МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання контрольної робіти
з вищої математики.
РОЗДІЛИ «ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ», «ЕЛЕМЕНТИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ»

для студентів електротехнічного факультету
заочної форми навчання

2025

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з вищої математики. Розділи «Елементи теорії функції комплексної змінної», «Елементи операційного числення» для студентів електротехнічного факультету заочної форми навчання / Укл. : І. М. Килимник, А. В. Засовенко. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2025. – 77 с.

Укладачі: Килимник І.М., к.т.н., доцент,
Засовенко А.В., к.т.н., доцент.

Рецензент: Антоненко Н.М., к. ф.-м. н., доцент

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к.т.н., доцент

Затверджено на засіданні кафедри «Математика» НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 5 від 29.01.2025 р.

Рекомендовано НМК
Електротехнічного факультету
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 7 від 20.02.2025 р.

ЗМІСТ

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ТА ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Студент повинен виконувати контрольну роботу (КР) в окремому зошиті.

2. На обкладинці зошита посередині треба записати:
- тему КР,
- прізвище, ім̓я, по батькові повністю;
- номер академічної групи;
- номер варіанта (*варіанти вказує викладач*).

3. У КР повинні бути розв̓язані всі завдання, вказані викладачем. Розв’язання завдань необхідно записувати в порядку номерів завдань, зберігаючи їх послідовність. Умова задачі в завданні переписується повністю. Розв’язування кожного завдання повинно бути повністю наведено.

4. КР подається викладачеві на перевірку і захищається студентом на консультаціях.

5. КР, що виконана не за своїм варіантом, не зараховується.

Зауваження. У випадку дистанційної форми навчання студент завантажує виконану КР у відповідне завдання курсу «Вища математика» в Системі дистанційного навчання НУ «ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА» MOODLE.

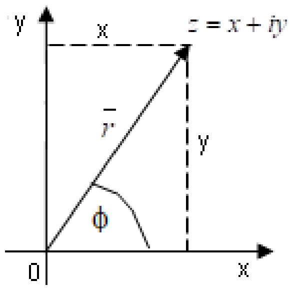
1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

1.1 Комплексні числа та дії над ними

Означення. *Комплексним числом* z називається число, яке має вигляд: $z = x + iy$, де x і y – дійсні числа, i – уявна одиниця, $i = \sqrt{-1}$; $x = \operatorname{Re} z$ – дійсна частина комплексного числа, $y = \operatorname{Im} z$ – уявна частина комплексного числа.

Означення. Комплексне число $\bar{z} = x - iy$ називається *спряженим* до комплексному числу z.

Комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити на площини xOy точкою (x, y), або вектором $\bar{r}$, який має напрямок з початку координат точки O в точку (x, y).



Означення. Довжина r (або ρ) вектора $\bar{r}$ називається *модулем комплексного числа* і визначається формулою:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ . \tag{1.1}$$

Означення. Кут φ, утворений вектором $\bar{r}$ з додатним напрямом осі Ox називається *аргументом комплексного числа* і позначається $\varphi = Arg\, z$

Величина $Arg\, z$ багатозначна і визначена з точністю до доданка кратного 2π:

$$\varphi = Arg\, z = \arg z + 2\pi k,\ \ (k = 0,\ \pm 1, \pm 2, ...), \tag{1.2}$$

де $\arg z$ – головне значення аргументу, яке визначається умовами:

$-\pi < \arg z \le \pi$, при цьому

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arcg}\,\dfrac{y}{x}, \text{ якщо } x>0,\ y - \text{будь яке;} \\ \pi + \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}, \text{ якщо } x<0,\ y>0; \\ -\pi + \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}, \text{ якщо } x<0,\ y<0; \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ якщо } x=0,\ y>0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ якщо } x=0,\ y<0; \\ 0, \text{ якщо } x>0,\ y=0; \\ \pi, \text{ якщо } x<0,\ y=0. \end{cases} \qquad (1.3)$$

При $z = 0$ величина $Arg\ z$ не має змісту.

Форми комплексного числа

1) ***Алгебраїчна форма***: $z = x + i\,y$.
2) ***Тригонометрична форма***: $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, якщо в алгебраїчній формі зробити заміну $x = r\cdot\cos\varphi,\ \ y = r\cdot\sin\varphi$.
3) ***Показникова форма***: $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$. Застосовуючи формулу Ейлера $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, можна перейти від тригонометричної форми до показникової.

Дії над комплексними числами

Маємо комплексні числа z_1 і z_2, задані в алгебраїчній і тригонометричній формах: $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$, $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$. Тоді справедливі наступні арифметичні операції:

а) *рівність*: $z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$.

б) *додавання і віднімання*: $z_1 \pm z_2 = \left(x_1 \pm x_2\right) + i\left(y_1 \pm y_2\right)$.

в) *добуток*: $z_1 \cdot z_2 = \left(x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2\right) + i\left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right) =$

$$= r_1 \cdot r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right) = r_1 \cdot r_2\, \mathrm{e}^{i\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)},$$

$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1.$

г) *частка*: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \dfrac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} =$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right) = \frac{r_1}{r_2}\, \mathrm{e}^{i\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}.$$

Маємо $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Піднесення до натурального степеня n:

$$z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right) = r\, \mathrm{e}^{i(n\varphi)}. \qquad (1.4)$$

Формула Муавра: $\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$

Корінь *n*-го степеня (n – натуральне) :

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r} \cdot \mathrm{e}^{i \cdot \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \qquad (1.5)$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. Матимемо n різних значень $\sqrt[n]{z}$.

Задача 1. Задані комплексні числа $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + 4i$, $z_3 = 2 - 2\sqrt{3} \cdot i$. Знайти: а) $z_1 + z_2$, б) $z_1 - z_2$, в) $z_1 \cdot z_2$, г) $\dfrac{z_1}{z_2}$. Записати: д) z_2 в тригонометричній формі; е) z_3 у показниковій формі.

Розв`язання.

а) $z_1 + z_2 = (1 - 2i) + (-3 + 4i) = -2 + 2i$;

б) $z_1 - z_2 = (1 - 2i) - (-3 + 4i) = 4 - 6i$;

в) $z_1 \cdot z_2 = (1-2i)\cdot(-3+4i) = -3+4i+6i-8i^2 = -3+10i+8 = 5+10i$;

г) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1-2i}{-3+4i}\cdot\dfrac{-3-4i}{-3-4i} = \dfrac{-3-4i+6i+8i^2}{9-16i^2} = \dfrac{-3+2i-8}{9+16} =$

$= \dfrac{-11+2i}{25} = -\dfrac{11}{25} + \dfrac{2}{25}i$;

д) $z_2 = -3+4i$. Знайдемо модуль комплексного числа та головне значення аргументу: $x=-3,\ y=4$. Тоді

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5,$$

Оскільки, $x<0,\ y>0 \Rightarrow \arg z = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{4}{-3} = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$.

Тригонометрична форма z_2:

$$z_2 = 5\cdot\left(\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right) =$$

$$= 5\cdot\left(-\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right).$$

е) $z_3 = 2 - 2\sqrt{3}\cdot i$. Знайдемо модуль комплексного числа та головне значення аргументу: $x=2, y=-2\sqrt{3}$. Тоді

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4,$$

Оскільки, $x>0, y<0$, то

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Показникова форма z_3: $z_3 = 4e^{-\frac{\pi i}{3}}$.

Відповідь: а) $-2+2i$, б) $4-6i$, в) $5+10i$, г) $-\dfrac{11}{25}+\dfrac{2}{25}i$,

д) $5\cdot\left(-\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\right)\right)$, е) $4e^{-\frac{\pi i}{3}}$.

Задача 2. Записати комплексне число $z=\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$ в алгебраїчній формі.

Розв`язання. Записуємо в алгебраїчній формі чисельник і знаменник дробу:

$i^5+2=i\cdot\left(i^2\right)^2+2=i+2=2+i$, $\quad i^{19}+1=i\cdot\left(i^2\right)^9+1=-i+1=1-i$.

Тоді $\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}=\dfrac{2+i}{1-i}$. Представимо отримане комплексне число в алгебраїчній формі і застосуємо формулу піднесення до квадрату:

$$\frac{2+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{(2+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)}=\frac{2+2i+i+i^2}{1-i^2}=\frac{2+3i-1}{1+1}=\frac{1+3i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i,$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}i+\frac{9}{4}i^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}i-\frac{9}{4}=-2+\frac{3}{2}i.$$

Відповідь: $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2=-2+\dfrac{3}{2}i$.

Задача 3. Обчислити $\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^{60}$.

Розв`язання. Застосовуємо формулу (1.4). Маємо $z=-1+\sqrt{3}\,i$, де $n=60$, $x=-1,\ y=\sqrt{3}$. Знайдемо тригонометричну форму комплексного числа z. Знаходимо

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2.$$

Оскільки, $x<0$, $y>0$, то

$$\arg z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{-1}+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2}{3}\pi.$$

Тоді $z=2(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\,\sin\dfrac{2}{3}\pi)$.

Матимемо

$$\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^{60}=\left(2(\cos\frac{2}{3}\pi+i\,\sin\frac{2}{3}\pi)\right)^{60}=2^{60}(\cos(60\cdot\frac{2}{3}\pi)+i\sin\,(60\cdot\frac{2}{3}\pi))=$$

$$=2^{60}(\cos 40\pi+i\sin 40\pi)=2^{60}.$$

Відповідь: $\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^{60}=2^{60}$.

Задача 4. Знайти всі значення $\sqrt[4]{1-i}$

Розв`язання. Застосовуємо формулу (1.5). Маємо $z=1-i$, де $n=4$, $x=1,\ y=-1$. Знайдемо тригонометричну форму комплексного числа z. Знаходимо $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. Оскільки, $x>0,\ y<0$, то $\arg z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\operatorname{arctg}\dfrac{-1}{1}=-\operatorname{arctg}1=-\dfrac{\pi}{4}$. Маємо

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\,\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Тоді $$\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\,\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),\quad k=0,1,2,3.$$

Матимемо:

$k=0$ $\quad z_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\,(-\frac{\pi}{16})+i\,\sin\,(-\frac{\pi}{16})\right)=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}-i\,\sin\frac{\pi}{16}\right),$

$k=1$ $\quad z_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7}{16}\pi+i\,\sin\frac{7}{16}\pi\right),$

$k=2$ $\quad z_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15}{16}\pi+i\,\sin\frac{15}{16}\pi\right),$

$k=3$ $\quad z_4=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23}{16}\pi+i\,\sin\frac{23}{16}\pi\right).$

Відповідь: $\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\,\sin\dfrac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),\ k=0,1,2,3.$

1.2 Лінії та множини точок на комплексній площині

Рівняння $F(z)=0$ визначає лінію на комплексній площині, а нерівності $F(z)\le 0$ і $F(z)\ge 0$ – частину комплексної площини, точки якої задовольняють цим нерівностям. З урахуванням того, що: $z = x + iy$, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\bar{z} = x - iy$, $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$, $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $|z - z_0| = |(x - x_0) + i(y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $z^3 = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i\left(3x^2 y - y^3\right)$, рівняння $F(z)=0$ отримаємо, як рівняння лінії $F(x, y)=0$, а нерівності $F(z)\le 0$ і $F(z)\ge 0$ – область, яка складається із множин точок (x, y).

Задача 5. Визначити та побудувати лінію, задану рівнянням

$$\operatorname{Re}\left(z^2 + z\right) = 2\operatorname{Im} z .$$

Розв`язання. Враховуючи, що $z = x + iy$, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, запишемо задане рівняння у вигляді $F(x, y)=0$. Знайдемо $z^2 + z$:

$$z^2 + z = (x + iy)^2 + (x + iy) = x^2 - y^2 + 2xyi + x + iy = \left(x^2 + x - y^2\right) + $$
$$+ i(2xy + y).$$

Маємо $\operatorname{Re}\left(z^2 + z\right) = x^2 + x - y^2$. Тоді задане рівняння матиме вигляд:

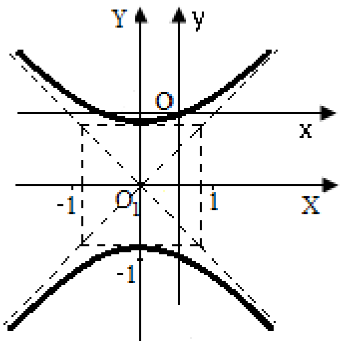
$$x^2 + x - y^2 = 2y \quad \text{або} \quad x^2 + x - y^2 - 2y = 0 .$$

Це рівняння гіперболи. Запишемо його в канонічному вигляді. Доповнимо до повних квадратів по x і y ліву частину рівняння:

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} - \left(y^2 + 2y + 1\right) + 1 = 0 \qquad \text{або}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y + 1)^2 = -\frac{3}{4} \Bigg| : \left(-\frac{3}{4}\right).$$

Маємо рівнобічну гіперболу $-\dfrac{(x + 0{,}5)^2}{0{,}75} + \dfrac{(y + 1)^2}{0{,}75} = 1$ з центром у точці $O_1(-0,5;\,-1)$ і півосями $a=b=\sqrt{0,75}\approx 0,866$. Зробимо рисунок.



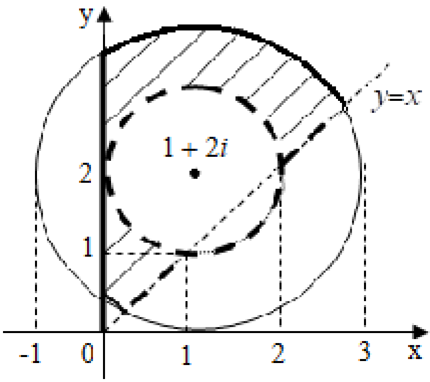
Задача 6. Яку множину точок на комплексній площині визначає нерівність

$$\begin{cases} 1<|z-1-2i|\le 2, \\ \dfrac{\pi}{4}<\arg z\le\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Розв`язання. Враховуючи, що $|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, знайдемо: $|z-1-2i|=|z-(1+2i)|$, де $x_0=1,\ y_0=2$. Тоді

$$|z-(1+2i)|=|(x-1)+i\,(y-2)|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\ .$$

Перша нерівність системи має вигляд: $1<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\le 2$ або $1<(x-1)^2+(y-2)^2\le 4$. На площині – це кільце, яке обмежене концентричними колами радіусів $R=1$ (не включаючи саме коло) та $R=2$ з центром у точці $z_0=1+2i$. Друга нерівність системи $\dfrac{\pi}{4}<\arg z\le\dfrac{\pi}{2}$ визначає частину площини між промінями, що виходять з точки O і утворюють з віссю Ox кут $\dfrac{\pi}{2}$ (пряма $x=0$ – ось Oy) і кут $\dfrac{\pi}{4}$ (пряма $y = x$, не включаючи її, яка утворює з віссю Ox кут $\dfrac{\pi}{4}$, $x > 0$). Зробимо рисунок.



1.3 Функції комплексної змінної

Означення. Множина D точок комплексної площини називається *областю*, якщо вона задовольняє умовам:

а) разом із кожною точкою з D цій множині належить і достатньо малий круг із центром у вказаній точці (властивість відкритості);

б) будь які дві точки множини D можна сполучити ламаною, що повністю складається із точок множини D (властивість зв'язності).

Означення. Точки, які задовольняють умову а) означення області, називаються точками області (***внутрішніми точками області***).

Означення. *Зовнішня точка області* D – це точка комплексної площини, яка не належить множині D разом із деяким кругом, що містить у собі цю точку.

Означення. *Межова точка області* D – це точка, що не належить цій області, але будь-який достатньо малий окіл указаної точки містить точки області D.

Означення. *Межа області* – це сукупність усіх межових точок області D.

Означення. *Замкнена область* – це множина точок, що складається з області D та її межі.

