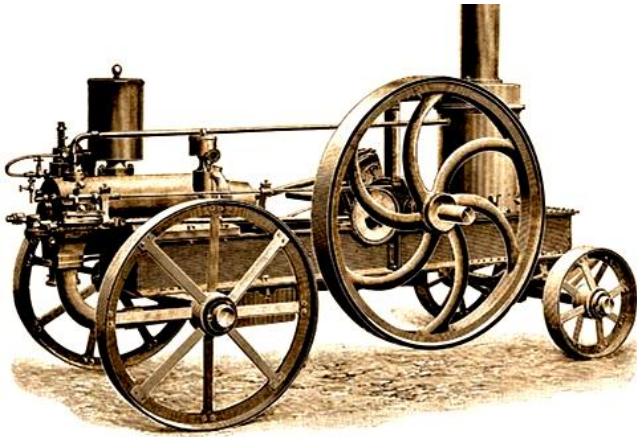


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

О.С. Омельченко, П.К. Штанько, Н.В. Шалева

Конспект лекцій з дисципліни

ДИНАМІКА ТОЧКИ ТА СИСТЕМИ
для студентів спеціальностей 131, 133, 134 усіх форм навчання



2023

Конспект лекцій з дисципліни «Динаміка точки та системи» для студентів спеціальностей 131, 133, 134 усіх форм навчання / Укл.: П.К. Штанько, О.С. Омельченко, Н.В. Шалева - Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2023. – 196 с.

Укладачі: О.С. Омельченко, ст. викладач;
П.К. Штанько, доцент, канд. техн. наук;
Н.В. Шалева, асистент.

Рецензент: В.І. Пожуєв, професор, д-р фіз-мат.наук

Відповідальний
за випуск: В.Г. Шевченко, завідувач каф. «Механіка»

Затверджено
на засіданні кафедри «Механіка»
Протокол № 5
від “ 12 ” 12 2022.

Рекомендовано до видання
НМК БАД факультету
Протокол № 4
від “ 28 ” 12 2022.

ЗМІСТ

Передмова	7
Глава 1. Динаміка точки	8
1.1 Основні поняття та закони динаміки	8
1.2 Задачі динаміки точки	11
1.3 Диференціальні рівняння руху матеріальної точки	12
1.4 Інтегрування диференціальних рівнянь руху точки	14
1.5 Інтегрування диференціальних рівнянь прямолінійного руху точки	16
Контрольні запитання	20
Глава 2. Прямолінійні коливання точки	21
2.1 Вільні коливання без врахування опору	21
2.2 Вплив постійної сили на вільні коливання точки	24
2.3 Коливання точки з опором, пропорційним швидкості	26
2.4 Вимушені коливання. Резонанс	28
Контрольні запитання	33
Глава 3. Відносний рух точки	35
3.1 Диференціальне рівняння відносного руху точки	35
3.2 Вплив обертання Землі на рівновагу та рух тіл	38
Контрольні запитання	41
Глава 4. Вступ в динаміку системи. Моменти інерції твердого тіла ...	42
4.1 Механічна система. Зовнішні та внутрішні сили	42
4.2 Диференціальні рівняння руху системи точок	43
4.3 Маса системи. Центр мас	44
4.4 Момент інерції тіла. Радіус інерції	45
4.5 Момент інерції відносно паралельних осей. Теорема Гюйгенса-Штейнера	47
4.6 Обчислення моментів інерції деяких однорідних тіл.	48
Контрольні запитання	50
Глава 5. Теорема про рух центра мас системи	52
5.1 Теорема про рух центра мас	52
5.2 Закон збереження руху центра мас	53
Контрольні запитання	55
Глава 6. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки та механічної системи	56

6.1 Міри руху	56
6.2 Кількість руху точки та системи точок	56
6.3 Імпульс сили	58
6.4 Теорема про зміну кількості руху точки	59
6.5 Теорема про зміну кількості руху системи точок	62
6.6 Закон збереження кількості руху	64
6.7 Теорема Ейлера	65
6.8 Рух тіла із змінною масою. Реактивний рух.	68
Контрольні запитання	72
Глава 7. Теорема про зміну момента кількості руху точки та системи	73
7.1 Момент кількості руху точки. Головний момент кількості руху системи	73
7.2 Теорема про зміну момента кількості руху точки (теорема моментів)	75
7.3 Рух точки під дією центральної сили. Закон площ (закон Кеплера)	77
7.4 Теорема про зміну кінетичного момента системи точок (теорема моментів)	78
7.5 Закон збереження кінетичного моменту	80
Контрольні запитання	81
Глава 8. Робота сили. Потужність	82
8.1 Елементарна робота сили, прикладеної до точки	82
8.2 Робота сили	84
8.3 Потужність	85
8.4 Приклади обчислення роботи	86
Контрольні запитання	92
Глава 9. Теорема про зміну кінетичної енергії точки і системи	93
9.1 Кінетична енергія точки і системи	93
9.2 Кінетична енергія твердого тіла	94
9.3 Теорема про зміну кінетичної енергії точки	98
9.4 Теорема про зміну кінетичної енергії системи	101
9.5 Силове поле	103
9.6. Поверхні рівня. Силові лінії	106
9.7 Потенціальна енергія	108
9.8 Закон збереження механічної енергії	109
Контрольні запитання	110

Глава 10. Динаміка твердого тіла	111
10.1 Основні задачі динаміки твердого тіла	111
10.2 Поступальний рух твердого тіла	111
10.3 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі	113
10.4 Фізичний та математичний маятники	114
10.5 Експериментальне визначення моментів інерції	117
10.6 Плоскопаралельний рух твердого тіла	118
Контрольні запитання	120
Глава 11. Принцип Д'Аламбера	121
11.1 Метод кінестатики для точки	121
11.2 Явище невагомості	122
11.3 Метод кінестатики для системи	124
11.4 Головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла	126
Контрольні запитання	130
Глава 12. Елементарна теорія гіроскопа	131
12.1 Основне припущення елементарної теорії гіроскопа	131
12.2 Вільний (астатичний) гіроскоп	134
12.3 Дія сил на вісь гіроскопа	135
12.4 Прецесія гіроскопа під дією сили ваги	137
12.5 Гіроскопічний момент	137
Контрольні запитання	139
Глава 13. Принцип можливих переміщень	140
13.1 В'язі і їхня класифікація	140
13.2 Можливе переміщення. Число ступенів вільності	142
13.3 Елементарна робота сили на можливому переміщенні Ідеальні в'язі	144
13.4 Принцип можливих переміщень	145
Контрольні запитання	147
Глава 14. Загальне рівняння динаміки. Рівняння Лагранжа другого роду	148
14.1 Узагальнені координати системи	148
14.2 Узагальнені сили	151
14.3 Умови рівноваги механічної системи	153
14.4 Загальне рівняння динаміки	156
14.5 Рівняння Лагранжа другого роду	160
Контрольні запитання	167

Глава 15. Малі коливання механічної системи біля положення стійкої рівноваги	168
15.1 Положення рівноваги і його стійкість	168
15.2 Кінетична енергія механічної системи біля положення рівноваги	172
15.3 Функція Релея та узагальнені сили опору при малих коливаннях біля положення рівноваги механічної системи	174
15.4 Малі коливання механічної системи з одним ступенем вільності біля положення стійкої рівноваги	174
15.5 Малі коливання механічної системи з двома ступенями вільності біля положення стійкої рівноваги	177
Контрольні запитання	181
Глава 16. Теорія удару	182
16.1 Основні поняття і означення	182
16.2 Загальні теореми динаміки при ударі	184
16.3 Удар точки по нерухомій поверхні	186
16.4 Прямий центральний удар двох тіл	190
16.5 Втрата кінетичної енергії при непружному ударі двох тіл. Теорема Карно	193
16.6 Удар по тілу в обертальному русі	194
Контрольні запитання	195
Література	196

ПЕРЕДМОВА

Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони механічного руху, який визначається переміщенням одного матеріального об'єкта відносно іншого.

Теоретична механіка, яка вивчає одну з форм руху матерії, належить до природничих наук. Серед природничих наук теоретична механіка займає чільне місце, бо є науковим фундаментом для багатьох технічних дисциплін, теорія яких ґрунтується на положеннях та законах теоретичної механіки.

Основним завданням теоретичної механіки є пізнання кількісних і якісних закономірностей механічного руху та відображення їх на математичній мові у вигляді рівнянь – законів механічного руху.

Конспект містить один розділ «Динаміка точки та системи», який поділений на глави. Форма викладення матеріалу достатньо стисла, однак спрямована на формування вмінь та навиків розв'язування задач.

У кінці кожної глави наведені контрольні запитання для самоперевірки отриманих знань.

ГЛАВА 1. ДИНАМІКА ТОЧКИ

1.1 Основні поняття та закони динаміки

Динаміка – це розділ механіки, в якому вивчають механічний рух матеріальних об'єктів з урахуванням сил, що діють на ці об'єкти.

Уперше термін "Динаміка" ввів німецький математик Г. Лейбніц. Основними поняттями динаміки є: матеріальна точка, сила, маса, абсолютно тверде тіло.

Маса – це фізична величина, яка є мірою інертних і гравітаційних властивостей тіла або точки.

Сили в динаміці поділяють на сталі та змінні. У загальному випадку будемо вважати, що сила є функцією часу, радіуса–вектора та швидкості матеріальної точки, до якої вона прикладена, тобто:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}). \quad (1.1)$$

Через те, що різні точки тіла можуть рухатися неоднаково, деякі положення та висновки потрібно застосувати тільки для окремих матеріальних точок, а не для всього тіла. Тому динаміку поділяють на дві частини: динаміка матеріальної точки та динаміка матеріальної системи.

