{\arcsin 2x}. \quad 17. y = (th 5x)^{\arcsin(x+1)}. \quad 18. y = (\sin 3x)^{\arccos x}. \\
& 19. y = (\cos(x+2))^{\ln x}. \quad 20. y = (cth 3x)^{\arcsin x}. \quad 21. y = (ch 3x)^{ctg 1/x}. \\
& 22. y = (\arcsin 5x)^{tg \sqrt{x}}. \quad 23. y = (\arccos 5x)^{\ln x}. \quad 24. y = (\arctg 2x)^{\sin x}. \\
& 25. y = (\ln(x+7))^{ctg 2x}. \quad 26. y = (ctg(7x+4))^{\sqrt{x+3}}. \quad 27. y = (th \sqrt{x+1})^{\arctg 2x}. \\
& 28. y = \left(cth \frac{1}{x} \right)^{\arcsin 7x}. \quad 29. y = (\cos(x+5))^{\arcsin 3x}. \quad 30. y = (\sqrt{x+5})^{\arccos 3x}.
\end{aligned}$$

Завдання 2.3. Знайти y' та y'' для функції, заданої неявно.

$$\begin{aligned}
& 1. y^3 = x^2 + \ln(y/x). \quad 2. xy^3 - y^2 = 5x - 7. \quad 3. x^2 y^3 + x = 7y. \\
& 4. 8x^4 + x^2 y^2 + y = 8. \quad 5. \cos 2y = xy^2 + 5. \quad 6. x^3 + 3y^3 = 9x. \\
& 7. 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 8. \quad 8. 3y^2 = (x-y)/(x+y). \quad 9. \sin^3(5x+y^2) = 10. \\
& 10. tg^2(3x+y) = 4x^3. \quad 11. x^5 y = tg y. \quad 12. tg y = 5x + 7y. \\
& 13. 2x + \sin y = 8y. \quad 14. y^2 - 4x = \sin y. \quad 15. \arccos y = 5x + 8y. \\
& 16. y^2 = 16x - 2. \quad 17. x^2/7 + y^2/3 = 1. \quad 18. y^2 = x + tg y. \\
& 19. x^2/9 + y^2/16 = 1. \quad 20. y^2 = 9x. \quad 21. y = e^{2y}/2 + 10x. \\
& 22. 2\ln y - y^2/x = 5. \quad 23. y^3 + x^3 = 3\sin y. \quad 24. 2e^y = 3x^2 - 5y^2. \\
& 25. 2\cos^2(2x+y) = x. \quad 26. \sin y = 5x + 3y. \quad 27. tg y = 5y - 6x. \\
& 28. y^2 = 7x - ctg y. \quad 29. xy - 7 = \cos y. \quad 30. 5y = 4 + xy^3.
\end{aligned}$$

Завдання 2.4. Знайти y' та y'' для функції, заданої параметрично.

1. $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{3t}. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = \sqrt[5]{(t-2)^3}, \\ y = \sqrt{t-3}. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = 8t^4 - 4, \\ y = 2t^3. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = \arccost, \\ y = \ln t. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x = 3t/(2+t^3), \\ y = t^2/(2+t^2). \end{cases}$
6. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1}, \\ y = (t+1)/\sqrt{t^2-1}. \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x = 2te^{2t}, \\ y = t/e^{2t}. \end{cases}$
9. $\begin{cases} x = 1/(1+t), \\ y = (t/(1+t))^2. \end{cases}$
10. $\begin{cases} x = 4\sin^2 t, \\ y = 3\cos^2 t. \end{cases}$
11. $\begin{cases} x = (\ln t)/t, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$
12. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$
13. $\begin{cases} x = 1/(2+t), \\ y = (t/(2+t))^2. \end{cases}$
14. $\begin{cases} x = 6t + 3t^2, \\ y = 7t^3 - 5t^2. \end{cases}$
15. $\begin{cases} x = (\ln t)/(t+1), \\ y = (t+1)\ln t. \end{cases}$
16. $\begin{cases} x = e^{4t}, \\ y = e^{-4t}. \end{cases}$
17. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$
18. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$
19. $\begin{cases} x = t^3, \\ y = \ln(3t). \end{cases}$
20. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(t - \cos t). \end{cases}$
21. $\begin{cases} x = 5(\sin t - t \cos t), \\ y = 5(\cos t + t \sin t). \end{cases}$
22. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}(2t), \\ y = \ln(1+2t^2). \end{cases}$

$$\begin{array}{ll}
23. \begin{cases} x = 7 \cos t, \\ y = 6 \sin t. \end{cases} & 24. \begin{cases} x = 7 \cos^2 t, \\ y = 9 \sin^2 t. \end{cases} \\
25. \begin{cases} x = (8t + 3) \sin t, \\ y = 4t^4. \end{cases} & 26. \begin{cases} x = 2/(t + 4), \\ y = (t/(t + 4))^2. \end{cases} \\
27. \begin{cases} x = 3 \cos^2 t, \\ y = 9 \sin^2 t. \end{cases} & 28. \begin{cases} x = 2\sqrt{t}, \\ y = 7\sqrt[8]{t}/8. \end{cases} \\
29. \begin{cases} x = 14 \cos^3 t, \\ y = 7 \sin^3 t. \end{cases} & 30. \begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{9t}. \end{cases}
\end{array}$$

Завдання 2.5. Обчислити границю, використовуючи правило Лопітала.

$$\begin{array}{lll}
1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x^2} - 1}{2 \arctg x^2 - \pi}. & 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2 - 1}{x^3 - 7x + 6}. & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}. \\
4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}. & 5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sin(\pi x/2)}. & 6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}. \\
7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{chx - 1}{1 - \cos x}. & 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/x}{ctg(\pi x/2)}. & 9. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1/\cos^2 x - 2tgx}{1 + \cos 4x}. \\
10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}. & 11. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{tgx}{tg 5x}. & 12. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) ctgx. \\
13. \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) tg(\pi x/2). & 14. \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin(3/x). & 15. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1 + 2x} + 1}{\sqrt{2 + x} + x}. \\
16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}. & 17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sin(\pi x/2)}. & 18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgx - \sin x}{4x - \sin x}. \\
19. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{tg 3x}{tg 5x}. & 20. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sec^2 x - 2tgx}{1 + \cos 4x}. & 21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x + 5)}{\sqrt[4]{x + 3}}.
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{2 \sin x + x}. \quad & 23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\ln x} - x}{x - 1}. \quad & 24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 - \sin x^2}. \\
25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}. \quad & 26. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right). \quad & 27. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2(\pi x/6)}{1 - x^2}. \\
28. \lim_{x \rightarrow \infty} (a^{1/x} - 1)x. \quad & 29. \lim_{x \rightarrow a} \arcsin \frac{x-a}{a} \cdot \operatorname{ctg}(x-a). \\
30. \lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x.
\end{aligned}$$

Завдання 2.6. Обчислити границю, використовуючи правило Лопітала.

$$\begin{aligned}
1. \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}. \quad & 2. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos(\pi x/2)}. \quad & 3. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}. \\
4. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{6/(1+2 \ln x)}. \quad & 5. \lim_{x \rightarrow \infty} (1-e^x)^{1/x}. \quad & 6. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right). \\
7. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{a}{x}. \quad & 8. \lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)^{1/\ln(2(x-1))}. \quad & 9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{m}{x} \right)^x. \\
10. \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{5}{x^2-x-20} \right). \quad & 11. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} 2x)^{1/\ln x}. \quad & 12. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}. \\
13. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos(\pi x/2)}. \quad & 14. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}. \quad & 15. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}. \\
16. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+3} \right)^{3x}. \quad & 17. \lim_{x \rightarrow 0} (1-\sin 2x)^{\operatorname{ctg} x}. \quad & 18. \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1/x))^x. \\
19. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}. \quad & 20. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\sqrt{x}}. \quad & 21. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}. \\
22. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}. \quad & 23. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\ln x}. \quad & 24. \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x+e))^{1/x}. \\
25. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}. \quad & 26. \lim_{x \rightarrow 0} x^x. \quad & 27. \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x)^{1/\ln x}.
\end{aligned}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{1/\lg^2 x}. \quad 29. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{1/x}. \quad 30. \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}.$$

Завдання 2.7. За допомогою диференціала наближено обчислити задані величини і оцінити відносну похибку (з точністю до двох знаків після коми).

