

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет



МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт
з дисципліни

"Методологія наукових досліджень"

для магістрів спеціальності 172 «Телекомунікації та
радіотехніка» (освітні програми «Радіоелектронні апарати та
засоби» та «Інтелектуальні технології мікросистемної
радіоелектронної техніки»)
усіх форм навчання

2018

Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни "Методологія наукових досліджень", для магістрів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» (освітні програми «Радіoeлектронні апарати та засоби» та «Інтелектуальні технології мікросистемної радіoeлектронної техніки») усіх форм навчання / Уклад.: Шило Г.М., Поспеева І.Є. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018. – 34 с.

Укладачі : Шило Галина Миколаївна, канд. техн. наук,
доц.
Поспеева Ірина Євгенівна, ст.викладач.

Рецензент: Фарафонов Олексій Юрійович, канд. техн. наук,
доцент

Відповідальний за випуск: Шило Галина Миколаївна, канд.
техн. наук, доц., зав. каф. ІТЕЗ,

Розглянуто
на засіданні кафедри ІТЕЗ
протокол № 6 від 29.01.18 р.

Затверджено
на засіданні НМК ФРЕТ
протокол № 5 від 30.01.18 р.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ	4
1. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1.	
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ	5
1.1 Загальні відомості	5
1.2 Геометрична інтерпретація ЗЛП та графічний метод рішення	7
1.3 Симплекс-метод метод вирішення ЗЛП	9
1.4 Метод потенціалів для транспортної задачі	15
1.5 Завдання до роботи	21
1.6 Контрольні запитання	23
2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2.	
МЕТОДИ РЕГРЕСІЙНОГО АНАЛІЗУ	24
2.1 Загальні відомості	24
2.2 Побудова простої лінійної регресійної моделі методом МНК	26
2.3 Побудова множинної регресійної моделі матричним методом	28
2.4 Завдання до роботи	31
2.5 Контрольні запитання	33
ЛІТЕРАТУРА	34

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Мета лабораторних робіт, поданих в цих методичних вказівках — закріпити і поглибити знання, одержані на лекційних заняттях, і виробити в студентів уміння застосувати математичні методи для вирішення практичних завдань при наукових дослідженнях.

Оскільки дані методичні вказівки призначені для студентів всіх видів навчання, теоретичні відомості подані в методичних вказівках в обсягу, мінімально необхідному для виконання лабораторних робіт.

Усі математичні методи супроводжуються прикладами.

1. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Мета роботи - засвоїти математичні методи оптимізації та їх застосування при вирішенні багатоваріантних задач.

1.1 Загальні відомості

Багато задач, з якими доводиться мати справу в повсякденній практиці, є багатоваріантними. Серед безлічі можливих варіантів в умовах ринкових відносин доводиться відшукувати найкращі при обмеженнях, що накладаються на природні, економічні та технологічні можливості. У зв'язку з цим виникла необхідність застосовувати для аналізу і синтезу ситуацій і систем математичні методи і сучасну обчислювальну техніку. Такі методи об'єднуються під загальною назвою - математичне програмування.

Математичне програмування - область математики, що розробляє теорію і чисельні методи рішення багатовимірних екстремальних задач з обмеженнями, тобто, завдань на екстремум функції багатьох змінних з обмеженнями на область зміни цих змінних.

Функцію, екстремальне значення якої потрібно знайти в заданих умовах, називають цільовою, показником ефективності або критерієм оптимальності. Умови формалізуються у вигляді системи обмежень. Все це становить математичну модель. Математична модель задачі - це відображення оригіналу у вигляді функцій, рівнянь, нерівностей, цифр та ін. Модель задачі математичного програмування включає:

- сукупність невідомих величин, діючи на які, систему можна вдосконалювати. Їх називають планом завдання (вектором управління, рішенням, управлінням, стратегією, поведінкою та ін.);

- цільову функцію (функцію мети, показник ефективності, критерій оптимальності, функціонал задачі і ін.). Цільова функція дозволяє вибирати найкращий варіант з безлічі можливих. Найкращий варіант надає цільовій функції екстремальне значення. Це може бути прибуток, обсяг випуску або реалізації, витрати виробництва, витрати

обігу, рівень обслуговування або дефіцитності, число комплектів, відходи та ін.

Ці умови впливають з обмеженості ресурсів, якими володіє суспільство в будь-який момент часу, з необхідності задоволення насущних потреб, з умов виробничих і технологічних процесів. Обмеженими є не тільки матеріальні, фінансові і трудові ресурси. Такими можуть бути можливості технічного, технологічного і взагалі наукового потенціалу. Нерідко потреби перевищують можливості їх задоволення. Математично обмеження виражаються у вигляді рівнянь і нерівностей. Їх сукупність утворює область допустимих рішень (область можливостей). План, що задовольняє системі обмежень задачі, називається допустимим. Допустимий план, який доставляє функції мети екстремальне значення, називається оптимальним. Оптимальне рішення, взагалі кажучи, не обов'язково єдине, можливі випадки, коли воно не існує, є кінцеве або має безліч оптимальних рішень.

Один з розділів математичного програмування - лінійне програмування. Методи і моделі лінійного програмування широко застосовуються при оптимізації процесів у всіх галузях народного господарства: при розробці виробничої програми підприємства, розподілі її по виконавцях, при розміщенні замовлень між виконавцями і по тимчасових інтервалах, при визначенні найкращого асортименту продукції, в задачах перспективного, поточного та оперативного планування і управління; при плануванні вантажопотоків, визначенні плану товарообігу і його розподіл; в задачах розвитку і розміщення продуктивних сил, баз і складів систем поводження матеріальних ресурсів та інше. Особливо широке застосування методи і моделі лінійного програмування отримали при вирішенні задач економії ресурсів (вибір ресурсозберігаючих технологій, складання сумішей, розкрій матеріалів), виробничо-транспортних і інших завдань.