Коли розміри тіл малі порівняно з траєкторіями, що описуються цими тілами, їх можна розглядати як точки, наприклад, рух планет Сонячної системи.

Закони динаміки точки можна застосовувати до тіл, що рухаються поступально, коли потрібно визначити рух тіла загалом, а не його окремих точок.

В основу динаміки покладено закони динаміки точки, які встановлені шляхом узагальнення результатів цілого ряду експериментів і спостережень, присвячених вивченню руху тіл, та перевірці їх практикою. Ці закони вперше були сформульовані Г. Галілеєм та І. Ньютоном у XVII столітті та викладені в класичному творі Ньютона "Математичні начала натуральної філософії" (1687 р.).

Закон I (закон інерції). Матеріальна точка перебуває в стані спокою, або рухається рівномірно та прямолінійно, якщо на неї не

діють ніякі сили, або діє система взаємно зрівноважених сил.

Перший закон (відкритий Г.Галілеєм в 1638 р.) виражає критерій наявності системи відліку, в якій можна розглядати рух матеріальних тіл.

Інерціальною системою відліку називають систему відліку, в якій справджується закон інерції.

У класичній механіці допускається існування інерціальної системи відліку. Слід зазначити, що неможливо виділити абсолютно інерціальну систему відліку. Проте її існування з певною достовірністю підтверджується експериментально. Для вивчення руху тіл на Землі як інерціальну можна прийняти геоцентричну систему відліку, що незмінно пов'язана з Землею. Похибка, яка вноситься при цьому, невелика.

Інерціальну систему відліку будемо ще називати умовно нерухомою.

Закон II (другий закон Ньютона). Зміна кількості руху пропорційна прикладеній силі та проходить у напрямі прямої, по якій діє ця сила.

Кількість руху – це міра механічного руху, яка для матеріальної точки дорівнює добутку її маси m на швидкість \vec{v} . Тому математично другий закон Ньютона виражається такою рівністю

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}. \quad (1.2)$$

Якщо маса матеріальної точки не залежить від часу, тоді

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

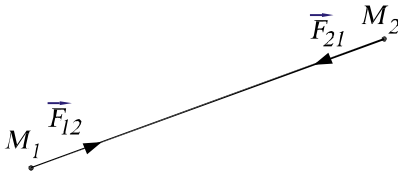
і рівність (1.2) запишемо у вигляді

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (1.3)$$

де \vec{a} – прискорення, яке набуває точка від дії сили \vec{F} .

Другий закон Ньютона має місце тільки в інерціальній системі відліку. **Рівняння (1.3) – основне рівняння динаміки точки.**

Закон III (закон рівності дії та протидії). Сили взаємодії двох матеріальних точок однакові за величиною та протилежні за напрямком (Рис. 1.1), тобто:



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (1.4)$$

Рисунок 1.1

Цей закон називають третім законом Ньютона.

Підкреслимо, що із рівності дії та протидії та протилежності сил за напрямком зовсім не впливає їх взаємна рівновага, бо ці сили прикладені до різних тіл.

Закон IV (принцип незалежності дій сил). Прискорення, яке отримує матеріальна точка від дії на неї водночас декількох сил, дорівнює векторній сумі прискорень, які точка отримує від дії кожної сили зокрема.

Це значить, що у разі дії на матеріальну точку водночас декількох сил \vec{F}_k ($k = 1, 2, \dots, n$) допускається справедливність рівності

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (1.5)$$

Рівняння (1.5) – це основне рівняння динаміки вільної матеріальної точки. Це рівняння є справедливим і для невільної матеріальної точки, на яку накладені в'язі. Потрібно тільки до прикладених сил додати реакції в'язей, тобто:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k, \quad (1.6)$$

де \vec{R}_k – реакція k -ої в'язі. **Рівняння (1.6) – основне рівняння динаміки невільної матеріальної точки.**

1.2 Задачі динаміки точки

У динаміці розв'язують дві основні задачі. Сформулюємо ці задачі для **вільної точки**. **Перша або пряма задача динаміки**: за відомими законом руху точки та її масою, встановити, під дією яких сил відбувається цей рух. **Друга (основна) задача** – обернена задача динаміки: за відомими масою точки та силами, які діють на неї, а також початковими умовами (початкове положення та початкова швидкість), визначити закон руху точки.

Для **невільної точки** дві основні задачі динаміки є такими: **перша задача** – за відомими законом руху точки, активними силами, які діють на неї, а також її масою, визначити рівнодійну реакцій в'язей; **друга (основна) задача** – за відомими активними силами, які діють на точку, її масою, а також початковими умовами, визначити закон руху точки та реакції в'язей.

Задача 1.1. Повітряна куля та корзина загальною вагою \vec{G} опускаються з прискоренням \vec{a} . Якої ваги \vec{Q} вантаж необхідно скинути, щоб куля почала підніматися з таким самим прискоренням?

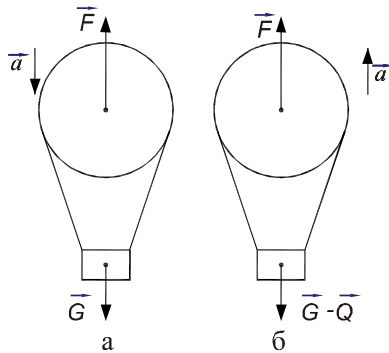


Рисунок 1.2

Розв'язок

На кулю, що опускається, діє сила ваги \vec{G} та підймальна сила \vec{F} (Рис. 1.2, а) Запишемо рівняння руху кулі в проекціях на вертикаль

$$\frac{G}{g}a = G - F.$$

Коли вантаж скинути (Рис. 1.2, б), то вага кулі дорівнюватиме $G - Q$, а підймальна сила залишиться тією ж. Враховуючи, що куля при цьому буде рухатися угору, отримаємо:

$$\frac{G - Q}{g}a = F - (G - Q).$$

Виключаючи з цих двох рівнянь невідому силу F , знайдемо:

$$Q = \frac{2Ga}{a + g}.$$

1.3 Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

З кінематики відомо, що рух матеріальної точки в просторі можна описати трьома способами: векторним, координатним і натуральним. Кожному із цих способів відповідають диференціальні рівняння руху матеріальної точки, які встановлюють на підставі основного рівняння динаміки точки (15.5) або (15.6).

Якщо рух матеріальної точки масою m описують **векторним способом**, тобто її положення в просторі визначається радіусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то диференціальне рівняння руху цієї точки має вигляд:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}), \quad (1.7)$$

де $\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$ – рівнодійна сил, що діють на точку (Рис. 1.3).

Рівняння (1.7) називають **диференціальним рівнянням руху матеріальної точки у векторній формі**.

Якщо рух матеріальної точки масою m описують **координатним способом**, тобто її положення в просторі визначається координатами $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, то диференціальні рівняння руху цієї точки мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

де $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$, $\vec{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $\vec{a}(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$.

Рівняння (1.8) називають **диференціальними рівняннями руху матеріальної точки в координатній (декартовій) формі**.

Якщо рух матеріальної точки масою m описують **натуральним способом** (Рис. 1.4), тобто її положення на траєкторії визначається дуговою координатою $s = s(t)$, то диференціальні рівняння руху цієї точки в проекціях на осі натурального тригранника $\vec{\tau}$, \vec{n} , \vec{b} мають вигляд:

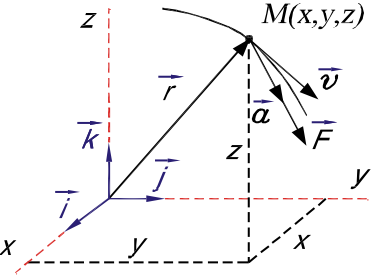


Рисунок 1.3

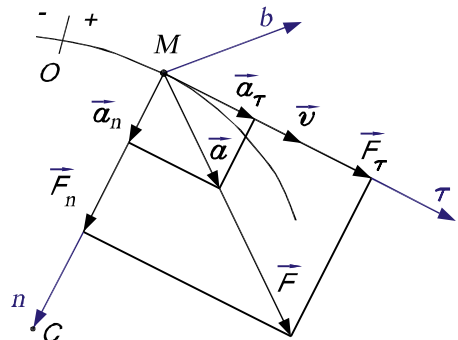


Рисунок 1.4

$$\left. \begin{aligned} ma_\tau &= F_\tau(t, s, \dot{s}); & m \frac{dv}{dt} &= F_\tau(t, s, \dot{s}); \\ ma_n &= F_n(t, s, \dot{s}); & m \frac{v^2}{\rho} &= F_n(t, s, \dot{s}); \\ ma_b &= F_b(t, s, \dot{s}); & 0 &= F_b(t, s, \dot{s}), \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

де $v = \dot{s}$, ρ – радіус кривизни траєкторії в точці M , C – центр кривизни траєкторії; $a_b = 0$ – проекція \bar{a} на бінормаль.

Рівняння (1.9) називають **диференціальними рівняннями руху матеріальної точки в натуральній формі або формі Ейлера**.

1.4 Інтегрування диференціальних рівнянь руху точки (розв'язування другої задачі динаміки)

Наведемо алгоритм розв'язування другої задачі динаміки, використовуючи рівняння руху матеріальної точки в координатній формі (1.8).