$$\begin{array}{lllll} 1. \sin 44^\circ. & 2. \lg 102. & 3. \sin 46^\circ. & 4. \lg 0,8. & 5. e^{0,25}. \\ 6. \sqrt{15}. & 7. \log_2 2,1. & 8. \operatorname{arctg} \sqrt{2,9}. & 9. \operatorname{ctg} 31^\circ. & \\ 10. \sin 91^\circ. & 11. \lg 1,2. & 12. \arcsin 0,4. & 13. \operatorname{arctg} 0,95. & \\ 14. \operatorname{arctg} \sqrt{3,1}. & 15. 2^{3,1}. & 16. 4^{1,1}. & 17. \operatorname{tg} 61^\circ. & 18. e^{0,2}. \\ 19. \lg 11. & 20. \arcsin 0,56. & 21. \sin 59^\circ. & 22. \operatorname{arctg} 1,01. & \\ 23. \ln(\operatorname{tg} 46^\circ). & 24. \sin 29^\circ. & 25. \lg 8,5. & 26. \ln(e^2 + 0,2). & \\ 27. \operatorname{arctg} 0,99. & 28. \operatorname{arctg} \sqrt{0,99}. & 29. \ln(\operatorname{tg} 31^\circ). & 30. e^{2,01}. & \end{array}$$

Завдання 2.8. Провести повне дослідження вказаних функцій та побудувати графіки.

$$\begin{array}{ll} 1. y = \ln(x^2 + 1). & 2. y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}. \\ 3. y = x \ln x. & 4. y = (x - 1)e^{3x+1}. \\ 5. y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}. & 6. y = \frac{5x}{4 - x^2}. \\ 7. y = \frac{4 - 2x}{1 - x^2}. & 8. y = (5x^4 + 3)/x. \\ 9. y = x^2 + 1/x^2. & 10. y = (e^{2x} + 1)/e^x. \\ 11. y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}. & 12. y = \frac{x^5}{x^4 - 1}. \\ 13. y = \frac{x^3 + 4}{x^2}. & 14. y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{x^2} (x - 5). \\ 15. y = x^3/(x^4 - 1). & 16. y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}. \end{array}$$

$$17. y = \frac{x+1}{(x-1)^2}. \quad 18. y = e^{1/(4+x)}.$$

$$19. y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}. \quad 20. y = \frac{x}{9-x}.$$

$$21. y = -\ln \frac{1+x}{1-x}. \quad 22. y = \frac{(x-2)^2}{x+1}.$$

$$23. y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}. \quad 24. y = x^3 e^{-x^2/2}.$$

$$25. y = x^2 - 2 \ln x. \quad 26. y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}.$$

$$27. y = x - \ln(1+x^2). \quad 28. y = x + \frac{\ln x}{x}.$$

$$29. y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}. \quad 30. y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}.$$

Завдання 2.9. Розв'язати задачі.

1. Лампа висить над центром столу, який має радіус r . При якій висоті лампи над столом освітленість предмета, який лежить на його краю, буде найкращою? (Освітленість прямо пропорційна косинусу кута падіння сонячних променів і обернено пропорційна квадрату відстані до джерела світла).

2. Із усіх циліндрів, вписаних у даний конус, знайти той, у якого найбільша бічна поверхня. Висота конуса H , радіус основи R .

3. З паперового круга вирізано сектор. З частини круга, що залишилась, склеєно конічну воронку. Яку градусну міру повинен мати вирізаний сектор, щоб об'єм воронки був максимальним?

4. З усіх конусів з площею бічної поверхні S знайти конус максимального об'єму.

5. Пункт В знаходиться на відстані 60 км від залізниці. Відстань по залізниці від пункту А до найближчої до пункту В точки С складає 285 км. На якій відстані від точки С необхідно побудувати станцію, від якої прокладуть шосе до пункту В, щоб витратити найменшу кількість часу на переміщення між пунктами А та В, якщо

швидкість руху по залізниці дорівнює 52 км/год , а швидкість руху по шосе – 20 км/год ?

6. Канал, ширина якого a м, під прямим кутом впадає в інший канал шириною b м. Знайти найбільшу довжину балок, які можна сплавляти по цій системі каналів.

7. Знайти висоту прямого кругового конуса найменшого об'єму, описаного навколо кулі, якщо радіус кулі дорівнює R .

8. Бічні сторони рівнобічної трапеції дорівнюють b , а менша основа a . При якому куті нахилу бічних сторін трапеція матиме найбільшу площу?

9. Із фігури, яка обмежена кривою $y = 3\sqrt{x}$ та прямими $x = 4$, $y = 0$, вирізати прямокутник найбільшої площі.

10. Рівнобедрений трикутник, вписаний в коло, яке має радіус R , обертається навколо прямої, яка проходить через його вершину паралельно основі. Якою повинна бути висота цього трикутника, щоб тіло отримане в результаті його обертання, мало найбільший об'єм?

11. Необхідно виготовити відкритий циліндричний бак об'ємом V . Вартість 1 м^2 матеріалу, з якого виготовляється дно баку P_1 грн., а вартість 1 м^2 матеріалу, який використовують для виготовлення стінок баку, – P_2 грн. При якому відношенні радіуса дна до висоти баку витрати на матеріал будуть мінімальними?

12. Ємність з вертикальними стінками, що має висоту H , заповнена нев'язкою рідиною, стоїть на горизонтальній площині. Визначити положення отвору, при якому дальність струменю рідини буде найбільшою, якщо швидкість витікання рідини, згідно із законом Торрічеллі, дорівнює $\sqrt{2gx}$, де x – відстань від отвору до поверхні рідини, g – прискорення вільного падіння.

13. Вікно має форму прямокутника, завершеного півкругом. Периметр вікна дорівнює 15 м. При якому радіусі півкруга вікно буде пропускати найбільшу кількість світла?

14. На сторінці книжки друкований текст займає площу S , ширина верхнього та нижнього полів дорівнює a , а правого та лівого – b . При якому відношенні ширини до висоти тексту площа всієї сторінки буде найменшою?

15. З круглої колоди, діаметр якої d , необхідно вирізати балку прямокутного поперечного перерізу. Якими повинні бути ширина та висота цього перерізу, щоб балка створювала найбільший опір на згин? Опір балки на згин Q пропорційний добутку ширини x її поперечного перерізу і квадрату її висоти y , тобто $Q = kxy^2$, $k = \text{const}$.

16. Полотняне шатро об'ємом V має форму прямого конуса. Яким повинно бути відношення висоти конуса до радіуса його основи, щоб на шатро було витрачено найменшу кількість полотна?

17. У рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при основі α необхідно вписати паралелограм найбільшої площі, так щоб одна з його вершин лежала на основі, а друга на бічній стороні трикутника. Знайти довжини сторін паралелограма.

18. Знайти співвідношення, яке пов'язує радіус R і висоту H циліндра, який має при заданому об'ємі V найменшу повну поверхню.

19. Необхідно виготовити конічну воронку, яка матиме твірну, рівну 20 см. Якою повинна бути висота воронки, щоб її об'єм був мінімальним?

20. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює $2p$. Якою повинна бути його основа, щоб об'єм тіла, утвореного обертанням цього трикутника навколо його основи, був максимальним?

21. Знайти висоту конуса найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіуса R .

22. Дротом, довжина якого l м, необхідно обгородити клумбу, яка має форму кругового сектора. Яким повинен бути радіус круга, щоб площа клумби була максимальною?

23. Визначити максимальну площу прямокутника, вписаного в півкруг, який має радіус a .

24. Колода довжиною 20 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ яких рівні 2 м та 1 м. З колоди необхідно виготовити балку з квадратним поперечним перерізом, вісь якої збігалася би з віссю колоди, а об'єм був максимальним. Якими повинні бути розміри балки?

25. З корабля, який стоїть на якорі на відстані 9 км від берега, необхідно послати гінця в табір. Табір розташований на відстані 15 км

до найближчої до корабля точки берега. Швидкість руху гінця на суші – 5 км/год , а на човні – 4 км/год . В якому місці він повинен причалити до берега, щоб потрапити в табір за найменший проміжок часу?

26. Смуга жерсті, яка має прямокутну форму, ширини a повинна бути зігнута у вигляді відкритого кругового жолоба, який має циліндричну форму, так, щоб його переріз мав форму сегмента. Яким має бути центральний кут, що спирається на дугу цього сегмента, щоб об'єм жолоба був максимальним?

