МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

Методичні вказівки
до виконання розрахункових робіт для студентів денної форми навчання та контрольних робіт для студентів заочної форми навчання з вищої математики.
Розділи: «Подвійний інтеграл», «Потрійний інтеграл», «Криволінійні інтеграли», «Поверхневі інтеграли», «Елементи теорії поля»

2026

Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт для студентів денної форми навчання та контрольних робіт для студентів заочної форми навчання з вищої математики. Розділи: «Подвійний інтеграл», «Потрійний інтеграл», «Криволінійні інтеграли», «Поверхневі інтеграли», «Елементи теорії поля» / «Запорізька політехніка» нац. ун-т. Каф. математики ; уклад.: І. М. Килимник. Запоріжжя : «Запорізька політехніка», 2026. 87 с.

Укладач: Килимник І. М., канд. техн. наук, доцент

Рецензент: Антоненко Н. М., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., канд. техн. наук, доцент

Затверджено на засіданні
кафедри математики
Протокол № 6 від 11.03.2026 р.

Рекомендовано до видання
НМК машинобудівного факультету
Протокол № 7 від 09.04.2026 р.

ЗМІСТ

С.

1 ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

Подвійний інтеграл у декартових координатах записується

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy,$$

де $f(x, y)$ – підінтегральна функція двох змінних x та y,

D – область інтегрування.

Основні властивості подвійного інтеграла

а) $\iint\limits_D \left(f_1(x, y) \pm f_2(x, y)\right)dxdy = \iint\limits_D f_1(x, y)dxdy \pm \iint\limits_D f_2(x, y)dxdy$.

б) $\iint\limits_D k\, f(x, y)dxdy = k\iint\limits_D f(x, y)dxdy$,

де $k = \text{const}$.

в) Якщо область D розбита на дві області D_1 і D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

Ця властивість справедлива і у випадку, коли область інтегрування D розбита на скінченне число областей D_i, $i = \overline{1,n}$.

г) Якщо в замкненій області D функції $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ неперервні і задовольняють співвідношенню $f_1(x, y) \le f_2(x, y)$, то справедлива нерівність

$$\iint\limits_D f_1(x, y)dxdy \le \iint\limits_D f_2(x, y)dxdy.$$

д) $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$.

1.1 Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах

Подвійний інтеграл обчислюється за допомогою повторних (двократних) інтегралів.

Випадок І. Якщо область інтегрування D обмежена двома прямими $x=a$ та $x=b$ $(a<b)$ і двома неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$ та $y=\varphi_2(x)$, кожна з яких перетинається вертикальною прямою тільки в одній точці, причому $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, то область D називають правильною в напрямку осі Oy (рис. 1.1). В цьому випадку справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\ . \tag{1.1}$$

Випадок ІІ. Якщо область інтегрування D обмежена двома прямими $y=c$ та $y=d$ $(c<d)$ і двома неперервними кривими $x=\psi_1(y)$ і $x=\psi_2(y)$, кожна з яких перетинається горизонтальною прямою лише в одній точці, причому $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$, то область D називають правильною в напрямку осі Ox (рис. 1.2). В цьому випадку справедлива формула:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\,. \tag{1.2}$$

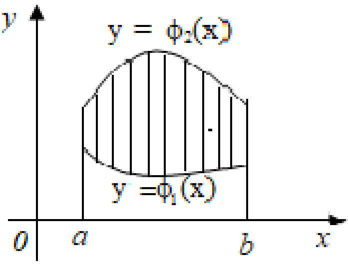

Рисунок 1.1

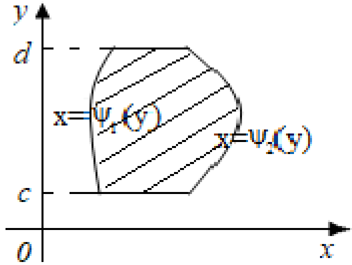

Рисунок 1.2

У випадку I інтеграл по y називають внутрішнім, а по x – зовнішнім; у випадку II – навпаки.

Спочатку знаходимо внутрішній інтеграл, враховуючи, що змінна інтегрування зовнішнього інтеграла є сталою, а потім знаходимо зовнішній інтеграл.

Розглянемо порядок дій запису подвійного інтеграла через повторний в прямокутній декартовій системі координат на площині:

а) побудуємо область інтегрування D;

б) з точок перетину ліній, що обмежують область D, опускаємо перпендикуляри на вісь Ox (або Oy). Кількість повторних інтегралів по області D буде на одиницю менше числа опущених перпендикулярів;

в) зміну змінної x розглядаємо зліва направо, а змінної y – знизу вгору. Межі інтегрування для зовнішнього інтеграла знаходимо з рівнянь перпендикулярів, що містять область інтегрування, Межі інтегрування внутрішнього інтеграла – з рівнянь ліній через які в область інтегрування «входимо» і «виходимо», розв’язуючи їх відносно змінної інтегрування

Зауваження. 1) Межі інтегрування зовнішнього інтегралу завжди сталі, а межі інтегрування внутрішнього інтегралу у загальному випадку є функціями зовнішньої змінної інтегрування.

2) Якщо область D є більш складною, ніж області у випадках I і II, то її необхідно розбити прямими, перпендикулярними до осі Ox (випадок I) або до осі Oy (випадок II) на такі частини, до яких можна

застосувати наведені вище формули (1.1) або (1.2) за змістом. Інтеграл по області D буде дорівнювати сумі інтегралів по кожній частині.

3) Якщо область D прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, то межі інтегрування внутрішнього інтегралу є сталими.

1.2 Подвійний інтеграл у полярних координатах

У деяких випадках подвійний інтеграл зручно обчислювати, перейшовши від декартової системи координат до полярної системи координат. Перехід здійснюється за формулами:

$$x = \rho\cos\varphi\,,\;\; y = \rho\sin\varphi\,,\;\; dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\varphi\,. \tag{1.3}$$

Маємо

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi\,. \tag{1.4}$$

Якщо область інтегрування D обмежена двома променями $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta\ (\alpha < \beta)$ і двома кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ і $\rho = \rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi))$ (рис. 1.3),

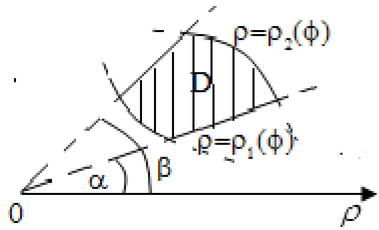

Рисунок 1.3

то подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\,. \qquad (1.5)$$

Інколи зручно зовнішній інтеграл знаходити по ρ, а внутрішній по φ:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \rho\, d\rho \int\limits_{\psi_1(\rho)}^{\psi_2(\rho)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) d\varphi\;. \qquad (1.6)$$

Задача 1. Знайти інтеграл $\iint\limits_{D} \left(x^3 - \sqrt{y}\right)dxdy$ по прямокутній області інтегрування D: ($0 \le x \le 1 ; 1 \le y \le 4$).

Розв'язання.

Оскільки область D є прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, то для знаходження інтегралу можна застосувати формулу (1.1) або (1.2).

$$I = \iint\limits_{D} \left(x^3 - \sqrt{y}\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^4 \left(x^3 - \sqrt{y}\right)dy = \int\limits_0^1 \left(x^3 y - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right)\Bigg|_1^4 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(4x^3 - \frac{2}{3}\cdot 8 - x^3 + \frac{2}{3} \right) dx = \int\limits_0^1 \left(3x^3 - \frac{14}{3} \right) dx = \left(3\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{14}{3}x \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{14}{3} = \frac{9-56}{12} = -\frac{47}{12}\,.$$

Відповідь: $I = -\dfrac{47}{12}$.

Задача 2. Знайти інтеграл $\iint\limits_D \frac{x+2}{y^2+4}dxdy$ по прямокутній області інтегрування D: ($1 \le x \le 3$; $0 \le y \le 2$).

Розв'язання.

Оскільки область D є прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, то для знаходження інтегралу можна застосувати формулу (1.1) або (1.2). Крім цього підінтегральна функція є добуток двох функцій, кожна з яких залежить від одного аргументу: $f_1(x) = x+2$ і $f_2(x) = \frac{1}{y^2+4}$. У цьому випадку повторний інтеграл можна записати як добуток двох визначених інтегралів по змінних x та y:

$$I = \iint\limits_D \frac{x+2}{y^2+4}dxdy = \int\limits_1^3 (x+2)dx \cdot \int\limits_0^2 \frac{1}{y^2+4}dy = \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_1^3 \cdot \frac{1}{2}arctg\frac{y}{2}\Bigg|_0^2 =$$

$$= \left(\frac{9}{2}+6-\frac{1}{2}-2\right)\cdot\frac{1}{2}(arctg1 - arctg0) = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \pi .$$

Відповідь: $I = \pi$.

Задача 3. Знайти інтеграл $\iint\limits_D \cos(3x-2y)dxdy$ по прямокутній області інтегрування D: ($0 \le x \le \frac{\pi}{3}$; $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$).

Розв'язання.

Оскільки область D є прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, то для знаходження інтегралу застосуємо формулу (1.1).

$$I = \iint\limits_D \cos(3x-2y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} dx \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x-2y)dy = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} dx \cdot \sin(3x-2y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin(3x-\pi) - \sin 3x)dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (-\sin 3x - \sin 3x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{3}(-1-1) = \frac{2}{3}.$$

Відповідь: $I = \dfrac{2}{3}$.

Задача 4. Записати подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ через повторний, якщо область D обмежена лініями: $\begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ y^2 = x \end{cases}$.

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис. 1.4). Вона обмежена прямою $x - y - 2 = 0$ і параболою $y^2 = x$. Знайдемо координати точок перетину цих ліній. Розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ y^2 = x \end{cases}$.

Дістанемо $\begin{cases} x = 4, \\ y = 2 \end{cases}$ та $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1 \end{cases}$. Розв'язками систем є координати точок $A(4;2)$ і $B(1;-1)$.

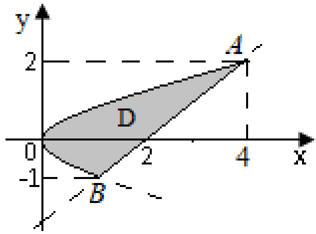

Рисунок 1.4

Матимемо три перпендикуляри, опущені на вісь Ox з точок A, B і O (кількість повторних інтегралів по області D буде два), а на вісь Oy – два, опущені з точок A і B (кількість повторних інтегралів по області D буде один). В цьому випадку застосуємо формулу (1.2).

$$I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{y^2}^{y+2} f(x, y)dx.$$

Відповідь: $I=\int\limits_{-1}^{2}dy\int\limits_{y^2}^{y+2}f(x,y)dx$.

Задача 5. Записати подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$ через повторний, якщо область D обмежена лініями: $\begin{cases} x+y-4=0, \\ y=x,\ x=0 \end{cases}$.

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис. 1.5). Область D – це трикутник OAB, який обмежений трьома прямими: $OA: x=0$, $AB: x+y-4=0$ і $OB: y=x$.

Знайдемо координати точок перетину цих прямих. Розв'яжемо системи рівнянь: $\begin{cases} y=x, \\ x+y-4=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x=0, \\ x+y-4=0 \end{cases}$.

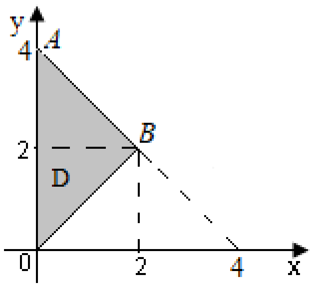

Рисунок 1.5

Дістанемо $\begin{cases} x=2, \\ y=2 \end{cases}$ та $\begin{cases} x=0, \\ y=4 \end{cases}$. Розв'язками систем є координати точок $A(0;4)$ і $B(2;2)$. Матимемо три перпендикуляри, опущені на вісь Oy з точок A, B і O (кількість повторних інтегралів по області D буде два), а на вісь Ox – два, опущені з точок A і B (кількість повторних інтегралів по області D буде один, оскільки точки A і O лежать на одній прямій). В цьому випадку застосуємо формулу (1.1).

$$I=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{4-x} f(x,y)dy .$$

Відповідь: $I=\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{4-x} f(x,y)dy$.

Задача 6. Записати подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ через повторний, якщо область D обмежена лініями: $y=2x,\ 2y-x=0,\ x+y-6=0$.

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис. 1.6). Область D – це трикутник OAB, який обмежений трьома прямими: $OA: y=2x$, $OB: 2y-x=0$ і $AB: x+y-6=0$.

Знайдемо координати точок перетину цих прямих. Розв'яжемо системи рівнянь: $\begin{cases} y=2x, \\ x+y-6=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 2y-x=0, \\ x+y-6=0 \end{cases}$.

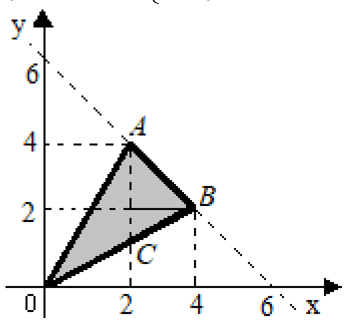

Рисунок 1.6

Дістанемо $\begin{cases} x=2, \\ y=4 \end{cases}$ та $\begin{cases} x=4, \\ y=2 \end{cases}$. Розв'язками систем є координати точок $A(2;4)$ і $B(4;2)$.

Опустимо перпендикуляри на вісь Ox з точок A і B, які розіб'ють область D на дві області: D_1 (трикутник OAC) і D_2

(трикутник CAB). Область D_1 обмежена лініями: $y = 2x, x = 2, y = \frac{x}{2}$,

а область D_2 обмежена лініями: $x + y - 6 = 0$, $y = \frac{x}{2}$, $x = 2$. Маємо

$$I = \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy .$$

Тоді $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x/2}^{2x} f(x, y)dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_{x/2}^{6-x} f(x, y)dy$.

Якщо б опускали перпендикуляри на ось Oy , то дістали би три перпендикуляри і два повторних інтеграли за формулою (1.2).

Відповідь: $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x/2}^{2x} f(x, y)dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_{x/2}^{6-x} f(x, y)dy$.

Задача 7. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{3-y} f(x, y)dx .$$

Розв’язання.

Записуємо рівняння ліній, які обмежують область інтегрування D. Для цього прирівняємо кожну змінну інтегрування до її меж інтегрування. Матимемо $D:\begin{cases} y = 0, \\ y = 2 \end{cases}$ і $\begin{cases} x = \frac{y}{2}, \\ x = 3 - y \end{cases}$. Намалюємо ці лінії.