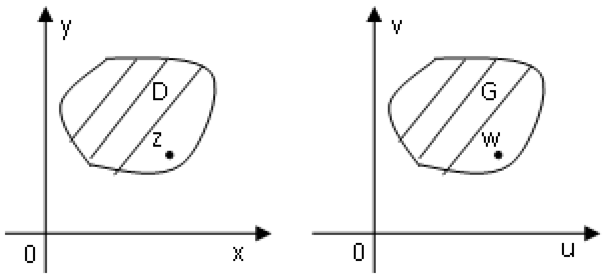
Означення. Область D називається *однозв'язною*, якщо будь-яка проста замкнена крива, що цілком належить D, може бути стягнена в точку за допомогою неперервної деформації без виведення з області D (в іншому випадку – область *багатозв'язна*).

З цього визначення випливає, що межа багатозв'язної області не може складатися з однієї замкнутої кривої.

Нехай D – однозв'язна область і L – її межа. Виберемо на L деяку точку і, починаючи з цієї точки, будемо обходити межу L.

Означення. *Додатним напрямом обходу межі області* вважається таким, при якому область залишається весь час зліва.

Нехай дано дві площини комплексних чисел $z = x + iy$ і $w = u + iv$.



Означення. Якщо кожному комплексному числу $z \in D$ за деяким законом поставлено у відповідність певне комплексне число $w \in G$, то кажуть, що на множині D задано ***однозначну функцію комплексної змінної***, яка відображає множину D у множину $G : w = f(z)$.

Означення. Точку w області G, що відповідає заданій точці z з області D, називають ***образом*** точки z, а функцію $w=f(z)$ – ***відображенням.***

Множина D називається ***множиною визначення функції*** $f(z)$, а множина G – ***множина значень цієї функції.***

Якщо кожному $z\in D$ відповідає кілька різних значень w, то функція $w=f(z)$ називається ***багатозначною.***

Функцію $f(z)$ можна записати у вигляді:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\ (x,y)\in D,$$

де $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$ – функції дійсних змінних x і y.

Основні елементарні функції комплексної змінної

1) *Дробово-раціональна* $w=\dfrac{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0}{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1 z+b_0}$,

де $n,\ m\in N$. Її окремими випадками є:

лінійна функція $w=az+b$, ($a,\ b$ – комплексні числа);

степенева функція $w=z^n,\ n\in N$;

дробово-лінійна $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, ($a,\ b,\ c,\ d$ – комплексні числа).

2) *Показникова функція* $w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+iy}=\mathrm{e}^x(\cos y+i\sin y)$,

де $\left|\mathrm{e}^z\right|=\mathrm{e}^x,\ \arg \mathrm{e}^z=y$.

Властивості: $\mathrm{e}^{z_1+z_2}=\mathrm{e}^{z_1}\cdot \mathrm{e}^{z_2}$, $\quad \dfrac{\mathrm{e}^{z_1}}{\mathrm{e}^{z_2}}=\mathrm{e}^{z_1}-\mathrm{e}^{z_2}$.

Показникова функція є періодичною з уявним періодом $2\pi i$:

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{z+i2\pi}=\mathrm{e}^z\cdot(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=\mathrm{e}^z.$$

3) *Логарифмічна функція* $w=\operatorname{Ln} z$ визначається як функція, обернена до показникової. Функція є багатозначною:

$$w=\operatorname{Ln} z=\ln z+i\ 2\pi k,\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

де $\ln z$ – головне значення $\mathrm{Ln}\, z$: $\ln z = \ln|z| + i\arg z$.

Властивості: $\mathrm{Ln}\,(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$, $\mathrm{Ln}\,\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$,

$$\mathrm{Ln}\, z^n = n\,\mathrm{Ln}\, z.$$

4) *Загальна степенева функція* $w = z^a = \mathrm{e}^{a\,\mathrm{Ln}\, z}$, де $a = \alpha + i\beta$ – будь-яке комплексне число. Функція є багатозначною. Головне значення:

$$z^a = \mathrm{e}^{a\ln z}.$$

5) *Загальна показникова функція*: $w = a^z = \mathrm{e}^{z\,\mathrm{Ln}\, a}$, $a \neq 0$ – будь-яке комплексне число. Функція є багатозначною. Головне значення:

$$a^z = \mathrm{e}^{z\ln a}.$$

6) *Тригонометричні функції*

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}, \quad \mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Функції $\sin z$, $\cos z$ періодичні з дійсним періодом 2π, а функції $\mathrm{tg}\, z$, $\mathrm{ctg}\, z$ – з дійсним періодом π. При довільних значеннях комплексних аргументів z_1 і z_2 справедливі формули тригонометричних функцій дійсного аргументу.

Модулі функцій $\sin z$, $\cos z$ можуть бути більше 1.

7) *Гіперболічні функції*

$$\mathrm{sh}\, z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \mathrm{ch}\, z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}, \quad \mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}.$$

Функції $\mathrm{sh}\, z$, $\mathrm{ch}\, z$ періодичні з уявним періодом $2\pi i$ а функції $\mathrm{th}\, z$, $\mathrm{cth}\, z$ – з уявним періодом πi.

Співвідношення між тригонометричними та гіперболічними функціями

$$\sin z = -i\,\mathrm{sh}\, iz \qquad \mathrm{sh}\, z = -i\sin iz$$

$$\cos z = \mathrm{ch}\, iz \qquad \mathrm{ch}\, z = \cos iz$$

$$\mathrm{tg}\, z = -i\,\mathrm{th}\, iz \qquad \mathrm{th}\, z = -i\,\mathrm{tg}\, iz$$

$$\mathrm{ctg}\, z = i\,\mathrm{cth}\, iz \qquad \mathrm{cth}\, z = i\,\mathrm{ctg}\, iz$$

8) *Обернені тригонометричні функції*

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\ \operatorname{Ln}\left(i\,z + \sqrt{1-z^2}\right), \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\ \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}, \qquad \operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+i}{z-i}.$$

Всі функції є багатозначними.

Задача 7. Знайти: а) $\sin i$, б) $\operatorname{ch}(2-5i)$, в) $\operatorname{Ln}(-1-i)$, г) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^i$.

Розв`язання.

а) $\sin i$. За означенням $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Маємо $z = i$. Тоді

$$\sin i = \frac{e^{i\cdot i} - e^{-i\cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = -\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{1} - e^{-1}}{2} = -\frac{1}{i}\cdot \operatorname{sh} 1 = i\ \operatorname{sh} 1.$$

Можна було застосувати співвідношення $\sin z = -i\operatorname{sh} iz$. Враховуючи, що $z = i$, матимемо

$$\sin i = -i\operatorname{sh}(i\cdot i) = -i\operatorname{sh}\left(i^2\right) = -i\operatorname{sh}(-1) = i\operatorname{sh} 1.$$

б) $\operatorname{ch}(2-5i)$. За означенням $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$. Маємо $z = 2-5i$. Тоді

$$\operatorname{ch}(2-5i) = \frac{e^{2-5i} + e^{-2+5i}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(e^2(\cos(-5) + i\ \sin(-5)) + e^2(\cos 5 + i\ \sin 5)\right) =$$

$$= \frac{e^2}{2}(\cos 5 - i\sin 5 + \cos 5 + i\sin 5) = \frac{e^2}{2}\cdot 2\cos 5 = e^2\cdot\cos 5.$$

в) $\operatorname{Ln}(-1-i)$. За означенням $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Маємо $z = -1-i \Rightarrow x = -1,\ y = -1$. Знайдемо

$$|z| = |-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \text{ і } \ln|z| = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Оскільки, $x < 0,\ y < 0 \Rightarrow \arg z = -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{-1}{-1} =$

$$= -\pi + \operatorname{arctg} 1 = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi.$$

$$\mathrm{Ln}\left(-1-i\right)=\frac{1}{2}\ln 2+i\left(-\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right)=\frac{1}{2}\ln 2+\pi i\left(-\frac{3}{4}+2k\right)\left(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\right)$$

г) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{i}$. За означенням $z^{a}=\mathrm{e}^{a\ln z}$. Маємо: $z=1-\sqrt{3},\ a=i$, $x=1,\ y=-\sqrt{3}$. Знайдемо

$$|\,z\,|=\left|1-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2 \text{ і } \ln|z|=\ln 2.$$

Оскільки, $x>0,\ y<0 \Rightarrow \arg z=\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}=\mathrm{arctg}\,\dfrac{-\sqrt{3}}{1}=-\mathrm{arctg}\,\sqrt{3}=-\dfrac{\pi}{3}$.

Тоді $\mathrm{Ln}\left(1-i\sqrt{3}\right)=\ln 2+i\left(-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)\ \left(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\right)$.

Підставляємо знайдене значення в формулу:

$$\left(1-\sqrt{3}\right)^{i}=\mathrm{e}^{i\,\mathrm{Ln}\left(1-i\sqrt{3}\right)}=\mathrm{e}^{i\left(\ln 2+i\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right)}=\mathrm{e}^{i\ln 2-\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}-2k\pi+i\ln 2}=$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}-2k\pi}\left(\cos\ln 2+i\sin\ln 2\right)\ \left(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\right).$$

Відповідь: а) $\sin i=i\,\mathrm{sh}\,1$, б) $\mathrm{ch}\left(2-5i\right)=\mathrm{e}^{2}\cdot\cos 5$,

в) $\mathrm{Ln}\left(-1-i\right)=\dfrac{1}{2}\ln 2+\pi i\left(-\dfrac{3}{4}+2k\right)\left(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\right)$,

г) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{i}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}-2k\pi}\left(\cos\ln 2+i\sin\ln 2\right)\ \left(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\right)$.

1.4 Диференціювання функцій комплексної змінної. Аналітичні функції

Нехай функція $w=f(z)$ визначена в деякому околі точки $z_0=x_0+y_0$, крім, можливо, самої точки z_0 .

Означення. Якщо існують границі $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u\left(x,y\right)=u_0$ і $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v\left(x,y\right)=v_0$, то функція $f(z)=u\left(x,y\right)+iv(x,y)$ має *границю при* $z\to z_0$, яка дорівнює $\lim\limits_{z\to z_0}f\left(z\right)=u_0+i\,v_0=w_0$.

Дане визначення зводиться до звичайного визначення границі функції дійсних аргументів, тому основні властивості граничного переходу для функцій дійсних змінних справедливі і для функцій комплексної змінної.

Означення. Функція $f(z)$ називається *неперервною у точці* z_0, якщо вона визначена у деякому околі точки z_0 (включаючи саму точку z_0) і $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Сума, різниця, добуток і частка неперервних у точці z_0 комплексних функцій $f(z)$ і $g(z)$ є неперервними функціями в цій точці. (У випадку частки припускаємо, що $g(z) \neq 0$).

Означення. Функція $f(z)$ називається *неперервною в області* D, якщо вона є неперервною в кожній точці цієї області.

Основні поняття і формули аналізу функцій дійсної змінної переносяться на випадок функції комплексної змінної.

Нехай функція $w = f(z)$ визначена в деякій області D і точки $z, z + \Delta z \in D$.

Означення. *Похідною функції* $w = f(z)$ *комплексної змінної* називається границя $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{dw}{dz}$, при умові, що $\Delta z \to 0$ довільним чином.

Означення. Функція $w = f(z)$ називається ***диференційовною*** в точці, якщо існує похідна в цій точці.

Означення. Функція $w = f(z)$ називається *аналітичною в даній точці* z, якщо вона диференційовна як в самій точці z, так і в деякому її околі.

Означення. Функція $w = f(z)$, що однозначна та диференційовна в кожній точці області D, називається *аналітичною в області* D.

Точки області, де функція аналітична, називаються ***правильними***, а точки де вона не аналітична – ***особливими***.

Умови диференційовності функції $f(z)$ у термінах дійсних функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$ виражає наступна теорема.

Теорема. Нехай функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ визначена в деякому околі точки z, до того ж у цій точці функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ диференційовні. Тоді для диференційовності функції комплексної змінної $f(z)$ у точці z необхідно і достатньо, щоб у цій точці мали місце рівності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Рівності (1.6) називаються ***умовами Коші-Рімана***.

Для того, щоб функція $f(z)$ була аналітичною в області D, необхідно і достатньо існування в цій області неперервних частинних похідних від функцій $u(x,y)$ та $v(x,y)$, які задовольняють умови Коші-Рімана. При виконанні умов Коші-Рімана, похідну $f'(z)$ можна представити в таких рівнозначних формах:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.7}$$

Правила диференціювання функцій комплексної змінної і похідні від елементарних функцій комплексної змінної аналогічні, що й для функцій дійсного аргументу.

Якщо функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналітична в деякій області D, то дійсна частина $u(x,y)$ і уявна частина $v(x,y)$ цієї функції в області D є розв’язком рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ (\Delta u=0) \qquad \text{та} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\ (\Delta v=0).$$

Розв’язки рівняння Лапласа називаються *гармонічними функціями*. Внаслідок лінійності оператора Лапласа $\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ маємо $\Delta w = \Delta u + i\Delta v = 0$.

Дві гармонічні функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$, що задовольняють умовам Коші-Рімана, називаються *спряженими*.

Умови Коші-Рімана дають змогу відновити аналітичну функцію, знаючи її дійсну або уявну частину.

Задача 8. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по відомій дійсній або уявній частині: а) $u(x, y) = 2y + 3xy + 1$; б) $v(x, y) = 3x - 4xy + y$.

Розв`язання. а) $u(x, y) = 2y + 3xy + 1$. За умовою задачі шукана функція $f(z)$ є аналітичною і тому задовольняє умовам Коші-Рімана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. & (2) \end{cases}$$

Знайдемо $\frac{\partial u}{\partial x} = 3y$ і $\frac{\partial u}{\partial y} = 2 + 3x$. З (1) випливає, що $\frac{\partial v}{\partial y} = 3y$.

Інтегруємо співвідношення по y: $v(x, y) = \int 3y\,dy = \frac{3}{2}y^2 + \varphi(x)$.

Для знаходження функції $\varphi(x)$ диференціюємо останню рівність по x: $\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'(x)$. Враховуючи (2), матимемо $2 + 3x = -\varphi'(x)$ або $\varphi'(x) = -2 - 3x$. Інтегруємо отримане рівняння і знаходимо функцію $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = -2\int dx - 3\int x\,dx = -2x - \frac{3}{2}x^2 + C.$$

Уявна частина шуканої функції: $v(x, y) = \frac{3}{2}y^2 - 2x - \frac{3}{2}x^2 + C$.

Знаходимо функцію $f(z)$:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=2y+3xy+1+i\left(\frac{3}{2}y^2-2x-\frac{3}{2}x^2+C\right)=2y+3xy+$$

$$+1+\frac{3}{2}y^2i-2xi-\frac{3}{2}x^2i+Ci=1-2i(x+iy)-\frac{3}{2}i\left(x^2-y^2+2xyi\right)+Ci=$$

$$=1-2iz-\frac{3}{2}iz^2+Ci.$$

б) $v(x,y)=3x-4xy+y$. За умовою задачі шукана функція $f(z)$ є аналітичною за умовою задачі і тому задовольняє умовам Коші-Рімана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, & (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}. & (2) \end{cases}$$

Знайдемо $\dfrac{\partial v}{\partial x}=3-4y$ і $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-4x+1$. З (1) випливає, що $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-4x+1$. Інтегруємо співвідношення по x:

$$u(x,y)=-4\int xdx-\int dx=-2x^2+x+\varphi(y).$$

Для знаходження функції $\varphi(y)$ диференціюємо останню рівність по y: $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y)$. Враховуючи (2), матимемо $\varphi'(y)=-3+4y$. Інтегруємо отримане рівняння і знаходимо функцію $\varphi(y)$:

$$\varphi(y)=-3\int dy+4\int ydy=-3y+2y^2+C.$$

Дійсна частина шуканої функції $u(x,y)=-2x^2+x-3y+2y^2+C$.
Знаходимо функцію $f(z)$:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=-2x^2+x-3y+2y^2+C+i(3x-4xy+y)=$$

$$=-2x^2+x-3y+2y^2+3xi-4xyi+yi+C=(x+iy)-2\left(x^2-y^2+2xyi\right)+$$

$$+3i(x+iy)+C=z+3iz-2z^2+C.$$

Відповідь: а) $f(z)=1-2iz-\dfrac{3}{2}iz^2+Ci$, б) $f(z)=z+3iz-2z^2+C$.