27. Із круглої колоди, діаметр якої d , необхідно вирізати балку, яка має прямокутний переріз. Якими мають бути ширина a та висота h цього перерізу, щоб в горизонтальному положенні та рівномірному навантаженні балка мала найменший прогин? (Величина прогину обернено пропорційна добутку ширини поперечного перерізу і куба висоти).

28. Вартість 1 км перевезення вантажу залізницею становить k_1 грн., а автомобілем – k_2 грн. $k_1 < k_2$. В якому місці P необхідно почати будівництво шосе, щоб можна було дешевше перевозити вантаж з пункту A в пункт C ? Відомо, що $|AB| = a$, $|BC| = b$ (рис. 1).

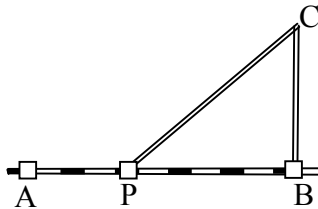


Рисунок 2.1

29. Чоловікові необхідно потрапити з пункту A , який знаходиться на одному березі річки, в пункт B на іншому її березі. Під яким кутом чоловік має переплисти річку, щоб добратися до пункту B за найменший час?. Швидкість руху на березі в k раз більше швидкості руху річкою. Ширина річки h , відстань між пунктами A і B (вздовж берега) a .

30. На прямолінійному відрізку AB , який з'єднує два джерела світла: A (силою p) і B (силою q), знайти точку M , яка освітлюється найменше, якщо $|AB| = a$ (Освітленість обернено пропорційна квадрату відстані від джерела світла).

З ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Завдання 3.1. Знайти повні диференціали вказаних функцій.

1. $z = 7x^3y - \sqrt{xy}$.
2. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}$.
3. $z = e^{x+y-4}$.
4. $z = \cos(3x + y) - x^2$.
5. $z = \operatorname{tg}((x + y)/(x - y))$.
6. $z = \operatorname{ctg}(y/x)$.
7. $z = xy^4 - 3x^2y + 1$.
8. $z = \ln(x + xy - y^2)$.
9. $z = 2x^2y^2 + x^3 - y^3$.
10. $z = \sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}$.
11. $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$.
12. $z = e^{y-x}$.
13. $z = 7x - x^3y^2 + y^4$.
14. $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x$.
15. $z = \ln(y^2 - x^2 + 3)$.
16. $z = \arccos(x + y)$.
17. $z = y^2 - 3xy - x^4$.
18. $z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x}$.
19. $z = \operatorname{arctg}(x - y)$.
20. $z = \operatorname{arcsin}((x + y)/x)$.
21. $z = 2x^3y - 4xy^5$.
22. $z = x^2y \sin x - 3y$.
23. $z = \operatorname{arctg}x + \sqrt{y}$.
24. $z = \operatorname{arcsin}(xy) - 3xy^2$.
25. $z = 5xy^4 + 2x^2y^7$.
26. $z = \cos(x^2 - y^2) + x^3$.
27. $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$.
28. $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$.
29. $z = \operatorname{arcsin}(x + y)$.
30. $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$.

Завдання 3.2. Обчислити похідну складної функції $u = u(x, y)$,

де $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t = t_0$ з точністю до двох знаків після коми.

1. $u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.
2. $u = \sqrt{x^2 + y + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$.

$$3. u = \arcsin \frac{x}{2y}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi.$$

$$4. u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}, \quad x = \sin 2t, \quad y = \tan^2 t, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$5. u = \sqrt{x + y + 3}, \quad x = \ln t, \quad y = t^2, \quad t_0 = 1.$$

$$6. u = \frac{y}{x}, \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{2t}, \quad t_0 = 0.$$

$$7. u = \arcsin(2x/y), \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi.$$

$$8. u = \ln(e^{2x} + e^y), \quad x = t^2, \quad y = t^4, \quad t_0 = 1.$$

$$9. u = \arctg(x + y), \quad x = t^2 + 2, \quad y = 4 - t^2, \quad t_0 = 1.$$

$$10. u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3}, \quad x = \ln t, \quad y = t^3, \quad t_0 = 1.$$

$$11. u = \arctg(xy), \quad x = t + 3, \quad y = e^t, \quad t_0 = 0.$$

$$12. u = e^{x-2y}, \quad x = \sin t, \quad y = t^3, \quad t_0 = 0.$$

$$13. u = \ln(e^x + e^{-y}), \quad x = t^2, \quad y = t^3, \quad t_0 = -1.$$

$$14. u = y^x, \quad x = \ln(t-1), \quad y = e^{t/2}, \quad t_0 = 2.$$

$$15. u = e^{y-2x+2}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$16. u = x^2 e^y, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t_0 = \pi.$$

$$17. u = \ln(e^x + e^y), \quad x = t^2, \quad y = t^3, \quad t_0 = 1.$$

$$18. u = x^y, \quad x = e^t, \quad y = \ln t, \quad t_0 = 1.$$

$$19. u = e^{y-2x}, \quad x = \sin t, \quad y = t^3, \quad t_0 = 0.$$

$$20. u = x^2 e^{-y}, \quad x = \sin t, \quad y = \sin^2 t, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$21. u = \ln(e^{-x} + e^y), \quad x = t^2, \quad y = t^3, \quad t_0 = -1.$$

$$22. u = e^{y-2x-1}, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$23. u = \arcsin(x/y), \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi.$$

$$24. u = \arccos(2x/y), \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi.$$

$$25. u = \frac{x^2}{y+1}, \quad x = 1-2t, \quad y = \arctgt, \quad t_0 = 0.$$

$$26. u = \frac{x}{y}, \quad x = e^t, \quad y = 2 - e^{2t}, \quad t_0 = 0.$$

$$27. u = \ln(e^{-x} + e^{-2y}), \quad x = t^2, \quad y = \frac{t^3}{3}, \quad t_0 = 1.$$

$$28. u = \sqrt{x+y^2+3}, \quad x = \ln t, \quad y = t^2, \quad t_0 = 1.$$

$$29. u = \arcsin(x^2/y), \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi.$$

$$30. u = \frac{y^2}{x}, \quad x = 1-2t, \quad y = 1 + \arctgt, \quad t_0 = 0.$$

Завдання 3.3. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = z(x, y)$ в області $\bar{D}$, обмеженої заданими лініями.

$$1. z = xy - 2x - y, \quad \bar{D}: x = 0, \quad x = 3, \quad y = 0, \quad y = 4.$$

$$2. z = \frac{x^2}{2} - xy, \quad \bar{D}: y = 8, \quad y = 2x^2.$$

$$3. z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2, \quad \bar{D}: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 1 = 0.$$

$$4. z = 2x^2 + 3y^2 + 1, \quad \bar{D}: y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}, \quad y = 0.$$

$$5. z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1, \quad \bar{D}: x = -3, \quad y = 0, \quad x + y + 1 = 0.$$

$$6. z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1, \quad \bar{D}: x = 5, \quad y = 0, \quad x - y - 1 = 0.$$

$$7. z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x, \quad \bar{D}: y = 2x, \quad y = 2, \quad x = 0.$$

$$8. z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \quad \bar{D}: x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = 2.$$

$$9. z = xy - 3x - 2y, \quad \bar{D}: x = 0, \quad x = 4, \quad y = 0, \quad y = 4.$$

$$10. z = x^2 + xy - 2, \quad \bar{D}: y = 4x^2 - 4, \quad y = 0.$$

11. $z = x^2 y(4 - x - y), \quad \overline{D}: x=0, y=0, y=6-x.$
12. $z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad \overline{D}: x=0, x=2, y=-1, y=2.$
13. $z = 4(x-y) - x^2 - y^2, \quad \overline{D}: x+2y=4, x-2y=4, x=0.$
14. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad \overline{D}: x=3, y=0, y=x+1.$
15. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y, \quad \overline{D}: x=0, x=1, y=0, y=2.$
16. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y, \quad \overline{D}: y=x+2, y=0, x=2.$
17. $z = 4 - 2x^2 - y^2, \quad \overline{D}: y=0, y=\sqrt{1-x^2}.$
18. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \quad \overline{D}: x=-1, x=1, y=-1, y=1.$
19. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2, \quad \overline{D}: x+y+2=0, x=0, y=0.$
20. $z = 2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2, \quad \overline{D}: x=0, y=0, x+y=6.$
21. $z = 3x + y - xy, \quad \overline{D}: y=x, y=4, x=0.$
22. $z = xy - x - 2y, \quad \overline{D}: x=3, y=x, y=0.$
23. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad \overline{D}: x=0, x=1, y=0, y=2.$
24. $z = 5x^2 - 3xy + y^2, \quad \overline{D}: x=0, x=1, y=0, y=1.$
25. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad \overline{D}: x-y+1=0, x=3, y=0.$
26. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad \overline{D}: x=0, y=0, x+y-1=0.$
27. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2, \quad \overline{D}: x=0, x=1, y=0, y=6.$
28. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \quad \overline{D}: x=0, x=1, y=0, y=1.$
29. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad \overline{D}: x=0, y=0, x+y-3=0.$
30. $z = x^2 + 2xy - 10, \quad \overline{D}: y=0, y=x^2 - 4.$

4 ІНТЕГРАЛИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Завдання 4.1. Обчислити невизначені інтеграли.