Одним з найефективніших методів вирішення даного класу задач є симплекс-метод. Загальна ідея симплексного методу (методу послідовного поліпшення плану) для вирішення задач лінійного програмування (ЗЛП) полягає в наступному:

- вміння знаходити початковий опорний план;
- наявність ознаки оптимальності опорного плану;
- вміння переходити до негіршого опорного плану.

При вирішенні ЗЛП можна виділити деяку загальну послідовність етапів, через які проходить будь-яке операційне дослідження. Як правило, це:

- постановка завдання;
- побудова змістовної (вербальної) моделі об'єкта (процесу);
- побудова математичної моделі, тобто переклад вербальної моделі в ту форму, в якій для її вивчення може бути використаний математичний апарат;
- рішення задач, сформульованих на базі побудованої математичної моделі;
- перевірка отриманих результатів на їх адекватність природі досліджуваної системи, включаючи дослідження впливу так званих позамоделних факторів, і можлива коректировка початкової моделі;
- реалізація отриманого рішення на практиці.

1.2 Геометрична інтерпретація ЗЛП та графічний метод рішення

Розглянемо приклад. Нехай дана задача максимізації лінійної цільової функції

$$f(x) = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\text{на множині } D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{aligned} x_1 + x &\leq 6 \\ x_1 - x &\leq 2 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}\}$$

Оскільки кількість змінних в нерівностях, які задають область допустимих планів задачі, дорівнює двом, то її можна зобразити на координатній площині (див. рис. 1.1).

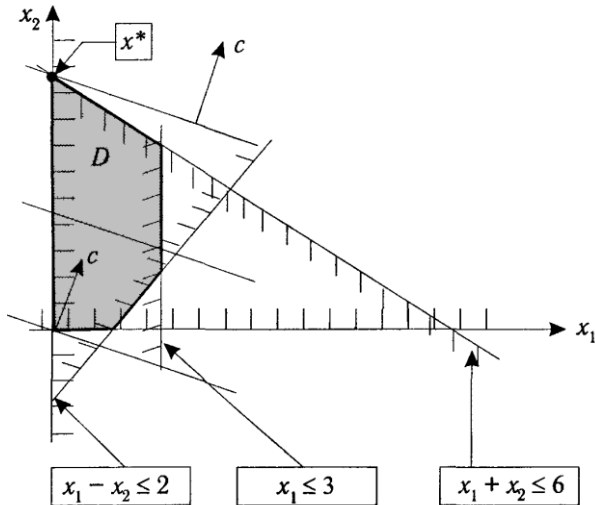


Рисунок 1.1 - Графічний метод рішення ЗЛП

На рис. 1.1 показано, що кожна нерівність визначає деяку напівплощину. Відповідні області для кожного обмеження відзначені штрихами. Перетин D даних напівплощин (тобто, безліч точок, які одночасно належать кожній з них) є областю допустимих планів задачі. Поведінка цільової функції $f(x) = x_1 + 3x_2$ в рамках двовимірної ілюстрації може бути охарактеризована за допомогою ліній рівня (множини точок з її області визначення, в яких функція приймає одне і те ж фіксоване значення). Градієнтом функції $f(x)$ називається вектор, що вказує напрямок найбільш швидкого зростання функції, і, тобто, орієнтований перпендикулярно лініям рівня.

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Для лінійної функції двох змінних лінія рівня уявляє пряму, перпендикулярну вектору c , що є градієнтом цієї функції. Отже, якщо ліній рівня визначається рівнянням $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, то цей вектор має вигляд $c = \nabla(c_1x_1 + c_2x_2) = (c_1, c_2)$ і вказує напрямок зростання функції.

Таким чином, з геометричної точки зору завдання максимізації зводиться до визначення такої точки області D , через яку проходить лінія рівня, що відповідає найбільшому з можливих значень. Останнє означає, що для знаходження точки екстремуму в ЗЛП ми повинні спочатку побудувати лінію рівня для деякого довільного значення цільової функції. Потім необхідно здійснювати її паралельне пересування (так, щоб вона залишалася перпендикулярною вектору c) до тих пір, поки не досягнемо такої точки області допустимих планів D , з якої зміщення в напрямку вектора c було б неможливе. Такий метод вирішення отримав назву графічного. Рішення задачі пошуку мінімуму лінійної функції здійснюється аналогічно, з тією лише різницею, що зміщення по лініях рівня повинно проводитися в напрямку, протилежному градієнту цільової функції, тобто по вектору $(-c)$.

1.3 Симплекс-метод метод вирішення ЗЛП

1.3.1 Розглянемо приклад

Для виробництва виробів виду A , B і C використовуються два види сировини: сировина I і сировину II . Ці вироби обробляються протягом деякого часу на спеціальному обладнанні, а потім піддаються складанню. Дані про норми витрат сировини, часу машинної обробки і часу складання наведені в таблиці.

Ринок збуту виробів вважається необмеженим. Скласти план випуску виробів, при якому дохід максимальний.

Вихідні дані наведено у табл. 1.1

Таблиця 1.1 - Вихідні дані ЗЛП

	A	B	C	Ліміт
Сировина I	5	2	3	300
Сировина II	4	6	5	316
Машина обробка	3	8	6	360
Складання	5	6	6	392
Ціна	9	6	8	

1.3.2 Математична модель задачі

Складемо математичну модель даної задачі і наведемо її до канонічного вигляду. Нехай:

x_1 - обсяг виробництва виробів типу А;

x_2 - обсяг виробництва виробів типу В;

x_3 - обсяг виробництва виробів типу С,

причому, x_1, x_2, x_3 - невід'ємні.