Установлення закону руху точки в цьому разі зводять до інтегрування системи трьох диференціальних рівнянь другого порядку (1.8), в яких невідомими функціями є координати x , y , z , а аргументом є час t . Проінтегрувавши систему диференціальних рівнянь, одержимо шукані величини як функції часу та шести довільних сталих C_k (загальний розв'язок):

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ y &= y(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ z &= z(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для визначення довільних сталих C_k ($k=1, 2, 3, \dots, 6$) необхідно задати **початкові умови**: початкове положення та початкову швидкість

точки в момент часу $t = t_0$. Як правило, початковий момент часу приймають за нульовий, тобто $t_0 = 0$. Початкові умови можна задати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0; \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Після диференціювання за часом рівнянь (15.10), отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, \dots, C_6) \end{aligned} \right\}, \quad (1.12)$$

Підставляючи в (1.12) і (1.10) початкові умови (1.11), отримаємо систему шести алгебраїчних рівнянь відносно шести невідомих C_k ($k = 1, 2, 3, \dots, 6$)

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x(0, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ y_0 &= y(0, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ z_0 &= z(0, C_1, C_2, \dots, C_6) \end{aligned} \right\} \cup \left\{ \begin{aligned} \dot{x}_0 &= \dot{x}(0, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ \dot{y}_0 &= \dot{y}(0, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ \dot{z}_0 &= \dot{z}(0, C_1, C_2, \dots, C_6) \end{aligned} \right\}. \quad (1.13)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1.13), визначимо шість невідомих сталих C_k ($k = 1, 2, 3, \dots, 6$). Після підстановки цих сталих у співвідношення (1.10) матимемо частковий розв'язок задачі відповідно до початкових умов (1.11), тобто визначим шуканий закон руху точки:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

1.5 Інтегрування диференціальних рівнянь прямолінійного руху точки

На точку діє постійна за модулем і напрямком сила

На точку масою m діє постійна за модулем і напрямком сила \vec{Q} . Диференціальне рівняння прямолінійного руху точки вздовж осі Ox матиме вигляд:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx},$$

або
$$m\ddot{x} = Q_x. \quad (1.15)$$

Оскільки $Q_x = \text{const}$, то помноживши обидві частини рівняння (1.15) на dt і проінтегрувавши, одержимо

$$\dot{x} = v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{Q_x}{m}t + C_1. \quad (1.16)$$

Помноживши обидві частини рівняння (1.16) на dt і ще раз проінтегрувавши, знайдемо загальний розв'язок рівняння (1.15):

$$x = \frac{1}{2} \frac{Q_x}{m} t^2 + C_1 t + C_2. \quad (1.17)$$

Для визначення сталих інтегрування у випадку прямолінійного руху точки початкові умови задають у вигляді:

$$\text{при } t = 0, \quad x = x_0, \quad \dot{x} = v_{0x} = \dot{x}_0. \quad (1.18)$$

Підставивши в рівняння (1.16) і (1.17) початкові умови (1.18), отримаємо:

$$C_1 = \dot{x}_0, \quad C_2 = x_0.$$

Після підстановки цих значень в (1.17) маємо **закон руху точки**

$$x = \frac{1}{2} \frac{Q_x}{m} t^2 + \dot{x}_0 t + x_0.$$

На точку діє сила, залежна від часу

Точка масою m розпочинає рух зі стану спокою вздовж гладкої горизонтальної площини під дією сили \vec{R} , що змінюється за законом $R = kt$. Потрібно визначити закон руху точки.

Відлік осі x розпочнемо з початкового положення точки та направимо цю вісь у бік руху (Рис. 1.5).

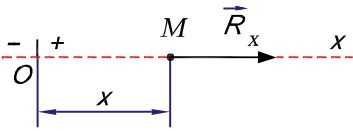


Рисунок 1.5

Тоді початкові умови: при $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = v_{0,x} = 0$. На рисунку покажемо в довільному положенні точку і силу $R_x = kt$, що діє на неї.

Диференціальне рівняння руху точки

$$m\ddot{x} = kt.$$

Двічі проінтегрувавши рівняння руху, отримаємо:

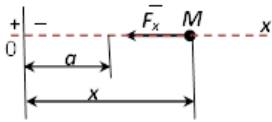
$$m\dot{x} = \frac{kt^2}{2} + C_1, \quad mx = \frac{kt^3}{6} + C_1 t + C_2.$$

Підставивши початкові умови, знайдемо $C_1 = C_2 = 0$.

Тоді закон руху точки запишемо так:

$$x = \frac{k}{6} t^3 \cdot \frac{1}{m}.$$

На точку діє сила, що залежить від переміщення



Визначити закон руху точки масою m , на яку діє сила \vec{F} прямо пропорційна переміщенню x ($F_x = -\alpha x$) (Рис. 1.6).

Рисунок 1.6

Початкові умови задачі: при $t = 0$, $x = a$, $\dot{x}_0 = v_{0x} = 0$.

Диференціальне рівняння руху точки в цьому разі має вигляд:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\alpha x, \\ \text{або} \quad \ddot{x} &= -k^2 x, \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\text{де } k^2 = \frac{\alpha}{m}.$$

Перепишемо рівняння (1.19) так :

$$\dot{x} \frac{dx}{dx} = -k^2 x.$$

Помноживши обидві частини отриманого виразу на dx і розділивши змінні, отримаємо:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = -k^2 \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Використовуючи початкові умови, визначимо сталу інтегрування

$$C_1 = \frac{1}{2} k^2 a^2.$$

$$\text{Тоді} \quad \dot{x} = \pm k \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Уважаючи, що швидкість руху направлена від точки M до O , перед коренем беремо знак мінус. Тоді, замінивши \dot{x} на $\frac{dx}{dt}$, отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = -k\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Розділивши змінні, зведемо рівняння до вигляду

$$kdt = -\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (1.20)$$

Після інтегрування (1.19) маємо

$$kt = \arccos \frac{x}{a} + C_2.$$

Підставивши початкові умови ($t = 0$, $x = a$) в отриманий вираз, знайдемо сталу інтегрування: $C_2 = 0$. Визначивши з останнього виразу x , запишемо **закон руху точки** у вигляді:

$$x = a \cos(kt) = a \cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}} t\right).$$

На точку діє сила, що залежить від швидкості

Матеріальна точка масою m розпочинає рух по шорсткій лінії з початковою швидкістю \bar{v}_0 . Уважаючи силу тертя залежною від швидкості $\vec{R} = -\mu\vec{v}$, визначити, через який час швидкість точки зменшиться в два рази.

Сумістимо початок осі Ox з початковим положенням точки та направимо цю вісь у бік руху точки (Рис. 1.7).

Визначимо проекції на вісь x сил, що діють на точку,

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = -R = -\mu v_x = -\mu \dot{x}.$$

Для визначення часу руху точки складемо диференціальне рівняння (ураховуючи, що $v_x = \dot{x} = v$)

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu v.$$

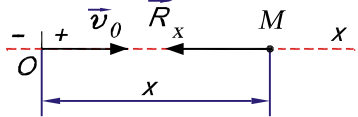


Рисунок 1.7

Розділимо змінні та інтегруємо це рівняння:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m} \int_0^t dt,$$

або $\ln v - \ln v_0 = -\frac{\mu}{m} t.$

Звідси $t = \frac{m}{\mu} \ln \frac{v_0}{v}.$

Час t , за який швидкість зменшиться в два рази ($v = 0,5v_0$), дорівнює

$$t = 0,69 \frac{m}{\mu}, \text{ с,}$$

де враховано, що $\ln \frac{v_0}{v} = \ln \frac{v_0}{0,5v_0} = \ln 2 = 0,69.$

Контрольні запитання

1. Що вивчає динаміка?
2. Сформулюйте закони Ньютона.
3. Запишіть диференціальні рівняння руху матеріальної точки для випадків задання руху у векторній, координатній та натуральній формах.
4. Наведіть алгоритм розв'язування другої задачі у випадку задання руху в координатній формі.
5. Виконайте інтегрування диференціальних рівнянь прямолінійного руху точки у разі дії на точку сили: постійної за модулем і напрямком; залежної від часу; залежної від переміщення; залежної від швидкості.

ГЛАВА 2. ПРЯМОЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ТОЧКИ

Теорія коливань є основою ряду областей фізики та техніки. Хоча коливання, які розглядають у механіці, радіотехніці, акустиці, і відрізняються одні від інших за своєю фізичною природою, основні закони цих коливань в усіх випадках є однаковими. Тому вивчення механічних коливань важливе не лише тому, що такі коливання мають місце в техніці, але і тому, що результати, отримані під час вивчення механічних коливань, можуть бути використані для вивчення коливних явищ в інших галузях знань.

2.1 Вільні коливання точки без урахування опору

Розглянемо рух матеріальної точки M під дією відновлювальної сили \vec{F} .

Лінійною відновлювальною силою називають силу, яка намагається повернути точку в положення рівноваги та пропорційна відхиленню цієї точки від положення рівноваги

$$\vec{F} = -c\vec{r}, \quad (2.1)$$

де c – коефіцієнт жорсткості, що чисельно дорівнює силі, яку необхідно прикласти до пружного елемента, щоб змінити його довжину на одиницю.

Знайдемо закон руху точки M . Для цього запишемо диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь Ox (Рис. 2.1)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x. \quad (2.2)$$

З урахуванням того, що

$$F_x = -cx,$$

рівняння (2.2) запишемо у вигляді

$$m\ddot{x} = -cx.$$

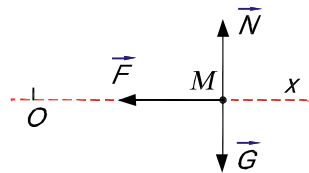


Рисунок 2.1

Поділимо обидві частини отриманого виразу на m і отримаємо

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x. \quad (2.3)$$

Уведемо позначення $k^2 = \frac{c}{m}$. Тоді рівняння (2.3) можна записати так

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (2.4)$$

Рівняння (2.4) є **диференціальним рівнянням вільних коливань за відсутності опору**. Розв'язок цього лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку будемо шукати у вигляді $x = e^{nt}$. Після підстановки цього виразу в (2.4) отримаємо для визначення n таке характеристичне рівняння:

$$n^2 + k^2 = 0.$$

Оскільки корені цього характеристичного рівняння уявні $n_{1,2} = \pm ik$, то, виходячи з теорії диференціальних рівнянь, загальний розв'язок рівняння (2.4) має вигляд:

$$x = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt), \quad (2.5)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування.