1. $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx$.
2. $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17} dx$.
3. $\int \frac{dx}{2 \sin x - 3 \cos x}$.
4. $\int \frac{x-8}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$.
5. $\int x^2 \cdot 2^x dx$.
6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.
7. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}}$.
8. $\int \frac{2^{\ln x}}{x\sqrt{1+4^{\ln x}}} dx$.
9. $\int \sin 5x \cos x dx$.
10. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x} dx$.
11. $\int 2^x \cdot 3^{2x} dx$.
12. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{7+2 \cos x}} dx$.
13. $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x dx$.
14. $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx$.
15. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$.
16. $\int \frac{3^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$.
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$.
18. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.
19. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2 \cos x}}$.
20. $\int \frac{x-1}{x^3+x} dx$.
21. $\int \frac{81^x - 3^x}{9^x} dx$.
22. $\int (x+2) \ln x dx$.
23. $\int (x^2+3) e^{-2x} dx$.
24. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x}-5}$.
25. $\int \frac{dx}{\cos^2 x (1+\operatorname{tg} x)^3}$.
26. $\int \frac{dx}{(1+x^2)(\operatorname{arctg} x-3)}$.
27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-7)}$.
28. $\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x} dx$.
29. $\int \frac{3-2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$.
30. $\int \frac{\sin 5x}{1+\cos^2 5x} dx$.

Завдання 4.2. Обчислити невизначені інтеграли.

1. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+6x-3x^2}} dx$.
2. $\int \frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)} dx$.
3. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{3-x-x^2}} dx$.

4. $\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$. 5. $\int \frac{x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}} dx$. 6. $\int \frac{3x+2}{x^2-4x+12} dx$.
 7. $\int (x^2+3)\cos x dx$. 8. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}} dx$. 9. $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x^2-4x+3}} dx$.
 10. $\int \arctg \sqrt{x} dx$. 11. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx$. 12. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.
 13. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$. 14. $\int x^3 \cos 3x dx$. 15. $\int x^2 e^{-x/2} dx$.
 16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$. 17. $\int \frac{5x+3}{3x^2+2x+1} dx$. 18. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx$.
 19. $\int x \ln(x^2+1) dx$. 20. $\int \arcsin x dx$. 21. $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx$.
 22. $\int (1-x) \sin x dx$. 23. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt{x}} dx$. 24. $\int \sqrt{x} \ln x dx$.
 25. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$. 26. $\int \frac{x^3+2}{x^4+3x^2} dx$. 27. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$.
 28. $\int \frac{\sin 2x dx}{3\sin^2 x+4}$. 29. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{6x-x^2-8}} dx$. 30. $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^4} dx$.

Завдання 4.3. Обчислити невизначені інтеграли.

1. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$. 2. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx$. 3. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} dx$.
 4. $\int \frac{2x^2-x-1}{x^3-x^2-6x} dx$. 5. $\int e^{-2x} \sin(e^{-2x}) dx$. 6. $\int \frac{\sin 4x}{1+\cos 4x} dx$.
 7. $\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3} dx$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3x^2-1}}$. 9. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$.
 10. $\int \frac{\sqrt[3]{\arctg^2 x}}{1+x^2} dx$. 11. $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$. 12. $\int \frac{dx}{4x^3-x}$.

13. $\int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$. 14. $\int \frac{x+1}{4x^2-12x+3} dx$. 15. $\int \frac{x+5}{\sqrt{3x^2+6x+1}} dx$.
 16. $\int x^3 e^{x^2} dx$. 17. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$. 18. $\int \frac{x^2}{1-x^4} dx$.
 19. $\int \frac{3x-13}{x^2-4x+8} dx$. 20. $\int \frac{x+1}{5x^2+2x+1} dx$. 21. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}+1}$.
 22. $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+7} dx$. 23. $\int \frac{dx}{x \ln^5 x}$. 24. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{4x+5-x^2}} dx$.
 25. $\int e^{2x} \sin 2x dx$. 26. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$. 27. $\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$.
 28. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$. 29. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$. 30. $\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx$.

Завдання 4.4. Обчислити невизначені інтеграли.

1. $\int \frac{x^2-2x+1}{x^3+2x^2+x} dx$. 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$. 3. $\int \frac{dx}{x^4-6x^3+9x^2}$.
 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$. 5. $\int \sin(\ln x) dx$. 6. $\int \frac{x+3}{(x+2)(x^2+x+1)} dx$.
 7. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$. 8. $\int \frac{x^2}{9-x^4} dx$. 9. $\int \frac{dx}{x^3+4x-x^2-4}$.
 10. $\int \frac{3x-1}{x^2-6x+10} dx$. 11. $\int \frac{dx}{x^4-16}$. 12. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.
 13. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$. 14. $\int \frac{x dx}{2x^2+2x+5}$. 15. $\int \frac{2-x}{(7-x)^3} dx$.
 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. 17. $\int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2+2x+2} dx$. 18. $\int \frac{2x^2+1}{x^3+2x^2+2x} dx$.
 19. $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$. 20. $\int x^2 \cos 6x dx$. 21. $\int \sqrt[3]{x^2} \ln x dx$.

22. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$. 23. $\int x^2 5^{x/2} dx$. 24. $\int \frac{dx}{5-4 \sin x}$.
25. $\int \frac{2x dx}{(x+1)(x^2+x+2)}$. 26. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$. 27. $\int \frac{x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx$.
28. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} dx$. 29. $\int \frac{x-1}{x^3+8} dx$. 30. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2} dx$.

Завдання 4.5. Обчислити невизначені інтеграли.

1. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 2. $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$. 3. $\int \frac{x dx}{2x^4+5}$.
4. $\int \frac{x^4}{x^4-16} dx$. 5. $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{x} dx$. 6. $\int \frac{dx}{5-3 \cos x}$.
7. $\int \ln(x^2+1) dx$. 8. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx$. 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \arcsin x}}$.
10. $\int \frac{x^2-3}{x^4-5x^2+4} dx$. 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$. 12. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.
13. $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$. 14. $\int \cos 3x \cos x dx$. 15. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x} dx$.
16. $\int \frac{x dx}{x^3-1}$. 17. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$. 18. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$.
19. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1+x}}$. 20. $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx$. 21. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 23. $\int \sin x \sin 3x dx$. 24. $\int (1-\sin 2x)^2 dx$.
25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2+1}}$. 26. $\int \ln^2 x dx$. 27. $\int \cos 2x \cos^2 x dx$.
28. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1} dx$. 29. $\int x^2 e^{3x} dx$. 30. $\int x^2 \sin x dx$.

Завдання 4.6. Обчислити невизначені інтеграли.

1. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$.
2. $\int \frac{x^2 + 1}{(x-1)^3(x+3)} dx$.
3. $\int (x+1)e^x dx$.
4. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.
5. $\int (1 + \sin^4 x) dx$.
6. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx$.
7. $\int \frac{dx}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x}$.
8. $\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} dx$.
9. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 3x}$.
10. $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x}$.
11. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{7 + 2 \cos x}}$.
12. $\int \frac{x^4 + 2x - 2}{x^4 - 1} dx$.
13. $\int (x^2 + 1) \cdot 3^x dx$.
14. $\int \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[4]{x^3}} dx$.
15. $\int \sqrt{4 - x^2} dx$.
16. $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$.
17. $\int \cos 2x \sin^2 x dx$.
18. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.
19. $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}} dx$.
20. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x \cos^2 3x}$.
21. $\int \sin 5x \cos 3x dx$.
22. $\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$.
23. $\int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}$.
24. $\int \frac{5x^3 - 8}{x^3 - 4x} dx$.
25. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$.
26. $\int \sin 2x \cos 5x dx$.
27. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$.
28. $\int x \cdot 5^x dx$.
29. $\int \frac{x+1}{x^2 + x + 1} dx$.
30. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$.