Тоді витрати сировини І на виробництво виробів А, В і С складуть:

$$5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3$$

Витрати сировини ІІ на виробництво виробів А, В і С складуть:

$$4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3$$

Витрати часу на машинну обробку виробів А, В і С складуть:

$$3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3$$

Витрати часу на складання виробів А, В і С складуть:

$$5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3$$

Оскільки ліміти на сировину І, сировину ІІ, машинну обробку і складання складають відповідно 300, 316, 360 і 392, то отримаємо обмеження:

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 300 \\ 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \leq 316 \\ 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \leq 360 \\ 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \leq 392 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Дохід від реалізації виробів А, В і С становить $9 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3$. Оскільки дохід повинен бути максимальним, то цільова функція

$$F = 9 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 \rightarrow \max$$

Таким чином, математична модель даної задачі наступна.

$$\text{Знайти } F = 9 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 \rightarrow \max$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 300 \\ 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \leq 316 \\ 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \leq 360 \\ 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \leq 392 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Приведемо цю задачу до канонічного вигляду. Для цього введемо чотири невід'ємні змінні x_4, x_5, x_6, x_7 і додамо кожному з них до лівої частини нерівностей системи (в першу, - в другу, - до третього, - в четверте) і в результаті отримаємо рівняння.

Система обмежень набуде вигляду:

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + x_4 = 300 \\ 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + x_5 = 316 \\ 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + x_6 = 360 \\ 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + x_7 = 392 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,7} \end{cases}$$

Ці змінні в цільову функцію записуються з нульовими коефіцієнтами.

Канонічний вид вихідної задачі має наступний вигляд.

$$\text{Знайти } F = 9 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \rightarrow \max$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + x_4 = 300 \\ 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + x_5 = 316 \\ 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + x_6 = 360 \\ 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + x_7 = 392 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,7} \end{cases}$$

Економічний сенс додаткових змінних - кількість невикористаного сировини і часу по кожному виду виробів.

1.3.3 Рішення задачі симплекс-методом

Оскільки змінні x_4 , x_5 , x_6 и x_7 зустрічаються в рівняннях обмежень по одному разу і з позитивними коефіцієнтами, то приймемо їх як базисні. Складемо першу симплекс-таблицю (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 - Перша симплекс-таблиця

Коеф. цільової функції при базисних змінних	Коеф. цільової функції	9	6	8	0	0	0	0			
	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Права частина	Оцінки	
0	x_4	5	2	3	1	0	0	0	300	60	←
0	x_5	4	6	5	0	1	0	0	316	79	
0	x_6	3	8	6	0	0	1	0	360	120	
0	x_7	5	6	6	0	0	0	1	392	$\frac{392}{5}$	
Δ		-9	-6	-8	0	0	0	0	0		
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	Δ_0		

$$\Delta_0 = 0 \cdot 300 + 0 \cdot 316 + 0 \cdot 360 + 0 \cdot 392 = 0$$

$$\Delta_1 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 - 9 = -9$$

$$\Delta_2 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 6 - 6 = -6$$

$$\Delta_3 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 6 - 8 = -8$$

$$\Delta_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 6 - 0 = 0$$

та інше

Оскільки в останньому рядку табл. 2 є від'ємні оцінки Δ , рішення не є оптимальним, оскільки критерій оптимальності не виконано. Виберемо найменше значення в рядку Δ . Це значення - (-9). Стовець, в якому варто це значення, є дозволяючим і змінну x_1 будемо вводити в розряд базисних.

Визначимо змінну, яку будемо виводити з базисних. Для цього знайдемо оцінки, розділивши значення за стовпця **Права частина** на відповідне значення з дозволяючого стовпця:

$$\text{в першому рядку: } \frac{300}{5} = 60,$$

$$\text{в другому: } -\frac{316}{4} = 79,$$

$$\text{в третьому: } -\frac{360}{3} = 120,$$

$$\text{в четвертому: } -\frac{392}{5} = 78\frac{2}{5}$$

Мінімальна з отриманих позитивних оцінок - **60**, тому змінну x_4 виводимо з розряду базисних, а перший рядок є дозволяючим. Відзначимо дозволяючі рядок і стовець стрілками. На їх перетині знаходиться дозволяючий елемент. Це число 5.

Для отримання наступної симплекс-таблиці розділимо дозволяючий рядок на дозволяючий елемент. Потім в стовпці, відповідному змінній x_1 , запишемо 0 в інші комірki, оскільки цей стовець відповідає базисній змінній.

Тепер заповнюємо стовпець, що відповідає базисній змінній X_5 . Для цього в рядку, що відповідає цій змінній, записуємо 1, інші елементи *стовпця* - 0. Аналогічно робимо для стовпців, що відповідають змінним X_6 и X_7 .

Інші елементи таблиці заповнюємо, використовуючи правило прямокутника. Результати наведено у табл. 1.3.

Таблиця 1.3 - Друга симплекс-таблиця

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Права частина	Оцінки	
x_1	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	60	$\frac{60 \cdot 5}{3} = 100$	
x_5	0	$\frac{22}{5}$	$\frac{13}{5}$	$-\frac{4}{5}$	1	0	0	76	$\frac{76 \cdot 5}{13} = \frac{380}{13} = 29\frac{3}{13}$	←
x_6	0	$\frac{34}{5}$	$\frac{21}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	1	0	180	$\frac{180 \cdot 5}{21} = \frac{300}{7} = 42\frac{6}{7}$	
x_7	0	4	3	-1	0	0	1	92	$\frac{92}{3} = 30\frac{2}{3}$	
F	0	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{13}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	0	0	540		
			↑							

Рішення знайдене на другому кроці алгоритму симплекс-методу **$F = 540$**

Оскільки в останньому рядку є від'ємні оцінки, рішення не є оптимальним. Повторюємо процедуру та отримуємо третю симплекс-таблицю (табл. 1.4).