Область D – це трикутник OAB (рис. 1.7).

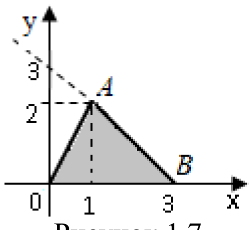

Рисунок 1.7

Змінити порядок інтегрування – це означає перейти від повторного інтегралу випадку I до повторного інтегралу випадку II і навпаки. Маємо повторний інтеграл випадку II. Область D знаходиться між двома прямими $y_1 = 0$ та $y_2 = 2$, перпендикулярними до осі Oy і двома неперервними лініями $x_1 = \frac{y}{2}$ та $x_2 = 3 - y$.

Щоб перейти до випадку I, необхідно опустити перпендикуляри на вісь Ox з точок перетину ліній, що обмежують область D. Таких перпендикулярів буде три: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$. Вони розіб'ють область D на дві області D_1: $0 \le x \le 1,\ y_1 = 0,\ y_2 = 2x$ і D_2: $1 \le x \le 3,\ y_1 = 0,\ y_2 = 3 - x$. Для кожної області записуємо повторні інтеграли і додаємо їх. Матимемо

$$I = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{3-y} f(x, y)dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x, y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{3-x} f(x, y)dy .$$

Відповідь: $I = \int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x, y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{3-x} f(x, y)dy$.

Задача 8. Знайти інтеграл $\iint\limits_D (2x + y)dxdy$, де $D: \begin{cases} y = 2x,\ 2y = x, \\ x = 2. \end{cases}$.

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис. 1.8). Область D – це трикутник OAB. Маємо випадок I, тому що область D знаходиться між двома прямими $x = 0,\ x = 2$, перпендикулярними до осі Ox.

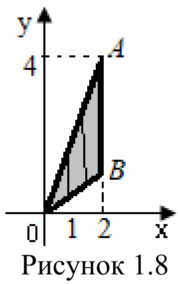

Рисунок 1.8

Зміну змінної x дивимось зліва направо (від лівого перпендикуляра до правого), а зміну змінної y – знизу вгору (для цього рівняння лінії, через яку «входимо» в область, розв'язуємо відносно змінної y – це нижня межа інтеграла, а рівняння лінії, через яку «виходимо» з області, також розв'язуємо відносно змінної y – це верхня межа інтеграла). В нашому випадку $0 \le x \le 2,\ \frac{x}{2} \le y \le 2x$. Маємо

$$I = \iint_D (2x+y)dxdy = \int_0^2 dx \int_{x/2}^{2x} (2x+y)dy = \int_0^2 dx \cdot \left(2xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x/2}^{2x} =$$

$$= \int_0^2 \left(2x \cdot 2x + \frac{(2x)^2}{2} - 2x \cdot \frac{x}{2} - \frac{(x/2)^2}{2}\right)dx = \int_0^2 \left(4x^2 + 2x^2 - x^2 - \frac{x^2}{8}\right)dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{39}{8} x^2 dx = \frac{39}{8} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{39}{8} \cdot \frac{8}{3} = 13 .$$

Відповідь: $I = 13$.

Задача 9. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$ у полярних координатах, якщо область D обмежена колами: $x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x$.

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис. 1.9). Для цього записуємо рівняння кіл у вигляді: $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Знайдемо центри і радіуси кіл: $O_1(1;0)$, $R_1 = 1$ і $O_2(2;0)$, $R_2 = 2$.

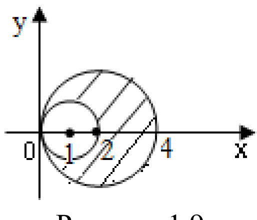

Рисунок 1.9

У заданому подвійному інтегралі перейдемо до полярної системи координат за формулами (1.3). Тоді підінтегральна функція матиме вигляд:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=$$
$$=\sqrt{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=\sqrt{\rho^2}=\rho\,.$$

Рівняння заданих кіл у полярних координатах:

$$x^2+y^2=2x\ \Rightarrow\ \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=2\rho\cos\varphi\ \Rightarrow\rho=2\cos\varphi\,,$$
$$x^2+y^2=4x\Rightarrow\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4\rho\cos\varphi\ \Rightarrow\rho=4\cos\varphi\,.$$

При зміні кута φ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, змінна ρ змінюватиметься від $\rho_1=2\cos\varphi$ до $\rho_2=4\cos\varphi$. Подвійний інтеграл у полярних координатах матиме вигляд:

$$I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint\limits_D\rho^2 d\rho d\varphi\,.$$

Обчислимо його через повторний інтеграл:

$$I=\iint\limits_D\rho^2 d\rho d\phi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\phi\int\limits_{2\cos\phi}^{4\cos\phi}\rho^2 d\rho=\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^3\Bigg|_{2\cos\phi}^{4\cos\phi}d\phi=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(64\cos^3\phi-8\cos^3\phi\right)d\phi=\frac{56}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\phi\,d\phi=\frac{112}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\phi\right)d\sin\phi=$$

$$=\frac{112}{3}\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{112}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{224}{9}\,.$$

Відповідь: $I=\frac{224}{9}$.

1.3 Застосування подвійних інтегралів

1. *Площа плоскої фігури.*

Площа плоскої області D в декартових координатах обчислюється за формулою

$$S = \iint\limits_D dxdy\,, \tag{1.7}$$

а в полярних координатах за формулою

$$S = \iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\varphi\,. \tag{1.8}$$

Якщо область D обмежена лініями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $(\varphi_1(x) \le \varphi_2(x))$ і $a \le x \le b$, то площа її дорівнює

$$S = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,. \tag{1.9}$$

Якщо область D обмежена лініями $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $(\psi_1(y) \le \psi_2(y))$ і $c \le y \le d$, то площа її дорівнює

$$S = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx\,. \tag{1.10}$$

Якщо область D обмежена лініями у полярних координатах $\alpha \le \varphi \le \beta$, $\rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)$, то площа її дорівнює

$$S = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho\,. \tag{1.11}$$

2. *Об’єм тіла.*

Об’єм циліндричного тіла (рис. 1.10),

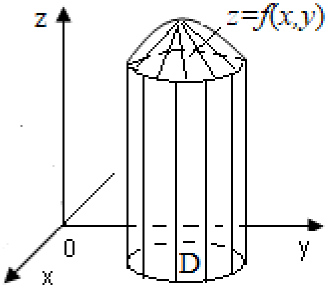

Рисунок 1.10

твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D, що лежить на площині xOy, а зверху поверхнею $z = f(x, y)$ $(f(x, y) \geq 0,\ (x, y) \in D)$, яка неперервна в області D, знаходиться за формулою:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy. \tag{1.12}$$

Якщо циліндричне тіло обмежене зверху поверхнею $z = f_2(x, y)$, а знизу поверхнею $z = f_1(x, y)$ і проєктується на площину xOy в область D, то об'єм обчислюється за формулою:

$$V = \iint\limits_D \left(f_2(x, y) - f_1(x, y)\right)dxdy. \tag{1.13}$$

3. *Площа поверхні тіла.*

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$ і проєктується на площину xOy в область D, при цьому функції $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ неперервні в області D, то площу Q цієї поверхні знаходять за формулою:

$$Q = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}dxdy; \tag{1.14}$$

Якщо поверхня має рівняння виду $x = f(y,z)$, то площа поверхні знаходіться за формулою

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + f_y'^2(y,z) + f_z'^2(y,z)}\,dydz\,; \qquad (1.15)$$

де D – проєкція поверхні на площину yOz.

Якщо поверхня має рівняння виду $y = f(x,z)$, то площа поверхні знаходіться за формулою

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2(x,z) + f_z'^2(x,z)}\,dxdz\,. \qquad (1.16)$$

де D – проєкція поверхні на площину xOz;

4. *Маса плоскої пластини.*

Нехай на площині xOy пластина має форму замкненої області D, в кожній точці якої відома густина $\gamma = \gamma(x,y)$. Маса такої пластини визначиться за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x,y)\,dxdy\,; \qquad (1.17)$$

5. *Центр маси пластини, статичні моменти.*

Центр $(x_c; y_c)$ маси пластини обчислюється за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m},\ y_c = \frac{M_x}{m}, \qquad (1.18)$$

де статичні моменти M_x, M_y пластини відносно осей Ox та Oy відповідно визначаються за формулами

$$M_x = \iint_D y\,\gamma(x,y)\,dxdy\,, \qquad (1.19)$$

$$M_y = \iint\limits_D x\gamma(x, y)dxdy \tag{1.20}$$

Якщо пластина однорідна, то її густина $\gamma = \text{const}$.

6. *Моменти інерції пластини.*

Моменти інерції I_x та I_y пластини відносно координатних осей Ox і Oy обчислюються відповідно за формулами:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\gamma(x, y)dxdy, \; I_y = \iint\limits_D x^2\gamma(x, y)dxdy. \tag{1.21}$$

Момент інерції пластини відносно початку координат знаходять за формулою:

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\gamma(x, y)dxdy. \tag{1.22}$$

Зауваження. Якщо в формулах для обчислення моментів інерції покласти $\gamma(x, y) = 1$, то одержимо геометричні моменти інерції.

Задача 10. Обчислити площу плоскої фігури, обмежену лініями: $y = 1 - x^2$; $x - y = 1$.

Розв'язання.

Побудуємо плоску фігуру, обмежену заданими лініями. Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують фігуру. Для цього розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} y = 1 - x^2, \\ x - y = 1 \end{cases}$. Дістанемо $\begin{cases} x = -2, \\ y = -3 \end{cases}$ та $\begin{cases} x = 1, \\ y = 0 \end{cases}$. Фігура знаходиться між двома перпендикулярами: $x = -2$ та $x = 1$ (рис. 1.11).

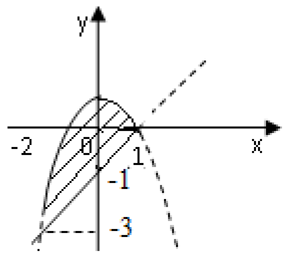

Рисунок 1.11

У цей час y змінюється від $y_1 = x - 1$ до $y_2 = 1 - x^2$. Площу фігури знайдемо за формулою (1.7), а подвійний інтеграл за формулою (1.1):

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x-1}^{1-x^2} dy = \int\limits_{-2}^{1} dx \cdot y \Big|_{x-1}^{1-x^2} = \int\limits_{-2}^{1} \left(1 - x^2 - x + 1\right) dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} \left(2 - x^2 - x\right) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 = 5 - \frac{1}{2} =$$

$= 4{,}5$ (кв. од.).

Відповідь: $S = 4{,}5$ кв. од.

Задача 11. Обчислити площу плоскої фігури D в полярній системі координат, якщо вона обмежена кривою $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right)$ (лемніската Бернуллі).

Розв'язання.

Побудуємо плоску фігуру (рис. 1.12). Крива розташована симетрично відносно координатних осей, тому що заміна x на $(-x)$ і y на $(-y)$ не змінює рівняння кривої. Тому досить побудувати криву лише в першій чверті, а потім, враховуючи симетрію її відносно координатних осей, побудувати її в трьох інших четвертях. Для побудови кривої запишемо її рівняння в полярній системі координат, поклавши $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Виконуючи перетворення, одержимо:

$$\left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\right)^2 = 2a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi\right),$$

$$\left(\rho^2\right)^2 = 2a^2\rho^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \Rightarrow \rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi,\ \rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}\,.$$

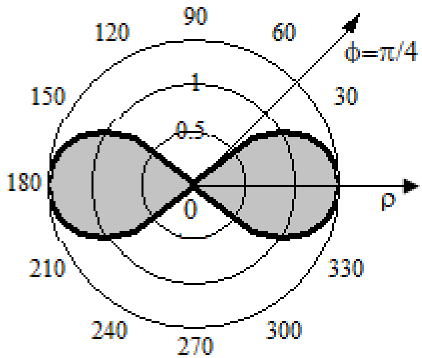

Рисунок 1.12

За областю визначення $\cos 2\varphi \geq 0$. Це означає, що кут 2φ повинен знаходитись або в першій, або в четвертій чверті. З'ясувавши, що досить побудувати криву лише в першій чверті, розглянемо значення 2φ, яке задовольняє умові $0 \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Звідси випливає, що для побудови кривої в першій чверті, куту φ необхідно надавати значень від $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Площу чверті фігури знайдемо за формулою (1.8), а повторний інтеграл за формулою (1.11) і помножимо на чотири.

$$S = \iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \cdot \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} = 4a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi =$$

$$= 4a^2 \cdot \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2 \sin\frac{\pi}{2} = 2a^2 \text{ (кв. од.).}$$

Відповідь: $S = 2a^2$ кв. од.

Задача 12. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = a^2$ та $x^2 + z^2 = a^2$.

Розв'язання.

Тіло обмежено циліндром $x^2 + y^2 = a^2$, твірні якого паралельні осі Oz і циліндром $x^2 + z^2 = a^2$, твірні якого паралельні осі Oy. Розглянемо восьму частину заданого тіла. Зробимо рисунок цієї частини тіла (рис. 1.13). Поверхня, яка обмежує її зверху проєктується в площину xOy у чверть кола радіуса a з центром в точці O.

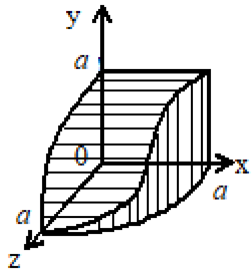

Рисунок 1.13

Об'єм восьмої частини заданого тіла знаходимо за формулою (1.12). У нашому випадку $f_2(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$, а $f_1(x, y) = 0$. Тоді

$$\frac{1}{8}V = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2}\, dxdy = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy = \int_0^a \left(a^2 - x^2\right) dx =$$

$$= \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{3}a^3.$$

$V = 8 \cdot \frac{2}{3}a^3 = \frac{16}{3}a^3$ (куб. од.).

Відповідь: $V = \frac{16}{3}a^3$ куб. од.

Задача 13. Знайти площу частини конуса $x^2 + y^2 = z^2$, що міститься в середині циліндра $x^2 + y^2 = 2x$.

Розв'язання.

Зробимо рисунок поверхні (рис. 1.14).

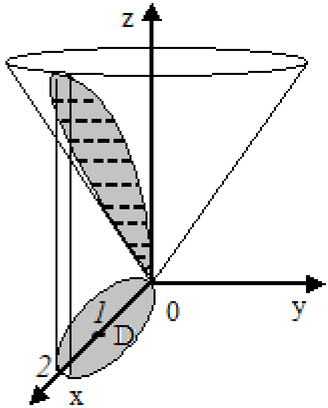

Рисунок 1.14

Площу поверхні обчислимо за формулою (1.13). D – проєкція даної поверхні на площину xOy. Це круг, обмежений колом: $x^2 + y^2 = 2x$.