Зауваження. При знаходженні $f(z)$ слід пам’ятати, що $\bar{z} = x - iy$, $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$, $z^3 = x^3 - y^3 i + 3x^2 yi - 3xy^2$, $\bar{z}^3 = x^3 + y^3 i - 3x^2 yi + 3xy^2$.

1.5 Інтегрування функції комплексної змінної

Нехай функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ визначена і неперервна в області D, а C – кусково-гладка замкнена або незамкнена крива, що належить D.

Обчислення інтеграла від $f(z)$ зводиться до обчислення двох криволінійних інтегралів другого роду:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy. \qquad (1.8)$$

Інтеграли від функції комплексної змінної мають властивості криволінійних інтегралів другого роду для функцій дійсного аргументу.

Якщо шлях інтегрування є променем, який виходить із точки z_0, або є колом з центром у точці z_0, то зручно робити заміну змінної виду: $z - z_0 = re^{i\varphi}$. В першому випадку $\varphi = \text{const}$ (кут нахилу до осі Ox), r – дійсна змінна інтегрування; в другому випадку $r = \text{const}$ (радіус кола), φ – дійсна змінна інтегрування.

Якщо крива C задана *параметричним рівнянням*

$$z(t) = x(t) + i\,y(t), \text{ де } \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_0 \le t \le t_1$$

і значення параметра $t = t_0$ і $t = t_1$ відповідають початковій та кінцевій точкам кривої C, то:

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \cdot z'(t)dt. \qquad (1.9)$$

Якщо $f(z)$ – аналітична функція в однозв'язній області D, що містить точки z_0 і z_1, то має місце ***формула Ньютона-Лейбніца***:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0), \tag{1.10}$$

де $F(z)$ – первісна функція для $f(z)$: $F'(z) = f(z)$.

Обчислення інтегралів від аналітичних функцій проводять із використанням таблиці основних інтегралів та методів інтегрування функцій дійсного аргументу.

Теорема Коші. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв′язній області D, а C – будь-яка або кусково-гладка замкнена лінія, що належить області D, то

$$\oint_C f(z)dz = 0\,. \tag{1.11}$$

Інтегральна теорема Коші справджується і у випадку замкненого контуру, який є границею області аналітичності.

Нехай $f(z)$ – аналітична функція в замкненій однозв`язній області D, обмеженій кусково-гладким замкненим контуром C і на самому контурі, то значення функції $f(z)$ в будь-якій точці $z_0 \in D$ можна обчислити за ***інтегральною формулою Коші***:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \tag{1.12}$$

(при обході контуру C область D залишається зліва).

Формула Коші зв'язує значення аналітичної функції $f(z)$ у довільній точці області зі значенням цієї функції на межі області.

Для функцій комплексної змінної справедлива теорема.

Теорема. Нехай функція $f(z)$ аналітична в області D і неперервна в замкненій області D. Тоді в кожній внутрішній точці $z_0 \in D$ функція $f(z)$ має похідні всіх порядків, причому похідну n-го порядку обчислюють за формулою:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\,. \tag{1.13}$$

При застосуванні інтегральної формули Коші може бути корисною теорема.

Теорема. Нехай область D – багатозв’язна, обмежена додатно орієнтованим контуром C, та декількома внутрішніми додатно орієнтованими контурами $C_i\left(i=\overline{1,n}\right)$. Область $\overline{D}$ – внутрішня частина області D. Якщо функція $f(z)$ – аналітична в $\overline{D}$, то

$$\oint_C f(z)dz=\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i} f(z)dz\,. \tag{1.14}$$

Задача 9. Обчислити інтеграли: а) $\int\limits_{-i}^{2+i}\left(3z^2+2z\right)dz$, б) $\int\limits_C\left(2\overline{z}+\operatorname{Im} z^2\right)dz$, де C – парабола $y=2x^2$ від точки $z_1=0$ до $z_2=1+2i$, в) $\int\limits_C\frac{dz}{z-4}$, де C – еліпс: $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=2\sin t\end{cases}$.

Розв`язання. а) Підінтегральна функція $f(z)=3z^2+2z$ є аналітичною. Інтеграл від неї не залежить від лінії, яка сполучає точки $z_0=1-i$ та $z_1=2+i$. Справедлива формула Ньютона-Лейбніца (1.10). Для знаходження первісної застосовуємо табличні інтеграли.

$$\int\limits_{-i}^{2+i}(3z^2+2z)\,dz=(z^3+z^2)\Big|_{-i}^{2+i}=(2+i)^3+(2+i)^2-(-i)^3-(-i)^2=8+12i+$$
$$+6i^2+i^3+4+4i+i^2+i^3-i^2=12+16i+6i^2+2i^3=12+16i-6-2i=$$
$$=6+14i\,.$$

б) Підінтегральна функція $f(z)=2\overline{z}+\operatorname{Im} z^2$ не є аналітичною. Виділимо дійсну та уявну частини функції $f(z)$:

$$2\overline{z}+\operatorname{Im} z^2 = 2\left(x-iy\right)+\operatorname{Im}(x^2-y^2+i2xy)=2x-i2y+2xy.$$

Тоді $u(x,y)=2x(1+y)$, $v(x,y)=-2y$. За формулою (1.8) маємо

$$I=\int_L (2\overline{z}+\operatorname{Im} z^2)\,dz=\int_C 2x(1+y)dx+2ydy+i\int_C -2ydx+2x(1+y)dy.$$

Інтегруючи вздовж параболи $y=2x^2$ від $z_1=0$ до $z_2=1+2i$ матимемо $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$. З рівняння параболи знайдемо $x=\sqrt{\dfrac{y}{2}}$.

Інтеграл матиме вигляд:

$$I=\int_0^1 2x(1+2x^2)dx+\int_0^2 2ydy-i\int_0^1 2\cdot 2x^2dx+i\int_0^2 2\sqrt{\frac{y}{2}}(1+y)dy=$$

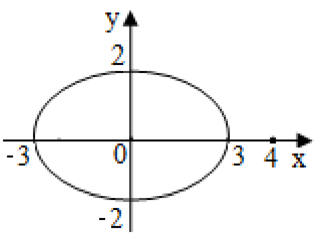
$$=\int_0^1 (2x+4x^3)\,dx+2\int_0^2 ydy-i\,4\int_0^1 x^2dx+i\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^2\left(\sqrt{y}+y\sqrt{y}\right)dy=(x^2+x^4)\Big|_0^1+$$

$$+y^2\Big|_0^2-i\cdot\frac{4x^3}{3}\Bigg|_0^1+i\cdot\sqrt{2}\left(\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_0^2=2+4-\frac{4}{3}i+2\sqrt{2}\,i\left(\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{2^{\frac{5}{2}}}{5}\right)=$$

$$=6-\frac{4}{3}i+2\sqrt{2}\,i\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)=6-\frac{4}{3}i+8i\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)=6-\frac{4}{3}i+\frac{88}{15}i=$$

$$=6+\frac{68}{15}i.$$

в) Підінтегральна функція $f(z)=\dfrac{1}{z-4}$ є аналітичною в області,



обмеженою цим еліпсом: $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$.

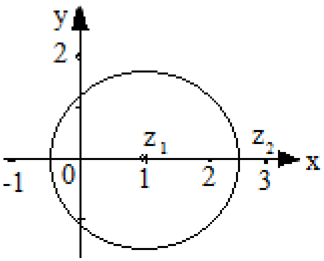
Оскільки особлива точка $z=4$ не належить внутрішній частині еліпса, то за формулою (1.11) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z-4}=0$.

Відповідь: а) $\int\limits_{-i}^{2+i}\left(3z^2+2z\right)dz=6+14i$, б) $\int\limits_C\left(2\bar{z}+\operatorname{Im}z^2\right)dz=6+\dfrac{68}{15}i$,

в) $\int\limits_C\dfrac{dz}{z-4}=0$.

Задача 10. Обчислити інтеграли за допомогою інтегральної формули Коші: а) $\oint\limits_{|z-1|=3/2}\dfrac{e^{2z}}{(z-1)(z-3)}dz$, б) $\oint\limits_{|z-i|=3}\dfrac{z^2+1}{(z-1)(z-2i)}dz$.

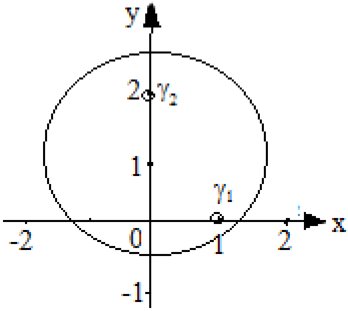
Розв`язання. а) Підінтегральна функція $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)(z-3)}$ невизначена



в точках $z_1=1$ і $z_2=3$. Область інтегрування обмежена колом радіуса $R=\dfrac{3}{2}$ з центром в точці $z_0=1$. Області інтегрування належить точка $z_1=1$. Функція $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{z-3}$ є аналітичною в крузі, який обмежений колом $|z-1|=\dfrac{3}{2}$, тому

$$\oint\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}}\frac{e^{2z}}{(z-1)(z-3)}dz=\oint\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}}\frac{\frac{e^{2z}}{z-3}}{z-1}dz=2\pi i\,\frac{e^{2z}}{(z-3)}\Big|_{z=1}=2\pi i\,\frac{e^2}{-2}=-\pi\, i\, e^2.$$

б) Підінтегральна функція $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-1)(z-2i)}$ невизначена в точках $z_1=1$, $z_2=2i$, які належать області інтегрування, що обмежена колом $|z-i|=3$. Обмежимо точки z_1 і z_2 відповідно колами γ_1 і γ_2, достатньо малих радіусів, таких, щоб кола не перетинались та цілком містились в крузі $|z-i|\le 3$. В тризв'язній



області, яка обмежена колами $|z-i|=3$, γ_1 і γ_2, підінтегральна функція всюди аналітична. За інтегральною теоремою Коші для багатозв'язної області, заданий інтеграл є сумою інтегралів по областях γ_1 і γ_2:

$$\oint_{|z-i|=3} \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2i)}dz = \oint_{\gamma_1} \frac{\frac{z^2+1}{z-2i}}{z-1}dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\frac{z^2+1}{z-1}}{z-2i}dz = 2\pi i\left(\left.\frac{z^2+1}{z-2i}\right|_{z=1} + \left.\frac{z^2+1}{z-1}\right|_{z=2i} \right) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1+1}{1-2i} + \frac{4i^2+1}{2i-1} \right) = 2\pi i\left(\frac{2}{1-2i} + \frac{-3}{2i-1} \right) = 2\pi i \frac{5}{1-2i} = \frac{10\pi i}{1-2i} = 2\pi i(1-2i).$$

Відповідь: а) $\oint\limits_{|z-1|=3/2} \dfrac{e^{2z}}{(z-1)(z-3)}dz = -\pi i e^2$,

б). $\oint\limits_{|z-i|=3} \dfrac{z^2+1}{(z-1)(z-2i)}dz = 2\pi i(1-2i)$.

1.6 Степеневі ряди функції комплексної змінної. Ряд Лорана

Означення. *Степеневим* рядом називається ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots, \quad (1.15)$$

де z – комплексна змінна; $c_0, c_1, \ldots, c_n$ – сталі комплексні числа (*коефіцієнти ряду*), z_0 – комплексне число (*центр ряду*).

Означення. *Точками збіжності ряду* називають ті значення z, в яких ряд збігається.

Множина точок збіжності утворює *область збіжності* степеневого ряду.

Означення. Область $|z - z_0| < R$ $(R > 0)$, у кожній точці якої степеневий ряд збігається, а зовні її – розбігається, називають його *кругом збіжності* з центром у точці z_0, а число R – *радіусом збіжності* цього ряду.

На межі круга ряд може як збігатися, так і розбігатися. Радіус збіжності степеневого ряду знаходять за формулами:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \qquad \text{або} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \tag{1.16}$$

якщо границі існують.

Якщо $R = 0$ ряд збігається в єдиній точці $z = z_0$, а при $R = \infty$ – ряд збігається в усій комплексній площині.

Степеневий ряд всередині круга збіжності збігається до аналітичної функції, яка є сумою ряду. Степеневий ряд в середині круга збіжності можна почлено інтегрувати і диференціювати довільне число раз, причому радіус збіжності одержаних рядів дорівнює радіусові збіжності початкового ряду.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в середині круга $|z - z_0| < R$, то вона може бути розвинена в цьому крузі в збіжний степеневий ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n , \tag{1.17}$$

причому коефіцієнти цього ряду визначаються однозначно за формулами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \ (n = 0,1,2,3,\cdots), \tag{1.18}$$

де C – довільний замкнутий контур у середині круга аналітичності, що містить точку z_0.

Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ називається *рядом Тейлора* функції $f(z)$.

Окремим випадком степеневого ряду (1.15) є ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots . \tag{1.19}$$

Будь-яку аналітичну в кільці $r < |z - z_0| < R$ $(0 \le r < R \le +\infty)$ функцію $f(z)$ можна єдиним чином розвинути у цьому кільці в ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n , \tag{1.20}$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, де C – довільне коло з центром у точці z_0 , яке лежить усередині заданого кільця.

Означення. Ряд (1.20) називають *Лорановим рядом* функції $f(z)$ з центром у точці z_0.

Ряд Лорана для функції $f(z)$ складається з двох частин:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} . \tag{1.21}$$

Ряд $f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ називається *правильною частиною* ряду Лорана і збігається в крузі $|z-z_0|<R$.

Ряд $f_2(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ називається *головною частиною* ряду Лорана і збігається при $|z-z_0|>r$.

Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ у середині кільця $r<|z-z_0|<R$ збігається до аналітичної функції $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$.

Рядом Лорана для функції $f(z)$ в околі точки $z=+\infty$ буде ряд $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, z^n$, який збігається в кільці $r<|\,z\,|<\infty$. У цьому випадку головною частиною ряду Лорана є ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\, z^n$, а правильною частиною ряду Лорана є ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n\, z^n$.

Задача 11. Розвинути функцію $f(z)=\ln(4+z)$ у ряд Тейлора по степенях z, використовуючи відомі формули.

Розв`язання. Застосуємо розвинення в ряд функції $\ln(1+z)$ (Таблиця 4.1):

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}\text{, де } |z|<1.$$

Перетворимо задану функцію наступним чином:

$$\ln(4+z)=\ln 4\left(1+\frac{z}{4}\right)=\ln 4+\ln\left(1+\frac{z}{4}\right)=\ln 4+\frac{z}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{4}\right)^3-\ldots$$

Маємо: $f(z)=\ln 4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{z^n}{n\cdot 4^n}$, де $\left|\frac{z}{4}\right|<1\Rightarrow|z|<4$.

Задача 12. Розвинути в ряд Лорана по степенях z функцію $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ в заданому кільці $2<|z|<3$.

Розв`язання. Функція є аналітичною в усіх точках, окрім $z=2$ та $z=3$. Розкладемо функцію на суму простих дробів:

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-3}=\frac{A(z-3)+B(z-2)}{(z-2)(z-3)}.$$

Коефіцієнти A і B знайдемо із тотожності: $1=A(z-3)+B(z-2)$.

$$\begin{array}{c|l} z=2 & -A=1 \\ z=3 & B=1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}.$$

Отже $f(z)=\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z-2}$. До кожного доданка $f(z)$ застосуємо формулу: $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z|<1$ (Таблиця 4.1). Матимемо

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+...\right)=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n, \left|\frac{z}{3}\right|<1, |z|<3,$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \left|\frac{1}{z}\right|<1, |z|>1.$$

Отже, $f(z)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$ в кільці $2<|z|<3$.

1.7 Класифікація нулів та ізольованих особливих точок функції комплексної змінної

Означення. Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D і $f(z_0)=0,\ z_0\in D$, то точка z_0 називається *нулем функції* $f(z)$.