Таблиця 1.4 - Третя симплекс-таблиця

Базис	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	Права частина	Оцінки
x ₁	1	$-\frac{8}{13}$	0	$\frac{5}{13}$	$-\frac{3}{13}$	0	0	$\frac{552}{13} = 42\frac{6}{13}$	
x ₃	0	$\frac{22}{13}$	1	$-\frac{4}{13}$	$\frac{5}{13}$	0	0	$\frac{380}{13} = 29\frac{3}{13}$	
x ₆	0	$-\frac{4}{13}$	0	$\frac{9}{13}$	$-\frac{21}{13}$	1	0	$\frac{744}{13} = 57\frac{3}{13}$	
x ₇	0	$-\frac{14}{13}$	0	$-\frac{1}{13}$	$-\frac{15}{13}$	0	1	$\frac{56}{13} = 4\frac{4}{13}$	
F	0	2	0	1	1	0	0	616	

Оскільки в останньому рядку цієї таблиці немає від'ємних оцінок, отримано оптимальне рішення.

1.4 Метод потенціалів для транспортної задачі

Транспортна задача зводиться до визначення такого плану перевезень деякого продукту з пунктів його виробництва в пункти споживання $(\|x_{i,j}\|_{m \times n})$, який мінімізує цільову функцію

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j}$$

на множині допустимих планів

$$D = \left\{ x \in R^{mn} \left| \sum_{j=1}^n x_{i,j} = a_i, i \in 1:m \right. \right.$$

$$x_{i,j} \geq 0, i \in 1:m, j \in 1:n \}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_j, j \in 1:n$$

при дотриманні умови балансу

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Якщо привести умови транспортної задачі до канонічної форми завдання лінійного програмування, то матриця завдання матиме розмірність $(m + n) \times mn$. Процес вирішення транспортної задачі зручно оформляти у вигляді послідовності таблиць.

Рядки транспортної таблиці відповідають пунктам виробництва (в останній клітині кожного рядка зазначено обсяг запасу продукту a_j), а стовпці - пунктам споживання (остання клітина кожного стовпчика містить значення потреби b_j). Усі клітини таблиці (крім тих, які розташовані в нижній частині і правому стовпцю) містять інформацію про перевезення з i -го пункту в j -й: у лівому верхньому кутку знаходиться вартість перевезення одиниці продукту, а в правому нижньому - значення обсягу перевезеного вантажу для даних пунктів. Клітини, які містять нульові перевезення ($x_{ij} = 0$), називають вільними, а ненульові - зайнятими ($x_{ij} > 0$).

Для вирішення задачі застосовується метод потенціалів, який можна трактуватися як різновид симплексних процедур. Він являє собою ітеративний процес, на кожному кроці якого розглядається деякий поточний базисний план, перевіряється його оптимальність, і при необхідності визначається перехід до «кращого» базисного плану.

Алгоритм починається з вибору деякого допустимого базисного плану (методом північно-західного кута, мінімальної вартості та ін.). Якщо даний план не вироджений, то він містить $m+n-1$ ненульових базисних клітин, за якими можна визначити потенціали u_i та v_j так, щоб для кожної базисної виконувалася умова

$$v_j - u_i = c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} > 0.$$

Оскільки система містить $m+n-1$ рівняння і $m+n$ невідомих, то один з потенціалів можна задати довільно (наприклад, прирівняти до нуля). Після цього інші невідомі визначаються однозначно.

Розглянемо приклад.

У табл. 1.5 наведені умови транспортної задачі

Таблиця 1.5 - Вихідні дані транспортної задачі

j	1	2	3	4	a_i
i					
1	14	28	21	28	27
2	10	17	15	24	20
3	14	30	25	21	43
b_j	33	13	27	17	

Перший опорний план складаємо методом північно-західного кута. Він наведений у табл. 1.6

Таблиця 1.6 - Вихідний опорний план

j	1	2	3	4	a_i
i					
1	14	28	21	28	27
	27				
2	10	17	15	24	20
	6	13	1		
3	14	30	25	21	43
			26	17	
b_j	33	13	27	17	

Потенціал першого пункту споживання приймаємо рівним нулю ($v_i=0$). Знаючи його, можна визначити потенціали для всіх неньулових клітин з умови: $V_j - u_i = C_{ij}$,

Для вільних клітин розрахуємо величини $\alpha_{i,j} = v_j - u_i$, звані різницями потенціалів. У табл. 1.7 вони вписані для всіх небазисних клітин під вартістю.

Таблиця 1.7 - Перший опорний план з потенціалами

	$v_1=0$	$v_2=7$	$v_3=5$	$v_4=1$	
$u_1=-14$	14 27	28	21	28	27
$u_2=-10$	10 6	17 13	15 1	24	20
$u_3=-20$	14	30	25 26	21 17	43
	33	13	27	17	

Різницю потенціалів можна трактувати як збільшення ціни продукту при його перевезенні з пункту i в пункт j . Згідно з критерієм оптимальності, план оптимальний, тільки якщо $\alpha_{i,j} \leq c_{i,j}$, інакше він може бути поліпшений.

Процес «поліпшення» плану полягає у визначенні введеної та виведеної клітин, в чому простежується змістовна аналогія з відповідними пунктами симплекс-процедур.

Кандидатом на введення може бути будь-яка клітина, в якій $\alpha_{i,j} > c_{i,j}$, оскільки після введення в базис буде забезпечено $\alpha_{i,j} = c_{i,j}$. Слід брати ту клітку, в якій оцінка $\alpha_{i,j} - c_{i,j}$, максимальна. У розглянутому прикладі це буде клітина (3, 1).

Клітина, що виводиться, визначається за допомогою так званого ланцюжка перетворення плану, яка описує характер перерозподілу вантажних потоків. Для цього слід створити замкнений ланцюг, що складається тільки з вертикальних і горизонтальних ланок, однією з вершин якої є обрана вільна клітина, а решта - зайняті клітини. У табл. 1.8 показаний ланцюг перетворень вихідного плану щодо введеної в нього клітини (3, 1).