Завдання 4.7. Обчислити (з точністю до двох знаків після коми) площу фігури обмеженої вказаними лініями.

1. $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.
2. $y^2 = x^3$, $x = 2$.
3. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.
4. $y^2 = (4 - x^3)$, $x = 0$.
5. $\rho = 3 \sin \varphi$.
6. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$.
7. $yx = 6$, $x + y - 7 = 0$.
8. $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$, $x = 2$.

9. $x^2 = 4y$, $y = \frac{8}{x^2 + 4}$. 10. $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$.
11. $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$. 12. $\rho = 3\sqrt{\cos 2}$.
13. $y = x^2$, $y = 3 - x$. 14. $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$.
15. $x = 7\cos^3 t$, $y = 7\sin^3 t$. 16. $\rho = 4\cos 3\varphi$.
17. $\rho = 3\cos 3\varphi$. 18. $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$.
19. $\rho^2 = 2\sin 2\varphi$. 20. $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$.
21. $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$. 22. $\rho = 2\sin 3\varphi$.
23. $\rho = 2 + \cos \varphi$. 24. $y = \frac{1}{1 + x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$.
25. $y^2 = x + 1$, $y^2 = 9 - x$. 26. $y^2 = x^3$, $x = 0$, $y = 4$.
27. $\rho = 4\sin^2 \varphi$. 28. $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$.
29. $y^2 = 9x$, $y = 3x$.
30. $x = 3(\cos t + t \sin t)$, $y = 3(\sin t - t \cos t)$, $y = 0$ ($0 \leq t \leq \pi$).

Завдання 4.8. Обчислити довжину дуги заданої кривої.

- $y^2 = (x - 1)^3$ від точки $A(1; 0)$ до точки $B(6; \sqrt{125})$.
- $y^2 = x^5$, яка відтинається прямою $x = 5$.
- $\rho = 3\cos \varphi$.
- $\rho = 3(1 - \cos \varphi)$.
- $\rho = 2\cos^3 \frac{\varphi}{3}$.
- $x = 5\cos^2 t$, $y = 5\sin^2 t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$).
- $9y^2 = 4(3 - x)^3$ між точками перетину з віссю Oy .
- $\rho = 3\sin \varphi$.
- $y = \ln \sin x$ ($\pi/3 \leq x \leq \pi/2$).
- $x = 9(t - \sin t)$, $y = 9(1 - \cos t)$.
- $y^2 = x^3$ від точки $A(0; 0)$ до точки $B(4; 8)$.

12. $\rho = 5(1 + \cos \varphi)$.
13. $\rho = 4 \cos \varphi$.
14. $\rho = 5 \sin \varphi$.
15. $x = \sqrt{3}t^3, y = t - t^3$ (петля).
16. $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$.
17. $y = e^{x/2} + e^{-x/2} \quad (0 \leq x \leq 2)$.
18. $x = 7(t - \sin t), y = 7(1 - \cos t) \quad 2\pi \leq t \leq 4\pi$.
19. $y^2 = (x - 1)^3$ від точки $A(2; -1)$ до точки $B(5; -8)$.
20. $x = 9(t - \sin t), y = 9(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$.
21. $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$.
22. $x = 2(\cos t + t \sin t), y = 2(\sin t - t \cos t) \quad (0 \leq t \leq \pi)$.
23. $\rho = \sin^3(\varphi/3) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$.
24. $\rho = 2 \sin^3(\varphi/3) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$.
25. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{9}$.
26. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$.
27. $y^2 = (x + 1)^3$, яка відтинається прямою $x = 4$.
28. $y = 1 - \ln(\cos x) \quad (0 \leq x \leq \pi/6)$.
29. $\rho = 6 \cos^3(\varphi/3) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$.
30. $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^4 t$.

Завдання 4.9. Обчислити (з точністю до двох знаків після коми) об'єм тіла, утвореного обертанням фігури Φ навколо вказаної осі координат.

1. $\Phi: y = 2 - x^2/2, x + y = 2, Oy$.
2. $\Phi: y = x - x^2, y = 0, Ox$.
3. $\Phi: 2y = x^2, 2x + 2y - 3 = 0, Ox$.
4. $\Phi: x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, Ox$.

5. $\Phi: y = x^3, x = 0, y = 8, Oy.$
6. $\Phi: y^2 = (x+4)^3, x = 0, Ox.$
7. $\Phi: y = -x^2 + 8, y = x^2, Ox.$
8. $\Phi: y = 2 - x^2, y = x^2, Ox.$
9. $\Phi: y = \sqrt{3} \cos t, y = 2 \sin t, Oy.$
10. $\Phi: xy = 4, 2x + y - 6 = 0, Ox.$
11. $\Phi: y^2 = 4 - x, x = 0, Oy.$
12. $\Phi: \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}, x = 0, y = 0, Ox.$
13. $\Phi: x^2/9 + y^2/4 = 1, Oy.$
14. $\Phi: y^3 = x^2, y = 1, Ox.$
15. $\Phi: x = 6(t - \sin t), y = 6(1 - \cos t), Ox.$
16. $\Phi: x = 3 \cos^2 t, y = 4 \sin^2 t, (0 \leq t \leq \pi/2), Oy.$
17. $\Phi: y^2 = x, x^2 = y, Ox.$
18. $\Phi: y^2 = (x-1)^3, x = 2, Ox.$
19. $\Phi: x = \sqrt{1-y^2}, y = \sqrt{\frac{3}{2}}x, y = 0, Ox.$
20. $\Phi: y = \sin x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi), Ox.$
21. $\Phi: y^2 = 4x, x^2 = 4y, Ox.$
22. $\Phi: x = 2 \cos t, y = 5 \sin t, Oy.$
23. $\Phi: y = x^2, 8x = y^2, Oy.$
24. $\Phi: y = e^x, x = 0, y = 0, x = 1, Ox.$
25. $\Phi: y^2 = 4x/3, x = 3, Ox.$
26. $\Phi: y = 2x - x^2, y = 0, Ox.$
27. $\Phi: \rho = 2(1 + \cos \varphi), \text{полярна вісь.}$
28. $\Phi: x = 7 \cos^3 t, y = 7 \sin^3 t, Oy.$
29. $\Phi: x^2/16 + y^2/1 = 1, Ox.$

30. $\Phi: x^3 = (y-1)^2, x=0, y=0, O x$.

Завдання 4.10. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність.

1. а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{\pi \arctg \frac{x}{2}}}$, б) $\int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$.

2. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x)\ln^3 x}$, б) $\int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9x} dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

3. а) $\int_0^{\infty} x e^{-3x} dx$, б) $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$.

4. а) $\int_{-\infty}^0 \left(\frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx$, б) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

5. а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$, б) $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$.

6. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$, б) $\int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$.

7. а) $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$, б) $\int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

8. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(6x^2-5x+1)\ln \frac{3}{4}}$, б) $\int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$.

9. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$, б) $\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

10. а) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$, б) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$.

$$11. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{15x^2 + 1}, \text{ б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}.$$

$$12. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{16x dx}{16x^4 - 1}, \text{ б) } \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}.$$

$$13. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}, \text{ б) } \int_0^{1/3} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x} dx.$$

$$14. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{16x^4 - 1}}, \text{ б) } \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}.$$

$$15. \text{ a) } \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}, \text{ б) } \int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx.$$

$$16. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}}, \text{ б) } \int_{1/4}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}.$$

$$17. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(16 + x^2)^5}}, \text{ б) } \int_{1/2}^1 \frac{\ln 2 dx}{(1-x) \ln^2(1-x)} dx.$$

$$18. \text{ a) } \int_4^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}, \text{ б) } \int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx.$$

$$19. \text{ a) } \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)}, \text{ б) } \int_0^1 \frac{x dx}{1-x^4}.$$

$$20. \text{ a) } \int_{-1}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4x + 5}, \text{ б) } \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} dx.$$

$$21. \text{ a) } \int_{1/3}^{\infty} \frac{\pi dx}{(1+9x^2) \arctg^2 3x}, \text{ б) } \int_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}.$$

$$22. \text{ a) } \int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2 - 4x) \ln 5}, \text{ б) } \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3} \ln 2} dx.$$

$$23. \text{ a) } \int_0^{\infty} x \sin x dx, \text{ б) } \int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}.$$

$$24. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1 + \ln^2 x)}, \text{ б) } \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}.$$

$$25. \text{ a) } \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\arctg 2x}}{1 + 4x^2} dx, \text{ б) } \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x - x^2 - 4}}.$$

$$26. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{\arctg 2x}{\pi(1 + 4x^2)} dx, \text{ б) } \int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

$$27. \text{ a) } \int_{1/2}^{\infty} \frac{16dx}{\pi(4x^2 + 4x + 5)}, \text{ б) } \int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + 3x}}.$$

$$28. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{xdx}{4x^2 + 4x + 5}, \text{ б) } \int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3 - 4x}}.$$

$$29. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 4x + 1)^4}}, \text{ б) } \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos 2x} dx.$$

$$30. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{3 - x^2}{x^2 + 4} dx, \text{ б) } \int_0^1 \frac{2e^{1 - \frac{2}{\pi} \arcsin x}}{\pi \sqrt[5]{1 - x^2}} dx.$$

5 РЯДИ

Завдання 5.1. Дослідити на збіжність вказані ряди з додатними членами.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)^3}{(3n)!}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n(2n-1)}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n n^7.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7^n}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+5)}{(2n-1)!}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^{2n}}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n+3)!}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{5n!}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n(n+1)}{7^n}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdots (5n-3)}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n} \cdot 3^n}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^7(n+2)!}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{3^n(n+1)!}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right)^7.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} (3n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{4^n}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{5^n}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2\pi}{5^n}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n/2}}{(2n)!}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n(n+1)!}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} (5n-2) \sin \frac{\pi}{4^n}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n!}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{\sqrt{n} \cdot 9^n}.$$

Завдання 5.2. Дослідити на збіжність вказані ряди з додатними членами.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(2n+5))^n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 - 3n - 1} \right)^{n^2}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n} \right)^{n^2}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n^2} \right)^{2n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{5n} \right)^{3n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16^n}{((2n+1)/2n)^n}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n-1}{8n} \right)^{n^2}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n} \right)^n$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n} \right)^{n^2}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2 - 2n - 8}{6n^2 + 3n + 4} \right)^n$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5n+5} \right)^n$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{5n} \right)^{2n}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^{3n}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)/n)^{n^2}}{7^n}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+1} \right)^n$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{10n+1} \right)^n$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} \right)^{2n}$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{\ln^2(n+4)}$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+5}{2n+7} \right)^n$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20^n}{(5(n+1)/n)^n}$.
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10n-1}{10n} \right)^{n^2}$.
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+3} \right)^n$.
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+5))^n}$.
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n} \right)^{5n}$.
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 7n + 5}{5n^2 - 7} \right)^n$.
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{9^n} \right)^n$.
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/(n+1))^{n^2}}{5^n}$.
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(2n+1))^{2n}}$.
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{11^n} \right)^{3n}$.

Завдання 5.3. Дослідити на збіжність вказані ряди з додатними членами.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n+3)\ln^3(7n+3)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(5n-4)^3}}$.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(17n+7)\ln^2(17n+7)}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{4+n^2-n}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)\ln(n+9)\ln(\ln(n+9))}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{(4+3n)^7}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{25+n}{625+n^2}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)\ln(n+9)\ln(\ln(n+9))}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+5n)\ln^3(3+5n)}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{(6n-5)^5}}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n^2+1} \right)^2.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n+2)\ln(7n+2)}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+9)\ln^3(2n+9)}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(10n+5)^3}}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n+4)\ln(9n+4)}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln(n+5)\ln(\ln(n+5))}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n-3)\ln^3(10n-3)}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)\ln^3(n+9)}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{n^2+2n-9}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n+12)\ln^3(7n+12)}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+7)\ln^2(5n+7)}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(9n-5)^6}}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+n}{16+n^2} \right)^2.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{9+n^2}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{(3+n)^{12}}}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{(5n-1)^5}}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+8)\ln(n+8)}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(20n+10)\ln(20n+10)}.$$

Завдання 5.4. Дослідити на збіжність вказані ряди з додатними членами.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)(3n-1)}. \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}. \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{8n+1}}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}. \quad 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-7}{3n^4+5n-2}. \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+5)}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+9} \right)^{n^2}. \quad 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{(n-1)!}. \quad 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n)^2}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-2)}}. \quad 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{3n^2+1}. \quad 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n(1+n)}{3^n}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)\ln^2(n+4)}. \quad 14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n!}{5^n}. \quad 15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^7}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}. \quad 17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(3n-2)!}. \quad 18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n+5}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+9}}. \quad 20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+8}. \quad 21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(2n)!}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(2n+1)!}. \quad 23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+5}. \quad 24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{7^2}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-2)(5n+3)}. \quad 26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7n+1}}. \quad 27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} \left(\frac{n}{n+3} \right)^{n^2}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n + n}. \quad 29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^2}. \quad 30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{1+7^{2n}}.$$

Завдання 5.5. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакозмінні ряди.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{n^2+1}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{8^n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2n+2}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+4)}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^n \frac{\pi}{3n}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n}{n^6}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-1}{4^n}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^3+1}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\ln(n+1))^n}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^{5/2}}$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{8n-1}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(7n+1)^n}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{7^n}$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n+1}{n(n+3)}$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-2}{n^2-4}$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} \sqrt[5]{(n+1)^3}}$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5n}{6n+1} \right)^n$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$.
22. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$.
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\ln(2n+1)}$.
24. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{(n-1)!}$.
25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{15^n}$.
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n-1)^3}$.
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$.
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+4}$.
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n}$.

Завдання 5.6. Знайти область збіжності функціонального ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{x^n}.$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{nx^n}}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nx)^n}.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x-2)^n}.$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n n \ln n}.$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}.$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}.$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n.$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}.$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}.$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}.$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}.$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}.$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}.$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{2n+1}}.$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{nx^n}}{n!}.$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2} x^n}{(n+1)!}.$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^n}.$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n.$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}.$

Завдання 5.7. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)$.

Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції. (Варіанти 1-16.)

Розкласти функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки x_0 . Знайти область збіжності отриманого ряду до цієї функції. (Варіанти 17-30.)

1. $f(x) = ch(3x^4).$

2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}}.$

3. $f(x) = sh 2x.$

4. $f(x) = e^{-x^6}.$

5. $f(x) = 3^{-x^3}.$

6. $f(x) = 7^x.$

7. $f(x) = x \sin \sqrt{x}.$

8. $f(x) = \frac{\sin 5x}{x}.$

9. $f(x) = \cos 7x.$

10. $f(x) = x^2 \arctg x$. 11. $f(x) = \sin x^5$. 12. $f(x) = \frac{x^4}{1+x}$.
13. $f(x) = \cos \frac{x^2}{2}$. 14. $f(x) = \frac{4}{1-5x^2}$. 15. $f(x) = e^{7x}$.
16. $f(x) = \frac{6}{1+x}$.
17. $f(x) = \ln \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$, $x_0 = 1$. 18. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5+x}}$, $x_0 = -4$.
19. $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$. 20. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x_0 = 2$.
21. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x - 3}$, $x_0 = 2$. 22. $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
23. $f(x) = \ln(7x+5)$, $x_0 = 1$. 24. $f(x) = \frac{3}{x}$, $x_0 = -2$.
25. $f(x) = \frac{1}{x+3}$, $x_0 = -2$. 26. $f(x) = e^{2x}$, $x_0 = 1$.
27. $f(x) = \frac{1}{x+5}$, $x_0 = 3$. 28. $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$, $x_0 = 1$.
29. $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$, $x_0 = 2$. 30. $f(x) = \ln(7x+3)$, $x_0 = \frac{2}{7}$.

Завдання 5.8. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити вказаний визначений інтеграл з точністю до 0,001.

1. $\int_0^{0.5} \frac{\arctg x^2}{x^2} dx$. 2. $\int_0^{0.8} \frac{1 - \cos x}{x} dx$. 3. $\int_0^1 \cos x^2 dx$.
4. $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$. 5. $\int_0^1 \sin \sqrt[3]{x} dx$. 6. $\int_0^1 \sqrt{x} \sin(2x) dx$.