Якщо ввести нові сталі a та α , такі, що $C_1 = a \sin \alpha$, $C_2 = a \cos \alpha$, то отримаємо:

$$x = a(\sin kt \cdot \cos \alpha + \cos kt \cdot \sin \alpha)$$

$$\text{або} \quad x = a \sin(kt + \alpha). \quad (2.6)$$

Цей другий вигляд розв'язку рівняння (2.4), в якому сталі інтегрування a та α . Тоді швидкість точки така:

$$v_x = ak \cos(kt + \alpha). \quad (2.7)$$

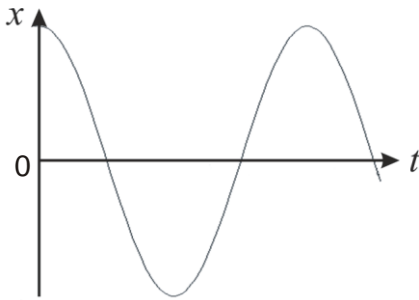


Рисунок 2.2

Коливання, які здійснює точка відповідно до закону (2.6), називають гармонійними коливаннями. Графік цих коливань

для $\alpha = \frac{\pi}{2}$ показаний на рис. 2.2.

Усім характеристикам цього руху можна дати наглядну кінематичну інтерпретацію (Рис. 2.3). Розглянемо точку B , що руха-

ється по дузі кола радіуса a з положення B_0 , що визначається кутом $\angle DOB_0 = \alpha$. Стала кутова швидкість обертання радіуса OB дорівнює k .

Тоді в довільний момент часу t кут $\varphi = \angle DOB = \alpha + kt$ і проекція M точки B на діаметр, перпендикулярний до DO , рухається відповідно до закону $x = a \sin(kt + \alpha)$, де $a = OM$.

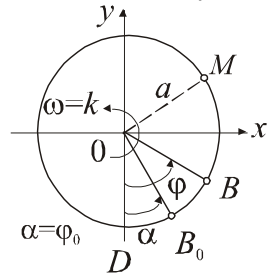


Рисунок 2.3

Величину a , що дорівнює найбільшому відхиленню точки M від центра коливань, називають амплітудою коливань. Величину $\varphi = \alpha + kt$ називають фазою коливань. Фаза φ , на відміну від координати x , визначає не лише положення точки в даний момент часу, але й напрямок її руху. Наприклад, з положення M для фази φ точка рухається вправо, а для фази $(\pi - \varphi)$ – вліво, α – початкова фаза коливань. Величину k , що збігається з кутовою швидкістю обертання радіуса OB , називають круговою частотою коливань.

Проміжок часу T , протягом якого точка здійснює одне повне коливання, називають періодом коливань. Протягом періоду фаза коливань змінюється на 2π . Таким чином:

$$kT = 2\pi,$$

звідси
$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (2.8)$$

Величину ν , яка обернена періоду та визначає кількість коливань в одиницю часу, називають **частотою коливань**

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}. \quad (2.9)$$

Звідси видно, що величина k відрізняється від ν лише постійним множником 2π . Значення a та α визначають з початкових умов.

Уважаючи, що при $t = 0$, $x = x_0$, а $v_x = v_0$, одержимо:

$$x_0 = a \sin \alpha, \quad \frac{v_0}{k} = a \cos \alpha.$$

Звідси
$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{k v_0}{x_0} \quad (2.10)$$

Відмітимо такі **властивості вільних коливань**:

1. Амплітуда та початкова фаза коливань залежить від початкових умов.

2. Частота k , а також період T коливань від початкових умов не залежать.

Звідси випливає, якщо в задачі необхідно визначити лише період або частоту коливань, то необхідно скласти диференціальне рівняння руху та звести його до вигляду (2.4). Потім період T визначають за формулою (2.8), не інтегруючи рівняння.

2.2 Вплив постійної сили на вільні коливання точки

На точку M окрім відновлювальної сили \vec{F} , що спрямована до центра O , діє постійна за модулем і напрямком сила \vec{P} . Величина сили \vec{F} (Рис. 2.4) пропорційна відстані від центра O до точки, тобто $F = c \cdot OM$.

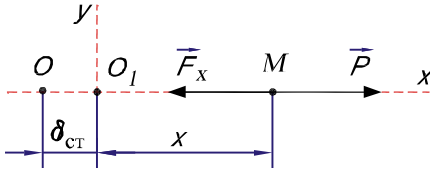


Рисунок 2.4

Положенням рівноваги точки буде центр O_1 , розміщений від O на відстані $OO_1 = \delta_{\text{ст}}$. Величину $\delta_{\text{ст}}$ називають статичним відхиленням точки і визначають з рівності:

$$c \cdot \delta_{\text{ст}} = P,$$

або

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{P}{c}. \quad (2.11)$$

Прийmemo центр O_1 за початок відліку та направимо вісь O_1x у бік дії сили \vec{P} . Тоді $F_x = -c(x + \delta_{\text{ст}})$, $P_x = P$.

Складаючи диференціальне рівняння руху та враховуючи, що $c\delta_{\text{ст}} = P$, отримаємо:

$$m\ddot{x} = -cx$$

або

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (2.12)$$

Отримане рівняння є аналогічним до рівняння (16.4).

Звідси висновок, що постійна сила \vec{P} не впливає на характер коливань, що відбуваються під дією відновлювальної сили \vec{F} , а лише зміщує центр цих коливань у бік дії сили \vec{P} на величину статичного відхилення $\delta_{\text{ст}}$.

Запишемо період коливань через $\delta_{\text{ст}}$. З формули (2.11) та (2.3)

$$k^2 = \frac{P}{m\delta_{\text{ст}}}.$$

Тоді за залежністю (2.8) отримаємо

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{P} \delta_{\text{ст}}}. \quad (2.13)$$

Отже період коливань пропорційний квадратному кореню зі статичного відхилення $\delta_{\text{ст}}$.

Якщо сила \vec{P} є силою ваги, що має місце при коливанні вантажу на вертикальній пружині, то $P = mg$ і формула (2.13) набуде вигляду:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{\text{ст}}}{g}}.$$

2.3 Коливання точки з опором, пропорційним швидкості

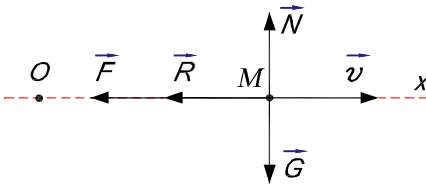


Рисунок 2.5

На матеріальну точку під час руху діє відновлювальна сила \vec{F} та сила опору $\vec{R} = -\mu\vec{v}$ (Рис. 2.5). Тоді $F_x = -cx$, $R_x = -\mu v_x = -\mu\dot{x}$, і диференціальне рівняння руху матиме вигляд

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}.$$

Розділивши обидві частини на m , запишемо рівняння так:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0, \quad (2.14)$$

$$\text{де } k^2 = \frac{c}{m}, \quad 2b = \frac{\mu}{m}.$$

Рівняння (2.14) є диференціальним рівнянням вільних коливань з опором, пропорційним швидкості. Розв'язок рівняння (2.14) будемо шукати у вигляді $x = e^{nt}$. Підставивши це значення x у рівняння (2.14), одержимо характеристичне рівняння $n^2 + 2bn + k^2 = 0$, корені якого

$$n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}. \quad (2.15)$$

Розглянемо випадок, коли $k > b$, тобто коли опір малий порівняно з відновлювальною силою. Введемо позначення

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2} \quad (2.16)$$

і отримаємо з (2.15)

$$n_{1,2} = b \pm ik_1.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (3.13) має вигляд:

$$x = e^{-bt} (C_1 \cos(k_1 t) + C_2 \sin(k_1 t)) \quad (2.17)$$

або

$$x = e^{-bt} a \sin(k_1 t + \alpha). \quad (2.18)$$

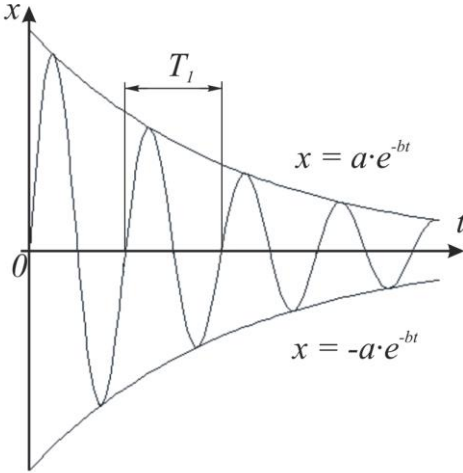


Рисунок 2.6

Величини a та α є сталими інтегрування та їх визначають з початкових умов.

Коливання, що проходять відповідно до закону (2.18), називають згасаючими коливаннями. Графік цих коливань зображений на рис. 2.6.

Проміжок часу T_1 , який дорівнює періоду $\sin(k_1 t + \alpha)$, називають **періодом згасаючих ко-**

ливань.