Таблиця 1.8 - Ланцюг перетворень

	$v_1=0$	$v_2=7$	$v_3=5$	$v_4=1$	
$u_1=-14$	14 27	28 21	21 19	28 15	27
$u_2=-10$	10 - 6	17 13	15 + 1	24 11	20
$u_3=-20$	14 20 +	30 27 -	25 26 -	21 17	43
	33	13	27	17	

Результатом є новий опорний план, що наведений у табл.. 1.9.

Процес продовжується до отримання оптимального плану.

Для заданої задачі результат наведений у табл.. 1.10.

За ним можна розрахувати оптимальне (найменше) значення сумарних витрат на перевезення:

$$f(x^*) = 14 \times 7 + 21 \times 20 + 17 \times 13 + 15 \times 7 + 14 \times 26 + 21 \times 17 = 1565$$

Таблица 1.9 - Другий опорний план

	$\underline{v}_1=0$	$\underline{v}_2=13$	$\underline{v}_3=11$	$\underline{v}_4=7$	
$u_1=-14$	14 - 27	28 27	21 + 25	28 21	27
$u_2=-4$	10 4	17 13	15 7	24 11	20
$u_3=-14$	14 + 6	30 27	25 - 20	21 17	43
	33	13	27	17	

Таблица 1.10 - Оптимальний опорний план

	$\underline{v}_1=0$	$\underline{v}_2=9$	$\underline{v}_3=7$	$\underline{v}_4=7$	
$u_1=-14$	14 27	28 23	21 20	28 21	27
$u_2=-8$	10 8	17 13	15 7	24 15	20
$u_3=-14$	14 26	30 23	25 21	21 17	43
	33	13	27	17	

1.5 Завдання до роботи

1.5.1 Знайти максимальне та мінімальне значення цільової функції графічним методом

Варіант 1
$$\begin{aligned} z &= x_1 + 6x_2 + 20, \\ 8x_1 + 7x_2 &\leq 56, \\ 3x_1 + 5x_2 &\geq 15, \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 15. \end{aligned}$$

Варіант 2
$$\begin{aligned} z &= 7x_1 + 3x_2 + 30, \\ 10x_1 + 9x_2 &\leq 90, \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ 6x_1 + 5x_2 &\leq 30. \end{aligned}$$

Варіант 3
$$\begin{aligned} z &= -4x_1 - 3x_2 + 20, \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 20, \\ 7x_1 + 3x_2 &\leq 21, \\ 2x_1 + x_2 &\geq 2. \end{aligned}$$

Варіант 4
$$\begin{aligned} z &= -3x_1 - 2x_2 + 15, \\ x_1 - 4x_2 &\leq 4, \\ -3x_1 + x_2 &\leq 3, \\ 6x_1 + 5x_2 &\leq 30. \end{aligned}$$

Варіант 5
$$\begin{aligned} z &= -7x_1 - 4x_2 + 15, \\ 3x_1 - 2x_2 &\leq 12, \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 6, \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4. \end{aligned}$$

1.5.2 На виготовлення двох видів продукції (П1 і П2) використовується три види ресурсів А1, А2, А3. Запаси ресурсів, норми їх витрати і прибуток від реалізації одиниці продукції задані в таблиці 1.11 з урахуванням варіантів. За допомогою симплекс-методу знайти такий план виробництва, який забезпечить максимальний прибуток.

Таблиця 1.11 - Варіанти завдань

Вар	Витрати ресурсів на од. продукції						Наявність ресурсів			Прибуток	
	А ₁		А ₂		А ₃		А ₁	А ₂	А ₃	П ₁	П ₂
	П ₁	П ₂	П ₁	П ₂	П ₁	П ₂					
1.	13	7	17	16	4	9	361	520	248	11	8
2.	1	1	4	7	1	4	18	93	48	24	36
3.	3	2	2	3	1	1	101	99	37	27	24
4.	4	13	5	6	11	5	379	197	335	25	12
5.	3	1	9	4	3	4	45	144	96	9	8

1.5.3 Вирішити транспортну задачу

Варіант 1

4	5	7	3	310
8	6	9	10	280
12	4	5	11	250
250	189	220	260	

Варіант 2

10	9	8	5	320
6	7	11	4	220
3	4	6	8	250
300	300	240	280	

Варіант 3

14	10	11	13	290
8	12	7	9	190
5	4	6	11	210
200	220	210	180	

Варіант 4

5	6	3	2	260
3	6	3	7	180
8	2	5	9	200
180	160	210	180	

Варіант 5

6	3	4	9	220
4	5	8	3	160
7	6	4	10	240
160	180	190	170	

1.6 Контрольні запитання

1.6.1 Класифікація задач лінійного програмування та їх математичні моделі.

1.6.2 Загальна постановка задач лінійного програмування.

1.6.3 Графічний метод розв'язання задачі ЛП. Геометричний аналіз стійкості рішення.

1.6.4 Геометричний зміст задачі лінійного програмування.

1.6.5 Форми запису ЗЛП, їх еквівалентність та способи перетворення. Перехід до канонічної форми ЗЛП.

1.6.6 Симплекс-метод.

1.6.7 Метод штучного базису.

1.6.8 Економіко-математична модель транспортної задачі. Умови існування розв'язку транспортної задачі.

1.6.9 Методи побудови опорного плану.

1.6.10 Алгоритм розв'язання транспортної задачі.

2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2. МЕТОДИ РЕГРЕСІЙНОГО АНАЛІЗУ

Мета роботи - засвоїти математичні методи регресійного аналізу та їх застосування при обробці даних експериментів.