З рівняння конуса маємо $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Частинні похідні по x та y: $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Знайдемо підінтегральну функцію. Матимемо

$$1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2,$$

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{2}.$$

Шукана площа $Q = \iint\limits_D \sqrt{2}\,dxdy.$

Оскільки область інтегрування D є круг, то подвійний інтеграл $\iint\limits_D dxdy$ є площею цього круга радіуса $R = 1$ і дорівнює $S_{\text{кр}} = \pi$. Тоді

$$Q = \pi\sqrt{2} \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: $Q = \pi\sqrt{2}$ кв. од.

Задача 14. Знайти масу матеріальної пластини, що має форму замкненої області D, обмеженої лініями: $x = y^2$, $x + y = 2$, а густина в кожній точці визначається функцією $\gamma(x, y) = x^2 + y^2$, неперервною в області D.

Розв'язання.

Побудуємо область D (рис. 1.15).

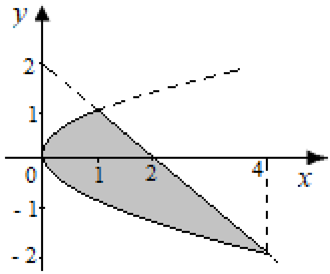

Рисунок 1.15

Масу пластини знайдемо за формулою (1.17). Маємо $-2 \le y \le 1,\ x = y^2,\ x = 2 - y$.

$$m = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy = \int\limits_{-2}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{2-y} \left(x^2 + y^2\right)dx = \int\limits_{-2}^{1} dy \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right)\Bigg|_{y^2}^{2-y} =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} \left(\frac{(2-y)^3}{3} + y^2(2-y) - \frac{y^6}{3} - y^4\right)d\,y =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} \left(-\frac{1}{3}(y-2)^3 + 2y^2 - y^3 - \frac{1}{3}y^6 - y^4\right)dy =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\frac{(y-2)^4}{4} + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{3}\cdot\frac{y^7}{7} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{-1}{12} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{21} - \frac{1}{5} + \frac{64}{3} + \frac{16}{3} + 4 - \frac{128}{21} - \frac{32}{5} = \frac{639}{35} \text{(од. маси).}$$

Відповідь: $m = \dfrac{639}{35}$ од. маси.

Задача 15. Знайти центр маси однорідної пластини, обмеженої кривою $y=\sin x,\ x\in[0;\pi]$ та віссю Ox .

Розв'язання.

Зробимо рисунок пластини (рис. 1.16).

Рисунок 1.16

Координати $(x_c; y_c)$ центра маси пластини обчислюються за формулами (1.18). Оскільки пластина однорідна, то $\gamma=\text{const}$. У цьому випадку матимемо:

$$x_c=\frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy},\qquad y_c=\frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}.$$

Обчислимо інтеграли:

$$\iint\limits_D dx\,dy=\int\limits_0^{\pi}dx\int\limits_0^{\sin x}dy=\int\limits_0^{\pi}dx\cdot y\Big|_0^{\sin x}=\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=1+1=2,$$

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy=\int\limits_0^{\pi}x\,dx\int\limits_0^{\sin x}dy=\int\limits_0^{\pi}x\,dx\cdot y\Big|_0^{\sin x}=\int\limits_0^{\pi}x\sin x\,dx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=x,\ dv=\sin x\,dx \\ du=dx,\ v=-\cos x\end{bmatrix}=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}\cos x\,dx=\pi+\sin x\Big|_0^{\pi}=\pi+0=\pi,$$

$$\iint\limits_D y\,dx\,dy=\int\limits_0^{\pi}dx\int\limits_0^{\sin x}y\,dy=\int\limits_0^{\pi}dx\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{\sin x}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{4}.$$

Маємо $x_c = \dfrac{\pi}{2}$, $y_c = \dfrac{\pi}{8}$.

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{8}\right)$.

2 ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

Потрійний інтеграл є безпосереднім узагальненням подвійного інтеграла на тривимірний простір.

Потрійний інтеграл у декартових прямокутних координатах записується

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz,$$

де $f(x, y, z)$ – підінтегральна функція трьох змінних x, y та z,
V – область інтегрування.

Властивості потрійного інтеграла аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

2.1 Потрійний інтеграл у декартових прямокутних координатах

Обчислення потрійного інтеграла зводиться до обчислення повторних інтегралів, тобто до інтегрування по кожній змінній окремо. Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена та неперервна в замкненій області $V \in R_3$.

1) Якщо область V (рис. 2.1) така, що кожна «вертикальна» пряма, перетинаючи границю області V, має з нею не більше двох спільних точок, а область D – проєкція області V на площину xOy і рівняння поверхонь, що обмежують область V зверху і знизу $z = \varphi(x, y)$ та $z = \psi(x, y)$ відповідно,

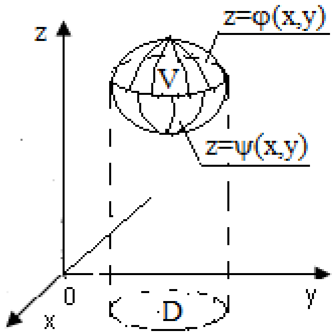

Рисунок 2.1

то потрійний інтеграл записується формулою:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \tag{2.1}$$

2) Якщо область D обмежена лініями: $D\colon \begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$, то потрійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_D dxdy \int\limits_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \tag{2.2}$$

3) Якщо область D обмежена лініями: $D\colon \begin{cases} c \le y \le d, \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$, то потрійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_D dxdy \int\limits_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,dz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \tag{2.3}$$

Зауваження. Таким чином, для обчислення потрійного інтеграла потрібно послідовно обчислити три визначених інтеграла. Обчислюються ці інтеграли від самого «внутрішнього» (по змінній z) до самого «зовнішнього» (по змінній x – формула (2.2) або по змінній y – формула (2.3)).

4) Якщо область V є прямокутний паралелепіпед, ребра якого паралельні осям координат, а саме $V: \begin{cases} a \le x \le b, \\ c \le y \le d, \\ e \le z \le k, \end{cases}$ то потрійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^k f(x,y,z)dz . \qquad (2.4)$$

Порядок інтегрування в правій частині формули може бути будь-яким.

На практиці найбільш вживаними в просторі є циліндричні та сферичні координати.

2.2 Потрійний інтеграл у циліндричних координатах

Якщо проєкцією області V інтегрування на будь-яку з координатних площин є круг або частина круга, то потрійний інтеграл простіше обчислити, перейшовши до циліндричних координат. Циліндрична система координат є узагальненням полярної системи координат на простір. У системі циліндричних координат точка M характеризується трьома величинами (ρ, φ, z), де ρ – відстань від початку координат до точки N проєкції точки M на площину xOy, φ – кут між вектором ON і додатним напрямом осі Ox, z – апліката точки M (рис. 2.2).

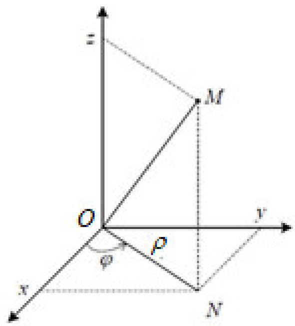

Рисунок 2.2

Перехід від прямокутних координат x, y, z до циліндричних координат ρ, φ, z здійснюється за формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \\ dx\,dy\,dz = \rho d\rho d\varphi dz \end{cases}, \qquad \begin{cases} 0 \le \rho \le +\infty, \\ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ -\infty \le z \le +\infty \end{cases}. \tag{2.5}$$

Для того, щоб в потрійному інтегралі перейти до циліндричних координат, потрібно підінтегральну функцію виразити у вигляді функції змінних ρ, φ, z: $f(x,y,z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) = F(\rho,\varphi,z)$.

Добуток $\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$ визначає елемент об'єму в циліндричній системі координат. Потрійний інтеграл у циліндричних координатах обчислюється так само як і в декартових прямокутних координатах: шляхом перетворення в послідовність трьох визначених інтегралів.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} F(\rho,\varphi,z)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\,d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} F(\rho,\varphi,z)\,dz \tag{2.6}$$

2.3 Потрійний інтеграл у сферичних координатах

Якщо область інтегрування в потрійному інтегралі є куля або частина кулі, то простіше обчислити потрійний інтеграл в сферичних координатах. У сферичних координатах точку M характеризують три величини (ρ, φ, θ), де ρ – відстань від точки M до початку координат (точка O), φ – кут між вектором ON і додатним напрямом осі Ox (точка N – проєкція точки M на площину xOy), θ – кут між вектором OM і додатним напрямом осі Oz (рис. 2.3).

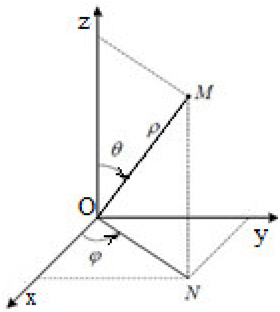

Рисунок 2.3

Перехід від прямокутних координат x, y, z до сферичних координат ρ, φ, θ здійснюється за формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta, \\ dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\theta \; d\rho d\varphi d\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 \le \rho \le +\infty, \\ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}. \tag{2.7}$$

Для того, щоб у потрійному інтегралі перейти до сферичних координат, потрібно підінтегральну функцію виразити у вигляді функції змінних ρ, φ, θ:

$$f(x,y,z) = f(\rho \sin\theta \cos\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho\cos\theta) = F(\rho, \varphi, \theta).$$

Добуток $\rho^2 \sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta$ визначає елемент об'єму в сферичній системі координат. Потрійний інтеграл у сферичних координатах обчислюється так само як і в декартових прямокутних координатах та циліндричних координатах: шляхом перетворення в послідовність трьох визначених інтегралів.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} F(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 \sin\theta d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int\limits_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi,\theta)}^{\rho_2(\varphi,\theta)} \rho^2 F(\rho,\varphi,\theta)\; d\rho\,. \tag{2.8}$$

Зауваження. Слід пам'ятати, що $\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases}.$

Задача 16. Обчислити $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, якщо область V обмежена площинами: $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

Розв'язання.

Область V – піраміда, область D в площині xOy – прямокутний трикутник AOB. Зробимо рисунок області V (рис. 2.4).

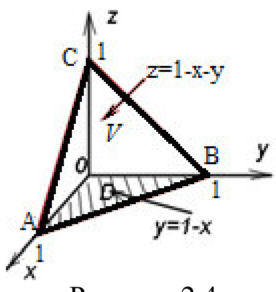

Рисунок 2.4

$$I=\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\left.\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\right|_0^{1-x-y}=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left((x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left.\left(\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{(x+y)^3}{3}-\frac{(1-x-y)^3}{6}\right)\right|_0^{1-x}dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{(1-x)^3}{6}\right)dx=\left.\left(\frac{1}{6}x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}-\frac{(1-x)^4}{24}\right)\right|_0^1=$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}.$$

Відповідь: $I=\dfrac{1}{8}$.

Задача 17. Обчислити $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $z=x^2+y^2$, $z=1$.

Розв'язання.

Зробимо рисунок області V (рис. 2.5).

Оскільки область V проєктується на площину xOy у круг $x^2+y^2\le 1$, то знайдемо інтеграл перейшовши до циліндричних координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$, $dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz$. Підінтегральна функція матиме вигляд:

$$x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2$$

Координата φ змінюється в межах від 0 до 2π, координата ρ – від $\rho=0$ до $\rho=1$, а координата z – від $z=\rho^2$ до $z=1$.

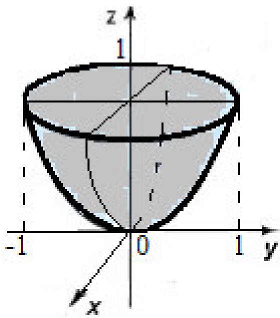

Рисунок 2.5

Отримуємо:

$$I=\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\iiint\limits_{V_1}\rho^2\cdot\rho d\rho\, d\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho\int\limits_{\rho^2}^1 dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho\cdot z\Big|_{\rho^2}^1=\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^1\rho^3\cdot\left(1-\rho^2\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^1\left(\rho^3-\rho^5\right)d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)d\varphi=\frac{1}{12}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{12}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{12}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{6}.$$

Відповідь: $I=\dfrac{\pi}{6}$.

Задача 18. Обчислити $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями: $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ і $x^2+y^2+z^2\le 4$.

Розв'язання.

Знизу область інтегрування V обмежена конічною поверхнею $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$, а зверху – сферою $x^2+y^2+z^2\le 4$. Зробимо рисунок області V (рис. 2.6). Оскільки область інтегрування є частиною кулі, то знайдемо інтеграл перейшовши до сферичних координат:

координата θ змінюється в межах від 0 до $\frac{\pi}{4}$, координата φ змінюється в межах від 0 до 2π, а координата ρ – від $\rho = 0$ до $\rho = 2$.

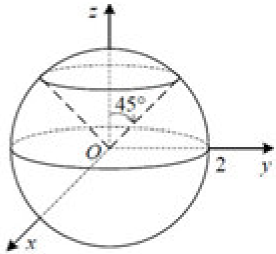

Рисунок 2.6

Підінтегральна функція матиме вигляд:

$$z\sqrt{x^2 + y^2} = \rho\cos\theta\sqrt{(\rho\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\varphi)^2} =$$

$$= \rho\cos\theta\sqrt{\rho^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} = \rho\cos\theta\,\rho\sin\theta = \rho^2\cos\theta\sin\theta .$$

Враховуючи, що $dx\,dy\,dz = \rho^2\sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta$, матимемо

$$I = \iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz = \iiint\limits_{V_1} \rho^2\cos\theta\sin\theta \cdot \rho^2\sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \iiint\limits_{V_1} \rho^4\cos\theta\sin^2\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin^2\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^4 d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin^2\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^2 = \frac{32}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin^2\theta d\theta \cdot \left.\varphi\right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{64}{5}\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin^2\theta d\theta = \frac{64}{5}\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta d\sin\theta = \frac{64}{5}\pi \cdot \left.\frac{\sin^3\theta}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{64}{15}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{64}{15}\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{16\pi\sqrt{2}}{15} .$$

Відповідь: $I = \dfrac{16\pi\sqrt{2}}{15}$.

2.4 Застосування потрійних інтегралів

1. *Обчислення об'ємів*.

Якщо деяке тіло є обмеженою і замкненою областю G , що має об'єм V , то

$$V = \iiint\limits_G dxdydz . \tag{2.8}$$

2. *Застосування в механіці*.