Розвинення функції $f(z)$ в степеневий ряд в околі нуля функції (точка z_0) має вигляд:

$$f(z)=c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+...+c_n(z-z_0)^n+..., \; c_0=0. \quad (1.22)$$

Означення. Якщо у розвиненні в ряд функції $f(z)$ $c_1=c_2=...=c_{m-1}=0, c_m\neq 0,$ тобто

$$f(z)=c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+... \; (c_m\neq 0), \quad (1.23)$$

то точка z_0 називається *нулем m-го порядку* для функції $f(z)$.

Якщо $m=1$, то нуль називається *простим*, якщо ж $m>1$ – *кратним*.

Також справедливо, що точка z_0 є нулем функції $f(z)$ порядку m, якщо виконуються умови:

$$f(z_0)=0, \; f'(z_0)=0, \ldots, \; f^{(m-1)}(z_0)=0, \; f^{(m)}(z_0)\neq 0. \quad (1.24)$$

Теорема. Для того, щоб точка z_0 була нулем m-го порядку аналітичної функції $f(z)$ в точці z_0, необхідно і достатньо, щоб у деякому околі цієї точки виконувалась рівність

$$f(z)=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z), \quad (1.25)$$

де функція $\varphi(z)$ аналітична в точці z_0 і $\varphi(z_0)\neq 0$.

Точки, в яких порушуються умови аналітичності, називаються *особливими.*

Означення. Точку z_0 називають *ізольованою особливою точкою функції* $f(z)$, якщо існує проколений окіл точки z_0 – кільце $0<|z-z_0|<R$ у якому функція $f(z)$ однозначна й аналітична, а у самій точці z_0 функція не визначена, або не є однозначною і аналітичною.

Існують три типи ізольованих особливих точок: ***усувна особлива точка***, ***полюс*** та ***істотно особлива точка***. Класифікуються вони або за виглядом ряду Лорана: $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, або за поведінкою функції в околі особливої точки z_0.

Означення. Точка z_0 називається *усувною особливою точкою*, якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C$ $(C - \text{const})$ або, коли Лоранове розвинення функції $f(z)$ у проколеному околі цієї точки не містить головної частини:

$$f(z) = f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \,,\; c_{-n} = 0 \;\left(n = \overline{1,\infty}\right). \qquad (1.26)$$

Означення. Точка z_0 називається *полюсом*, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ або, коли Лоранове розвинення функції $f(z)$ у проколеному околі цієї точки містить скінчену кількість членів головної частини.

Означення. Точка z_0 є *полюс* m*-го порядку*, якщо $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, $\varphi(z_0) \neq 0$ або, коли Лоранове розвинення функції $f(z)$ у проколеному околі цієї точки містить m членів головної частини:

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{n=1}^{m} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \,,\; c_{-m} \neq 0, c_{-n} = 0 \;\left(n = \overline{m+1,\infty}\right). \qquad (1.27)$$

Якщо $m = 1$, то маємо *полюс першого порядку*, або *простий полюс*.

Зв`язок між нулем і полюсом

Якщо точка z_0 – полюс m-го порядку функції $f(z)$, то для функції $\dfrac{1}{f(z)}$ ця точка є нулем m -го порядку.

Означення. Точка z_0 називається *істотно особливою точкою*, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не існує (і не дорівнює нескінченності) або, коли Лоранове розвинення функції $f(z)$ у проколеному околі цієї точки містить нескінчену кількість членів головної частини:

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} . \tag{1.28}$$

1.8 Лишки та їх застосування

Означення. *Лишком функції* $f(z)$ в ізольованій особливій точці z_0 називається число, що позначається символами $res\, f(z_0)$, $res(f(z), z_0)$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$ і визначається рівністю:

$$res\ f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C f(z) dz , \tag{1.29}$$

де C – деякий замкнений контур, що містить всередині тільки одну особливу точку z_0 і лежить в області аналітичної функції $f(z)$.

Лишок функції дорівнює коефіцієнту c_{-1} при $(z - z_0)^{-1}$ в розвиненні функції $f(z)$ в околі точки z_0 в ряд Лорана:

$$res\ f(z_0) = c_{-1} . \tag{1.30}$$

Якщо точка z_0 – усувна особлива точка функції $f(z)$, то лишок дорівнює нулеві:

$$res\ f(z_0) = 0 . \tag{1.31}$$

Якщо точка z_0 – *полюс першого порядку* функції $f(z)$, то лишок обчислюється за формулою:

$$res\, f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[f(z) \cdot (z - z_0) \right]. \qquad (1.32)$$

Якщо точка z_0 – *полюс* m*- го порядку* функції $f(z)$, то лишок обчислюється за формулою:

$$res\, f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[f(z) \cdot (z - z_0)^m \right]. \qquad (1.33)$$

У випадку, коли функція $f(z)$ в околі точки z_0 зображується як частка двох аналітичних функцій $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, тобто точка z_0 – простий полюс функції $f(z)$, то

$$res\, f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (1.34)$$

Якщо точка z_0 – *істотно особлива точка*, то для знаходження лишку функції $f(z)$ знаходять коефіцієнт c_{-1} з розвинення цієї функції в ряд Лорана в околі точки z_0.

Якщо точка $z = \infty$ особлива точка функції $f(z)$ і ця функція аналітична в околі $|z| > r$, то

$$res\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = -c_{-1}. \qquad (1.35)$$

Нехай функція $f(z)$ аналітична на всій комплексній площині, окрім точок z_k $\left(k = \overline{1, N}\right)$, тоді

$$\sum_{k=1}^{N} res\, f(z_k) + res(\infty) = 0. \qquad (136)$$

При застосуванні лишків до обчислення контурних інтегралів використовують *основну теорему про лишки*.

Теорема. Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в деякій області D, окрім скінченої множини особливих точок z_k $\left(k=\overline{1,N}\right)$, а C – простий замкнений контур з цієї області (додатно зорієнтований) і охоплює точки z_k. Тоді справедлива рівність

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res\, f(z_k). \qquad (1.37)$$

Якщо дробово-раціональна функція $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ неперервна на всій дійсній осі $\left(Q_m(x)\neq 0\right)$ і $m \geq n+2$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res\, f(z_k) \qquad \left(\operatorname{Im} z_k > 0\right), \qquad (1.38)$$

де лишки обчислюють в особливих точках підінтегральної функції, які лежать у верхній півплощині.

Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в усіх точках півплощини $\left(\operatorname{Im} z \geq 0\right)$, окрім точок z_k $\left(k=\overline{1,N}\right)$ і задовольняє умові $|f(z)| \leq \dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}$, $M>0,\ \delta>0$, коли $|z| \geq R$ (R – достатньо велике), тоді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res\, f(z_k). \qquad (1.39)$$

Задача 13. З`ясувати характер особливих точок заданих функцій і знайти лишки в цих точках: а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z\left(z^2+1\right)}$, б) $f(z)=\dfrac{3z+1}{(z+1)^2}$.

Розв`язання. а) Функція $f(z)=\dfrac{\sin z}{z\left(z^2+1\right)}$ невизначена в точках $z_1=0$, $z_2=i$ і $z_3=-i$, оскільки $z^2+1=0 \Rightarrow z_{2,3}=\pm i$. Ці точки є особливими. Визначимо їх характер. Знайдемо границю функції при $z \to 0$. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z\left(z^2+1\right)}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1\neq 0$. Отже, $z_1=0$ – усувна особлива точка. Тому $res\, f(0)=0$. Перепишемо функцію $f(z)$ у вигляді: $f(z)=\dfrac{\dfrac{\sin z}{z(z+i)}}{z-i}$, де $\varphi(z)=\dfrac{\sin z}{z(z+i)}$ і $\varphi(i)\neq 0$. За означенням особлива точка $z_2=i$ – полюс першого порядку. Для функції $f(z)$, записаної у вигляді: $f(z)=\dfrac{\dfrac{\sin z}{z(z-i)}}{z+i}$, де $\varphi(z)=\dfrac{\sin z}{z(z-i)}$ і $\varphi(-i)\neq 0$, маємо, що особлива точка $z_3=-i$ – полюс першого порядку ($m=1$). Знайдемо лишки в точках $z_2=i$ і $z_3=-i$.

$$res\, f(z_2)=res\, f(i)=\lim_{z\to i}\left[\frac{\sin z}{z(z-i)\cdot(z+i)}(z-i)\right]=\lim_{z\to i}\frac{\sin z}{z(z+i)}=\frac{\sin i}{i\cdot 2i}=$$

$$=\frac{-i\,\mathrm{sh}\, i^2}{2i^2}=\frac{-\ \mathrm{sh}(-1)}{2i}=-\frac{i}{2}\,\mathrm{sh}1.$$

Використовуючи формули $\sin z=-i\,\mathrm{sh}\, iz$, $\mathrm{sh}\, z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$:

$$res\, f(z_3)=res\, f(i)=\lim_{z\to -i}\left[\frac{\sin z}{z(z-i)\cdot(z+i)}(z+i)\right]=\lim_{z\to -i}\frac{\sin z}{z(z-i)}=-\frac{\sin i}{i\cdot 2i}=$$

$$=\frac{\sin i}{2}=\frac{-i\,\mathrm{sh}\, i^2}{2}=\frac{-\ i\,\mathrm{sh}(-1)}{2}=\frac{i}{2}\,\mathrm{sh}1.$$

б) Функція $f(z)=\dfrac{3z+1}{(z+1)^2}$ невизначена в точці $z=-1$. Ця точка є особливою. Визначимо її характер. Розглянемо задану функцію як $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, $\varphi(z_0)\neq 0$. Тоді для даної функції $\varphi(z)=3z+1$ і

$\varphi(-1)\neq 0$. За означенням точка $z=-1$ є полюсом другого порядку ($m=2$). Знайдемо лишок у цій точці.

$$res\, f(-1)=\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[\frac{3z+1}{(z+1)^2}(z+1)^2\right]=\lim_{z\to -1}(3z+1)'=3.$$

Відповідь: а) $res\, f(0)=0$, $res\, f(i)=-\frac{i}{2}\,\text{sh}1$, $res\, f(-i)=\frac{i}{2}\,\text{sh}1$,

б) $res\, f(-1)=3$.

Задача 14. Обчислити інтеграли за допомогою лишків: а) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{e^z-1}{z^2-z}dz$, б) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{z-i}{(z+i)(z+1)^2}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}$.

Розв`язання. а) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{e^z-1}{z^2-z}dz$. Підінтегральна функція $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2-z}$ у колі $|z|\le 3$ має ізольовані особливі точки $z=0$ та $z=1$. Точка $z=0$ є усувною особливою точкою функції $f(z)$, оскільки $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z^2-z}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\left(e^z-1\right)'}{\left(z^2-z\right)'}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z}{2z-1}=-1\neq 0$, тому $res\, f(0)=0$. Точка $z=1$ – простий полюс. За формулою (1.32) маємо $res\, f(1)=\lim\limits_{z\to 1}\frac{\left(e^z-1\right)\cdot(z-1)}{z(z-1)}=e-1$. Отже

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{e^z-1}{z^2-z}dz=2\pi i\left(res\, f(0)+res\, f(1)\right)=2\pi i\,(e-1).$$

б) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{z-i}{(z+i)(z+1)^2}$. Підінтегральна функція $f(z)=\frac{z-i}{(z+i)(z+1)^2}$ у колі $|z|\le 2$ має ізольовані особливі точки $z=-i$ та $z=-1$. Точка $z=-i$ – простий полюс функції $f(z)$, тому

$$res\, f(-i)=\lim_{z\to -i}\frac{(z-i)\cdot(z+i)}{(z+i)(z+1)^2}=\frac{-i-i}{(1-i)^2}=\frac{-2i}{1-2i+i^2}=1.$$

Точка $z=-1$ – полюс другого порядку функції $f(z)$, тому

$$res\, f(-1)=\lim_{z\to -1}\left(\frac{(z-i)\cdot(z+1)^2}{(z+i)(z+1)^2}\right)'=\lim_{z\to -1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)'=\lim_{z\to -1}\frac{1\cdot(z+i)-(z-i)\cdot 1}{(z+i)^2}=$$

$=\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{2i}{(z+i)^2}=-1$. Отже,

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{z-i}{(z+i)(z+1)^2}=2\pi i\left(res\, f(-i)+res\, f(-1)\right)=2\pi i\,(1-1)=0\,.$$

в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}$. Введемо функцію $f(z)=\dfrac{z}{\left(z^2+4z+13\right)^2}$, яка при $z=x$ співпадає з підінтегральною функцією $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2}$. Функція $f(z)$ має дві особливі точки $z_1=-2+3i$ та $z_2=-2-3i$, які є полюсами другого порядку. У верхній півплощині лежить точка $z_1=-2+3i$. Знайдемо $res\, f(-2+3i)$.

$$res\, f(-2+3i)=\lim_{z\to -2+3i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+2-3i)^2(z+2+3i)^2}\cdot(z+2-3i)^2\right]=$$

$$=\lim_{z\to -2+3i}\frac{z+2+3i-2z}{(z+2+3i)^3}=\frac{4}{(6i)^3}=-\frac{1}{54i}=\frac{i}{54}\,.$$

Отже, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}=2\pi i\cdot\frac{i}{54}=-\frac{\pi}{27}$.

Відповідь: а) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3}\frac{e^z-1}{z^2-z}dz==2\pi i(e-1)$, б) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{z-i}{(z+i)(z+1)^2}=0$,

в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}=-\frac{\pi}{27}$.

2 ЕЛЕМЕНТИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

2.1 Перетворення Лапласа. Зображення та оригінал

Означення. *Функцією-оригіналом* називається комплексно значна функція $f(t)=u(t)+i\cdot v(t)$ дійсної змінної t, що задовольняє умовам:

1) при $t\geq 0$ функція $f(t)$ є кусково-неперервною, тобто на будь-якому скінченому проміжку осі t функція $f(t)$ має скінчене число точок розриву першого роду (Цю умову можна замінити вимогою локальної інтегровності функції $f(t)$, тобто інтегровністю на будь-якому кінцевому інтервалі $[0,b]$, $b>0$ осі Ot, зокрема, неперервністю на ньому);

2) $f(t)=0$ при $t<0$;

3) існують такі додатні числа M, s_0, що $|f(t)|\leq M\,e^{s_0 t}$ для всіх $t>0$, тобто функція $f(t)$ зростає не швидше, ніж деяка показникова функція.

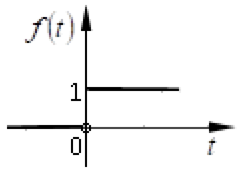
Зауваження. Умові 3) задовольняють всі обмежені функції (зокрема, $\sin t$, $\cos t$). У цьому випадку s_0 можна покласти рівним нулю: $|f(t)|\leq M$. Їй задовольняють всі степеневі функції t^n $(n>0)$, оскільки будь-яка з них зростає повільніше за показникову функцію e^t.

Означення. Число s_0, для якого умова 3) виконана при будь-якому $s=s_0+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ і не виконується при $s=s_0-\varepsilon$ (s_0 – точна нижня межа чисел s) називається *показником зростання функції* $f(t)$.

Функції, що задовольняють умовам 1)–3), утворюють *клас оригіналів* D.

Найпростішою функцією-оригіналом є одинична функція Хевісайда:

$$\eta(t)=\begin{cases}1, \ t\ge 0,\\ 0, \ t<0.\end{cases}$$



Якщо довільна функція $\varphi(t)$ задовольняє умовам 1) і 3), то функція $\varphi(t)\cdot\eta(t)=\begin{cases}\varphi(t), t\ge 0,\\ \ \ 0, t<0\end{cases}$ задовольняє всім умовам функції-оригіналу.

Перетворення Лапласа – це інтегральне перетворення, що зв'язує функцію $F(p)$ комплексної змінної (*зображення*) з функцією $f(t)$ дійсної змінної (*оригінал*).

Означення. *Зображенням функції-оригіналу* $f(t)\in D$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p=s+i\sigma$, яка визначається інтегралом (*інтегральним перетворенням*) Лапласа:

$$F(p)=L[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt\,. \tag{2.1}$$

Інтеграл існує і рівномірно збігається, якщо $\operatorname{Re} p=s>s_0$.