2.1 Загальні відомості

Основною задачею регресійного аналізу є встановлення форми зв'язку, тобто підбір такої функції, яка якнайкраще характеризує масове явище. За формою розрізняють лінійну і нелінійну регресію.

2.1.1 Лінійна регресія

Виражається лінійною функцією:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \quad (2.1)$$

де x - пояснювальна змінна.

Коефіцієнти b_0 і b_1 є оцінками відповідних параметрів регресії β_0 і β_1 у лінійній моделі:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u, \quad b_0 = \hat{\beta}_0, \quad b_1 = \hat{\beta}_1 \quad (2.2)$$

При дослідженні залежності однієї залежної змінної від декількох пояснювальних змінних в разі лінійних співвідношень між ними формула (2.1) набуває вигляд:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m \quad (2.3)$$

2.1.2 Нелінійна регресія

Вона виражається нелінійною функцією. Наприклад, поліноміальна регресія:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m \quad (2.4)$$

Гіперболічна регресія:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \frac{1}{x} \quad (2.5)$$

Застосовуються також ступенева ($\hat{y} = ax^b$), показова ($\hat{y} = ab^x$), логарифмічна ($\hat{y} = b \cdot \log_a x$) та тригонометрична

залежності. Підбір функції регресії здійснюється з урахуванням теоретичних міркувань щодо досліджуваних явищ.

Нелінійну регресію можна привести до лінійного виду шляхом заміни. Наприклад, для ступеневої функції модне провести логарифмування:

$$\log \hat{y} = \log a + b \log x$$

Після заміни: $\log \hat{y} = z$, $\log a = b_0$, $\log x = \xi$ отримаємо лінійну залежність:

$$z = b_0 + b\xi \quad (2.6)$$

2.1.3 Множинна регресія

Окрім простої регресії, коли маємо функцію однієї змінної, часто використовується множинна регресія, яка теж може бути як лінійною, так і нелінійною.

$$\hat{y} = a + b_1x_1 + b_2x_2 + c_1x_3 + d_1x_4 + c_2x_5 + d_2x_6 \quad (2.7)$$

Нелінійна зводиться до лінійної аналогічно простій.

2.1.4 Метод найменших квадратів

Нехай y_i - емпірична результативна ознака для заданого фактора x_i , $\hat{y}$ - теоретична, розрахована за допомогою рівняння регресії для цього ж фактора. В основу метода найменших квадратів (МНК) покладено умову:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min \quad (2.9)$$

Для простої лінійної регресії $\hat{y} = b_0 + b_1x$ при застосуванні МНК коефіцієнти регресії можна знайти з системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} nb_0 + b_1 \sum x_i &= \sum y_i \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 &= \sum x_i y_i \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Для інших випадків розрахунки більш складні та наведені у прикладах.

2.2 Побудова простої лінійної регресійної моделі методом МНК

Вихідні дані та результати розрахунків наведено у табл. 2.1.

Представимо модель у формі:

$$Y = a_0 + a_1 X + u$$

де a_0, a_1 – параметри моделі; u – стохастична складова.

Оцінимо параметри моделі $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X$ за методом МНК.

Для цього запишемо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_i x_i = \sum_i y_i \\ \hat{a}_0 \sum_i x_i + \hat{a}_1 \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i y_i \end{cases},$$

де $i = \overline{1, n}$, $n = 10$ – кількість спостережень.

Підставивши в цю систему значення

$n, \sum_i X_i, \sum_i Y_i, \sum_i X_i^2, \sum_i X_i Y_i$, обчислені з вихідними

даними табл. 2.1, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 10\hat{a}_0 + 24\hat{a}_1 = 220 \\ 245\hat{a}_0 + 6165\hat{a}_1 = 5523. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему відносно невідомих оцінок параметрів

$\hat{a}_0, \hat{a}_1$:

$$+ \begin{cases} -245\hat{a}_0 - 6002,5\hat{a}_1 = -5390 \\ 245\hat{a}_0 + 6165\hat{a}_1 = 5523; \end{cases}$$

$$162,5\hat{a}_1 = 133 \Rightarrow \hat{a}_1 = 0,82; \quad \hat{a}_0 = \frac{220 - 0,82 * 245}{10} = \frac{220 - 200,9}{10} = 1,91.$$

Отже, регресійна модель має вигляд:

$$\hat{Y} = 1,91 + 0,82X.$$

Таблиця 2.1 - Вихідні дані для побудови простої лінійної регресійної моделі

№ з/п	Y	X	X^2	XY	$\hat{Y}$	$X - \bar{X}$	$Y - \bar{Y}$	$(X - \bar{X})^2$	$(X - \bar{X})^2$ $(X - \bar{Y})$	$u =$ $= Y - \hat{Y}$	u^2	$(Y - \bar{Y})^2$
1	17	18	324	306	16,67	-6,5	-5	42,25	32,5	0,33	0,1089	25
2	18	20	400	360	18,31	-4,5	-4	20,25	18	-0,31	0,0961	16
3	19	21	441	399	19,13	-3,5	-3	12,25	10,5	-0,13	0,0169	9
4	20	22	484	440	19,95	-2,5	-2	6,25	5	0,05	0,0025	4
5	21	24	576	504	21,59	-0,5	-1	0,25	0,5	-0,59	0,3481	1
6	23	25	625	575	22,41	0,5	1	0,25	0,5	0,59	0,3481	1
7	24	27	729	648	24,05	2,5	2	6,25	5	-0,05	0,0025	4
8	25	28	784	700	24,87	3,5	3	12,25	10,5	0,13	0,0169	9
9	26	29	841	754	25,69	4,5	4	20,25	18	0,31	0,0961	16
10	27	31	961	837	27,33	6,5	5	42,25	32,5	-0,33	0,1089	25
Σ	220	245	6165	5523	—	—	—	162,5	133	—	1,145	110

Дисперсії залежної змінної та залишків:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_i (y_i - \bar{Y})^2}{n-1} = \frac{110}{9} = 12,2, \quad \sigma_u^2 = \frac{\sum_i u_i^2}{n-2} = \frac{1,145}{8} = 0,14.$$

Коефіцієнти детермінації та кореляції:

$$R^2 = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_u^2}{\sigma_y^2} = \frac{12,2 - 0,14}{12,2} \approx 0,99; \quad R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,99} = 0,994.$$

Оскільки коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,99$, це свідчить про те, що варіація залежної змінної на 99% визначається варіацією фактора. Коефіцієнт кореляції $R = 0,994$ показує, що між ними існує тісний зв'язок. Значення R^2 і R для парної регресійної моделі свідчать про статистичну значущість зв'язку, якщо вони наближаються до одиниці.