7. $\int_0^1 \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}} dx.$

8. $\int_0^1 \sin \frac{x^2}{4} dx.$

9. $\int_0^1 \arctg\left(\frac{x}{4}\right) dx.$

10. $\int_0^{0.5} \frac{2x - \arctg x}{x^2} dx.$

11. $\int_0^{0.4} \sqrt{1-x^3} dx.$

12. $\int_0^{0.5} e^{-3x^2} dx.$

13. $\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^3} dx.$

14. $\int_0^{0.25} \ln(1+x) dx.$

15. $\int_0^1 \arctg\left(\frac{x}{4}\right) dx.$

16. $\int_0^{0.1} \sqrt{x} e^{-2x} dx.$

17. $\int_0^{0.5} \frac{\arctg x}{x} dx.$

18. $\int_0^{0.1} \sqrt{x} \sin x dx.$

19. $\int_0^{0.1} \ln(1+x^4) dx.$

20. $\int_0^1 x^2 \cos x dx.$

21. $\int_0^1 e^{-x^2/2} dx.$

22. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx.$

23. $\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4}.$

24. $\int_0^1 \sqrt[4]{1+x^3/5} dx.$

25. $\int_0^{0.5} \frac{\sin x^2}{2x} dx.$

26. $\int_0^{0.1} \frac{e^x - 2}{x} dx.$

27. $\int_0^{0.5} x^2 \sin 3x dx.$

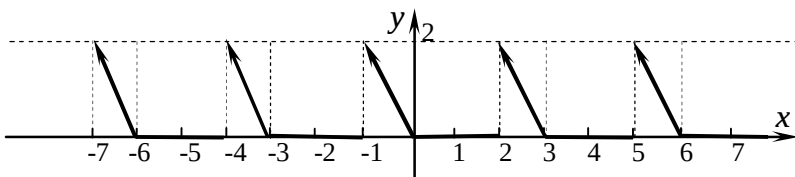
28. $\int_0^{0.1} \ln(1+x^2) dx.$

29. $\int_0^{0.4} \sqrt{x} e^{-x/2} dx.$

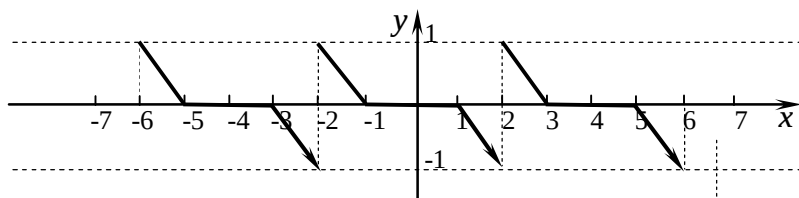
30. $\int_0^{0.5} \frac{1+\cos x}{x^2} dx.$

Завдання 5.9. Розкласти в ряд Фур'є функцію, задану графічно.

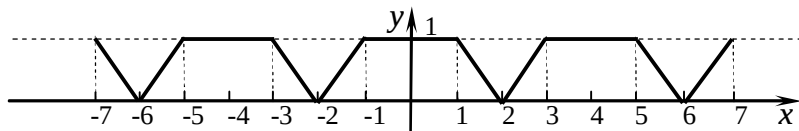
1.



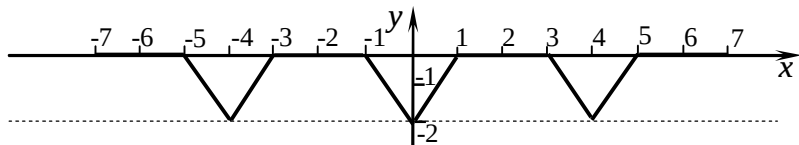
2.



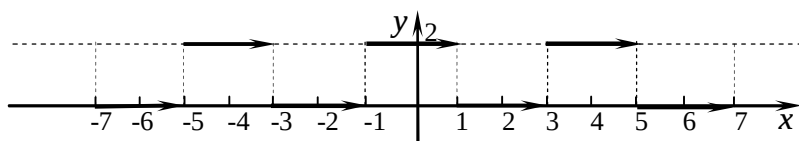
3.



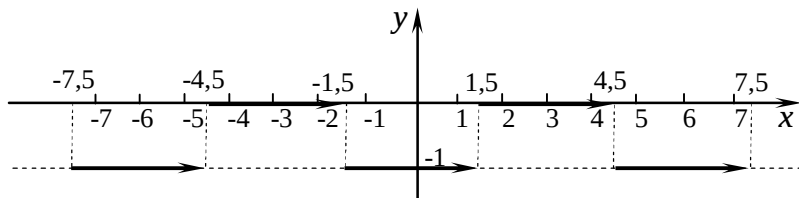
4.



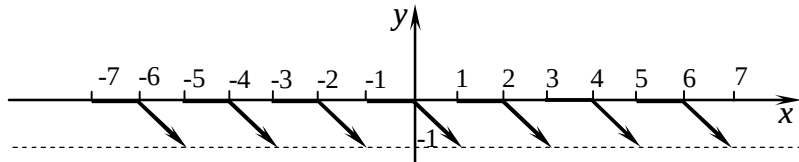
5.



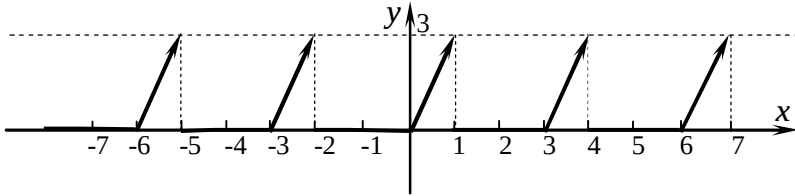
6.



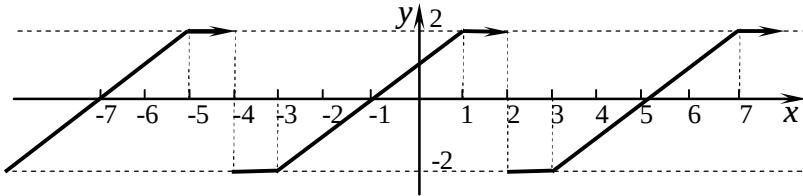
7.



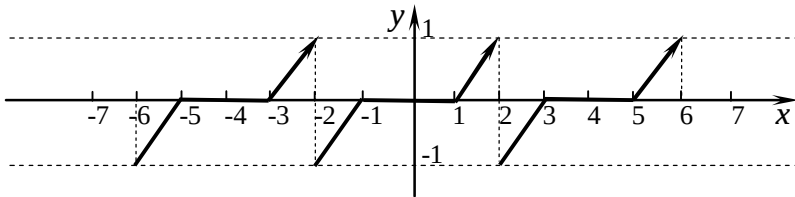
8.



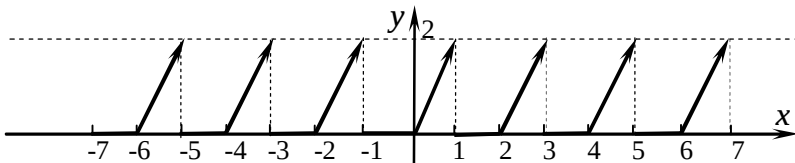
9.



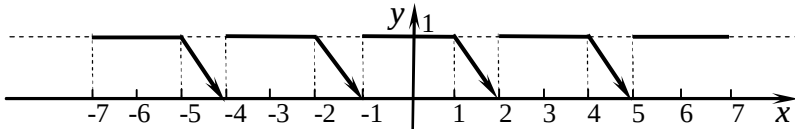
10.



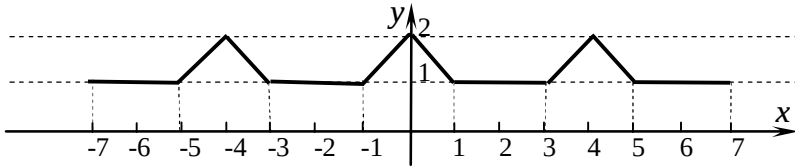
11.



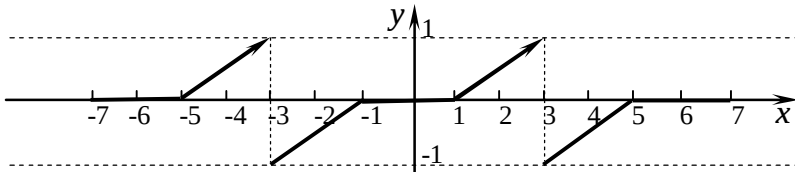
12.