Співвідношення між оригіналом $f(t)$ і його зображенням $F(p)$ символічно записується:

$$f(t)\div F(p),\ \ f(t)\leftarrow F(p) \text{ або } L[f(t)]=F(p).$$

Оригінал та зображення однозначно визначаються один щодо одного: якщо відома функція-оригінал $f(t)$, то завжди можна дізнатися її зображення $F(p)$, і навпаки, якщо відомо зображення $F(p)$, то завжди можна отримати $f(t)$, застосувавши обернене перетворення Лапласа (формула Рімана-Мелліна):

$$f(t) = L^{-1}\left[F(p)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)\cdot e^{pt}\,dp, \qquad (2.2)$$

де шлях інтегрування $\operatorname{Re} p = s$ – будь-яка пряма, паралельна уявній осі та лежить правіше прямої $\operatorname{Re} p = s_0$.

Безпосереднє застосування формул (2.1), (2.2) часто громіздке, тому на практиці користуються методами, викладеними нижче.

Запис $f(t)$ надалі слід розуміти як $f(t)\cdot\eta(t)$.

2.2 Властивості перетворення Лапласа. Теореми

Теорема єдності. Якщо $F_1(p)$ і $F_2(p)$ – два зображення і вони співпадають, то будуть співпадати і їх оригінали в усіх точках їх неперервності.

Теорема про аналітичність зображення. Якщо $f_1(t)\in D$ і $f_1(t) \div F_1(p)$, то $F_1(p)$ – аналітична функція в області $\operatorname{Re} p > s_0$.

Лінійність. Якщо $f_i(t)\in D$, то для будь-яких комплексних чисел $c_i, i = 1,\ldots,n$ функція $f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t) \in D$ і справедлива рівність:

$$L\left[f(t)\right] = L\left[\sum_{i=1}^{n} c_i\, f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i\, L\left[f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i\, F_i(p)$$

або
$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, f_i(t) \div \sum_{i=1}^{n} c_i\, F_i(p). \qquad (2.3)$$

Справедливо і зворотне твердження. Якщо $F_i(p)$ – зображення $f_i(t)\in D$ $(i = 1,\ldots,n)$, то

$$L^{-1}\left[F(p)\right] = L^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i F_i(p)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i L^{-1}\left[F_i(p)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t). \qquad (2.4)$$

Диференціювання оригіналу. Якщо $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t) \in D$ і $f(t) \div F(p)$, то

$$\begin{aligned} & f'(t) \div pF(p) - f(0), \\ & f''(t) \div p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \\ & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ & f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Інтегрування оригіналу. Якщо $f(t) \in D$ і $f(t) \div F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}. \tag{2.6}$$

Диференціювання зображення (множення оригіналу на аргумент). Якщо $f(t) \in D$ і $f(t) \div F(p)$, то

$$t \cdot f(t) \div -\frac{dF(p)}{dp}. \tag{2.7}$$

***Наслідки*:**

$$t^n \cdot f(t) \div (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}, \tag{2.8}$$

$$t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{p^n} \div \frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}. \tag{2.9}$$

Інтегрування зображення (ділення оригіналу на аргумент). Якщо $\frac{f(t)}{t} \in D$ і $f(t) \div F(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(p) dp. \tag{2.10}$$

Терема подібності (про зміну масштабу). Якщо $f(t) \in D$ і $f(t) \div F(p)$, то для $\forall \alpha > 0$

$$f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \div \alpha F(\alpha p) \text{ та } f(a t) \div \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \tag{2.11}$$

Теорема запізнювання. Якщо $f(t) \in D$, $f(t) \div F(p)$ і $\alpha > 0$, то

$$f(t-\alpha) \div e^{-\alpha p} F(p). \tag{2.12}$$

Теорема випередження. Якщо $f(t) \in D$, $f(t) \div F(p)$ і $\alpha > 0$, то

$$f(t+\alpha) \div e^{\alpha p}\left[F(p) - \int_0^{\alpha} f(t) e^{-pt} dt\right]. \tag{2.13}$$

Теорема зсуву. Якщо $f(t) \in D$, $f(t) \div F(p)$, то

$$e^{-\alpha t} f(t) \div F(p+\alpha). \tag{2.14}$$

Означення. *Згорткою двох функцій* $f_1(t)$ і $f_2(t)$ називають вираз

$$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = f_1 * f_2 . \tag{2.15}$$

Теорема множення (теорема про згортку). Якщо $f_1(t), f_2(t) \in D$, $f_1(t) \div F_1(p), f_2(t) \div F_2(p)$, то

$$f_1 * f_2 \div F_1(p) \cdot F_2(p). \tag{2.16}$$

Наслідок (інтеграл Дюамеля).

$$\begin{aligned} p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \div f_1(t) \cdot f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2'(t-\tau) d\tau = \\ = f_2(t) \cdot f_1(0) + \int_0^t f_2(\tau) \cdot f_1'(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Задача 15. Визначити, які з наведених функцій є функціями-оригіналами: а) $f(t)=2\mathrm{e}^{5t}\cdot\eta(t)$, б) $f(t)=\dfrac{1}{t-3}\cdot\eta(t)$, в) $f(t)=\mathrm{e}^{3t}\sin 2t\cdot\eta(t)$.

Розв`язання. а) Для функції $f(t)=2\mathrm{e}^{5t}\cdot\eta(t)$ умова 1) виконується, оскільки інтеграл $\int\limits_{t_1}^{t_2}2\mathrm{e}^{5t}\,dt$ існує для будь-яких скінчених t_1 і t_2. Функція Хевісайда $\eta(t)$ при $t<0$ дорівнює нулю, отже, умова 2) також виконується. При $M=2$ і $s=5$ умова 3) також виконується.

Таким чином, $f(t)=2\mathrm{e}^{5t}\cdot\eta(t)$ є функцією-оригіналом.

б) Для функції $f(t)=\dfrac{1}{t-3}\cdot\eta(t)$ точка $t=3$ є точкою розриву другого роду, тому умова 1) не виконується. Отже, функція $f(t)=\dfrac{1}{t-3}\cdot\eta(t)$ не є функцією-оригіналом.

в) Для функції $f(t)=\mathrm{e}^{3t}\sin 2t\cdot\eta(t)$ умова 1) виконується, оскільки інтеграл $\int\limits_{t_1}^{t_2}\mathrm{e}^{3t}\sin 2t\,dt$ існує для будь-яких скінчених t_1 і t_2. Умова 2) також виконується в силу задання функції. Для будь-яких дійсних t $\left|\mathrm{e}^{3t}\sin 2t\right|\le M\cdot\mathrm{e}^{s_0t}$, оскільки в якості M можна взяти будь-яке число $M\ge1$, а $s_0=3$. Отже, умова 3) виконується. Таким чином, $f(t)=\mathrm{e}^{3t}\sin 2t\cdot\eta(t)$ є функцією-оригіналом.
Відповідь: а) так, б) ні, в) так.

Задача 16. Користуючись означенням, знайти зображення за Лапласом наведених функцій: а) $f(t)=t-7$, б) $f(t)=2t\mathrm{e}^{3t}$, в) $f(t)=\sin 5t$.

Розв'язання.

а) За означенням зображенням оригіналу $f(t)$ є функція $F(p)$, яка визначається співвідношенням (2.1).

Підставимо в це співвідношення задану функцію $f(t)=t-7$ та обчислимо отриманий інтеграл:

$$F(p)=\int_0^\infty (t-7)\mathrm{e}^{-pt}\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b (t-7)\mathrm{e}^{-pt}\,dt=\begin{bmatrix} u=t-7 & du=dt \\ dv=\mathrm{e}^{-pt}\,dt & v=-\dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{t-7}{p}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^b+\frac{1}{p}\int_0^b \mathrm{e}^{-pt}\,dt\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{t-7}{p}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^b-\frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^b\right)=$$

$$=-\frac{1}{p}\lim_{b\to\infty}\left((b-7)\mathrm{e}^{-pb}-(0-7)\mathrm{e}^{0}\right)-\frac{1}{p^2}\lim_{b\to\infty}\left(\mathrm{e}^{-pb}-\mathrm{e}^{0}\right)=\frac{1}{p^2}-\frac{7}{p}.$$

б) За означенням знайдемо функцію $F(p)$ за формулою (2.1). Підставимо в неї задану функцію $f(t)=2te^{3t}$ та обчислимо отриманий інтеграл:

$$F(p)=\int_0^\infty 2t\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{e}^{-pt}\,dt=2\lim_{b\to\infty}\int_0^b t\,\mathrm{e}^{-(p-3)t}\,dt=\begin{bmatrix} u=t & du=dt \\ dv=\mathrm{e}^{-(p-3)t}\,dt & v=-\dfrac{\mathrm{e}^{-(p-3)t}}{p-3}\end{bmatrix}=$$

$$=2\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{t\,\mathrm{e}^{-(p-3)t}}{p-3}\Big|_0^b+\frac{1}{p-3}\int_0^b \mathrm{e}^{-(p-3)t}\,dt\right)=2\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{t\,\mathrm{e}^{-(p-3)t}}{p-3}\Big|_0^b-\frac{\mathrm{e}^{-(p-3)t}}{(p-3)^2}\Big|_0^b\right)=$$

$$=\frac{2}{p-3}\lim_{b\to\infty}\left(b\mathrm{e}^{-(p-3)b}-0\cdot\mathrm{e}^{0}\right)-\frac{2}{(p-3)^2}\lim_{b\to\infty}\left(\mathrm{e}^{-(p-3)b}-\mathrm{e}^{0}\right)=\frac{2}{(p-3)^2}.$$

в) Представимо функцію $f(t)=\sin 5t$ у вигляді $\sin 5t=\dfrac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{5it}-\mathrm{e}^{-5it}\right)$. Підставимо її у формулу (2.1) та обчислимо отриманий інтеграл:

$$F(p)=\int_0^\infty \sin 5t\cdot\mathrm{e}^{-pt}\,dt=\int_0^\infty \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{5it}-\mathrm{e}^{-5it}\right)\mathrm{e}^{-pt}dt=\frac{1}{2i}\lim_{b\to\infty}\int_0^b\left(\mathrm{e}^{-(p-5i)t}-\mathrm{e}^{-(p+5i)t}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2i}\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-(p-5i)t}}{p-5i}\Bigg|_0^b+\frac{e^{-(p+5i)t}}{p+5i}\Bigg|_0^b\right)=\frac{1}{2i}\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{(0-1)}{p-5i}+\frac{(0-1)}{p+5i}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-5i}-\frac{1}{p+5i}\right)=\frac{p+5i-p+5i}{2i\left(p^2-(5i)^2\right)}=\frac{10i}{2i\left(p^2+25\right)}=\frac{5}{p^2+25}.$$

Відповідь: а) $F(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{7}{p}$, б) $F(p)=\frac{2}{(p-3)^2}$, в) $F(p)=\frac{5}{p^2+25}$.

Задача 17. Знайти зображення наведених функцій, користуючись теоремами про зображення та оригінали:

а) $\operatorname{sh}(t-3)$, б) $t\cos 3t$, в) $\frac{\operatorname{ch}2t-\operatorname{ch}t}{t}$, г) $e^{3t}\sin 2t$, д) $\int\limits_o^t \sin 2\tau d\tau$

Розв'язання. а) За таблицею 4.2 маємо $\operatorname{sh}t \div \frac{1}{p^2-1}$, то за теоремою запізнення маємо $\operatorname{sh}(t-3)\div e^{-3p}\cdot\frac{1}{p^2-1}$.

б) За таблицею 4.2 маємо $\cos 3t \div \frac{p}{p^2+3^2}=\frac{p}{p^2+9}$. За теоремою диференціювання зображення отримаємо:

$$-t\cos 3t \div \left(\frac{p}{p^2+9}\right)'=\frac{p^2+9-p\cdot 2p}{\left(p^2+9\right)^2}=\frac{p^2+9-p\cdot 2p}{\left(p^2+9\right)^2}=-\frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2}.$$

Отже, $t\cos 3t \div \frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2}$.

в) За таблицею 4.2 маємо $\operatorname{ch}2t \div \frac{p}{p^2-2^2}=\frac{p}{p^2-4}$ та $\operatorname{ch}t \div \frac{p}{p^2-1}$.

За теоремою лінійності $\operatorname{ch}2t-\operatorname{ch}t \div \frac{p}{p^2-4}-\frac{p}{p^2-1}$. За теоремою інтегрування зображення

$$\frac{\operatorname{ch}2t-\operatorname{ch}t}{t} \div \int_p^{\infty}\left(\frac{p}{p^2-4}-\frac{p}{p^2-1}\right)dp=\lim_{b\to\infty}\left(\int_p^{\infty}\frac{pdp}{p^2-4}-\int_p^{\infty}\frac{pdp}{p^2-1}\right)=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|p^2-4\right|-\frac{1}{2}\ln\left|p^2-1\right|\right)\Bigg|_p^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\ln\frac{\left|p^2-4\right|}{\left|p^2-1\right|}\right)\Bigg|_p^b=\frac{1}{2}\ln\frac{\left|p^2-1\right|}{\left|p^2-4\right|}.$$

г) За таблицею 4.2 маємо $\sin 2t \div \frac{2}{p^2+2^2}=\frac{2}{p^2+4}$. За теоремою зсуву $\mathrm{e}^{-\alpha t}f(t)\div F(p+a)$ отримаємо для заданої функції

$$\mathrm{e}^{3t}\sin 2t \div \frac{2}{(p-3)^2+4}=\frac{2}{p^2-6p+9+4}=\frac{2}{p^2-6p+13}.$$

д) За таблицею 4.2 маємо $\sin 2t \div \frac{2}{p^2+4}$. Тоді за теоремою інтегрування

$$\int_0^t \sin 2\tau d\tau \div \frac{1}{p}\cdot\frac{2}{p^2+4}=\frac{2}{p^3+4p}.$$

Відповідь: а) $\frac{\mathrm{e}^{-3p}}{p^2-1}$, б) $\frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2}$, в) $\frac{1}{2}\ln\frac{\left|p^2-1\right|}{\left|p^2-4\right|}$, г) $\frac{2}{p^2-6p+13}$,

д) $\frac{2}{p^3+4p}$.

Задача 18. Знайти зображення $F(p)$ функції $f(t)\cdot\eta(t)$, де $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда, за означенням (інтеграл Лапласа) та користуючись таблицею зображень, якщо функція $f(t)=3-te^t+\sin 2t$.

Розв`язання: Знайдемо зображення $F(p)$ за означенням, використовуючи формулу (2.3):

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt=\int_0^{\infty}\left(3-t\,\mathrm{e}^{t}+\sin 2t\right)\mathrm{e}^{-pt}\,dt=$$

$$=3\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}\,dt-\int_0^{\infty} t\cdot\mathrm{e}^{(1-p)t}\,dt+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sin 2t\,dt\,.$$

Обчислимо окремо кожний інтеграл:

а) $\int_0^{\infty} e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-pt}d(-pt)=-\frac{1}{p}\lim_{b\to\infty} e^{-pt}\Big|_0^b=\frac{1}{p}$;

б) $\int_0^{\infty} te^{(1-p)}dt=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{t}{1-p}e^{(1-p)t}\Big|_0^b-\frac{1}{1-p}\int_0^b e^{(1-p)t}dt\right]=$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{t}{1-p}e^{(1-p)t}\Big|_0^b-\frac{1}{(1-p)^2}e^{(1-p)t}\Big|_0^b=\frac{1}{(p-1)^2}\right];$$

в) $\int_0^{\infty} e^{-pt}\sin 2tdt=I$. Застосувавши інтегрування частинами два рази, отримаємо: $I=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p^2+4}\cdot e^{-pt}\left(p\sin 2t+2\cos 2t\right)\Big|_0^b\right)=\frac{2}{p^2+4}$.

Отже, $F(p)=\frac{3}{p}-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{2}{p^2+4}$.