Нехай G – обмежена замкнена область простору R_3, яку займає деяке матеріальне тіло з густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, де $\gamma(x, y, z)$ – неперервна функція в цій області, а dv – диференціал об'єму області. Тоді:

а) маса тіла:

$$m = \iiint\limits_G \gamma dv ; \tag{2.9}$$

б) статичні моменти тіла відносно координатних площин xOy, xOz , yOz обчислюються відповідно за формулами:

$$M_{xy} = \iiint\limits_G z\gamma dv , \quad M_{xz} = \iiint\limits_G y\gamma dv , \quad M_{yz} = \iiint\limits_G x\gamma dv ; \tag{2.10}$$

в) моменти інерції тіла відносно координатних осей Ox , Oy , Oz обчислюються відповідно за формулами:

$$I_x = \iiint\limits_G \left(y^2 + z^2\right)\gamma\, dv,$$
$$I_y = \iiint\limits_G \left(x^2 + y^2\right)\gamma\, dv, \qquad (2.11)$$
$$I_z = \iiint\limits_G \left(x^2 + y^2\right)\gamma\, dv.$$

г) моменти інерції тіла відносно координатних площин xOy, xOz, yOz обчислюються відповідно за формулами:

$$I_{xy} = \iiint\limits_G z^2\gamma d\mathrm{v}\,, \quad I_{xz} = \iiint\limits_G y^2\gamma dv\,, \quad I_{yz} = \iiint\limits_G x^2\gamma dv\,; \qquad (2.12)$$

д) момент інерції відносно початку координат:

$$I_0 = \iiint\limits_G \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma dv\,; \qquad (2.13)$$

е) координати $(x_c; y_c; z_c)$ центра маси тіла:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}. \qquad (2.14)$$

Задача 19. Знайти момент інерції відносно осі Oz однорідної півкулі, обмеженої поверхнями $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = 0$.

Розв'язання.

Зробимо рисунок (рис. 2.7).

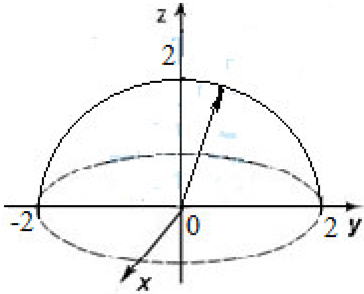

Рисунок 2.7

Оскільки півкуля однорідна, то покладемо $\gamma = 1$. Момент інерції однорідної півкулі відносно осі Oz знайдемо за формулою

$$I_z = \iiint\limits_G \left(x^2 + y^2\right) dv .$$

Для обчислення інтеграла перейдемо до сферичної системи координат за формулами (2.7): координата θ змінюється в межах від 0 до $\frac{\pi}{2}$, координата φ змінюється в межах від 0 до 2π, а координата ρ – від $\rho = 0$ до $\rho = 2$. Підінтегральна функція матиме вигляд:

$$x^2 + y^2 = (\rho \sin\theta \cos\varphi)^2 + (\rho \sin\theta \sin\varphi)^2 = \rho^2 \sin^2\theta \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) =$$
$$= \rho^2 \sin^2\theta . \; dv = dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\theta \, d\rho d\varphi d\theta .$$

$$I_z = \iiint\limits_{G_1} \rho^2 \sin^2\theta \cdot \rho^2 \sin\theta \, d\rho d\varphi d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^4 d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta \cdot$$

$$\cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^2 = -\frac{32}{5} \cdot 2\pi \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2\theta\right) d\cos\theta = -\frac{64\pi}{5}\left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{64\pi}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{128\pi}{15} .$$

Відповідь: $I_z = \dfrac{128\pi}{15}$.

3 КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Криволінійні інтеграли є узагальненням поняття визначеного інтеграла на випадок, коли областю інтегрування є деяка крива, що лежить на площині.

Криволінійні інтеграли бувають першого роду (по довжині дуги кривої) і другого роду (по координатах).

3.1 Криволінійні інтеграли першого роду. Обчислення та застосування

Розглянемо на площині криву AB. Функція двох змінних $f(x, y)$ визначена в точках кривої AB.

Розділимо криву AB (рис. 3.1) на n частин точками $A=A_0, A_1, \ldots, A_n=B$.

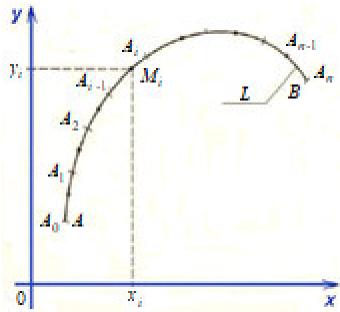

Рисунок 3.1

У кожній частині довільно виберемо точку $M_i(x_i; y_i)$. Знайдемо значення функції $f(x_i, y_i)$ у вибраних точках. Помножимо ці значення на довжини Δl_i цих частин та знайдемо суму всіх добутків:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta l_i .$$

Цю суму називають інтегральною сумою для функції $f(x, y)$ по кривій AB. Знайдемо границю інтегральної суми при умові, що довжина найдовшої частини кривої прямує до нуля.

Означення 3.1. *Криволінійним інтегралом першого роду (по довжині дуги кривої)* називається границя інтегральної суми, якщо вона існує і не залежить від способу розбиття кривої AB на частини і вибору довільних точок в них, і позначають

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{L} f(x,y)dl .$$

За означенням

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i,y_i)\Delta l_i = \int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{L} f(x,y)dl , \qquad (3.1)$$

де $\lambda = \max\limits_{0\le i\le n-1} \Delta l_i$, функція $f(x,y)$ визначена і обмежена на кривій AB,

Основні властивості криволінійного інтеграла першого роду

а) Криволінійний інтеграл першого роду має всі властивості, якими володіє визначений інтеграл. Однак криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку шляху інтегрування

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x,y)\,dl .$$

б) $\int\limits_{L} (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))dl = \int\limits_{L} f_1(x,y)dl \pm \int\limits_{L} f_2(x,y)dl$.

в) $\int\limits_{L} k\, f(x,y)\,dl = k\int\limits_{L} f(x,y)\,dl$, де $k-\mathrm{const}$.

г) Якщо крива $L = L_1 + L_2$, то

$$\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)dl + \int\limits_{L_2} f(x,y)dl .$$

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду

Криволінійний інтеграл першого роду при обчисленні зводиться до визначеного інтегралу.

1) Якщо крива L задана рівнянням $y = y(x),\ a \le x \le b$, то

$$\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx . \qquad (3.2)$$

Зауваження. При цьому треба враховувати, що у визначеному інтегралі межі інтегрування завжди «беруть» від «меншої» до «більшої», незалежно від заданого напряму інтегрування:

2) Якщо крива L задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ і $t \in [t_1, t_2]$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt\,. \qquad (3.3)$$

3) Якщо крива L задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ і $\alpha \le \varphi \le \beta$, при цьому $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$, то

$$\int_L f(x,y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi\,. \qquad (3.4)$$

4) У випадку просторової кривої , яка має рівняння $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ і $t \in [t_1, t_2]$, матимемо

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt\,. \qquad (3.5)$$

Зауваження. При застосуванні формули (3.5) слід звертати увагу на те, щоб при зміні параметра t від t_1 до t_2 диференціали dl і dt були невід’ємними, оскільки вираз $dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$ задає елемент довжини дуги, який від’ємним бути не може.

Застосування криволінійного інтеграла першого роду

1. *Застосування в геометрії.*

Якщо на площині xOy задано криву AB і на цій кривій визначено неперервну функцію $f(x, y)$ то

а) довжина кривої AB визначається за формулою:

$$L_{AB} = \int_{AB} dl \,; \tag{3.6}$$

б) площа циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі Oz і вона опирається на криву L у площині xOy та при цьому зверху обмежена поверхнею $z = f(x, y)$, визначається за формулою:

$$Q = \int_{L} f(x, y) dl \,. \tag{3.7}$$

2. *Застосування в механіці*.

а) маса матеріальної кривої визначається за формулою:

$$m = \int_{L} \gamma(x, y) dl \,, \tag{3.8}$$

де $\gamma(x, y)$ – лінійна густина;

б) координати $(x_c; y_c)$ центра маси кривої L визначаються за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_l x\gamma(x, y)dl}{\int_l \gamma(x, y)dl} \quad \text{і} \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_l y\gamma(x, y)dl}{\int_l \gamma(x, y)dl} \,, \tag{3.9}$$

де M_x, M_y – статичні моменти кривої відносно осей Ox і Oy.

У випадку, коли розглядається однорідна матеріальна крива, слід покласти $\gamma(x, y) = 1$;

в) моменти інерції I_x, I_y, I_0 кривої L відносно осей Ox, Oy і початку координат визначаються за формулами:

$$I_x = \int_l y^2 \gamma(x, y) dl \,, \tag{3.10}$$

$$I_y = \int_l x^2 \gamma(x,y)dl, \tag{3.11}$$

$$I_0 = \int_l (x^2 + y^2)\gamma(x,y)dl. \tag{3.12}$$

Задача 20. Знайти криволінійний інтеграл першого роду $\int_L x^2 ydl$, де L – частина кола $x^2 + y^2 = 4$, розміщена в першій чверті $(x \geq 0,\ y \geq 0)$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння кола у вигляді $y = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq 2$. Знайдемо $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$. Маємо $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$. Тоді

$$dl = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\ dx = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx.$$

$$I = \int_L x^2 ydl = \int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\ \frac{2dx}{\sqrt{4 - x^2}} = 2\int_0^2 x^2 dx = 2 \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Відповідь: $I = \dfrac{16}{3}$.

Задача 21. Знайти криволінійний інтеграл першого роду $\int_{AB} (x^2 + 3y)\,dl$, де AB – відрізок прямої між точками $A(2;1)$ і $B(1;-1)$.

Розв'язання.

Складемо рівняння прямої AB, використовуючи формулу $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ (рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$): $\dfrac{x-2}{1-2} = \dfrac{y-1}{-1-1} \Rightarrow \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{-2}$.

З рівняння прямої виразимо y через x: $y = 2x - 3$. Знайдемо $y' = 2$. Тоді $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \sqrt{1+4}\,dx = \sqrt{5}dx$. Обчислимо інтеграл:

$$I = \int\limits_{AB} (x^2 + 3y)\,dl = \int\limits_1^2 (x^2 + 3(2x-3))\,\sqrt{5}\,dx = \sqrt{5}\int\limits_1^2 (x^2 + 6x - 9)\,dx =$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{x^3}{3} + 6\cdot\frac{x^2}{2} - 9x\right)\Bigg|_1^2 = \sqrt{5}\left(\frac{8}{3} + 12 - 18 - \frac{1}{3} - 3 + 9\right) = \sqrt{5}\cdot\frac{7}{3} = \frac{7\sqrt{5}}{3}.$$

Відповідь: $I = \dfrac{7\sqrt{5}}{3}$.

Задача 22. Знайти масу дроту з густиною $\gamma(x, y) = xy$, що має форму кола $x^2 + y^2 = 1$, від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;1)$.

Розв'язання.

Коло (рис. 3.2) радіуса $R = 1$ з центром у початку координат описується параметричними рівняннями $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$, де параметр $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

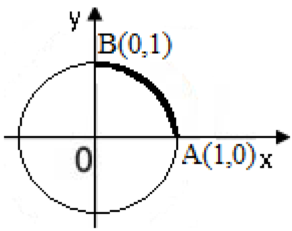

Рисунок 3.2

Тоді маса даного шматка дроту обчислюється за формулою (3.8), де $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$.

Маємо $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$; $dl = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,dt = dt$ і $\gamma(x, y) = xy = \cos t \cdot \sin t$. Тоді

$$m=\int_L \gamma(x,y)dl=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\sin t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,d\sin t=\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=0{,}5\text{ (од.маси)}.$$

Відповідь: $m=0{,}5$ од.маси.

3.2 Криволінійні інтеграли другого роду. Обчислення та застосування

Аналогічно як і для криволінійного інтеграла першого роду розглянемо на площині дугу AB деякої кривої L та функцію двох змінних $P(x,y)$, яка визначена в точках кривої L.

Розділимо криву AB (рис. 3.3) на n частин точками $A=A_0,A_1,\ldots,A_n=B$.

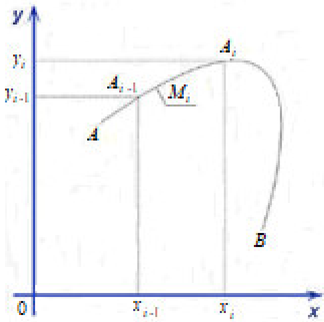

Рисунок 3.3

У кожній частині довільно виберемо точку $M_i(x_i;y_i)$. Знайдемо значення функції $P(x_i,y_i)$ у вибраних точках. Помножимо ці значення на проєкцію Δx_i цих частин на вісь Ox та знайдемо суму всіх добутків:

$$\sum_{i=0}^{n-1}P(x_i,y_i)\Delta x_i\,.$$

Цю суму називають інтегральною сумою для функції $P(x,y)$ по змінній x. Знайдемо границю інтегральної суми при умові, що довжина найбільшої проєкції Δx_i прямує до нуля.

Означення 3.2. *Криволінійним інтегралом другого роду по координаті x від функції $P(x,y)$* називається границя інтегральної суми, якщо вона існує і не залежить від способу розбиття кривої AB на частини і вибору довільних точок в них, та позначають

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx = \int_{L} P(x,y)\,dx$$

За означенням

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i,y_i)\Delta x_i = \int_{AB} P(x,y)\,dx = \int_{L} P(x,y)\,dx\,, \tag{3.13}$$

де $\lambda = \max\limits_{0\le i\le n-1} \Delta x_i$, функція $f(x,y)$ визначена і обмежена на кривій AB.

Аналогічно, при складанні інтегральної суми для функції $Q(x,y)$ по змінній y множимо значення функції $Q(x_i,y_i)$, знайдене в довільній точці $M_i(x_i;y_i)$ кожної частини, на які розбита крива AB, на проєкцію Δy_i цієї частини на вісь Oy та знайдемо суму всіх добутків. Якщо границя інтегральної суми існує і не залежить від способу розбиття кривої AB на частини і вибору довільних точок в них, то отримаємо *криволінійний інтеграл другого роду по координаті y від функції $Q(x,y)$*

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i,y_i)\Delta y_i = \int_{AB} Q(x,y)\,dy = \int_{L} Q(x,y)\,dy\,. \tag{3.14}$$

де $\lambda = \max\limits_{0\le i\le n-1} \Delta y_i$, функція $Q(x,y)$ визначена і обмежена на кривій AB.