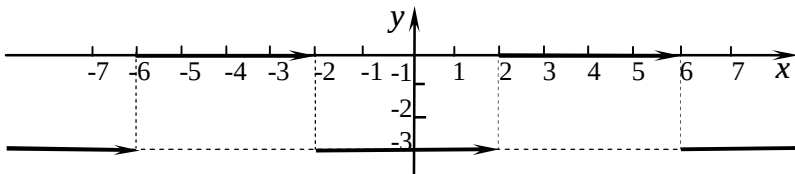
13.



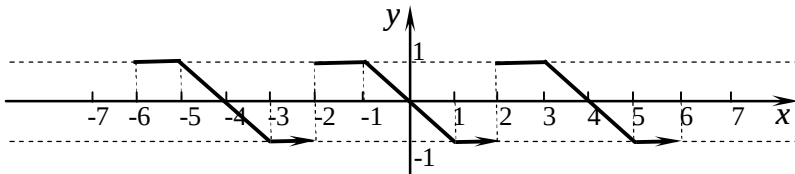
14.



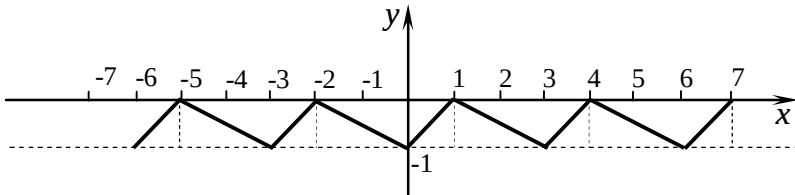
15.



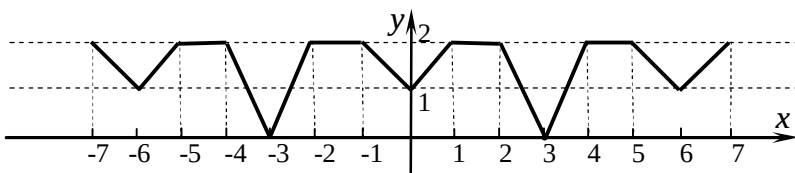
16.



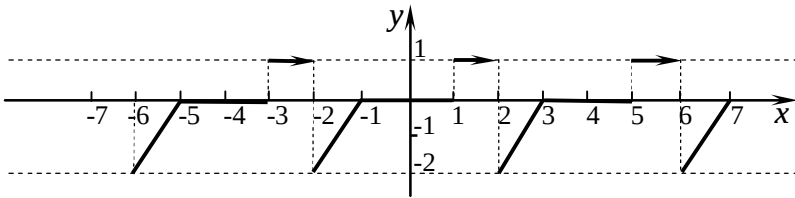
17.



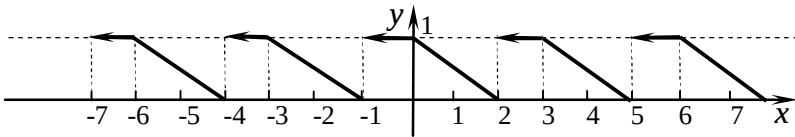
18.



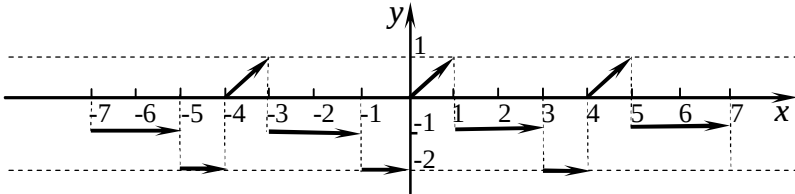
19.



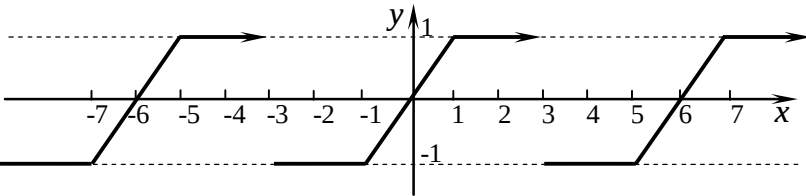
20.



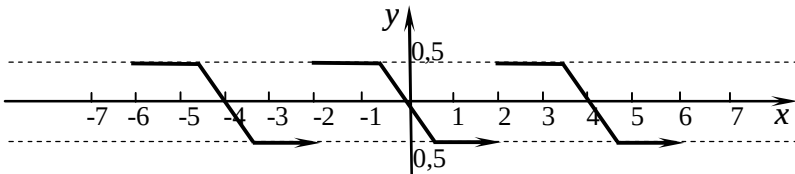
21.



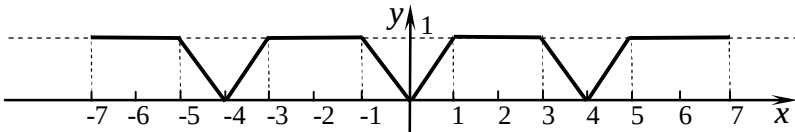
22.



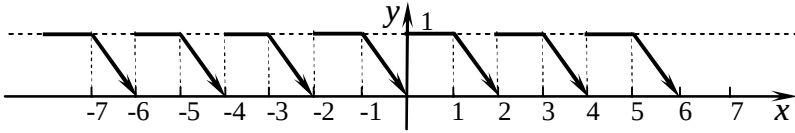
23.



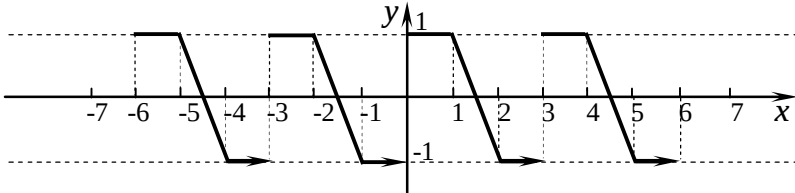
24.



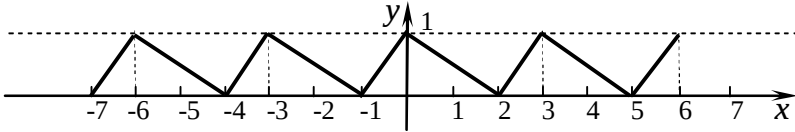
25.



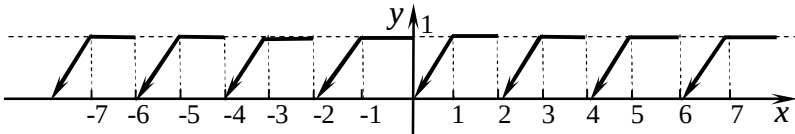
26.



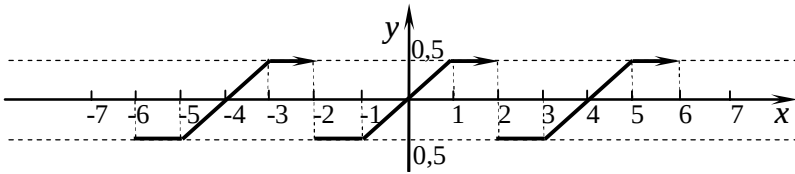
27.



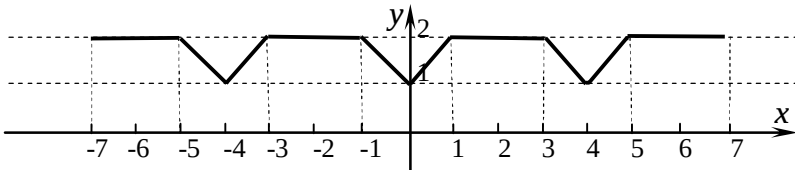
28.



29.



30.



ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 1985. – 526 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 576 с.
3. Бугров Я.С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник для студентов инженерно-технических специальностей вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1980. – 432 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М. : Наука. – 2005. – 416 с.
5. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч.П. Специальные разделы математического анализа / под ред. В.А. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М. : Наука, 1986. – 615с.
6. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. Г.И. Кручковича. – М. : Высшая школа, 1973. – 576 с.
7. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М. : Высшая школа, 2003. – Ч. 2. – 2003. – 415 с.