Величину періоду згасаючих коливань визначають за залежністю

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}. \quad (2.19)$$

Формулу (2.19) можна записати так:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - \frac{b^2}{k^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{k^2}}} \approx T \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b^2}{k^2}\right). \quad (2.20)$$

2.4 Вимушені коливання. Резонанс

Розглянемо рух точки, коли на неї діє відновлювальна сила \vec{F} та періодична сила \vec{Q} , проекція якої на вісь x дорівнює:

$$Q_x = Q_0 \sin(pt). \quad (2.21)$$

Силу \vec{Q} називають збурювальною силою. Величину p в (2.21) називають **частотою збуджувальної сили**.

Коливання точки, що відбуваються під дією збуджувальної сили називають вимушеними коливаннями.

Вимушені коливання за відсутності опору

Розглянемо рух точки, коли на неї, окрім відновлювальної сили \vec{F} , діє збуджувальна сила \vec{Q} . Тоді диференціальне рівняння руху точки має вигляд

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin(pt).$$

Розділимо обидві частини рівняння на m і позначимо $\frac{Q_0}{m} = p_0$. Тоді рівняння руху запишемо так

$$\ddot{x} + k^2x = p_0 \sin(pt). \quad (2.22)$$

Рівняння (2.22) є диференціальним рівнянням вимушених коливань точки за відсутності опору. Його розв'язок такий

$$x = x_1 + x_2,$$

де x_1 – загальний розв'язок однорідного рівняння, тобто розв'язок рівняння (2.4) без правої частини, x_2 – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2.22).

Приймаємо $p \neq k$ і шукаємо розв'язок x_2 у вигляді

$$x_2 = A \sin(pt),$$

де A – стала величина, яку необхідно підібрати так, щоб рівність (2.22) перетворилась у тотожність.

Після підстановки значення x_2 та його другої похідної у рівняння (2.22), одержимо

$$-p^2 A \sin(pt) + k^2 A \sin(pt) = p_0 \sin(pt).$$

Звідси

$$A = \frac{p_0}{k^2 - p^2}$$

і тоді частинний розв'язок x_2 такий:

$$x_2 = \frac{p_0}{k^2 - p^2} \sin(pt). \quad (2.23)$$

Отже загальний розв'язок рівняння (2.22) запишемо так:

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{p_0}{k^2 - p^2} \sin(pt). \quad (2.24)$$

де a і α – сталі інтегрування, які визначають з початкових умов. Розв'язок (2.24) показує, що коливання точки в цьому випадку складається з: 1) коливань з амплітудою a , залежною від початкових умов, і частотою k , які називають **вільними коливаннями**; 2) коливань з амплітудою A , незалежною від початкових умов та частотою p , які називають **вимушеними коливаннями**.

Завдяки наявності сил опору, власні коливання швидко згасають. А тому основне значення в такому русі точки відіграють вимушені коливання, які задають залежністю (2.23). Частота p вимушених коливань дорівнює частоті збуджувальної сили. Амплітуду A цих коливань можна записати так:

$$A = \frac{p_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{\frac{p_0}{k^2}}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|} = \frac{\delta_0}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|}, \quad (2.25)$$

де δ_0 – статичне відхилення точки під дією сили Q_0 , величина якого відповідно до залежностей (2.4) та (2.22)

$$\delta_0 = \frac{p_0}{k^2} = \frac{Q_0}{c}.$$

Відношення амплітуди коливань до статичного відхилення точки називають коефіцієнтом динамічності $\left(\frac{A}{\delta_0}\right)$.

Амплітуда A і коефіцієнт динамічності $\frac{A}{\delta_0}$ залежать від відношення частот $\lambda = \frac{p}{k}$. Графік залежності величини $\frac{A}{\delta_0}$ від λ зображений на рис. 2.8 (крива $h = 0$ – без опору, $h \neq 0$ – за наявності опору).

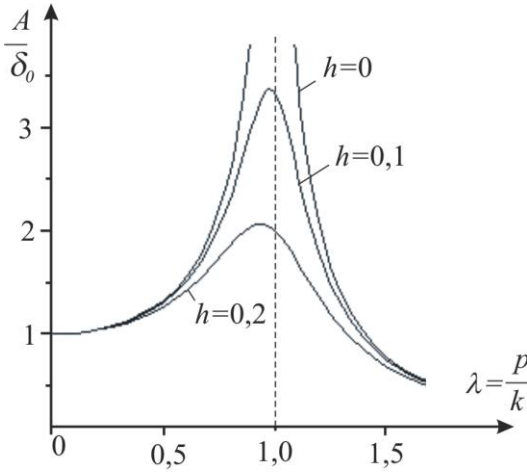


Рисунок 2.8

Згідно з формулою (2.25) або графіком на рис. 2.8, підібравши співвідношення між p та k , можна отримати вимушені коливання з різними амплітудами.

Для $p = 0$ амплітуда A дорівнює δ_0 або близька до цієї величини. Якщо p наближається до k , амплітуда A стає дуже великою. Якщо $p \gg k$, то амплітуда A стає дуже малою.

Для $p < k$, як видно із порівняння формул (2.21)

та (2.23), фази вимушених коливань та збуджувальної сили є однаковими. Якщо $p > k$, то вніши знак мінус під знак синуса у формулі (2.23), отримаємо

$$x_2 = \frac{p_0}{p^2 - k^2} \sin(pt - \pi).$$

Для $p > k$ зсув між фазами вимушених коливань та збуджувальної сили дорівнює π .

Резонанс

У разі, коли $p = k$, тобто коли частота збуджувальної сили дорівнює частоті вільних коливань, має місце явище резонансу.

Частковий розв'язок рівняння (2.22) будемо шукати у вигляді:

$$x_2 = Bt \cos(pt).$$

Тоді закон вимушених коливань при резонансі у випадку відсутності опору запишемо так

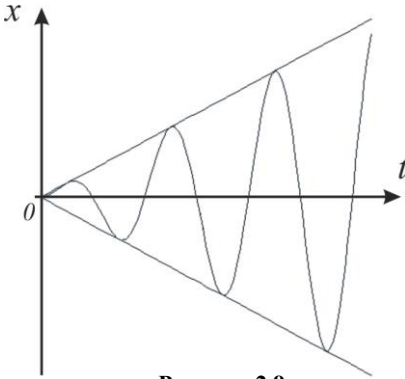


Рисунок 2.9

$$x_2 = \frac{p_0}{2p} t \cos(pt)$$

або

$$x_2 = \frac{p_0}{2p} t \sin\left(pt - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.26)$$

Амплітуда вимушених коливань при резонансі зростає пропорційно до часу (Рис. 2.9). Зсув фаз при резонансі дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Вимушені коливання з урахуванням сили опору

Розглянемо рух точки, на яку діють: відновлювальна сила \vec{F} , сила опору \vec{R} та збуджувальна сила \vec{Q} . Диференціальне рівняння руху точки має такий вигляд:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + Q \sin(pt),$$

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = p_0 \sin(pt).$$

або

(2.27)

Рівняння (2.27) є диференціальним рівнянням вимушених коливань точки з урахуванням сили опору.

Загальний розв'язок такого рівняння має вигляд $x = x_1 + x_2$, де x_1 – загальний розв'язок рівняння (2.27) без правої частини, x_2 – частинний розв'язок повного рівняння (2.27).

Частинний розв'язок x_2 будемо шукати у такому вигляді:

$$x_2 = A \sin(pt - \beta),$$

де A та β – сталі, які необхідно дібрати.

Підставивши вираз для x_2 та похідні від нього по t у рівняння (2.27), отримаємо два рівняння для визначення A та β :

$$A(k^2 - p^2) = p_0 \cos \beta, \quad 2bpA = p_0 \sin \beta.$$

Звідси

$$A = \frac{p_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}}, \quad tg\beta = \frac{2bp}{k^2 - p^2}. \quad (2.28)$$

Вираз для x_1 при $k > b$ візьмемо з формули (2.18) і розв'язок рівняння (2.27) запишемо так:

$$x = ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha) + A \sin(pt - \beta), \quad (2.29)$$

де a та α – сталі інтегрування.

Як видно з (2.29), вимушені коливання з урахуванням сили опору складаються із власних та вимушених коливань.

Для дослідження одержаних результатів введемо позначення:

$$\frac{b}{k} = h, \quad (2.30)$$

де h – величина, що характеризує опір. Тоді амплітуду A можна записати так:

$$A = \frac{\delta_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4h^2\lambda^2}}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{2h\lambda}{1-\lambda^2}. \quad (2.31)$$

Амплітуда A та β залежать від двох безрозмірних параметрів λ та h . Графік залежності $\frac{A}{\delta_0}$ від λ для деяких значень h показаний на рис. 2.8.

У кожній конкретній задачі за її даними можна вирахувати величини δ_0 , λ , h і, використовуючи формули (2.31), знайти значення A та β . З цих формул видно, що змінюючи співвідношення між p та k , можна отримати вимушені коливання з різними амплітудами.

Розглянемо **окремі випадки**.

1. Якщо відношення частот дуже мале число ($p \ll k$), тоді прийнявши $\lambda \approx 0$, з формули (2.31) отримаємо $A \approx \delta_0$. Тоді коливання проходять з амплітудою δ_0 та зсувом фаз $\beta = 0$.

2. Якщо відношення частот λ дуже велике число ($p \gg k$), то A стає малою величиною. Цей випадок цікавий стосовно вібрації споруд та машин. При цьому, враховуючи малий опір і нехтуючи в (2.31) величиною $2h\lambda$ і одиницею відносно λ^2 , отримаємо наближену формулу для амплітуди A :

$$A = \frac{\delta_0}{\lambda^2} = \frac{p_0}{p^2}. \quad (2.32)$$

3. У практичних випадках величина h набагато менша від одиниці. Тоді, як видно з формули (2.31), якщо величина λ близька до одиниці, амплітуда вимушених коливань досягає максимуму. Це явище називають **резонансом**.