На практиці зазвичай використовується об'єднання криволінійних інтегралів другого роду, тобто дві функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ і інтеграли $I_1 = \int_L P(x,y)\,dx$, $I_2 = \int_L Q(x,y)\,dy$, а сума цих інтегралів

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{3.15}$$

називається *загальним криволінійним інтегралом другого роду*.

Основні властивості криволінійного інтеграла другого роду.

а) Криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак на протилежний при зміні напряму шляху інтегрування

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

б) $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy$.

Інші властивості аналогічні властивостям криволінійного інтеграла першого роду.

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

Криволінійний інтеграл другого роду при обчисленні зводиться до визначеного інтегралу.

а) Якщо крива L задана рівнянням $y = y(x),\ a \le x \le b$, то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left(P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)\right)dx . \qquad (3.16)$$

б) Якщо крива L задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [t_1, t_2]$, то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} \left(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\right)dt . \quad (3.17)$$

в) У випадку просторової кривої , яка має рівняння $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ $t \in [t_1, t_2]$, матимемо

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(P(x(t),y(t),z(t))x_t' + Q(x(t),y(t),z(t))y_t' + R(x(t),y(t),z(t))z_t'\right)dt\ . \quad (3.18)$$

Теорема 3.1. Якщо функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ і їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в області D і в точках цієї області $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то криволінійний інтеграл $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежить від шляху інтегрування по лінії $L \in D$.

Якщо в інтегралі $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ маємо $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то значення інтеграла не залежить від форми кривої AB, а залежить тільки від початкової точки $A(x_1;y_1)$ і кінцевої точки $B(x_2;y_2)$ та позначається $\int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. При цьому вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy\ .$$

Знаходження функції за її повним диференціалом

Якщо вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. У цьому випадку можна поновити функцію $u(x,y)$ по її повному диференціалу з точністю до константи.

Для цього інтегруємо вираз $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ від фіксованої точки $M_0(x_0;y_0)$ до довільної точки $M(x;y)$:

$$u(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C\ . \tag{3.19}$$

Точку M_0 вибираємо так, щоб функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ були визначені в ній. Зручно за точку $(x_0; y_0)$ брати точки $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$ або $(1;1)$. Виберемо шлях інтегрування від точки $M_0(x_0; y_0)$ до точки $M(x; y)$ по ламаній M_0AM (рис. 3.4).

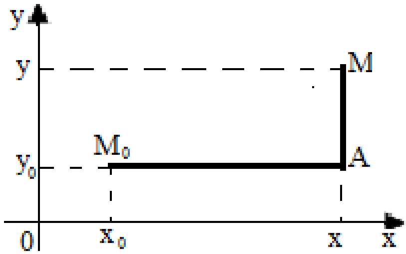

Рисунок 3.4

Точка A має координати $(x; y_0)$. Тоді

$$u(x, y)=\int_{M_0A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{AM} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C\ .$$

Знайдемо інтеграли правої частини.

1) Пряма M_0A має рівняння $y = y_0$, $dy = 0$, $x_0 \le x \le x$. Тоді

$$\int_{M_0A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx\ .$$

2) Пряма AM має рівняння $x = \text{const}$, $dx = 0$, $y_0 \le y \le y$. Тоді

$$\int_{AM} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy\ .$$

Остаточно матимемо

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C\ . \tag{3.20}$$

Аналогічно можна отримати, що

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C. \qquad (3.21)$$

Зауваження. У разі функції трьох змінних і просторової кривої L, умови незалежності інтеграла $\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ від шляху інтегрування (або того, що $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ є диференціал деякої функції) мають вигляд:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Інтеграл по замкненому контуру, формула Гріна

Розглянемо замкнену криву L, будемо називати її *замкненим контуром*. Орієнтацію на цій кривій виберемо таким чином: якщо при русі точки M уздовж контуру L обмежена цим контуром область D залишається зліва, то напрям руху (орієнтацію на кривій L) будемо вважати *додатним*, в іншому випадку (область D праворуч) – від'ємним.

Якщо дано криволінійний інтеграл (3.15), а крива L, по якій відбувається інтегрування – замкнена, то такий інтеграл називається *інтегралом по замкненому контуру* і позначається наступним чином:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Нехай L – замкнений контур, який обмежує область D і функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні, разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкненій області D і $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Для будь-якого замкненого контуру $L \in D$

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Теорема 3.2. Нехай L – додатно орієнтована замкнена крива, що обмежує область D і функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні, разом із своїми частинними похідними $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ в замкненій області D і на її межі L. Тоді має місце рівність

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,. \tag{3.22}$$

Цю рівність називають *формулою Гріна*. Вона встановлює зв'язок криволінійного інтеграла другого роду з подвійним інтегралом.

Зв’язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду

Позначивши через α і β кути, що утворюються з осями координат Ox і Oy векторним елементом $\overline{dl}$ дотичної до кривої AB в точці $M(x;y)$ (рис. 3.5), отримаємо:

$$dx=dl\cos\alpha\,,\;\; dy=dl\sin\alpha=dl\cos\beta\,,$$

де $\sin\alpha$, $\cos\beta$ – напрямні косинуси вектора $\overline{dl}$.

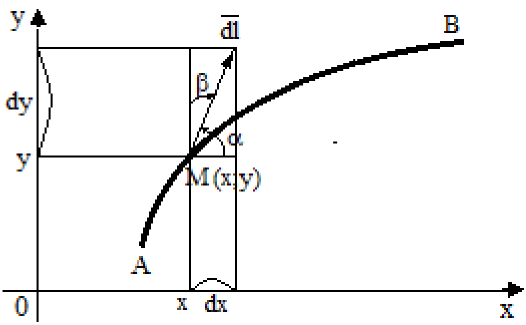

Рисунок 3.5

Криволінійний інтеграл другого роду можна звести до криволінійного інтеграла першого роду:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AB} P\cos\alpha dl + Q\cos\beta dl\,, \qquad (3.23)$$

Зауваження. За додатний напрям векторного елемента дотичної приймається той, що відповідає напряму руху точки по кривій від точки A до точки B.

Застосування криволінійного інтеграла другого роду

а) Площа плоскої фігури D, обмеженої кривою L, обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{L} x\,dy - y\,dx\,. \qquad (3.24)$$

б) Робота сили $\overrightarrow{F} = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L визначається формулою:

$$A = \int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,. \qquad (3.25)$$

Задача 23. Знайти криволінійний інтеграл $\int\limits_{L} \frac{y^2}{x}dx + x^2 dy$, де L – дуга кривої $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(\mathrm{e};1)$.

Розв’язання.

Зауважимо, що область визначення підінтегральної функції $x \neq 0$, тому лінія інтегрування L не має перетинати з віссю Oy. У нашому випадку крива $y = \ln x$ розташована праворуч від вісі Oy (Рис. 3.6).

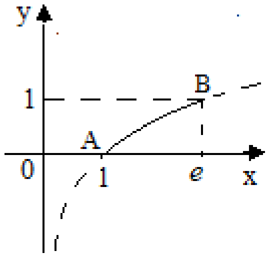

Рисунок 3.6

За властивістю б) інтеграл можна записати як суму двох інтегралів:

$$\int_L \frac{y^2}{x}dx + x^2dy = \int_L \frac{y^2}{x}dx + \int_L x^2dy.$$

Обчислимо кожний з них окремо.

1) $\int_L \frac{y^2}{x}dx = [y = \ln x] = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_1^e \ln^2 x d\ln x =$

$= \left.\frac{\ln^3 x}{3}\right|_1^e = \frac{1}{3}\left(\ln^3 \mathrm{e} - \ln^3 1\right) = \frac{1}{3}.$

2) $\int_L x^2dy = \left[\, y = \ln x,\, dy = \frac{1}{x}dx \,\right] = \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x}dx = \int_1^e x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^e = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right).$

Тоді $I = \int_L \frac{y^2}{x}dx + x^2dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right) = \frac{3\mathrm{e}^2 - 1}{6}.$

Відповідь: $I = \frac{3\mathrm{e}^2 - 1}{6}.$

Задача 24. Знайти інтеграл $\int_L \left(6x^2 + y\right)dx + (x - 2y)dy$, де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$.

Розв’язання.

Оскільки L – дуга параболи $y = x^2$, то $dy = 2x\,dx$. Тоді за формулою (3.16) матимемо

$$I = \int_L \left(6x^2 + y\right)dx + (x - 2y)dy = \int_0^1 \left(6x^2 + x^2 + \left(x - 2x^2\right)\cdot 2x\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(9x^2 - 4x^3\right)dx = \left(3x^3 - x^4\right)\Big|_0^1 = 3 - 1 = 2.$$

Відповідь: $I = 2$.

Задача 25. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\oint_L xydx + dy$, де L – замкнений контур, утворений лініями: $y = x^2,\ y = 1,\ x = 0$.

Розв'язання.

Для замкненого контуру існує лише два напрями обходу: проти руху стрілки годинника (додатна орієнтація контуру) та за рухом стрілки годинника (від'ємна орієнтація контуру). При додатній орієнтації контуру область, що обмежена контуром, завжди залишається зліва при його обході (рис. 3.7).

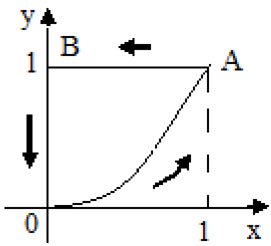

Рисунок 3.7

1 спосіб. Маємо

$$\oint_L xydx + dy = \int_{OA} xydx + dy + \int_{AB} xydx + dy + \int_{BO} xydx + dy.$$

Знайдемо кожний інтеграл:

а) рівняння OA: $y = x^2$, $dy = 2xdx,\ 0 \le x \le 1$. Тоді

$$\int\limits_{OA} xydx + dy = \int\limits_0^1 x^3 dx + 2xdx = \left(\frac{x^4}{4} + x^2 \right) \Bigg|_0^1 = \frac{5}{4};$$

б) рівняння AB: $y = 1,\ dy = 0$, x змінюється від 1 до 0. Тоді

$$\int\limits_{AB} xydx + dy = \int\limits_1^0 xdx = \frac{x^2}{2} \Bigg|_1^0 = -\frac{1}{2};$$

с) рівняння BO: $x = 0,\ dx = 0$, y змінюється від 1 до 0. Тоді

$$\int\limits_{BO} xydx + dy = \int\limits_1^0 dy = y \Big|_1^0 = -1.$$

Матимемо $I = \oint\limits_L xydx + dy = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}$.

2 спосіб. Оскільки область інтегрування замкнена, то зручно при обчисленні інтеграла застосувати формулу Гріна. Маємо $P(x, y) = xy$ і $Q(x, y) = 1$. Тоді $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial y} = x$ і $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - x = -x$.

За формулою Гріна (3.22) матимемо

$$I = \oint\limits_L xydx + dy = \iint\limits_{OAB} -xdxdy = -\int\limits_0^1 xdx \int\limits_{x^2}^1 dy = -\int\limits_0^1 xdx \cdot y\Big|_{x^2}^1 = -\int\limits_0^1 x\left(1 - x^2\right)dx =$$

$$= -\int\limits_0^1 \left(x - x^3\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $I = -\frac{1}{4}$.

Задача 26. Впевнитись, що заданий вираз du є повним диференціалом деякої функції і знайти цю функцію за допомогою криволінійного інтегралу:

$$du = \left(x^2 + 2xy - y^2\right) dx + \left(x^2 - 2xy + y^2\right) dy.$$

Розв’язання.

Позначимо $P(x,y)=x^2+2xy-y^2$ і $Q(x,y)=x^2-2xy+y^2$. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. $\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-2y$. Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то вираз $\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy+y^2\right)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$. Функцію знаходимо за формулою (3.20). В якості точки $(x_0;y_0)$ можна взяти точку $(0;0)$: $x_0=0$, $y_0=0$. Тоді

$$u(x,y)=\int_0^x\left(x^2+2x\cdot 0-0\right)dx+\int_0^y\left(x^2-2xy+y^2\right)dy+C=$$

$$=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^x+\left.\left(x^2y-xy^2+\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^y+C=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2+\frac{y^3}{3}+C.$$

Відповідь: $u(x,y)=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2+\frac{y^3}{3}+C$.

Задача 27. Знайти інтеграл $\oint\limits_L (x+2y)dx+(3x-y)dy$ за формулою Гріна, якщо L – контур трикутника AOB, де $A(1;2)$, $O(0;0)$, $B(1;0)$

Розв’язання.

Розглянемо трикутника AOB (рис. 3.8).

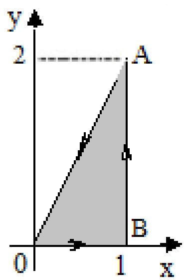

Рисунок 3.8

Позначимо $P(x,y)=x+2y$ і $Q(x,y)=3x-y$. Знайдемо частинні похідні. Оскільки $\frac{\partial Q}{\partial x}=3$ і $\frac{\partial P}{\partial y}=2$, то $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3-2=1$. За формулою Гріна (3.22) матимемо

$$I=\oint\limits_L (x+2y)dx+(3x-y)dy=\iint\limits_{AOB} 1\cdot dxdy=\iint\limits_{AOB} dxdy=$$

$$=\mathrm{S}_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1.$$

Відповідь: $I=1$.

Задача 28. Знайти роботу сили $\overrightarrow{F}=(x-y)\,\vec{i}+\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L: $x^2+y^2=4,\ y\geq 0$ від точки $A(2;0)$ до точки $B(-2;0)$.

Розв'язання.

Роботу сили знайдемо за формулою (3.25): $A=\int\limits_L (x-y)dx+dy$. Запишемо рівняння кривої L у параметричному вигляді: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $0\leq t\leq \pi$. Тоді $dx=-2\sin t\,dt$, $dy=2\cos t\,dt$.

$$A=\int\limits_0^{\pi}\left((2\cos t-2\sin t)(-2\sin t)+2\cos t\right)dt=$$

$$=2\int\limits_0^{\pi}\left(-2\sin t\cos t+2\sin^2 t+\cos t\right)dt=2\int\limits_0^{\pi}(-\sin 2t+1-\cos 2t+\cos t)dt=$$

$$=(\cos 2t+2t-\sin 2t+2\sin t)\Big|_0^{\pi}=\cos 2\pi+2\pi-\sin 2\pi+2\sin\pi-\cos 0-$$

$$-0+\sin 0-\sin 0-2\sin 0=2\pi \text{ (од.роб.)}$$

Відповідь: $A=2\pi$ од. роб.