Слід зауважити, що побудова простої нелінійної регресійної моделі проводиться аналогічно, але попередньо її слід звести до лінійної, зробивши відповідні заміни змінних!

2.3 Побудова множинної регресійної моделі матричним методом

Побудуємо лінійну модель виду:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + u$$

Вихідні дані наведено у табл. 2.2

Таблиця 2.2 - Вихідні дані для побудови множинної лінійної регресійної моделі

y_i	65,73	71,68	74,41	70	86	88,76	93,03	99,25	112,07	109,9	112	–
x_{1i}	6,66	6,39	7,44	6,18	7,34	9,29	9,8	8,7	8,32	9,27	9,27	12
x_{2i}	13,96	17,86	15,7	16,32	20,55	16,87	16,87	18,44	21,82	22,91	22,91	25

Спочатку сформуємо матриці X та Y і транспоновані до них X^T та Y^T :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 6,66 & 13,96 \\ 1 & 6,39 & 17,86 \\ 1 & 7,44 & 15,7 \\ 1 & 6,18 & 16,32 \\ 1 & 7,34 & 20,55 \\ 1 & 9,29 & 16,87 \\ 1 & 9,8 & 16,87 \\ 1 & 8,7 & 18,44 \\ 1 & 8,32 & 21,82 \\ 1 & 9,27 & 22,91 \\ 1 & 9,27 & 22,91 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 65,73 \\ 71,68 \\ 74,41 \\ 70 \\ 86 \\ 88,76 \\ 93,03 \\ 99,25 \\ 112,07 \\ 109,9 \\ 112 \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6,66 & 6,39 & 7,44 & 6,18 & 7,34 & 9,29 & 9,8 & 8,7 & 8,32 & 9,27 & 9,27 \\ 13,96 & 17,86 & 15,7 & 16,32 & 20,55 & 16,87 & 16,87 & 18,44 & 21,82 & 22,91 & 22,91 \end{bmatrix}$$

$$Y^T = [65,73 \quad 71,68 \quad 74,41 \quad 70 \quad 86 \quad 88,76 \quad 93,03 \quad 99,25 \quad 112,07 \quad 109,9 \quad 112]$$

Після цього знайдемо добутки матриць $(X^T \cdot X)$ та $(X^T \cdot Y)$:

$$(X^T \cdot X) = \begin{bmatrix} 11 & 88,66 & 204,21 \\ 88,66 & 731,73 & 1664,37 \\ 204,21 & 1664,37 & 3884,07 \end{bmatrix};$$

$$(X^T \cdot Y) = \begin{bmatrix} 982,83 \\ 8102,43 \\ 18701,8 \end{bmatrix}$$

та обернену матрицю

$$(X^T \cdot X)^{-1} = \begin{bmatrix} 5,22 & -0,325 & -0,135 \\ -0,325 & 0,074 & -0,015 \\ -0,135 & -0,015 & 0,014 \end{bmatrix}.$$

За отриманими результатами розрахуємо вектор параметрів моделі:

$$A = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot Y) = \begin{bmatrix} -31,06 \\ 6,71 \\ 3,57 \end{bmatrix},$$

Запишемо регресійну модель:

$$\hat{y} = -31,06 + 6,71x_1 + 3,57x_2 + u.$$

Для її оцінки розрахуємо вектор залишків:

$$U = Y - \hat{Y} = Y - X \cdot A = \begin{bmatrix} 2,23 \\ -3,95 \\ -0,54 \\ 1,28 \\ -5,61 \\ -2,79 \\ -1,94 \\ 6,05 \\ 9,35 \\ -3,09 \\ -0,99 \end{bmatrix}$$

Знайдемо залишкову σ_u^2 та загальну σ_y^2 дисперсії:

$$\sigma_u^2 = \frac{U^T \cdot U}{n - m - 1} = \frac{200,01}{11 - 2 - 1} = 25,0018;$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(Y^T \cdot Y - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right) = \frac{1}{11-1} \left(90856,48 - \frac{(982,83)^2}{11} \right) = 304,241$$

Тіснота зв'язку визначається коефіцієнтом множинної кореляції:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{25,0018}{304,241}} = 0,96.$$

Визначимо довірчі границі коефіцієнта множинної кореляції R :

$$\sigma_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n - m - 1}} = \frac{1 - 0,96^2}{\sqrt{11 - 2 - 1}} = 0,029.$$

Перевіримо значущість коефіцієнта множинної кореляції:

$$t_R = \frac{R}{\sigma_R} = \frac{0,96}{0,029} = 32,97.$$

Оскільки $t_R > t(0,05; 8)$, то з ймовірністю $p = 0,95$ можна стверджувати, що коефіцієнт множинної кореляції значущий.