Наближені формули для амплітуди A та зсуву фаз β можна отримати, прийнявши $\lambda = 1$ у формулах (2.31)

$$A_p = \frac{\delta_0}{2h}, \quad \beta_p = \frac{\pi}{2}. \quad (2.33)$$

З формул (2.33) видно, що для малих h амплітуда вимушених коливань A_p може бути як завгодно велика.

Загальні властивості вимушених коливань

Вимушені коливання мають такі властивості, які відрізняють їх від власних коливань:

- а) амплітуда вимушених коливань не залежить від початкових умов;
- б) вимушені коливання не згасають за наявності сил опору;
- в) частота вимушених коливань дорівнює частоті збуджувальної сили та від характеристик коливальної системи не залежить;
- г) навіть за наявності малої збуджувальної сили можна отримати інтенсивні вимушені коливання, якщо опір малий, а частота p наближається до частоти k ;
- д) за наявності великої збуджувальної сили можна отримати малі вимушені коливання, якщо частота p буде набагато більша від частоти k .

Вимушені коливання, особливо резонанс, використовують у фізиці та техніці. При роботі машин та двигунів виникають періодичні сили, які викликають вимушені коливання. Шляхом добору p та k досягають того, що амплітуда вимушених коливань практично дорівнює нулю. Протилежний приклад маємо в радіотехніці, де резонанс є корисним і його використовують для відокремлення радіосигналів однієї радіостанції від іншої.

Контрольні запитання

1. Записати диференціальне рівняння вільних коливань за відсутності опору та навести його розв'язок.
2. Що називають періодом коливань?
3. Перерахуйте властивості вільних коливань.
4. Як визначити період коливань без інтегрування диференціального рівняння руху?

5. Записати диференціальне рівняння вільних коливань з опором, пропорційним швидкості та навести його розв'язок.
6. За якою формулою визначають період згасаючих коливань?
7. Як впливає величина опору на період коливань?
8. Записати диференціальне рівняння вимушених коливань за відсутності опору та навести його розв'язок.
9. Що називають коефіцієнтом динамічності ?
10. Перерахуйте властивості вимушених коливань.
11. Яке явище називають резонансом ?

ГЛАВА 3. ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ ТОЧКИ

3.1 Диференціальне рівняння відносного руху точки

Закони динаміки та отримані з них рівняння й теореми справедливі лише для абсолютного руху точки, тобто руху відносно інерціальної нерухої системи відліку.

Розглянемо матеріальну точку M , що рухається під дією прикладених до неї сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Будемо вивчати рух цієї точки відносно системи координат $Oxyz$, яка в свою чергу рухається відносно нерухої системи координат $O_1x_1y_1z_1$. Знайдемо залежність між відносним прискоренням \vec{a}_r та силами, які діють на точку.

Для абсолютного руху основний закон динаміки має вигляд:

$$m\vec{a}_a = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (3.1)$$

Згідно з теоремою Коріоліса

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

Підставивши \vec{a}_a в (3.1), отримаємо:

$$m\vec{a}_r = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c).$$

Введемо позначення

$$\vec{F}_e^{\text{ін}} = -m\vec{a}_e, \quad \vec{F}_c^{\text{ін}} = -m\vec{a}_c.$$

Величини $\vec{F}_e^{\text{ін}}, \vec{F}_c^{\text{ін}}$ за розмірністю є силами. Назвемо їх відповідно **переносною та коріолісовою силами інерції**.

Тоді залежність (3.1) запишемо так:

$$m\vec{a}_r = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \vec{F}_e^{\text{ін}} + \vec{F}_c^{\text{ін}}. \quad (3.2)$$

Залежність (3.2) виражає **основний закон динаміки для відносного руху точки**. Порівнюючи рівняння (3.1) та (3.2), приходимо до висновку: всі рівняння для відносного руху точки складають так само, як рівняння абсолютного руху, якщо до сил, що діють на точку внаслідок взаємодії з іншими тілами, додати переносну й коріолісову сили інерції. Додавання сил $\vec{F}_e^{\text{ін}}$ та $\vec{F}_c^{\text{ін}}$ враховує вплив переміщення рухомої системи відліку на відносний рух точки.

Розглянемо окремі випадки.

1. Якщо рухома система відліку рухається поступально, тоді $\vec{F}_c^{\text{ін}} = 0$ ($\omega_e = 0$) і закон відносного руху має вигляд:

$$m\vec{a}_r = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \vec{F}_e^{\text{ін}} \quad (3.3)$$

2. Якщо рухома система відліку рухається поступально, рівномірно і прямолінійно ($a_e = a_c = 0$), тоді $\vec{F}_e^{\text{ін}} = \vec{F}_c^{\text{ін}} = 0$ і закон відносного руху матиме такий самий вигляд, як і закон руху відносно нерухомої системи відліку. Отже, така система відліку також є інерціальною. З цього випливає, що **ніяким механічним експериментом неможливо виявити, перебуває дана система відліку в стані спокою, чи рухається поступально, рівномірно та прямолінійно**.

У цьому й полягає відкритий Галілеєм **принцип відносності** класичної механіки.

3. Якщо точка відносно рухомої системи відліку перебуває у стані спокою, то для неї $\vec{a}_r = 0$, $\vec{v}_r = 0$, а звідси і $\vec{F}_c^{\text{ін}} = 0$, тому що прискорення Коріоліса дорівнює $a_c = 2\omega_e v_r \sin \alpha$. Тоді рівність (3.3) набуде вигляду:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \vec{F}_e^{\text{ін}} = 0. \quad (3.4)$$

Залежність (3.4) є **рівнянням відносного стану спокою точки**. Звідси випливає, що рівняння відносного спокою складають так, як рівняння рівноваги в нерухомій системі відліку, якщо при цьому до сил, які діють на точку, додати переносну силу інерції.

4. При складанні рівнянь відносного руху у випадках, коли $\vec{F}_c^{\text{ін}} \neq 0$, необхідно врахувати, що $\vec{F}_c^{\text{ін}} = -m\vec{a}_c = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)$. Отже сила $\vec{F}_c^{\text{ін}}$

перпендикулярна до швидкості \vec{v}_r , яка напрямлена по дотичній до відносної траєкторії точки. А тому проекція коріолісової сили інерції на дотичну $\vec{\tau}$ до відносної траєкторії точки завжди дорівнює нулю й рівняння у відносному русі запишемо так:

$$m \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{k\tau} + \vec{F}_{e\tau}^{in}. \quad (3.5)$$

У інші рівняння відносного руху будуть входити як переносна, так і коріолісова сили інерції.

Задача 3.1. Визначити, з якою силою потрібно переміщати гладку похилу площину масою m_2 у горизонтальному напрямі (Рис. 3.1, а), щоб розміщене на ній тіло масою m_1 перебувало відносно похилої площини у стані спокою.

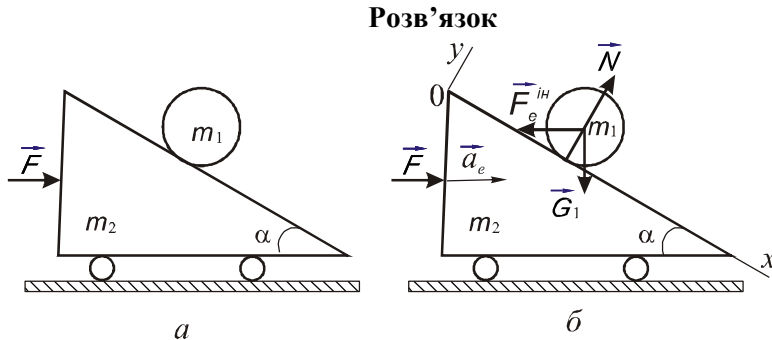


Рисунок 3.1

Якщо тіло масою m_1 перебуває в стані відносного спокою стосовно рухомої площини, то застосуємо рівняння (3.4). Покажемо сили, які діють на тіло (Рис. 3.1, б): переносна сила інерції \vec{F}_e^{in} , спрямована протилежно до переносного прискорення \vec{a}_e , з яким рухається площина під дією сили \vec{F} , сила ваги \vec{G}_1 та реакція гладкої площини \vec{N} . Запишемо рівняння відносного спокою тіла

$$\vec{G}_1 + \vec{N} + \vec{F}_e^{in} = 0.$$

Проектуємо вектори цього рівняння на вісь Ox , пов'язану з рухомою площиною. Отримаємо рівняння

$$G_1 \sin \alpha - F_e^{\text{ін}} \cos \alpha = 0,$$

з якого визначимо модуль прискорення a_e :

$$m_1 g \sin \alpha - m_1 a_e \cos \alpha = 0,$$

або

$$a_e = g \tan \alpha.$$

Сила, з якою потрібно переміщати площину,

$$F = (m_1 + m_2)a_e = (m_1 + m_2)g \tan \alpha.$$

3.2 Вплив обертання Землі на рівновагу та рух тіл

Під час розв'язку більшості технічних задач систему відліку, пов'язану з Землею, вважають інерціальною (нерухомою). Цим не враховують добове обертання Землі та її рух по орбіті навколо Сонця. Переносна сила інерції, що відповідає руху Землі по орбіті навколо Сонця, практично зрівноважена силою притягання до Сонця. Приймаючи систему відліку, яка пов'язана з Землею, за інерціальною, нехтують лише добовим обертанням Землі відносно зірок. Це обертання проходить зі швидкістю: 1 оберт за 23 год. 56 хв. 4 сек., тобто з кутовою швидкістю

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \approx 0,0000729 = 7,3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Покажемо, як впливає обертання Землі на рівновагу та рух тіл.