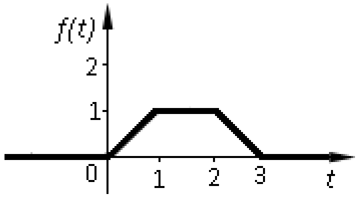
Знайдемо зображення для кожного доданку заданої функції $f(t)$ за таблицею 4.2:

$$3\cdot\eta(t)\div\frac{3}{p}\,,\ t\cdot e^{t}\eta(t)\div\frac{1}{(p-1)^2}\,,\ \sin 2t\cdot\eta(t)\div\frac{2}{p^2+4}\,.$$

Тоді $f(t)\div F(p)=\frac{3}{p}-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{2}{p^2+4}$.

Відповідь: $F(p)=\frac{3}{p}-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{2}{p^2+4}$.

Задача 19. Знайти зображення за Лапласом кусково-неперервної функції, заданої графічно:



Розв'язання. Графіком функції є ламана, яка складається з відрізків. Для запису рівнянь відрізків використовуємо рівняння прямої, що проходить через дві точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Тоді задану графічно функцію можна аналітично представити у вигляді системи:

$$f(t)=\begin{cases} t, & 0<t<1; \\ 1, & 1<t<2; \\ 3-t, & 2<t<3; \\ 0, & t>3. \end{cases}$$

Кожен з трьох відрізків запишемо через функцію Хевісайда в залежності від значення функції на даному відрізку та значень точок початку та кінця відрізків.

Отже, для першого відрізку маємо $t\cdot(\eta(t)-\eta(t-1))=f_1(t)$, для другого відрізку $1\cdot(\eta(t-1)-\eta(t-2))=f_2(t)$, для третього відрізку $(3-t)\cdot(\eta(t-2)-\eta(t-3))=f_3(t)$.

Тоді

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)=t\eta(t)-t\eta(t-1)+\eta(t-1)-\eta(t-2)+$$
$$-\eta(t-2)+3\eta(t-2)-3\eta(t-3)-t\eta(t-2)+t\eta(t-3)=t\eta(t)-(t-1)\eta(t-1)-$$
$$-(t-2)\eta(t-2)+(t-3)\eta(t-3).$$

Для кожного доданку функції $f(t)$ знайдемо зображення, застосовуючи таблицю 4.2:

$$F(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-p}-\frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-2p}+\frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-3p}=$$

$$=\frac{1}{p^2}\left(1-\mathrm{e}^{-p}-\mathrm{e}^{-2p}+\mathrm{e}^{-3p}\right).$$

Відповідь: $F(p)=\frac{1}{p^2}\left(1-\mathrm{e}^{-p}-\mathrm{e}^{-2p}+\mathrm{e}^{-3p}\right).$

2.3 Знаходження оригіналу по зображенню

Для знаходження оригіналу по зображенню у простих випадках необхідно скористатись таблицею зображень основних елементарних функцій.

Якщо $F(p)=\frac{Q(p)}{R(p)}$ – правильний раціональний дріб, то його розкладають на суму простих дробів і для кожного з них знаходять оригінали, застосовуючи таблицю 4.2.

В більш складних випадках користуються:

1) ***Формула Мелліна***. Нехай функція $F(p)$ є аналітичною в області $\operatorname{Re} p > s_0$ і $F(p)\to 0$, коли $|p|\to\infty$ рівномірно відносно аргументу p, та виконується умова $\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}|F(p)|dp < M$, тоді:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\,dt.$$

2) ***Перша теорема розвинення***. Нехай функція $F(p)$ є аналітичною в околі точки $p=\infty$ і $F(\infty)=0$. Розвинення функції $F(p)$ в ряд Лорана має вигляд: $F(p)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{p^{n+1}}$. Тоді її оригінал

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cdot\frac{t^n}{n!}. \qquad (2.18)$$

3) ***Друга теорема розвинення***. Нехай функція $F(p)$ в області $\operatorname{Re} p > s_0$ є аналітичною і $\lim\limits_{|p|\to\infty} F(p)=0$. Окрім того, $F(p)$ – дробово-раціональна функція, яка має полюси в точках $p_i \left(i=\overline{1,n}\right)$. Тоді її оригінал

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} \underset{p=p_i}{res}\left[F(p)\mathrm{e}^{pt}\right]. \tag{2.19}$$

Зокрема, якщо всі p_i – прості полюси, а $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ і функції $A(p)$ і $B(p)$ не мають спільних нулів, то

$$F(p) \div f(t)=\sum_{i=1}^{n} \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \cdot \mathrm{e}^{p_i t}\ . \tag{2.20}$$

Задача 20. Знайти оригінал $f(t)$ для заданого зображення $F(p)$:

а) $F(p)=\dfrac{p+2}{p^2-2p+10}$, б) $F(p)=\dfrac{2p^2+1}{(p-1)\left(p^2+1\right)}$.

Розв`язання.

а) $F(p)=\dfrac{p+2}{p^2-2p+10}$. Застосуємо елементарні перетворення для розкладання цього дробу на суму простих дробів. Виділимо повний квадрат у знаменнику дробу, а чисельник перетворимо згідно формул 11, 12 таблиці 4.2 і запишемо оригінали для кожного дробу згідно таблиці:

$$\frac{p+2}{p^2-2p+10}=\frac{p+2}{(p-1)^2+3^2}=\frac{p-1+3}{(p-1)^2+3^2}=\frac{p-1}{(p-1)^2+3^2}+\frac{3}{(p-1)^2+3^2}.$$

За таблицею знаходимо:

$$\frac{p-1}{(p-1)^2+3^2} \div \mathrm{e}^t\cos 3t\,, \qquad \frac{3}{(p-1)^2+3^2} \div \mathrm{e}^t \sin 2t\,.$$

Оригінал для заданої функції: $f(t)=\mathrm{e}^t\left(\cos 3t-\sin 3t\right)$.

б) $F(p)=\dfrac{2p^2+1}{(p-1)(p^2+1)}$. Розкладемо функцію $F(p)$ на суму простих дробів:

$$\frac{2p^2+1}{(p-1)(p^2+1)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+1}=\frac{A(p^2+1)+(Bp+c)(p-1)}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Коефіцієнти A, B, C знаходимо з тотожності:

$$2p^2+1=A(p^2+1)+(Bp+C)(p-1).$$

$$\begin{array}{r|l} p=1 & 3=2A\Rightarrow A=3/2 \\ p^2 & 2=A+B\Rightarrow B=1/2 \\ p & 0=C-B\Rightarrow C=1/2 \end{array}$$

Тоді: $F(p)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p+1}{p^2+1}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{p^2+1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$.

Для кожного доданку за таблицею знаходимо:

$$\frac{1}{p-1}\div \mathrm{e}^t,\qquad \frac{p}{p^2+1}\div\cos t,\qquad \frac{1}{p^2+1}\div\sin t.$$

Оригінал для заданої функції: $f(t)=\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^t+\dfrac{1}{2}\cos t+\dfrac{1}{2}\sin t$.

Відповідь: а) $f(t)=\mathrm{e}^t(\cos 3t-\sin 3t)$, б) $f(t)=\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^t+\dfrac{1}{2}\cos t+\dfrac{1}{2}\sin t$.

2.4 Розв`язання задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Маємо диференціальне рівняння другого порядку:
$y''+a_1y'+a_2y=f(t)$, де $a_1,a_2-\mathrm{const}$, $f(t)$ – функція-оригінал, $y=y(t)$ – невідома функція-оригінал. Необхідно знайти розв`язок рівняння, який задовольняє початковим умовам: $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_0'$.

Припустимо, що невідома функція-оригінал $y=y(t)$ має зображення $Y(p)$: $y(t)\div Y(p)$. Для функції $f(t)$ знайдемо зображення $F(p)$, одним з методів розглянутих вище. Тобто $f(t)\div F(p)$. Для знаходження зображень похідних функції $y(t)$ застосуємо теорему диференціювання оригіналу:

$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = PY(p) - y_0,$$

$$y''(t) \div p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - py_0 - y_0'.$$

Перейдемо від диференціального рівняння оригіналів до алгебраїчного рівняння відносно зображення $Y(p)$, підставивши в задане диференціальне рівняння знайдені зображення його доданків. Матимемо

$$p^2Y(p) - py_0 - y_0' + a_1\left(pY(p) - y_0\right) + a_2Y(p) = F(p).$$

Розв\`яжемо отримане алгебраїчне рівняння відносно $Y(p)$:

$$Y(p)\left(p^2 + a_1p + a_2\right) = F(p) + py_0 + y_0' + a_1y_0,$$

$$Y(p) = \frac{F(p) + py_0 + y_0' + a_1y_0}{p^2 + a_1p + a_2}.$$

Отримали операторний розв\`язок рівняння. По зображенню $Y(p)$ знаходимо оригінал $y(t)$, який є розв\`язком задачі Коші.

Аналогічно розв\`язують лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку та системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Задача 21. Користуючись методом операційного числення, знайти розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє вказаним початковим умовам: $y'' - 2y' - 3y = e^{3t}$, $\quad y(0) = y'(0) = 0$.

Розв'язання. Перейдемо від диференціального рівняння оригіналів до алгебраїчного рівняння відносно зображення $Y(p)$:

$$y(t) \div Y(p),\ e^{3t} \div \frac{1}{p-3},\ y'(t) \div PY(p),\ y''(t) \div p^2Y(p).$$

Тоді задане рівняння матиме вигляд $p^2Y - 2pY - 3Y = \dfrac{1}{p-3}$.

Розв'язуємо його відносно $Y(p)$. Матимемо $Y(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p-3)^2}$.

По зображенню $Y(p)$ знаходимо оригінал $y(t)$. Розкладемо отриманий дріб на елементарні дроби:

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)^2}=\frac{A}{(p-3)^2}+\frac{B}{(p-3)}+\frac{C}{(p+1)}.$$

Отже, $1=A(p+1)+B(p-3)(p+1)+C(p-3)^2$. Знайдемо коефіцієнти A, B і C.

$$p=-1:1=16C \Rightarrow C=\frac{1}{16},$$

$$p=3:1=4A \Rightarrow A=\frac{1}{4},$$

$$p^2:0=B+C \Rightarrow B=-\frac{1}{16}.$$

Таким чином, $Y(p)=\frac{1}{4(p-3)^2}-\frac{1}{16(p-3)}+\frac{1}{16(p+1)}$. Для кожного доданку за таблицею знаходимо оригінал. Тоді $y(t)=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{16}e^{-t}$.

Відповідь: $y(t)=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{16}e^{-t}$.

3 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Задані комплексні числа z_1, z_2, z_3. Знайти: а) $z_1 + z_2$, б) $z_1 - z_2$, в) $z_1 \cdot z_2$, г) $\frac{z_1}{z_2}$. Записати: д) z_2 в тригонометричній формі, е) z_3 у показниковій формі.

Варіант	z_1	z_2	z_3
1.	$3-2i$	$2+i$	$-2+2i$
2.	$-2-3i$	$1+3i$	$-1+\sqrt{3}i$
3.	$-2+5i$	$1-4i$	$-1-\sqrt{3}i$
4.	$3-5i$	$1-3i$	$-5+5i$
5.	$2-3i$	$4+3i$	$-2\sqrt{3}+2i$
6.	$1-2i$	$3-4i$	$-6-6i$
7.	$7-i$	$3+2i$	$-2+2\sqrt{3}i$
8.	$-3+4i$	$1-2i$	$-\sqrt{3}+i$
9.	$5+2i$	$2+3i$	$-2-2i$
10.	$3+i$	$3-2i$	$-2\sqrt{3}-2i$
11.	$-3+2i$	$2-3i$	$-3+3i$
12.	$2+3i$	$1+4i$	$-3+\sqrt{3}i$
13.	$-5+2i$	$4+i$	$-\sqrt{3}-3i$
14.	$5-3i$	$3-i$	$-4+4i$
15.	$-1+3i$	$5-2i$	$-1+i$
16.	$-4-3i$	$2+5i$	$-3\sqrt{3}+3i$

Завдання 2. Визначити та побудувати лінії, задані наступними рівняннями.

1.	$\operatorname{Re}(2z+3)=\lvert z\rvert^2$	2.	$\operatorname{Im}(z^2+z)=2-\operatorname{Im}\bar{z}$

3.	$\operatorname{Re}(1-z)=\lvert z\rvert^2$	4.	$\lvert z\rvert^2+2\operatorname{Im}z=0$
5.	$z\cdot\bar{z}=2\operatorname{Re}\bar{z}$	6.	$(z+1)(\bar{z}-1)=2i\cdot\operatorname{Im}\bar{z}$
7.	$\lvert z\rvert=3+\operatorname{Im}\bar{z}$	8.	$\operatorname{Re}z^2+z\cdot\bar{z}=\operatorname{Im}z$
9.	$\lvert z-2\rvert=\sqrt{1-8\operatorname{Re}z}$	10.	$\operatorname{Im}\left(\frac{2}{z}\right)=1$
11.	$2\lvert z\rvert^2-z\cdot\bar{z}=2\operatorname{Re}(2+z)$	12.	$\operatorname{Re}(5+4z)=\lvert z\rvert^2$
13.	$z\cdot\bar{z}+2\bar{z}=1-2i\operatorname{Im}z$	14.	$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}$
15.	$\operatorname{Re}(z+1)=\lvert z\rvert$	16.	$\operatorname{Re}\left(z^2-2z\right)=\lvert z\rvert^2$

Завдання 3. Яку множину точок на комплексній площині визначають нерівності?

1.	$\begin{cases}1<\lvert z-2\rvert\le 2\\ \frac{\pi}{6}\le\arg z<\frac{\pi}{3}\end{cases}$	2.	$\begin{cases}1<\lvert z-i\rvert<2\\ \frac{\pi}{4}<\arg z\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$
3.	$\begin{cases}1<\lvert z+2\rvert\le 2\\ \frac{2\pi}{3}\le\arg z<\frac{5\pi}{6}\end{cases}$	4.	$\begin{cases}1\le\lvert z+i\rvert<2\\ -\frac{\pi}{2}\le\arg z<-\frac{\pi}{4}\end{cases}$
5	$\begin{cases}1\le\lvert z-1\rvert<2\\ \frac{\pi}{4}<\arg z\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$	6.	$\begin{cases}1<\lvert z+2i\rvert\le 2\\ -\frac{\pi}{2}<\arg z\le-\frac{\pi}{3}\end{cases}$
7.	$\begin{cases}1<\lvert z+1\rvert\le 2\\ \frac{\pi}{2}\le\arg z<\frac{3\pi}{4}\end{cases}$	8.	$\begin{cases}1\le\lvert z-2i\rvert<2\\ \frac{\pi}{3}\le\arg z\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$
9.	$\begin{cases}2<\lvert z-2\rvert\le 3\\ -\frac{\pi}{2}\le\arg z<\frac{\pi}{4}\end{cases}$	10.	$\begin{cases}2\le\lvert z-i\rvert<3\\ \frac{\pi}{4}<\arg z\le\pi\end{cases}$

11.	$\begin{cases} 2 \le \lvert z+2 \rvert < 3 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z \le \frac{3\pi}{4} \end{cases}$	12.	$\begin{cases} 2 < \lvert z+i \rvert \le 3 \\ -\frac{\pi}{2} \le \arg z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$
13.	$\begin{cases} 2 < \lvert z-1 \rvert \le 3 \\ -\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$	14.	$\begin{cases} 2 \le \lvert z-2i \rvert < 3 \\ \frac{\pi}{3} < \arg z \le \pi \end{cases}$
15.	$\begin{cases} 2 \le \lvert z+1 \rvert < 3 \\ -\frac{\pi}{6} < \arg z \le \pi \end{cases}$	16.	$\begin{cases} 1 < \lvert z+3i \rvert \le 2 \\ -\frac{7\pi}{12} < \arg z < -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

Завдання 4. Знайти задані функції, для б) тільки головне значення

1.	а)	$\cos(3-i)$	б)	$i^{(1+i)}$
2.	а)	$\sin(1+i)$	б)	$(1+i)^i$
3.	а)	$\operatorname{ch}(3-i)$	б)	$(-1)^i$
4.	а)	$\operatorname{sh}(1+i)$	б)	$(-i)^{1+i}$
5.	а)	$\cos(3-2i)$	б)	$\left(\sqrt{3}-i\right)^i$
6.	а)	$\operatorname{sh}(3+i)$	б)	$i^{(2+i)}$
7.	а)	$\sin(2-i)$	б)	$(-1)^{1` - i}$
8.	а)	$\operatorname{ch}(2-3i)$	б)	i^{2i}
9.	а)	$\operatorname{sh}(3+2i)$	б)	$(-1+i)^i$
10.	а)	$\sin(2-4i)$	б)	$\left(1+\sqrt{3}i\right)^i$
11.	а)	$\cos(2+4i)$	б)	$(1-i)^i$
12.	а)	$\operatorname{ch}(4-i)$	б)	$(-1)^{(2-i)}$
13.	а)	$\operatorname{sh}(5-2i)$	б)	$i^{(-1-i)}$
14.	а)	$\sin(5-3i)$	б)	$(1-i)^{2i}$
15.	а)	$\cos(3-5i)$	б)	$(-1)^{(1-2i)}$
16.	а)	$\operatorname{ch}(5+3i)$	б)	$(-i)^{(2+i)}$

Завдання 5. Поновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по відомій дійсній або уявній частині.