4 ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Поверхневий інтеграл – це узагальнення поняття криволінійного інтеграла на випадки, коли інтегрування відбувається по обмеженій поверхні. Як і криволінійні інтеграли, поверхневі інтеграли бувають першого роду і другого роду.

4.1 Поверхневі інтеграли першого роду. Обчислення та застосування

Означення 4.1. Поверхня називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина і при переході від точки до точки положення цієї дотичної площини змінюється неперервно.

Розглянемо гладку поверхню S, яка обмежена гладким або кусково-гладким контуром L. Нехай у точках цієї поверхні визначена обмежена функція $F(M) = f(x, y, z)$.

Означення 4.2. *Поверхневим інтегралом першого роду* називається границя інтегральної суми, якщо вона існує і не залежить від способу розбиття поверхні S на частини ΔS_i і вибору довільних точок $M_i(\varsigma_i, \eta_i, \zeta_i)$ в них

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i = \iint_S f(x, y, z)\,dS\,, \tag{4.1}$$

де $\lambda = \max\limits_{0\le i\le n} \operatorname{diam} \Delta S_i$.

Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в точках поверхні S, то вона інтегровна по цій поверхні.

Основні властивості поверхневого інтеграла першого роду повторюють властивості подвійного інтеграла. Відмітимо лише, що поверхневий інтеграл першого роду не залежить від орієнтації поверхні S.

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

Якщо гладка поверхня S задана рівнянням $z = z(x, y)$ і однозначно проєктується на площину xOy в область D, то поверхневій інтеграл 1-го роду зводиться до подвійного інтеграла:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy, \qquad (4.2)$$

де функції $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ неперервні в області D.

Поверхню S можна проєктувати на будь-яку координатну площину, залежно від умов.

Якщо поверхня S задається рівнянням $y = y(x, z)$ або $x = x(y, z)$, то

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz, \qquad (4.3)$$

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dydz, \qquad (4.4)$$

де D_{xz} та D_{yz} є проєкціями поверхні на координатні площини xOz та yOz відповідно.

Застосування поверхневого інтеграла першого роду

1. Якщо покласти $f(x, y, z) = 1$ на поверхні S, то формула

$$P = \iint_S dS \qquad (4.5)$$

є формулою обчислення *площі поверхні*.

2. Якщо на кусково-гладкій поверхні S розподілено масу з поверхневою густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, то

а) маса матеріальної поверхні

$$m = \iint_S \gamma(x, y, z) dS ; \tag{4.6}$$

б) координати центра $(x_c; y_c; z_c)$ маси поверхні визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{m} M_{yz} = \frac{1}{m} \iint_S x\gamma(x, y, z) dS, \\ y_c &= \frac{1}{m} M_{xz} = \frac{1}{m} \iint_S y\gamma(x, y, z) dS, \\ z_c &= \frac{1}{m} M_{xy} = \frac{1}{m} \iint_S z\gamma(x, y, z) dS, \end{aligned} \tag{4.7}$$

де M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} – статичні моменти поверхні S відносно координатних площин yOz, xOz, xOy відповідно;

в) моменти інерції поверхні відносно осей координат і початку координат визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_S \left(y^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z) dS, \\ I_y &= \iint_S \left(x^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z) dS, \\ I_z &= \iint_S \left(y^2 + y^2\right)\gamma(x, y, z) dS, \\ I_o &= \iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z) dS. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Задача 29. $\iint_S (x + 2y - z) dS$, де S – частина площини $x + 2y + z = 2$ в першому октанті.

Розв'язання.

Записуємо рівняння площини у відрізках $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$ та будуємо її (рис. 4.1).

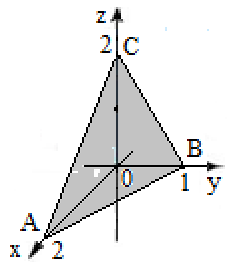

Рисунок 4.1

Проєктуємо площину $S_{\Delta ABC}$ на площину xOy. Розв'язуємо рівняння площини відносно z: $z=2-x-2y$. Знаходимо $z'_x=-1$, $z'_y=-2$. Тоді

$$dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+(-1)^2+(-2)^2}\,dx\,dy=\sqrt{6}\,dx\,dy.$$

Заданий інтеграл знаходимо за формулою (4.2). Підінтегральна функція

$$f(x,y,z(x,y))=x+2y-(2-x-2y)=2x+4y-2.$$

Матимемо

$$I=\iint\limits_S(x+2y-z)dS=\iint\limits_{\Delta AOB}(2x+4y-2)\sqrt{6}\,dx\,dy=$$

$$=\begin{bmatrix} AB: x+2y=2,\ 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 1-\frac{x}{2}\end{bmatrix}=\sqrt{6}\int_0^2 dx\int_0^{1-\frac{x}{2}}(2x+4y-2)dy=$$

$$=\sqrt{6}\int_0^2 dx\cdot\left(2xy+2y^2-2y\right)\Big|_0^{1-\frac{x}{2}}=$$

$$=\sqrt{6}\int_0^2\left(2x\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)+2\left(1-\frac{x}{2}\right)^2-2\left(1-\frac{x}{2}\right)\right)dx=$$

$$=\sqrt{6}\int_0^2\left(2x-x^2+2\left(1-\frac{x}{2}\right)^2-2+x\right)=$$

$$=\sqrt{6}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{4}{3}\left(1-\frac{x}{2}\right)^3-2x\right)\Bigg|_0^2=\sqrt{6}\left(6-\frac{8}{3}-4+\frac{4}{3}\right)=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Відповідь: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

4.2 Поверхневі інтеграли другого роду. Обчислення та застосування

Візьмемо на гладкій поверхні σ довільну точку M. Проведемо в ній нормаль $\vec{n}$ певного напряму і розглянемо на поверхні σ довільний замкнений контур L, який виходить з точки M і повертається в точку M, не перетинаючи при цьому межі поверхні σ. Переміщатимемо точку M по замкненому контуру разом з вектором $\vec{n}$ так, щоб вектор $\vec{n}$ весь час залишався нормальним до σ. При обході заданого контуру ми можемо повернутися в точку M з тим самим або з протилежним напрямом нормалі.

Означення 4.3. Якщо у довільну точку M поверхні σ після обходу довільного замкненого контуру L, розміщеного на поверхні σ, який не перетинає її межу, повертаємося з початковим напрямом нормалі $\vec{n}$, то поверхню називають *двосторонньою*.

Означення 4.4. Якщо при обході деякого контуру напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхню називають *односторонньою*.

Прикладами двосторонніх поверхонь є площина, сфера, довільна замкнена поверхня без самоперетинів, довільна поверхня, задана рівнянням $z=f(x,y)$ де $f(x,y)$, $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ – функції, неперервні в деякій області D площини xOy.

Прикладом односторонньої поверхні є так звана стрічка Мебіуса.

Двостороння поверхня є орієнтована поверхня (вибрано сторону). Будемо вважати за *додатний* той напрям обходу контуру L, коли обхід відбувається проти руху годинникової стрілки, а область, що ним обмежена, залишається зліва. Протилежний напрям обходу називається *від'ємним*.

Поверхневий інтеграл другого роду існує у випадку двосторонньої поверхні.

Нехай σ – гладка поверхня, задана рівнянням $z = f(x, y)$ і $R(x, y, z)$ – обмежена функція, визначена в точках поверхні σ (рис. 4.2).

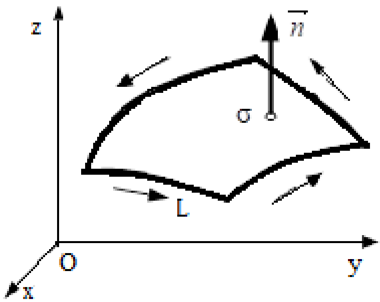

Рисунок 4.2

Зорієнтуємо поверхню σ. Розіб'ємо її довільно на n частин: σ_i. Позначимо через D_i проєкцію i-ї частини поверхні σ_i на площину xOy, а через ΔS_i – площу D_i, взяту із знаком плюс, якщо обрана зовнішня сторона поверхні σ, та із знаком мінус, якщо обрана внутрішня сторона поверхні σ. Виберемо в кожній частині σ_i довільну точку $M_i(\varsigma_i, \eta_i, \zeta_i)$ і складемо інтегральну суму $\sum\limits_{i=1}^{n} R(\varsigma_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$. Нехай $\lambda = \max\limits_{0 \le i \le n} \operatorname{diam} \sigma_i$ – максимальний діаметр поверхонь σ_i.

Означення 4.5. Якщо існує границя інтегральної суми при $\lambda \to 0$ і не залежить від способу розбиття поверхні σ на частини $\Delta\sigma_i$ і вибору довільних точок $M_i(\varsigma_i, \eta_i, \zeta_i)$ в них, то вона називається *поверхневим інтегралом другого роду* від функції $R(x, y, z)$ по вибраній стороні поверхні σ і позначається

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} R(\varsigma_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i = \iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy, \qquad (4.9)$$

де ΔS_i – проєкція $\Delta\sigma_i$ на площину xOy.

З означення поверхневого інтеграла другого роду випливає, що при зміні сторони поверхні на протилежну інтеграл змінює знак, бо змінює знак ΔS_i.

Поверхню σ можна також проєктувати на координатні площини xOz та yOz. Тоді матимемо ще два поверхневі інтеграли $\iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz$, $\iint_{\sigma} Q(x, y, z)dxdz$, де функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ визначені та обмежені в точках поверхні σ.

На практиці найпоширенішим є поверхневий інтеграл другого роду вигляду

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy =$$
$$= \iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz + \iint_{\sigma} Q(x, y, z)dxdz + \iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy. \qquad (4.10)$$

Поверхневий інтеграл другого роду можна звести до поверхневого інтеграла першого роду:

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy =$$
$$= \iint_{\sigma} \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right)d\sigma, \qquad (4.11)$$

де α, β, γ – кути між нормаллю $\vec{n}$ до поверхні σ у довільній її точці та осями Ox, Oy, Oz відповідно.

Нехай поверхня σ задана рівнянням $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, де область D_{xy} – проєкція поверхні σ на площину xOy. Тоді

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy. \qquad (4.12)$$

Знак "+" беремо у випадку, коли нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Oz. Якщо кут тупий, то беремо "–". Аналогічно, якщо поверхня σ задана рівняннями $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ і D_{yz}, D_{xz} проєкції поверхні σ відповідно на площини yOz та xOz, то матимемо

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)dydz, \qquad (4.13)$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z)dxdz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)dxdz. \qquad (4.14)$$

Знак "+" беремо у випадку, коли нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Ox, Oy відповідно, а "–" – коли кут тупий.

Якщо поверхня σ задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то одиничний вектор нормалі до поверхні обчислюється за формулою

$$\vec{n}^{\,0} = \pm \frac{(F'_x, F'_y, F'_z)}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}. \qquad (4.15)$$

Знак "±" відповідає двом сторонам поверхні σ.

Формула Остроградського-Гаусса

Вона встановлює зв’язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні σ і потрійним інтегралом по просторовій області G, обмеженій цією поверхнею:

$$\iiint_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy, \qquad (4.16)$$

де функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ та їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{dy}, \frac{\partial R}{dz}$ неперервні в області G.

За допомогою формули Остроградського-Гаусса зручно обчислювати поверхневі інтеграли по замкнених поверхнях.

Формула Стокса

Вона встановлює зв'язок між поверхневим і криволінійним інтегралами.

Якщо поверхня σ, яка обмежена замкненим контуром L, задана рівнянням $z = z(x,y)$ і функції $z = z(x,y)$, $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ неперервні в області D, яка є проєкцією поверхні σ на площину xOy, то:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$\iint_\sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (4.17)$$

де функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ та їх частинні похідні першого порядку неперервні на поверхні σ.

З формули Стокса випливає, що при виконанні рівностей $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, криволінійний інтеграл по довільному просторовому замкненому контуру L дорівнює нулю:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Це означає, що криволінійний інтеграл не залежить від форми контуру інтегрування.

Формулу Стокса зручно використовувати при обчисленні криволінійних інтегралів по замкнених контурах.

Задача 30. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\sigma}(z+xy)dxdz$, де σ – нижня сторона площини $x+2y+z=1$, яка обмежена координатними площинами.

Розв'язання.

Маємо інтеграл $\iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz$. Записуємо рівняння площини у відрізках $\frac{x}{1}+\frac{y}{0{,}5}+\frac{z}{1}=1$ та будуємо її (рис. 4.3).

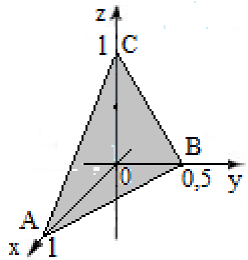

Рисунок 4.3

Проєктуємо площину $\sigma_{\Delta ABC}$ на площину xOz. Заданий інтеграл знаходимо за формулою (4.14). За умовою задачі розглядаємо нижню сторону ΔABC. Тому в правій частині формули (4.14) беремо знак "–" (нормаль до верхньої сторони ΔABC з віссю Oy утворює гострий кут, а з нижньою стороною – тупий кут). Розв'язуємо рівняння площини відносно y: $y=\frac{1}{2}(1-x-z)$ і підставляємо в підінтегральну функцію. Вона матиме вигляд:

$$Q(x,y(x,z),z)=z+\frac{x}{2}(1-x-z)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+z-\frac{xz}{2}.$$

Знаходимо заданий інтеграл

$$I=\iint_{\sigma}(z+xy)dxdz=-\iint_{\Delta AOC}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+z-\frac{xz}{2}\right)dxdz=$$

$$=\begin{bmatrix} AC\colon x+z=1, 0\le x\le 1 \\ 0\le z\le 1-x \end{bmatrix}=-\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+z-\frac{xz}{2}\right)dz=$$

$$=-\int_0^1 dx\left(\frac{1}{2}\left(-x^2+x\right)z+\frac{z^2}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{1-x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\left(-x^2+x\right)(1-x)+(1-x)^2\left(1-\frac{x}{2}\right)\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(-x^2+x+x^3-x^2+(1-x)^2-\frac{1}{2}\left(x-2x^2+x^3\right)\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{(1-x)^3}{3}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{3}{16}.$$

Відповідь: $I=-\dfrac{3}{16}$.

5 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

5.1 Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт скалярного поля

Скалярне поле задано, якщо кожній точці M поставлено у відповідність певне число $u(M)$. В прямокутній декартовій системі координат у просторі скалярне поле може бути задано функцією $u(M)=u(x,y,z)$.