7. Оцінимо значущість параметрів моделі за t -критерієм Стьюдента. Для цього обчислимо

$$\sigma_{a_0} = \sigma_u \cdot \sqrt{b_{11}} = \sqrt{25,0018 \cdot 5,22} = 11,42;$$

$$t_{a_0} = \frac{|a_0|}{\sigma_{a_0}} = \frac{31,06}{11,42} = 2,72;$$

$$\sigma_{a_1} = \sigma_u \cdot \sqrt{b_{22}} = \sqrt{25,0018 \cdot 0,074} = 1,36;$$

$$t_{a_1} = \frac{|a_1|}{\sigma_{a_1}} = \frac{6,71}{1,36} = 4,93;$$

$$\sigma_{a_2} = \sigma_u \cdot \sqrt{b_{33}} = \sqrt{25,0018 \cdot 0,014} = 0,58;$$

$$t_{a_2} = \frac{|a_2|}{\sigma_{a_2}} = \frac{3,57}{0,58} = 6,11.$$

Оскільки $t_{a_0}, t_{a_1}, t_{a_2} > t(0,05; 8)$, то параметри a_0, a_1, a_2 значущі.

Оцінимо адекватність моделі за F - критерієм Фішера:

$$F_p = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m}{m-1} = \frac{0,92}{1-0,92} \cdot \frac{11-2}{2-1} = 100,52.$$

Табличне значення F – критерію визначається при ступенях свободи $m-1=2-1=1$ і $n-m=11-2=9$ і рівні значущості $\alpha = 0,05$. Маємо $F(0,05; 1; 9) = 5,12$.

Оскільки $F_p > F(0,05; 1; 9)$, то з ймовірністю $p = 0,95$ можна стверджувати, що регресійна модель адекватно описує задане явище.

2.4 Завдання до роботи

2.4.1 Побудувати та проаналізувати просту лінійну регресійну модель за наведеними нижче даними згідно з варіантом.

Варіант 1

X	7,9	11,6	12,8	14,9	16,3	18,6	20,3
Y	13	22,8	24,8	28,6	31,6	38,7	44,9

Варіант 2

X	2	3	8	10	14	15	20
Y	14,39	9,45	7,05	5,32	16,94	1,97	0,39

Варіант 3

X	6,6	10,6	12,4	15,9	17,3	20,5	24,4
Y	10,5	21,7	25,0	30,4	31,4	37,5	43,1

Варіант 4

X	2,2	3,6	7,1	10,6	13,7	17,5	17,2
Y	15,8	14,5	17,2	19,4	25,1	24,7	30,4

Варіант 5

X	5,8	6,2	8,1	10,4	15,3	14,3	17,1
Y	0,3	2,8	5,1	8,4	11,2	16,8	20,4

2.4.2 Побудувати та проаналізувати множинну нелінійну регресійну модель за наведеними нижче даними згідно з варіантом.

Варіант 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	43,9	41,2	46	57,6	47,8	59,6	56,7	69,1	77,9	81,3	84,5	–
x_{1i}	5,5	6,2	6	7,4	5,8	8,3	6,2	9,5	7,5	9	10	13
x_{2i}	14,1	11,4	14	14,4	17,7	16,1	18,6	21,8	20,5	23,8	25	28

Вид регресії: $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$

Варіант 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	89,7	95,4	93,1	87,4	107	100	110	111	116	122	144	–
x_{1i}	12,6	11,9	12,4	11,1	14	14,4	13,1	14,5	15,6	14,3	17,4	19
x_{2i}	4,8	4	4,1	5,3	7,4	6,4	8	7,3	6,4	8,8	10	14

Вид регресії: $y = a_0 + \frac{a_1}{x_1} + a_2 \ln x_2$

Варіант 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	65,7	71,7	74,4	70	86	88,8	93	99,3	113	110	112	—
x_{1i}	6,66	6,39	7,44	6,18	7,34	9,29	9,8	8,7	8,32	9,27	9,27	12
x_{2i}	14	17,9	15,7	16,3	20,6	16,9	16,9	18,4	21,8	22,9	22,9	25

Вид регресії: $y = a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2$

Варіант 4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	61,5	65	60	66,2	82,1	70,7	65,9	76,8	88,6	93,8	88,4	—
x_{1i}	4,1	4,3	5,4	6,5	7,2	5,8	7	7,2	9,2	8,9	9,8	12
x_{2i}	13,2	14,9	19,3	20,6	18,3	17,7	23,9	24,9	24,1	20,7	28,4	28

Вид регресії: $y = a_0 + \frac{a_1}{x_1} + a_2 x_2^2$

Варіант 5

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	34,3	36,3	25,7	37,5	38,5	33,6	43,6	40,8	40,6	55,3	43,6	—
x_{1i}	4,8	13,1	5,8	13,1	15,6	12,6	13,5	18,5	14,5	20,7	28,5	24
x_{2i}	6,8	8,9	7	11,1	14,8	8,4	24	16	14,3	26,6	17,7	18

Вид регресії: $y = a_0 + \frac{a_1}{x_1} + a_2 \sqrt{x_2}$

2.5 Контрольні запитання

2.5.1 Задача регресійного аналізу.

2.5.2 Види регресії.

2.5.3 Проста лінійна регресія

2.5.4 Нелінійна регресія. Перехід до лінійної форми.

2.5.5 Множинна регресія.

2.5.6 Метод найменших квадратів.

2.5.7 Коефіцієнти детермінації та кореляції. Їх сенс.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кузнецов А.В, Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика: Математическое программирование. – Мн.: Выш.шк., 2001.
2. Банди Б. Основы линейного программирования: Пер. сангл. — М.: Радио и связь, 1989. - 176 с: ил.
3. Лунгу К. Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 128 с.
4. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 302 с.
5. Гайдышев И.П. Анализ и обработка данных: специальный справочник. - СПб.: Питер, 2001. - 752 с.
6. Гмурман В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1972. – 368 с.
7. Калинина В.Н., Панкин В.Ф. Математическая статистика. – М.: Высш. шк., 2001. – 336 с.
8. Ржевський С.В. Вступ до економетрії. Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей. -Київ: СУФГМБ, 1999. - 91 с.