1.	$u=2x^2-2y^2-y$	2.	$v=-3x^2y+y^3+2x$
3.	$u=-2xy-4x$	4.	$v=x^3-3xy^2+2y$
5.	$u=-2x^2+2y^2+3x$	6.	$v=-x^2+y^2+2x$
7.	$u=x^3-3xy^2+x$	8.	$v=3x^2y-y^3-x$
9.	$u=x^2-y^2+y$	10.	$v=-x^3+3xy^2+y$
11.	$u=-x^2+y^2+2x$	12.	$v=-3x^2y+y^3+2x+2$
13.	$u=-2xy-4x+3$	14.	$v=4xy-y$
15.	$u=x^3-3xy^2-2xy$	16.	$v=4xy+x$

Завдання 6. Обчислити інтеграли за допомогою інтегральної формули Коші.

1.	а)	$\int\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{z^2+4i}{z(z-2)}dz$	б)	$\int\limits_{\lvert z+i\rvert=4}\frac{e^{iz}\,dz}{(z+i)(z-2i)}$
2.	а)	$\int\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{2z-3}{z(z+2i)}dz$	б)	$\int\limits_{\lvert z+1\rvert=4}\frac{z^2+\cos z}{(z+i)(z-2i)}dz$
3.	а)	$\int\limits_{\lvert z\rvert=2}\frac{3z-5i}{z(z+3)}dz$	б)	$\int\limits_{\lvert z-2\rvert=4}\frac{e^z+1}{(z-2)(z-2i)}dz$
4.	а)	$\int\limits_{\lvert z\rvert=2}\frac{2z^2+3}{z(z-3i)}dz$	б)	$\int\limits_{\lvert z-i\rvert=3}\frac{\cos z}{(z-i)(z+1)}dz$
5.	а)	$\int\limits_{\lvert z\rvert=3}\frac{z^2-3i}{z(z+4)}dz$	б)	$\int\limits_{\lvert z-i\rvert=4}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2}dz}{(z-2i)(z-3i)}$
6.	а)	$\int\limits_{\lvert z\rvert=3}\frac{2z+4}{z(z-5i)}dz$	б)	$\int\limits_{\lvert z+1\rvert=4}\frac{\ln z\,dz}{(z+3i)(z-2i)}$

7.	а)	$\oint\limits_{\|z\|=1} \frac{3z+4i}{z(z-3)}dz$	б)	$\oint\limits_{\|z-2\|=4} \frac{1+\sin z}{(z+i)(z-4)}dz$
8.	а)	$\oint\limits_{\|z\|=1} \frac{3z^2-2}{z(z+3i)}dz$	б)	$\oint\limits_{\|z-i\|=3} \frac{\ln\frac{z}{2}dz}{(z+i)(z-3i)}$
9.	а)	$\oint\limits_{\|z\|=2} \frac{-z^2-2i}{z(z+5)}dz$	б)	$\oint\limits_{\|z+i\|=4} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2}dz}{(z-i)(z+1)}$
10.	а)	$\oint\limits_{\|z\|=2} \frac{3z-2}{z(z-3i)}dz$	б)	$\oint\limits_{\|z+1\|=4} \frac{\cos z\pi dz}{(z+1)(z+i)}$
11.	а)	$\oint\limits_{\|z\|=3} \frac{-3z+2i}{z(z-4)}dz$	б)	$\oint\limits_{\|z-2\|=4} \frac{e^{iz}dz}{(z+1)(z-3)}$
12.	а)	$\oint\limits_{\|z\|=3} \frac{-z^2+5}{z(z-4i)}dz$	б)	$\oint\limits_{\|z-i\|=3} \frac{\ln z dz}{(z-i)(z-3i)}$
13.	а)	$\oint\limits_{\|z\|=1} \frac{3z^2+i}{z(z+6)}dz$	б)	$\oint\limits_{\|z+i\|=4} \frac{(z^2+\cos z)dz}{(z+2i)(z-1)}$
14.	а)	$\oint\limits_{\|z\|=1} \frac{5z+2}{z(z+5i)}dz$	б)	$\oint\limits_{\|z+1\|=4} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi z}{4}}{(z+i)(z-3i)}dz$
15.	а)	$\oint\limits_{\|z\|=2} \frac{0{,}5z-2i}{z(z+3)}dz$	б)	$\oint\limits_{\|z-2\|=4} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2}dz}{(z+2i)(z-3i)}$
16.	а)	$\oint\limits_{\|z\|=2} \frac{0{,}5z^2-4}{z(z-6i)}dz$	б)	$\oint\limits_{\|z-i\|=3} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}dz}{(z-1)(z+2)}$

Завдання 7. Розвинути у ряд Тейлора функцію $f(z)$ по степенях z, використовуючи відомі формули (таблиця 4.1).

1.	$f(z)=\dfrac{z}{z^2+i}$	2.	$f(z)=\ln(2-z)$
3.	$f(z)=\cos^2\dfrac{iz}{2}$	4.	$f(z)=\sin^2\dfrac{iz}{2}$
5.	$f(z)=\ln(3+z)$	6.	$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{z}$
7.	$f(z)=\sin^2\dfrac{1}{z}$	8.	$f(z)=z^4\cos\dfrac{1}{z}$
9.	$f(z)=\dfrac{z}{z^3-i}$	10.	$f(z)=z^3\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$
11.	$f(z)=z\cdot\sin\dfrac{1}{z}$	12.	$f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+i}$
13.	$f(z)=z^2\cdot\cos\dfrac{1}{z}$	14.	$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{z^2}$
15.	$f(z)=\dfrac{\ln(2+z)}{z}$	16.	$f(z)=\cos^2 iz$

Завдання 8. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)$ по степенях z в заданому кільці.

1.	$f(z)=\dfrac{3z}{(z-1)(z+2)}$	$1<\|z\|<2$
2.	$f(z)=\dfrac{4-z}{(z-1)(z+2)}$	$1<\|z\|<2$
3.	$f(z)=\dfrac{3z}{(z+1)(z-2)}$	$1<\|z\|<2$
4.	$f(z)=\dfrac{z+4}{(z+1)(z-2)}$	$1<\|z\|<2$

5.	$f(z)=\dfrac{5z}{(z-2)(z+3)}$	$2<\lvert z\rvert<3$
6.	$f(z)=\dfrac{12-z}{(z-2)(z+3)}$	$2<\lvert z\rvert<3$
7.	$f(z)=\dfrac{5z}{(z+2)(z-3)}$	$2<\lvert z\rvert<3$
8.	$f(z)=\dfrac{z+12}{(z+2)(z-3)}$	$2<\lvert z\rvert<3$
9.	$f(z)=\dfrac{4z}{(z-1)(z+3)}$	$1<\lvert z\rvert<3$
10.	$f(z)=\dfrac{6-2z}{(z-1)(z+3)}$	$1<\lvert z\rvert<3$
11.	$f(z)=\dfrac{4z}{(z+1)(z-3)}$	$1<\lvert z\rvert<3$
12.	$f(z)=\dfrac{2z+6}{(z+1)(z-3)}$	$1<\lvert z\rvert<3$
13.	$f(z)=\dfrac{6z}{(z-2)(z+4)}$	$2<\lvert z\rvert<4$
14.	$f(z)=\dfrac{16-2z}{(z-2)(z+4)}$	$2<\lvert z\rvert<4$
15.	$f(z)=\dfrac{6z}{(z+2)(z-4)}$	$2<\lvert z\rvert<4$
16.	$f(z)=\dfrac{2z+16}{(z+2)(z-4)}$	$2<\lvert z\rvert<4$

Завдання 9. З’ясувати характер особливих точок заданих функцій і знайти лишки в цих точках.

1.	а)	$\dfrac{e^{z-1}-1}{z-1}$	б)	$\dfrac{z^2+2}{z^3+z^2}$	в)	$z\cdot\cos\dfrac{1}{z}$
2.	а)	$\dfrac{\ln(1-z)}{z}$	б)	$\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$	в)	$e^{\frac{1}{z+2}}$
3.	а)	$\dfrac{\sin(z-1)}{z-1}$	б)	$\dfrac{z}{(z+1)^2(z-1)}$	в)	$z^3 ch\dfrac{1}{z}$
4.	а)	$\dfrac{1-e^{z^2}}{z^2}$	б)	$\dfrac{z-2}{z^3+3z^2}$	в)	$z^2 sh\dfrac{1}{z}$
5.	а)	$\dfrac{1-\cos z}{z^2}$	б)	$\dfrac{z+1}{(z-2)^2(z-1)}$	в)	$z\cdot e^{\frac{1}{z^2}}$
6.	а)	$\dfrac{\ln(1+z^3)}{z^2}$	б)	$\dfrac{z+2}{z^3+4z^2}$	в)	$z^2\sin\dfrac{1}{z}$
7.	а)	$\dfrac{\sin^2 z}{z}$	б)	$\dfrac{z}{(z+1)\cdot(z+2)^2}$	в)	$(z-1)^3\cos\dfrac{1}{z-1}$
8.	а)	$\dfrac{sh(z+2)}{z+2}$	б)	$\dfrac{1}{(z-i)\cdot(z+1)^2}$	в)	$(z-2)^2 e^{-\frac{1}{z-2}}$
9.	а)	$\dfrac{\sin(2z+2)}{z+1}$	б)	$\dfrac{1}{z^3+2z^2}$	в)	$(z+i)^2\sin\dfrac{1}{z+i}$
10.	а)	$\dfrac{\ln(2+z)}{z+1}$	б)	$\dfrac{z+1}{(z-3)^2\cdot(z+2)}$	в)	$z^5\sin\dfrac{1}{z^2}$
11.	а)	$\dfrac{e^{2z+4}-1}{z+2}$	б)	$\dfrac{-2z+3}{(z-1)\cdot(z+2)^2}$	в)	$(z+2i)^3\cos\dfrac{1}{z+2i}$
12.	а)	$\dfrac{\sin(z+3)}{2z+6}$	б)	$\dfrac{z+1}{(z-2)^2\cdot(z+3)}$	в)	$(z+1)^2 sh\dfrac{1}{z+1}$

13.	а)	$\dfrac{\ln(1+2z)}{z}$	б)	$\dfrac{2z-1}{(z+2)^2\cdot(z-3)}$	в)	$e^{-\frac{1}{z+1}}$
14.	а)	$\dfrac{1-\cos 2z}{z^2}$	б)	$\dfrac{1}{(z-i)^2\cdot(z+1)}$	в)	$(z+2)^3 ch\dfrac{1}{(z+2)}$
15.	а)	$\dfrac{\ln(1-z^3)}{z^3}$	б)	$\dfrac{-2z+1}{(z+1)^2\cdot(z+3)}$	в)	$z^4\cdot\sin\dfrac{1}{z}$
16.	а)	$\dfrac{1-e^{z^3}}{z^3}$	б)	$\dfrac{3z+1}{(z-1)^2\cdot(z+3)}$	в)	$(z+i)^2\cdot e^{\frac{1}{z+i}}$

Завдання 10. Обчислити інтеграли за допомогою лишків.

№	а)	б)	в)
1.	$\oint\limits_{\lvert z\rvert=2}\dfrac{z^3dz}{(z^2+1)^2}$	$\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=3}(z-2i)^3\ \mathrm{ch}\,\dfrac{1}{z-2i}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^3}$
2.	$\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=3}\dfrac{zdz}{(z+1)^2\,(z-1)}$	$\oint\limits_{\lvert z\rvert=2}(z+i)^2\ \sin\,\dfrac{1}{z+i}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+4x+13)^2}$
3.	$\oint\limits_{\lvert z-3\rvert=3}\dfrac{zdz}{(z-4)^3\,(z-3)}$	$\oint\limits_{\lvert z+1\rvert=1}(z+1)^3\ \mathrm{e}^{\frac{1}{z+1}}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+2x+17)^2}$

№	а)	б)	в)
4.	$\oint\limits_{\lvert z\rvert=2}\frac{e^{z}\,dz}{z^4+z^3}$	$\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{1-\cos\frac{1}{z}}{z}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+16\right)^2}$
5.	$\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=4}\frac{z^2dz}{z^2+25}$	$\oint\limits_{\lvert z\rvert=2}\frac{e^{\frac{1}{z}}+1}{z}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+1\right)}$
6.	$\oint\limits_{\lvert z+2i\rvert=3}\frac{\cos z\,dz}{z^4+4iz^3}$	$\oint\limits_{\lvert z\rvert=2}(z-i)^3\cos\frac{1}{z-i}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4x+20\right)^2}$
7.	$\oint\limits_{\lvert z+2\rvert=3}\frac{(z+5)dz}{(z+2)^3(z-3)}$	$\oint\limits_{\lvert z+2\rvert=1}(z+2)^3\,e^{\frac{1}{z+2}}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2}$
8.	$\oint\limits_{\lvert z+1\rvert=3}\frac{\sin z\,dz}{z^4+2z^3+z^2}$	$\oint\limits_{\lvert z-i\rvert=2}z^3\operatorname{ch}\frac{1}{z}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}$
9.	$\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=3}\frac{e^{2z}\,dz}{(z-1)^2}$	$\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{1-\sin\frac{1}{z}}{z}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^2}$
10.	$\oint\limits_{\lvert z+1\rvert=2}\frac{(2z+1)dz}{(z+1)^3(z-5)}$	$\oint\limits_{\lvert z-2i\rvert=1}(z-2i)^2\sin\frac{1}{z-2i}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3}$
11.	$\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{1+\sin z}{z^4}dz$	$\oint\limits_{\lvert z+4i\rvert=2}(z+5i)e^{\frac{1}{(z+5i)^2}}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+8x+17\right)^2}$
12.	$\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=2}\frac{z^4dz}{(z-3)^3(z+2)}$	$\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=1}(z-1)^3\sin\frac{1}{z-1}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4x+5\right)^2}$
13.	$\oint\limits_{\lvert z-i\rvert=3}\frac{\sin\pi z\,dz}{z^2-z}$	$\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}(z+1)e^{\frac{1}{z+1}}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+9\right)^2\left(x^2+16\right)}$

№	а)	б)	в)
14.	$\oint\limits_{\lvert z\rvert=3}\frac{dz}{(z+1)^3(z^2-16)}$	$\oint\limits_{\lvert z+4i\rvert=1}(z+4i)^2\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{z+4i}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)^3}$
15.	$\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=2}\frac{e^{iz}\,dz}{(z-1)^3}$	$\oint\limits_{\lvert z-2i\rvert=1}(z-2i)^4\sin\frac{1}{(z-2i)^2}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^3}$
16.	$\oint\limits_{\lvert z+2i\rvert=3}\frac{\sin 2z\,dz}{z^4+4iz^3}$	$\oint\limits_{\lvert z\rvert=2}z^3\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{z}dz$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$

Завдання 11. Визначити, які з функцій $f(t)$ є функціями-оригіналами.