Відносний стан спокою на поверхні Землі. Сила ваги

Розглянемо матеріальну точку, яка розміщена на нерухомій відносно Землі гладкій "горизонтальній" поверхні (Рис. 3.2). Відповідно до (3.4) умови рівноваги запишемо так

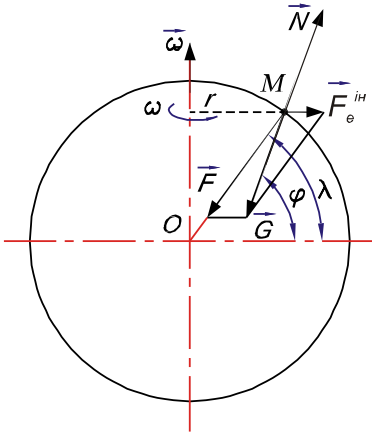


Рисунок 3.2

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_e^{\text{in}} = 0,$$

де \vec{F} – сила тяжіння Землі, \vec{N} – реакція площини, \vec{F}_e^{in} – **переносна сила інерції**.

Оскільки $\omega = \text{const}$, то сила \vec{F}_e^{in} має лише нормальну складову, спрямовану від осі обертання Землі.

Додамо сили \vec{F} та \vec{F}_e^{in} і введемо позначення

$$\vec{F} + \vec{F}_e^{\text{in}} = \vec{G}.$$

Тоді на точку M будуть діяти дві сили \vec{G} та \vec{N} , які зрівноважують одна одну. Сила \vec{G} і є та сила, яку називають **силою ваги**. Напрямок сили \vec{G} буде напрямком вертикалі у даному пункті земної поверхні, а площина, перпендикулярна до \vec{G} , буде горизонтальною площиною.

За модулем $F_e^{\text{in}} = mr\omega^2$ (r – відстань від земної осі до точки) мала величина порівняно з силою тяжіння \vec{F} . А тому напрямок сили \vec{G} мало відрізняється від напрямку сили \vec{F} . Величина F_e^{in} буде найбільша на екваторі, де $r = R$. Тут її значення складає до 0,34% сили тяжіння. Найбільша різниця показаних на рис. 3.2 кутів λ (**геоцентрична широта**) та ϕ (**астрономічна широта**) є тоді, коли $\lambda = 45^\circ$, і дорівнює наближено $11'$.

Під час зважування тіл визначають силу ваги \vec{G} , оскільки з такою силою тіло діє на шальку терезів. Уводячи в рівняння силу \vec{G} , одночасно враховують і силу \vec{F}_e^{in} . Тому при складанні рівнянь рівноваги тіл відносно Землі необхідність введення поправок на обертання Землі відпадає.

Відносний рух тіла поблизу поверхні Землі

Для врахування обертання системи осей, пов'язаних з Землею, необхідно до сил, які діють на тіло, додати сили \vec{F}_e^{in} та \vec{F}_c^{in} . Сила \vec{F}_e^{in} входить у силу ваги \vec{G} . Отже, коли осі пов'язані з Землею вважати нерухомими, то не враховують лише коріолісову силу інерції:

$$F_c^{\text{in}} = 2m \cdot \omega \cdot v_r \cdot \sin \alpha$$

де ω – кутова швидкість обертання Землі, α – кут між відносною швидкістю \vec{v}_r точки та земною віссю, тобто між $\vec{\omega}$ і \vec{v}_r .

Оскільки величина ω дуже мала, то, для невеликих відносних швидкостей, силу інерції Коріоліса $\vec{F}_c^{\text{ін}}$ можна не враховувати. Наприклад, при швидкості $v_r = 700$ м/с (швидкість артилерійського снаряда) та $\alpha = 90^\circ$ ця сила складає лише 1% від сили \vec{G} . Вплив обертання Землі набуває практичного значення для великих швидкостей (політ ракет далекої дії), або для рухів, що відбуваються довгий час (течії рік, повітря та морські течії).

Рух по земній поверхні

Якщо точка рухається по меридіану північної півкулі з півночі на південь, то прискорення Коріоліса \vec{a}_c направлене на схід, а сила $\vec{F}_c^{\text{ін}}$ – на захід.

Якщо рух з півдня на північ – сила $\vec{F}_c^{\text{ін}}$ направлена на схід. В обох випадках ця сила буде відхиляти точку вправо від напрямку її руху.

Якщо точка рухається по паралелі на схід, то прискорення Коріоліса \vec{a}_c буде спрямоване по радіусу \vec{MC} (Рис. 3.3), а сила $\vec{F}_c^{\text{ін}}$ – у протилежний бік.

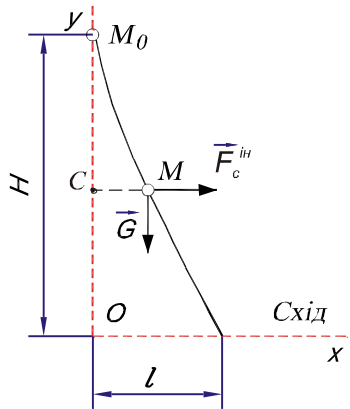


Рисунок 3.3

Вертикальна складова цієї сили (вздовж OM) буде змінювати вагу тіла, а горизонтальна складова, направлена на південь, буде відхиляти точку вправо від напрямку руху. Аналогічний результат одержимо при русі точки по паралелі на Захід.

Отже, в північній півкулі тіло, яке рухається вздовж земної поверхні в довільному напрямку, внаслідок обертання Землі буде відхилятися вправо від напрямку руху. У південній півкулі відхилення буде проходити вліво. Цим пояснюється підмивання правого берега (**закон Бера**) річки в північній півкулі, відхилення вітрів постійного напрямку (пасати) та морських течій.

Вертикальне падіння

Щоб визначити напрям сили інерції Коріоліса $\vec{F}_c^{\text{ін}}$, що діє на точку, яка вільно падає, необхідно знати напрямок відносної швидкості \vec{v}_r точки. Оскільки сила $\vec{F}_c^{\text{ін}}$ дуже мала порівняно з силою тяжіння, то швидкість \vec{v}_r можна вважати напрямленою по вертикалі, тобто по лінії

ОМ (Рис. 17.3). Тоді вектор прискорення Коріоліса \vec{a}_c буде напрямлений на захід, а сила інерції $\vec{F}_c^{\text{ін}}$ – на схід.

Отже, точка або тіло, які вільно падають, відхиляються внаслідок обертання Землі від вертикалі на схід. Тіло, кинуте вертикально вгору, буде при підйомі відхилитися на захід. Величини цих відхилень дуже малі та помітні лише при достатньо великих висотах падіння або підйому.

Наприклад, на широті $\lambda = 55^\circ 47'$, при падінні з висоти $H = 100\text{м}$ ($g = 9,816 \text{ м/с}^2$) тіло відхиляється вправо на $\ell = 1,2\text{см}$.

Контрольні запитання

1. Записати основний закон динаміки для відносного руху точки.
2. Записати закон відносного руху точки, якщо рухома система відліку рухається поступально.
3. У чому полягає принцип відносності класичної механіки?
4. Який вигляд має рівняння відносного стану спокою точки?
5. Яка відмінність між силою тяжіння та силою ваги?
6. Коли вплив обертання Землі набуває практичного значення при розв'язку задач?
7. Як впливає обертання Землі на рух по земній поверхні та на вертикальне падіння тіл?
8. У чому полягає закон Бера?

ГЛАВА 4. ВСТУП В ДИНАМІКУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ. МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ ТВЕРДОГО ТІЛА

4.1 Механічна система. Зовнішні та внутрішні сили

Механічною системою матеріальних точок або тіл називають таку їх сукупність, в якій положення або рух кожної точки (тіла) залежить від положення та руху всіх інших точок (тіл).

Матеріальне тіло будемо розглядати як систему матеріальних частин (точок), які утворюють це тіло.

Прикладом механічної системи є Сонячна система, в якій усі тіла пов'язані силами тяжіння. Другим прикладом механічної системи є довільна машина або механізм, в якому всі тіла зв'язані шарнірами, стержнями, тросами.

Група літаків у повітрі механічну систему не утворює, оскільки між ними відсутні сили механічної взаємодії.

Сили, що діють на точки системи, розділяють на **зовнішні (exterieur)** та **внутрішні (interieur)**. Сили, що діють на точки системи з боку точок або тіл, що не входять до складу даної системи, називають **зовнішніми**. Сили, що діють на точки системи з боку інших точок або тіл цієї ж системи, називають **внутрішніми**. Зовнішні сили позначають \vec{F}^e , внутрішні – \vec{F}^i . Як зовнішні, так і внутрішні сили можуть бути активними або реакціями в'язей. Поділ сил на зовнішні та внутрішні є умовним і залежить від того, рух якої системи тіл розглядають. Наприклад, якщо розглядати рух усієї Сонячної системи загалом, то сила тяжіння Землі до Сонця буде внутрішньою; при вивченні руху Землі по її орбіті навколо Сонця цю ж силу слід розглядати як зовнішню.

Внутрішні сили мають такі властивості.

1. Геометрична сума (головний вектор) усіх внутрішніх сил системи або сума проєкцій цих сил на довільну вісь дорівнюють нулю.