Похідна скалярного поля $u(M)$ *за напрямом* l, заданому вектором $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\,, \tag{5.1}$$

де $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$,

$\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$,

$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\vec{a}|}$,

$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

Якщо в просторі вибрана декартова система координат і задано скалярне поле функцією $u(M)$, то *градієнт скалярного поля* обчислюється за формулою

$$\overrightarrow{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\,. \tag{5.2}$$

Між похідною поля $u(M)$ за напрямом l і градієнтом існує наступний зв’язок:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{a}^o \cdot \overrightarrow{grad}\ u = \left|\overrightarrow{grad}\ u\right| \cdot \cos\theta = np_{\vec{a}^o}\ \overrightarrow{grad}\ u\ , \qquad (5.3)$$

де $\vec{a}^o = \cos\alpha\ \vec{i}\ + \cos\beta\ \vec{j}\ + \cos\gamma\ \vec{k}$ – одиничний вектор напряму l,

θ – кут між градієнтом $\overrightarrow{grad}\,u$ та вектором $\vec{a}^o$.

З попередньої формули випливає, що максимальне значення похідної за напрямом досягається в напрямі градієнта і її значення дорівнює модулю градієнта

$$\max\frac{\partial u}{\partial l} = \left|\overrightarrow{grad}\ u\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\ . \qquad (5.4)$$

Якщо у тривимірному просторі поверхня задана рівнянням $\varphi(x,y,z) = c$, то градієнт буде перпендикулярний до цієї поверхні в довільній її точці. Тобто нормальний вектор $\vec{n}$ до поверхні може бути записаний у вигляді $\vec{n} = \overrightarrow{grad}\ \varphi$, а нормальний одиничний вектор буде дорівнювати $\vec{n}^o = \dfrac{\overrightarrow{grad}\ \varphi}{\left|\overrightarrow{grad}\ \varphi\right|}$.

5.2 Векторне поле. Дивергенція, ротор, циркуляція векторного поля

Якщо кожній точці M деякої області V поставлено у відповідність векторну функцію $\vec{F}(M)$, то кажуть, що в області V задано *векторне поле*. У прямокутній декартовій системі координат у просторі векторне поле визначається векторною функцією точки:

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}\left(\vec{r}\right) = P(x,y,z)\,\vec{i}\ + Q(x,y,z)\ \vec{j}\ + R(x,y,z)\ \vec{k}\ ,$$

де $M(x, y, z)$ – точка простору,

$\vec{r} = (x, y, z)$ – її радіус-вектор.

Означення 5.1. Дивергенцією (розбіжністю) векторного поля $\overrightarrow{F}(M)$ в точці M називається об'ємна густина потоку векторного поля:

$$div\,\overrightarrow{F}(M)=\lim_{\sigma\to M}\frac{1}{v}\iint\limits_{\sigma}\overrightarrow{F}\cdot\vec{n}^{\,0}\,d\sigma\,, \tag{5.5}$$

де v – об'єм, обмежений замкненою поверхнею σ, яка містить точку M.

У декартовій системі координат дивергенція обчислюється за формулою:

$$div\,\overrightarrow{F}(M)=\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,. \tag{5.6}$$

Означення 5.2. Векторне поле $\overrightarrow{F}(M)$ називається *соленоїдальним*, якщо $div\,\overrightarrow{F}(M)=0$.

Векторному полю $\overrightarrow{F}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ можна поставити у відповідність інше векторне поле, яке називається *ротором поля* $\overrightarrow{F}(M)$ і визначається рівністю:

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\,. \tag{5.7}$$

Означення 5.3. Векторне поле $\overrightarrow{F}(M)$ називається *потенціальним* в однозв'язній області тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{F}(M)=0$.

Градієнт скалярного поля, дивергенція і ротор векторного поля можуть бути записані за допомогою *оператора набла (оператора Гамільтона)*:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} . \tag{5.8}$$

Тоді $\overrightarrow{grad}\, u = \nabla u$, $div\, \vec{F}(M) = \nabla \cdot \vec{F}(M)$, $\overrightarrow{rot}\ \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$.

Означення 5.4. *Лінійним інтегралом векторного поля* $\vec{F}(M)$ *вздовж лінії* l називається криволінійний інтеграл $\int\limits_l \vec{F}\cdot d\,\vec{r} = \int\limits_l F_s \cdot d\, s$, де F_s – проєкція вектора $\vec{F}$ на дотичну до l .

Лінійний інтеграл – це робота векторного поля $\vec{F}(M)$ вздовж лінії l. Враховуючи, що $d\,\vec{r} = d(\vec{i}\ x + \vec{j}\ y + \vec{k}\ z) = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz$ лінійний інтеграл можна записати:

$$\int\limits_l \vec{F}\cdot d\,\vec{r} = \int\limits_l P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz . \tag{5.9}$$

Означення 5.5. *Циркуляцією векторного поля* $\vec{F}(M)$ називається лінійний інтеграл вздовж замкненого контуру l: $Ц = \oint\limits_l \vec{F}\cdot d\,\vec{r}$.

5.3 Застосування формули Остроградського–Гаусса в теорії поля

Задано векторне поле $\vec{F} = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$.

Якщо функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ неперервні разом із своїми частинними похідними 1-го порядку в замкненій області V простору, яка обмежена замкненою гладкою поверхнею S, то справедлива формула Остроградського – Гаусса

$$\oiint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz, \qquad (5.10)$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні S.

Формулі Остроградського–Гаусса можна надати векторний зміст

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}^{o} \cdot ds = \iiint_V div\,\overrightarrow{F}\, dV ,$$

де $\overrightarrow{n}^{o} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – зовнішній нормальний одиничний вектор до поверхні S.

За допомогою формули Остроградського–Гаусса зручно обчислювати потік векторного поля $\overrightarrow{F}$ через замкнену поверхню S:

$$\Pi = \iiint_V div\,\overrightarrow{F}\, dV . \qquad (5.11)$$

5.4 Застосування формули Стокса в теорії поля

Задано векторне поле $\overrightarrow{F} = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$.

Якщо функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ неперервні разом із своїми частинними похідними 1-го порядку на поверхні S і L – замкнений контур, який обмежує поверхню S, то справедлива формула Стокса

$$\oint_l Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n}^{o}\, dS =$$

$$= \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)dS . \qquad (5.12)$$

Цій формулі можна надати векторний зміст:

$$\oint\limits_{l} \overrightarrow{F} \cdot d\,\overrightarrow{r} = \iint\limits_{S} \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}^{0}\, dS\,.$$

Маємо, що циркуляція по замкненому контуру l дорівнює потоку ротора через поверхню S, яка натягнута на контур l:

$$Ц = \iint\limits_{S} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}^{o} dS\,. \qquad (5.13)$$

Задача 31. Знайти похідну функції $u(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x}}{z} - \dfrac{\sqrt{y}}{x} + 2xyz$ у напрямі вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$ в точці M_1 та $\overrightarrow{grad}\,u(M_1)$**,** якщо $M_1(1,1,-1)$, $M_2(-2,-1,1)$.

Розв'язання.

Похідну функції $u = u(x, y, z)$ у напрямі вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$ в точці M_1 обчислюємо за формулою:

$$\frac{\partial u(\mathrm{M}_1)}{\partial \overrightarrow{M_1M_2}} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{M}_1} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\mathrm{M}_1} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\mathrm{M}_1} \cos\gamma\,,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$ **.**

Знайдемо вектор $\overline{M_1M_2} = (-3,-2,2)$, довжина якого $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$. Напрямні косинуси вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$: $\cos\alpha = \dfrac{-3}{\sqrt{17}}$, $\cos\beta = \dfrac{-2}{\sqrt{17}}$, $\cos\gamma = \dfrac{2}{17}$.

Обчислимо частинні похідні першого порядку функції $u = u(x, y, z)$ в точці M_1: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{2z\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{y}}{x^2} + 2yz$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{M}_1} = -\dfrac{3}{2}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{y}} + 2xz$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\mathrm{M}_1} = -\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{-\sqrt{x}}{z^2} + 2xy$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{\mathrm{M}_1} = 1$.

Маємо:

$$\frac{\partial u(\mathrm{M}_1)}{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}} = -\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{\sqrt{17}}\right) - \frac{5}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right) + 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{23}{2\sqrt{17}} = \frac{23\sqrt{17}}{34}\,.$$

Градієнт функції $u = u(x, y, z)$ в точці M_1 знайдемо за формулою: $\overrightarrow{grad}\ u(M_1) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1} \bar{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1} \bar{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1} \bar{k}$.

Маємо $\overrightarrow{grad}\ u(M_1) = -\frac{3}{2}\bar{i} - \frac{5}{2}\bar{j} + \bar{k}$.

Відповідь: $\frac{\partial u(\mathrm{M}_1)}{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}} = \frac{23\sqrt{17}}{34}$, $\overrightarrow{grad}\ u(M_1) = -\frac{3}{2}\bar{i} - \frac{5}{2}\bar{j} + \bar{k}$.

Задача 32. Знайти $\overrightarrow{rot}\ \vec{a}\,(M_0)$, $\left|\overrightarrow{rot}\ \vec{a}\,(M_0)\right|$ та $div\ \vec{a}\,(\mathrm{M}_0)$ для векторного поля $\vec{a} = x\,y^2 z^2\,\vec{i} + x^2 y\,z^2\,\vec{j} + x\,y\,z\,\vec{k}$, де точка $M_0(2,-1,\ 1)$.

Розв'язання.

За означенням ротор векторного поля $\vec{a}\,(M) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$ в довільній точці $M\,(x, y, z)$ знаходиться за формулою (5.7):

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & xyz \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial(xyz)}{\partial y} - \frac{\partial\left(x^2yz^2\right)}{\partial z}\right) -$$

$$-\vec{j}\left(\frac{\partial(xyz)}{\partial x} - \frac{\partial\left(xy^2z^2\right)}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial\left(x^2yz^2\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(xy^2z^2\right)}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(xz - 2x^2yz\right)\vec{i} - \left(yz - 2xy^2z\right)\vec{j} + \left(2xyz^2 - 2xyz^2\right)\vec{k}\ .$$

Знайдемо ротор в точці M_0 і його модуль: $\overrightarrow{rot}\ \vec{a}\,(\mathrm{M}_0) = 10\bar{i} + 5\bar{j}$, $\left|\overrightarrow{rot}\ \vec{a}\,(M_0)\right| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$.

Дивергенцію векторного поля $\vec{a} = \vec{a}\,(M)$ в довільній точці $M\,(x, y, z)$ знаходимо за формулою (5.6). В нашому випадку

$$div\,\vec{a}\,(M) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\,y^2 z^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y\,z^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}(x\,y\,z) = y^2 z^2 + x^2 z^2 + x\,y\ .$$

Дивергенція в точці M_0: $div\,\vec{a}\,(M_0)=3$.

Відповідь: $\overrightarrow{rot}\,\vec{a}\,(M_0)=10\bar{i}+5\bar{j}$, $\left|\overrightarrow{rot}\,\vec{a}\,(M_0)\right|=5\sqrt{5}$,

$div\,\vec{a}\,(M_0)=3$.

Задача 33. Обчислити потік векторного поля

$$\vec{a}\,(M)=(x+z)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}+z\,\vec{k}$$

через зовнішню поверхню піраміди, створену площиною $x-2y+2z=4$ та координатними площинами, двома способами: а) за означенням; б) за допомогою формули Остроградського–Гаусса.

Розв'язання.

а) Запишемо рівняння площини у відрізках: $\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=1$ і побудуємо її (рис. 5.1).

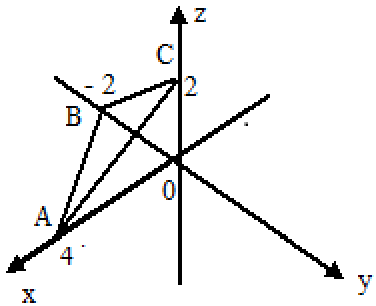

Рисунок 5.1

Маємо піраміду $OABC$. Обчислимо потік за допомогою поверхневого інтеграла

$$\Pi=\iint_S \bar{a}\cdot\bar{n}^o dS,$$

де S – зовнішня поверхня піраміди $OABC$.

Обчислимо потік через кожну грань піраміди:

$$\Pi=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4.$$

1) $\Pi_1 = \Pi_{\Delta AOC}$. Трикутник ΔAOC лежить у площині xOz і має рівняння $y = 0$. Нормальний вектор $\vec{n} = (0;1;0)$, $\vec{n}^{\,o} = j$, $d\,S = dx\,dz$.

Рівняння AC: $x + 2z = 4$, $0 \le x \le 4$. Знайдемо $\vec{a} \cdot \vec{n}^{\,o} = 2y - x,\ \vec{a} \cdot \vec{n}^{\,o}\Big|_{y=0} = -x$. Потік через ΔAOC:

$$\Pi_1 = -\iint\limits_{\Delta AOC} x dS = -\iint\limits_{\Delta AOC} x\,dx\,dz = -\int_0^4 x\,dx \int_0^{2-\frac{x}{2}} dz = -\int_0^4 x\left(2 - \frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= -\left(x^2 - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^4 = -\frac{16}{3}.$$

2) $\Pi_2 = \Pi_{\Delta AOB}$. Трикутник ΔAOB лежить у площині xOy і має рівняння $z = 0$. Нормальний вектор $\vec{n} = (0;\ 0;\ 1)$. Оскільки мова йде про зовнішню сторону, то $\vec{n} = (0;0;-1)$. $\vec{n}^{\,o} = -k,\ dS = dxdy$.

Рівняння AB: $x - 2y = 0$, $0 \le x \le 4$. Знайдемо $\vec{a} \cdot \vec{n}^{\,o} = -z,\ \vec{a} \cdot \vec{n}^{\,o}\Big|_{z=0} = 0$. Потік через ΔAOB : $\Pi_2 = \iint\limits_{\Delta AOB} 0 \cdot dxdy = 0$.

3) $\Pi_3 = \Pi_{\Delta BOC}$. Трикутник ΔBOC лежить у площині yOz і має рівняння $x = 0$. Нормальний вектор $\vec{n} = (1;\ 0;\ 0)$. Оскільки мається на увазі зовнішня сторона, то $\vec{n} = (-1;\ 0;\ 0)$, $\vec{n}^{\,o} = -i,\ dS = dydz$.