1.	а)	t^2	б)	2^t	в)	$\frac{1}{2t-5}$
2.	а)	$\frac{t^2}{t^2+1}$	б)	$e^{\frac{t}{t-2}}$	в)	$3t+2$
3.	а)	t^3	б)	e^{2t}	в)	$\frac{1}{t-3}$
4.	а)	$\frac{1}{t^2+2}$	б)	3^{2t}	в)	$\mathrm{tg}\,t$
5.	а)	$\mathrm{ctg}\,t$	б)	e^{-4t}	в)	$\cos 2t$
6.	а)	$\frac{1}{t^2+4}$	б)	e^{t^2}	в)	$\mathrm{tg}\,2t$
7.	а)	$e^{-t}\cos t$	б)	$2t-3$	в)	$\frac{4}{t-7}$
8.	а)	$\mathrm{ch}\,3t$	б)	3^{-t}	в)	$e^{\frac{2t}{t^2-4}}$
9.	а)	$\frac{3}{t^2+1}$	б)	4^t	в)	$\mathrm{ctg}(t+\pi)$

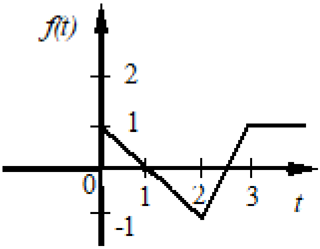
10.	а)	$\dfrac{1}{\sin t}$	б)	$2t^2$	в)	$\dfrac{1}{t+3}$
11.	а)	t^5	б)	5^{-t}	в)	$\dfrac{1}{3t-6}$
12.	а)	$\dfrac{1}{t+5}$	б)	e^{3t}	в)	$\dfrac{1}{\cos t}$
13.	а)	$\dfrac{t}{t+2}$	б)	$e^{\frac{1}{t-3}}$	в)	$5t-7$
14.	а)	$\operatorname{ctg} 3t$	б)	5^t	в)	$\dfrac{1}{2t^2+1}$
15.	а)	$\dfrac{t}{\cos t+1}$	б)	$3e^t$	в)	$\dfrac{1}{t+5}$
16.	а)	$\dfrac{t}{2t^2+1}$	б)	e^{t^3}	в)	$\dfrac{1}{\sin t+5}$

Завдання 12. Знайти зображення $F(p)$ функції $f(t)\cdot\eta(t)$, де $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда, користуючись таблицею зображень, якщо функція $f(t)$ задана.

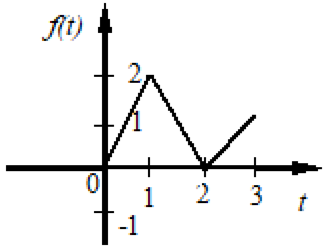
1.	$2t^2-3\sin^2 4t-5$	2.	$4e^t t^3+\cos^2 3t-7$
3.	$3t^3-t\sin 2t+2$	4.	$2e^{-4t}-\sin 2t\cdot\cos t-3$
5.	$4-t^5 e^{3t}+2\sin^2 t$	6.	$6te^{2t}-\cos^2 7t$
7.	$\sin 5t\cdot\sin 7t-5e^t t^2+3$	8.	$3t^2 e^{-2t}+\cos^2 2t-4$
9.	$\sin 3t\cdot\cos 4t+2te^{-3t}-2$	10.	$6t^3 e^{-7t}+\sin^2 3t$
11.	$\cos 3t\cdot\cos 6t-te^{-4t}+5$	12.	$2\sin^2 t-5t^3 e^{-2t}$
13.	$5t\sin 2t-8e^{-2t}+4$	14.	$3t^2 e^{-3t}-6\cos^2 t$
15.	$\sin 3t\cdot\sin 5t-2t^4 e^{-2t}+6$	16.	$2\sin^2 5t-4t^3 e^{-2t}$

Завдання 13. Знайти зображення за Лапласом для функції заданої графічно.

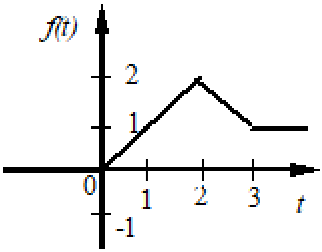
1.



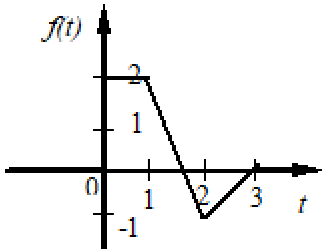
2.



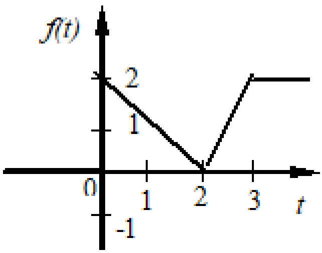
3.



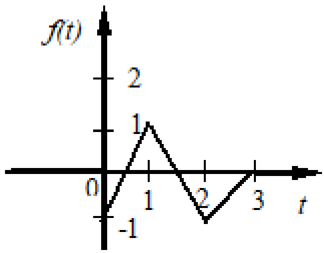
4.



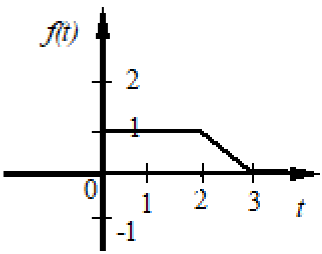
5.



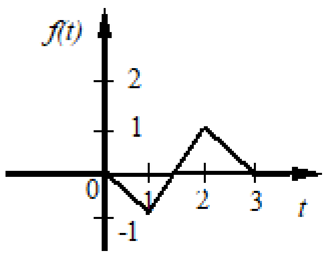
6.



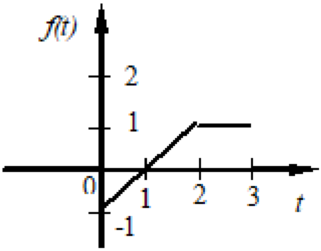
7.



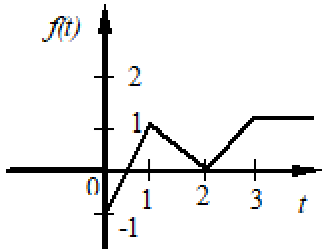
8.



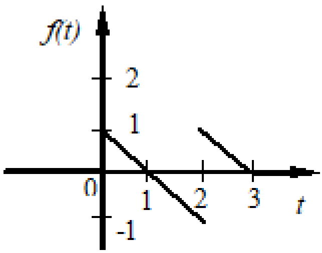
9.



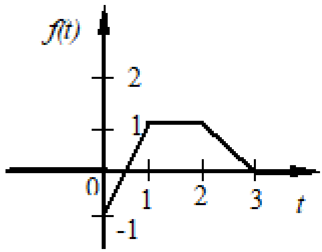
10.



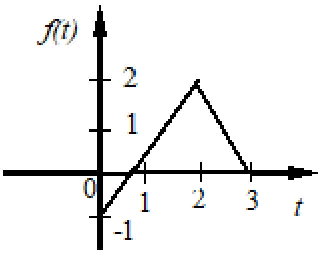
11.



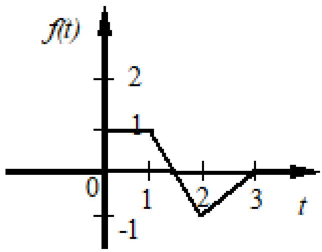
12.



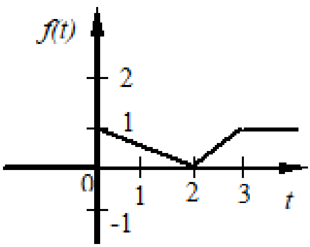
13.



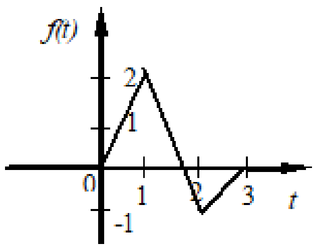
14.



15.



16.



Завдання 14. Знайти оригінал $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$.

1.	а)	$\dfrac{2p+3}{p^2+4p+13}$	б)	$\dfrac{2p^2+1}{(p^2+2)\cdot(p-1)}$
2.	а)	$\dfrac{-p+4}{p^2+6p+18}$	б)	$\dfrac{2p^2-2}{(p^2+2)\cdot(p+2)}$
3.	а)	$\dfrac{4p-3}{p^2-2p+5}$	б)	$\dfrac{3p^2+7}{(p^2+4)\cdot(p-1)}$
4.	а)	$\dfrac{1-3p}{p^2-8p+25}$	б)	$\dfrac{2p^2+1}{(p^2+2)\cdot(p+1)}$
5.	а)	$\dfrac{5p+1}{p^2+4p+53}$	б)	$\dfrac{3p^2+4}{(p^2+4)\cdot(p+2)}$
6.	а)	$\dfrac{3p+14}{p^2-10p+29}$	б)	$\dfrac{2p^2-2}{(p^2+2)\cdot(p-2)}$
7.	а)	$\dfrac{7-3p}{p^2-4p+20}$	б)	$\dfrac{3p^2+7}{(p^2+4)\cdot(p+1)}$
8.	а)	$\dfrac{p-16}{p^2-6p+34}$	б)	$\dfrac{3p^2-1}{(p^2+4)\cdot(p-3)}$
9.	а)	$\dfrac{8-2p}{p^2+2p+10}$	б)	$\dfrac{3p^2+6}{(p^2+5)\cdot(p+2)}$
10.	а)	$\dfrac{3p+1}{p^2-4p+13}$	б)	$\dfrac{2p^2}{(p^2+9)\cdot(p+3)}$
11.	а)	$\dfrac{2p-6}{p^2+8p+20}$	б)	$\dfrac{3p^2+4}{(p^2+4)\cdot(p-2)}$
12.	а)	$\dfrac{4-3p}{p^2-2p+65}$	б)	$\dfrac{2p^2-7}{(p^2+2)\cdot(p+3)}$

13.	а)	$\dfrac{2p+7}{p^2-10p+50}$	б)	$\dfrac{3p^2-1}{\left(p^2+4\right)\cdot\left(p+3\right)}$
14.	а)	$\dfrac{2-9p}{p^2-4p+29}$	б)	$\dfrac{3p^2+6}{\left(p^2+5\right)\cdot\left(p-2\right)}$
15.	а)	$\dfrac{-7p-3}{p^2-8p+32}$	б)	$\dfrac{2p^2-7}{\left(p^2+2\right)\cdot\left(p-3\right)}$
16.	а)	$\dfrac{3p-11}{p^2-12p+40}$	б)	$\dfrac{3p^2+6}{\left(p^2+5\right)\cdot\left(p-2\right)}$

Завдання 15. Користуючись методом операційного числення, знайти розв'язок ЛНДР, який задовольняє початковим умовам.

1.	$y''+y'=2t$, $y(0)=0,\quad y'(0)=-1$.	2.	$y''+2y'=-8\sin 2t$, $y(0)=2,\quad y'(0)=3$.
3.	$y''+y=6\mathrm{e}^{-t}$, $y(0)=3,\quad y'(0)=-2$.	4.	$y''+4y=16\mathrm{e}^{2t}$, $y(0)=2,\quad y'(0)=6$.
5.	$y''-2y'-3y=9t$, $y(0)=3,\quad y'(0)=0$.	6.	$y''-9y=10\sin t$, $y(0)=1,\quad y'(0)=2$.
7.	$y''+3y'=3$, $y(0)=0,\quad y'(0)=4$.	8.	$y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{t}$, $y(0)=1,\quad y'(0)=0$.
9.	$y''+9y=18\mathrm{e}^{3t}$, $y(0)=1,\quad y'(0)=0$.	10.	$y''-y=10\cos 3t$, $y(0)=1,\quad y'(0)=0$.
11.	$y''+y'=2t$, $y(0)=1,\quad y'(0)=-3$.	12.	$y''+2y'=-8\sin 2t$, $y(0)=2,\quad y'(0)=0$.
13.	$y''+y=6e^{-t}$, $y(0)=4,\quad y'(0)=-3$.	14.	$y''+4y=16\mathrm{e}^{2t}$, $y(0)=3,\quad y'(0)=4$.
15.	$y''-2y'-3y=9t$, $y(0)=3,\quad y'(0)=4$.	16.	$y''-9y=10\sin t$, $y(0)=1,\quad y'(0)=-4$.

4 ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

Таблиця 4.1 – *Розвинення деяких функцій в ряд Тейлора з центром у точці* $z_0 = 0$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \ |z| < \infty;;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \ |z| < \infty;$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ |z| < \infty;$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{z^n}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1;$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \ |z| < 1;$$

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + ...$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + ..., \ |z| < 1;$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \ |z| < 1;$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1;$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \ |z| < \infty ;$$

$$\operatorname{ch} z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \ |z| < \infty .$$

Таблиця 4.2 – *Основні оригінали і їх зображення*

№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$	№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1.	1	$\frac{1}{p}$	2.	t^n $(n = 1,2,\cdots)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3.	$t^{\alpha}(\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	4.	$e^{\lambda t}$ $(\lambda = a + bi)$	$\frac{1}{p-\lambda}$
5.	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	6.	$t^{\alpha} e^{\lambda t}$ $(\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$
7.	$\sin \omega t$ $(\omega > 0)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	8.	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
9.	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	10.	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
11.	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}$	12.	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}$
13.	$e^{\lambda t} \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2 - \omega^2}$	14.	$e^{\lambda t} \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 - \omega^2}$
15.	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$	16.	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
17.	$t \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$	18.	$t \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$

19.	$\sin(t-\tau)$ $(\tau>0)$	$\dfrac{e^{-\tau p}}{p^2+1}$	20.	$\cos(t-\tau)$	$\dfrac{p\, e^{-\tau p}}{p^2+1}$
21.	$t^n \sin \omega t$	$\dfrac{\operatorname{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}} n!$	22.	$t^n \cos \omega t$	$\dfrac{\operatorname{Re}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}} n!$
23.	$\dfrac{\sin \omega t - \omega t \cos \omega t}{2\omega^3} \div \dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$				

ЛІТЕРАТУРА

1. Алєксєєва А. В. Ряди. Теорія функції комплексної змінної. Операційне числення. Практикум. / А. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. – Київ, 2013. – 160 с.

2. Андрощук Л. В. Вища математика. Модуль 6. Ряди. Операційне числення : навч. посібник / Л. В. Андрощук, Є. Ю. Корнілович, Т. В. Лубенська, І. П. Шмаков. – К. : Книжкове вид-во НАУ, 2006. – 180 с.

3. Вища математика. Модуль 6. Ряди. Операційне числення: Навч. Посібник / Л. В. Андрощук, Є. Ю. Корнілович, Т. В. Лубенська, І. П. Шмаков. – К. : Книжкове вид-во НАУ, 2006. – 180 с.

4. Вища математика [Текст]: Збірник задач: Навч. посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навч. закладів / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав, В. І. Дев'ятко; За ред. : В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2001. – 478 с.

5. Вища математика в прикладах та задачах. Частина V: Навч. посібник / Т. М. Кадильникова, Л. П. Кагадій, І. Б. Кочеткова, Л. Ф. Сушко, О. Є. Запорожченко. – Дніпропетровськ : НМетАУ, 2011. – 88 с.

6. Дубовик В. П. Вища математика. Навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2001. – 648 с.

7. Краєвський В. О. Функції комплексної змінної : навчальний посібник / О. В. Краєвський. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 143 с.

8. Мартиненко М. А. Теорія функції комплексної змінної. Операційне числення : навчальний посібник / М. А. Мартиненко, І. І. Юрик. – Київ : Слово, 2013. – 296 с.

9. Методичні вказівки та індивідуальні завдання до виконання РГР (для студентів денної форми навчання) та КР (для студентів заочної форми навчання) з вищої математики (скорочена форма навчання). Розділи «Елементи теорії функції комплексної змінної», «Елементи операційного числення» /

Укл. : І. М. Килимник, Л. М. Онуфрієнко, Т. Г. Полякова. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2022. – 82 с.

10. Овчинников П. П. Вища математика : підручник. У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. – К. : Техніка, 2003. – 792 с.