Рівняння BC: $-2y + 2z = 4$, $0 \le z \le 2$. Знайдемо $\vec{a} \cdot \vec{n}^{\,o} = -(x + z),\ \vec{a} \cdot \vec{n}^{\,o}\Big|_{x=0} = -z$. Потік через ΔBOC :

$$\Pi_3 = -\iint\limits_{\Delta BOC} z\,dy\,dz = -\int_0^2 z\,dz \int_{z-2}^{0} dy = -\int_0^2 z(-z + 2)dz =$$

$$= -\left(-\frac{z^3}{3} + z^2\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{4}{3}.$$

4) $\Pi_4 = \Pi_{\Delta ABB}$. Трикутник ΔABC належить площині $x - 2y + 2z - 4 = 0$. Нормальний вектор площини $\vec{n} = (1; -2; 2)$. Знайдемо орт нормального вектора: $\vec{n}^{\,o} = \dfrac{\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}}{3}$.
Диференціал поверхні визначається формулою: $dS = \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\,dxdy$. Маємо $z = -\dfrac{1}{2}x + y + 2$ і $z'_x = -\dfrac{1}{2}$, $z'_y = 1$ і $dS = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4} + 1}\,dx\,dy = \dfrac{3}{2}\,dx\,dy$.

Знайдемо $\vec{a} \cdot \vec{n}^{\,o} = \dfrac{1}{3}\big(x + z - 2(2y - x) + 2z\big) = \dfrac{1}{3}(3x - 4y + 3z)$. Тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{n}^{\,o}\Big|_{z=-\frac{1}{2}x+y+2} = \frac{1}{3}\left(3x - 4y - \frac{3}{2}x + 3y + 6\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x - y + 6\right).$$

Слід площини ABC на площину xOy – це пряма $x - 2y - 4 = 0$ $\Rightarrow$ $x = 2y + 4,\ -2 \le y \le 0$. Потік через ΔABC:

$$\Pi_4 = \iint\limits_{\Delta ABC} \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x - y + 6\right) \cdot \frac{3}{2}\,dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{2y+4} \left(\frac{3}{2}x - y + 6\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0} dy \left(\frac{3}{4}x^2 + (6 - y)x\right)\Bigg|_{0}^{2y+4} = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}\left(y^2 + 20y + 36\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} + 10y^2 + 36y\right)\Bigg|_{-2}^{0} = \frac{52}{3}.$$

Потік через повну поверхню піраміди $OABC$:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \frac{32}{3}.$$

б) Оскільки піраміда $OABC$ – замкнена поверхня, то за формулою Остроградського–Гаусса (5.11) знаходимо потік через цю поверхню. Знайдемо дивергенцію за формулою (5.6). Частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial\left(x+z\right)}{\partial x}=1,\ \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial\left(2y-x\right)}{\partial y}=2,\ \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial z}{\partial z}=1\,.$$

Оскільки $div\,\vec{a}=1+2+1=4$, то матимемо $\Pi=4\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$.

Інтеграл $\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$ дорівнює об'єму піраміди $OABC$. Маємо:

$$V_{OABC}=\frac{1}{3}S_{AOB}\cdot CO=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AO\cdot BO\cdot CO=\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 2\cdot 2=\frac{8}{3}\,.$$

Тоді $\Pi=4\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=4\cdot\frac{8}{3}=\frac{32}{3}$.

Відповідь: $\Pi=\frac{32}{3}$.

Задача 34. Обчислити циркуляцію векторного поля

$$\vec{a}\left(M\right)=\left(x-2z\right)\vec{i}+\left(x+3y+z\right)\vec{j}+\left(5x+y\right)\vec{k}$$

по контуру трикутника, який з′являється внаслідок перетину площини $x+y+z=1$ з координатними площинами, при додатному напряму обходу відносно нормального вектору $\vec{n}=\left(1,\,1,\,1\right)$ цієї площини двома способами: а) за означенням; б) за формулою Стокса.

Розв'язання.

Побудуємо площину $x+y+z=1$. Маємо ΔABC (рис. 5.2).

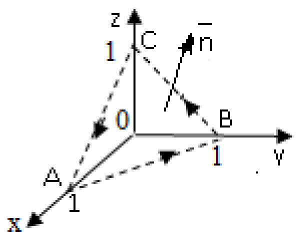

Рисунок 5.2

а) За означенням циркуляція

$$Ц = \oint\limits_{ABCA} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{AB} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dr} + \int\limits_{BC} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dr} + \int\limits_{CA} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dr} .$$

Знайдемо інтеграли.

1) Циркуляція $Ц_1 = Ц_{AB}$. Для відрізка AB маємо: $z = 0$, $x + y = 1$, $y = 1 - x$, $dy = -dx \Rightarrow \vec{a} = x\vec{i} + (x + 3y)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$, $\overrightarrow{dr} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy$, $\vec{a} \cdot \overrightarrow{dr} = x\,dx + (x + 3y)dy$.

$$Ц_1 = Ц_{AB} = \int\limits_{AB} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{AB} x\,dx + (x + 3y)dy = \int\limits_0^1 (x - x - 3(1 - x))dx =$$

$$= \int\limits_1^0 (3x - 3)\,dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - 3x \right)\Bigg|_1^0 = \frac{3}{2}.$$

2) Циркуляція $Ц_2 = Ц_{BC}$. Для відрізка BC маємо: $x = 0$, $y + z = 1$, $z = 1 - y$, $dz = -dy \Rightarrow$

$\vec{a} = -2z\,\vec{i} + (3y + z)\vec{j} + y\,\vec{k}$, $\overrightarrow{dr} = \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz$,

$\vec{a} \cdot \overrightarrow{dr} = (3y + z)dy + y\,dz$.

$$Ц_2 = \int\limits_{BC} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{BC} (3y + z)dy + y\,dz = \int\limits_1^0 (3y + 1 - y - y)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 (y + 1)dy = \frac{(y + 1)^2}{2}\Bigg|_1^0 = -\frac{3}{2}.$$

3) Циркуляція $Ц_3 = Ц_{CA}$. Для відрізка CA маємо: $y = 0$, $x + z = 1$, $dz = -dx \Rightarrow \vec{a} = (x - 2z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + 5x\,\vec{k}$, $\overrightarrow{dr} = \vec{i}\,dx + \vec{k}\,dz$, $\vec{a} \cdot \overrightarrow{dr} = (x - 2z)dx + 5\,x\,dz$.

$$Ц_3 = \int\limits_{CA} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{CA} (x - 2z)dx + 5x\,dz = \int\limits_0^2 (x - 2 + 2x - 5x)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (-2x - 2)dx = \left(-x^2 - 2x\right)\Big|_0^1 = -3.$$

Маємо $Ц = Ц_1 + Ц_2 + Ц_3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3$.

б) Обчислимо циркуляцію векторного поля за формулою Стокса (5.13), а ротор векторного поля – за формулою (5.7):

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-2z & x+3y+z & 5x+y \end{vmatrix} = -7\vec{j} + \vec{k}\ .$$

Якщо поверхня S проєктується у площину xOy, то

$$dS = \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dx\, dy\,.$$

У нашому випадку поверхня S – частина площини, обмеженої ΔABC, який лежить у площині $x + y + z = 1$. Нормальний вектор площини $\bar{n} = (1;1;\ 1)$ забезпечує потрібний напрям орієнтації поверхні. Орт цього вектора $\vec{n}^{\,o} = \frac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{(1;1;1)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1;\ 1;\ 1)$. Знайдемо

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{a}(M)\cdot \vec{n}^{\,o} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-7+1) = -\frac{6}{\sqrt{3}}\,.$$

З рівняння площини маємо: $z = 1 - x - y$, $z'_x = -1$, $z'_y = -1$. Тоді $dS = \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dx\, dy = \sqrt{1+1+1}\, dx\, dy = \sqrt{3}\, dx\, dy$.

$$Ц = \iint\limits_S \frac{-6}{\sqrt{3}}\, dS = \iint\limits_{\Delta AOB} \frac{-6}{\sqrt{3}}\sqrt{3}\, dx\, dy = -6 \iint\limits_{\Delta AOB} dx\, dy\,.$$

Інтеграл $\iint\limits_{\Delta AOB} dxdy$ дорівнює площі ΔAOB:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\cdot AO\cdot BO = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}\ \text{ і }\ Ц = -6\cdot\frac{1}{2} = -3\,.$$

Відповідь: $Ц = -3$.

Задача 35. Задано векторне поле $\vec{F} = (x^2 - 2z)\,\vec{i} + (3z - 4x)\,\vec{j} + (5x + y)\,\vec{k}$ та трикутна піраміда $OABC$, яка обмежена поверхнями $4x+2y+z-4=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. Обчислити: а) потік векторного поля через повну зовнішню поверхню заданої піраміди за формулою Остроградського–Гаусса; б) циркуляцію векторного поля за формулою Стокса по сторонах трикутника ABC в додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця нормального вектора).

Розв'язання.

Запишемо рівняння площини $4x+2y+z-4=0$ у відрізках $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$ і побудуємо її (рис. 5.3).

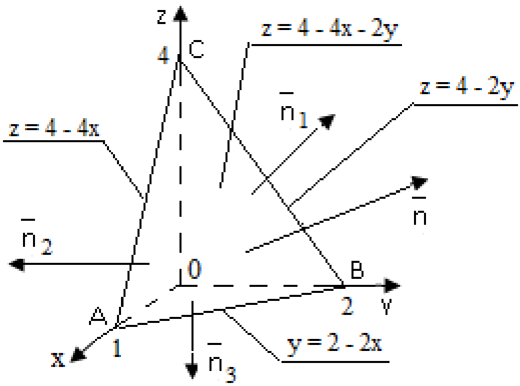

Рисунок 5.3

Маємо піраміду $OABC$ з вершинами у точках $O(0;0;0), A(1;0;0), B(0;2;0)$, $C(0;0;4)$.

а) Обчислимо потік через повну поверхню користуючись формулою Остроградського–Гаусса (5.11). Для цього знайдемо дивергенцію для векторного поля:

$$div\,\overrightarrow{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2x+0+0=2x\,.$$

Тоді

$$\Pi=\iiint\limits_V div\,\overrightarrow{F}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_V 2x\,dx\,dy\,dz=2\int_0^1 x\,dx\int_0^{2-2x}dy\int_0^{4-4x-2y}dz=$$

$$=2\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^{2-2x} z\Big|_0^{4-4x-2y}dy=2\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^{2-2x}(4-4x-2y)\,dy=$$

$$=2\int\limits_0^1 x\cdot\left((4-4x)y-y^2\right)\Big|_0^{2-2x}dx=2\int\limits_0^1 x\cdot\left((4-4x)\cdot(2-2x)-(2-2x)^2\right)dx=$$

$$=2\int\limits_0^1 x\cdot\left(4x^2-8x+4\right)dx=2\int\limits_0^1\left(4x^3-8x^2+4x\right)dx=$$

$$=2\cdot\left(x^4-\frac{8}{3}x^3+2x^2\right)\Bigg|_0^1=2\cdot\left(1-\frac{8}{3}+2\right)=\frac{2}{3}.$$

б) Знайдемо циркуляцію користуючись формулою Стокса (5.13), а ротор векторного поля – за формулою (5.7):

Знайдемо вектор $\overrightarrow{rot}\ \vec{F}$:

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2-2z & 3z-4x & 5x+y\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(\frac{\partial(5x+y)}{\partial y}-\frac{\partial(3z-4x)}{\partial z}\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial(5x+y)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2-2z)}{\partial z}\right)+$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial(3z-4x)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2-2z)}{\partial y}\right)=\vec{i}\ (1-3)-\vec{j}\ (5+2)+\vec{k}\ (-4)=$$

$$=-2\vec{i}-7\vec{j}-4\vec{k}.$$

Якщо поверхня S проєктується у площину xOy, то

$$dS=\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dx\,dy.$$

У нашому випадку поверхня S – частина площини, обмеженої ΔABC, який лежить у площині $4x+2y+z-4=0$. Нормальний вектор площини $\bar{n}=(4;\ 2;\ 1)$ забезпечує потрібний напрям орієнтації поверхні. Орт цього вектора $\vec{n}^{o}=\dfrac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{(4;2;1)}{\sqrt{21}}=\dfrac{1}{\sqrt{21}}(4;2;1)$.

Знайдемо

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{F}\cdot\vec{n}^{o}=\frac{1}{\sqrt{21}}(-8-14-4)=-\frac{26}{\sqrt{21}}.$$

З рівняння площини маємо: $z=4-4x-2y$, $z'_x=-4$, $z'_y=-2$. Тоді

$$dS=\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+16+4}\,dx\,dy=\sqrt{21}\,dx\,dy.$$

$$Ц=\iint\limits_{S}\frac{-26}{\sqrt{21}}dS=\iint\limits_{\Delta AOB}\frac{-26}{\sqrt{21}}\sqrt{21}\,dx\,dy=-26\iint\limits_{\Delta AOB}dx\,dy.$$

Інтеграл $\iint\limits_{\Delta AOB}dxdy$ дорівнює площі ΔAOB:

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot BO=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1 \text{ і } Ц=-26\cdot 1=-26.$$

Відповідь: $П=\dfrac{2}{3}$, $Ц=-26$.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика : підруч. : у 2 кн. / Г. Й. Призва та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ : Либідь, 2003. Кн. 1. Основні розділи. 400 с.

2. Вища математика: збірник задач : навч. посіб. / В. П. Дубовик та ін.; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. Київ : А.С.К., 2005. 480 с.

3. Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Київ : Книги України ЛТД, 2009. Т.3. 400 с.

4. Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. Вища математика: навч. посіб. Київ : Віпол, 2004. Ч. 2. 400 с.

5. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. Київ : Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.

6. Килимник І. М., Полякова Т. Г. Практикум з інтегрування функції однієї змінної: навч. посіб. Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2020. 306 с.

7. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. 2-ге вид. Київ : Центр учбової літератури, 2009. 594 с.

8. Корнілович Є Ю., Петрусенко В. П., Трофименко В. І. Вища математика. Модуль 7. Кратні, криволінійні інтеграли та елементи теорії поля : навч. посіб. Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2006. 148 с.

9. Кузьма О. В., Яцюк В. Т. Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли. Основи теорії поля : навч. метод. посіб. Київ : НТУУ «КПІ», 2016. 113 с.

10. Методичні вказівки до розрахункових робіт з вищої математики. Розділи: «Кратні інтеграли», «Криволінійні та поверхневі інтеграли» для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання / "Запорізька політехніка" нац. ун-т. Каф. математики ; уклад.: І. М. Килимник. Запоріжжя : НУ "Запорізька політехніка", 2025. 73 с.

11. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. П. Вища математика : підруч. : у 2 ч. / за заг. ред. П. П. Овчинникова. Київ : Техніка, 2003. Ч. 1. 600 с.

12. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика : Підручник . Дніпропетровськ : «Видавництво Сталкер», 2003. 496 с.

13. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: навч. посіб. Харків : УкрДУЗТ, 2023. Ч. 2. 251 с.