Згідно з третім законом динаміки дві довільні точки системи діють одна на одну з однаковими за модулем і протилежно направленими силами \vec{F}_{12}^i та \vec{F}_{21}^i , сума яких дорівнює нулю (Рис. 4. 1). Аналогічний результат має місце для довільної пари точок, тому

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0 \quad \text{або} \quad \sum_{k=1}^n F_{kx}^i = 0.$$

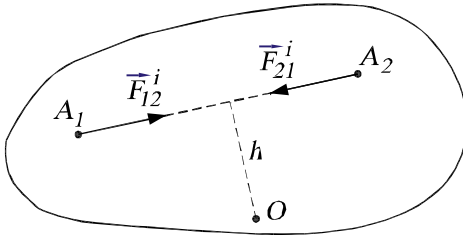


Рисунок 4.1

2. Сума моментів (головний момент) усіх внутрішніх сил системи відносно довільного центра або осі дорівнює нулю. Дійсно, якщо взяти довільний центр O (Рис. 4.1), то видно, $m_o(\vec{F}_{12}^i) + m_o(\vec{F}_{21}^i) = 0$

Аналогічний результат отримаємо, обчислюючи моменти відносно осі. Отже, для всієї системи маємо:

$$\sum_{k=1}^n \vec{m}_o(\vec{F}_k^i) = 0 \quad \text{або} \quad \sum_{k=1}^n m_x(\vec{F}_k^i) = 0.$$

З доведених властивостей не впливає, що внутрішні сили взаємно зрівноважені та не впливають на рух системи, оскільки ці сили прикладені до різних матеріальних точок і можуть викликати взаємне переміщення цих точок. Зрівноваженими внутрішні сили можуть бути лише тоді, коли система, яку розглядають, є абсолютно твердим тілом.

4.2 Диференціальні рівняння руху системи точок

Розглянемо систему, яку складають n матеріальних точок. Виділимо довільну точку системи з масою m_k . Рівнодійні прикладених до цієї точки зовнішніх і внутрішніх сил позначимо відповідно \vec{F}_k^e та \vec{F}_k^i . Запишемо основний закон динаміки для цієї точки:

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i.$$

Для точок системи, яку складають n матеріальних точок, запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i, \\ \dots\dots\dots \\ m_n \vec{a}_n = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i. \end{cases} \quad (4.1)$$

Ці рівняння, з яких можна визначити закон руху кожної точки системи, називають **диференціальними рівняннями руху системи у векторній формі**.

Спроектуювши рівності (4.1) на певну координатну вісь, отримаємо диференціальні рівняння руху системи в проекціях на цю вісь.

Повний розв'язок основної задачі динаміки для системи полягає в тому, щоб, знаючи задані сили, проінтегрувати відповідні диференціальні рівняння та визначити закон руху кожної точки окремо.

Але такий шлях розв'язку не використовують з двох причин. По-перше, цей шлях дуже складний, оскільки пов'язаний з великими математичними труднощами. По-друге, в більшості випадків для розв'язку задач механіки достатньо знати деякі характеристики руху системи взагалі, а не рух кожної з її точок зокрема. Ці характеристики визначають з допомогою загальних теорем динаміки системи.

Для отримання загальних теорем динаміки системи використовують систему диференціальних рівнянь (4.1).

4.3 Маса системи. Центр мас

Рух системи залежить не тільки від сил, які на неї діють, а також і від її сумарної маси та розподілу мас. Маса системи дорівнює арифметичній сумі мас усіх точок або тіл, що входять до системи,

$$M = \sum_{k=1}^n m_k.$$

Геометричну точку C , радіус-вектор якої визначають за формулою

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k, \quad (4.2)$$

називають **центром мас або центром інерції механічної системи**.

Спроектуювши (4.2) на осі декартової системи координат, отримаємо **координати центра мас системи**:

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k z_k. \quad (4.3)$$

Якщо помножимо чисельник і знаменник у формулах (4.2) та (4.3) на g (прискорення земного тяжіння), то отримаємо радіус–вектор та координати центра тяжіння системи ($G = \sum G_k$, $G_k = m_k g$):

$$\vec{r}_C = \frac{g}{M \cdot g} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k = \frac{1}{G} \sum_{k=1}^n G_k \vec{r}_k;$$

$$x_C = \frac{1}{G} \sum_{k=1}^n G_k x_k; y_C = \frac{1}{G} \sum_{k=1}^n G_k y_k; \quad z_C = \frac{1}{G} \sum_{k=1}^n G_k z_k.$$

Якщо тіло перебуває в однорідному полі земного тяжіння, то центр мас збігається з центром тяжіння тіла. Але ці поняття не тотожні. Поняття центра тяжіння властиве твердому тілу, що перебуває в полі земного тяжіння. Поняття центра мас властиве для довільної системи матеріальних точок або тіл і не залежить від того, чи перебуває ця система під дією сил.

4.4 Момент інерції тіла. Радіус інерції

Для характеристики розподілу маси системи або твердого тіла для дослідження обертального руху необхідно ввести поняття моменту інерції.

Моментом інерції механічної системи, яку складають n матеріальних точок, відносно центра O називають суму добутоків мас цих точок на квадрати їх відстаней до центра O , тобто

$$I_O = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2. \quad (4.4)$$

Момент інерції відносно центра часто називають полярним моментом інерції.

Моментом інерції системи матеріальних точок відносно осі називають суму добутоків мас цих точок на квадрати їх відстаней до осі, тобто

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2. \quad (4.5)$$

Запишемо моменти інерції системи матеріальних точок відносно декартових осей координат та центра O – початку координат:

$$I_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad I_y = \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2),$$

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2), \quad I_O = \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + y_k^2 + x_k^2), \quad (4.6)$$

де x_k, y_k, z_k – координати матеріальних точок системи.

З наведених формул (4.6) випливає така залежність:

$$2I_O = I_x + I_y + I_z. \quad (4.7)$$

Моментом інерції твердого тіла відносно деякої осі називають суму добутків мас Δm_k елементарних частин цього тіла на квадрати їх відстаней до цієї осі

$$I_z = \sum_{k=1}^n \Delta m_k h_k^2. \quad (4.8)$$

У разі неперервного розподілу маси за момент інерції приймають границю суми (4.8), коли $n \rightarrow \infty$, тобто $\Delta m_k \rightarrow 0$

$$I_z = \lim_{\Delta m_k} \sum_{k=1}^n \Delta m_k h_k^2 = \int_{(m)} h^2 dm. \quad (4.9)$$

Розмірність моменту інерції в SI є $[кг \cdot м^2]$.

Відношення $\frac{I_z}{m}$, де m – маса тіла, має розмірність квадрата довжини. Квадратний корінь з цього відношення позначимо через ρ , тоді

$$\rho = \sqrt{\frac{I_z}{m}}$$

або

$$I_z = \rho^2 m. \quad (4.10)$$

Величину ρ називають **радіусом інерції тіла** відносно осі Oz .

Радіусом інерції ρ тіла відносно осі Oz називають відстань від цієї осі, на якій потрібно розмістити всю масу тіла, не змінюючи моменту інерції тіла.

Увівши поняття радіуса інерції, можна момент інерції твердого тіла записати як момент інерції деякої точки, маса якої дорівнює масі тіла та віддалена від осі Oz на відстань ρ .

4.5 Момент інерції відносно паралельних осей. Теорема Гюйгенса–Штейнера

Теорема. Момент інерції тіла відносно даної осі Oz дорівнює сумі моменту інерції цього тіла відносно осі Cz' , яка паралельній даній і проходить через центр мас тіла, та добутку маси M тіла на квадрат відстані d між осями (Рис. 4.2), тобто:

$$I_{Oz} = I_{Cz'} + Md^2. \quad (4.11)$$

Доведення. Позначимо координати точки C центру мас тіла у системі координат $Oxyz$ через x_C, y_C, z_C . Через точку C проведемо осі Cx', Cy', Cz' паралельно до Ox, Oy, Oz . Квадрат відстані d між осями Oz та Cz' дорівнює

$$d^2 = x_C^2 + y_C^2.$$

Для довільної точки тіла будемо

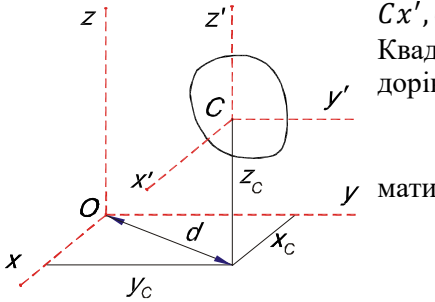


Рисунок 4.2

$$x_k = x'_k + x_C, \quad y_k = y'_k + y_C.$$

Скориставшись формулою (4.6), запишемо:

$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) = \sum_{k=1}^n m_k [(x'_k + x_C)^2 + (y'_k + y_C)^2] = \\ &= \sum_{k=1}^n m_k [(x_k'^2 + y_k'^2)] + (x_C^2 + y_C^2) \sum_{k=1}^n m_k + 2x_C \sum_{k=1}^n x'_k m_k + \\ &+ 2y_C \sum_{k=1}^n y'_k m_k. \end{aligned}$$

Дві останні суми дорівнюють нулю. Дійсно, відповідно до формул

$$\sum_{k=1}^n x'_k m_k = Mx'_C = 0, \quad \sum_{k=1}^n y'_k m_k = My'_C = 0,$$

оскільки координати центра мас C тіла в системі координат $Cx'y'z'$ дорівнюють нулю.

Таким чином

$$I_{Oz} = I_{Cz'} + Md^2,$$

$$\text{де } I_{Cz'} = \sum_{k=1}^n (x_k'^2 + y_k'^2) m_k, d^2 = x_C^2 + y_C^2, M = \sum_{k=1}^n m_k.$$

4.6 Обчислення моментів інерції деяких однорідних тіл

Тонкий однорідний стержень з довжиною ℓ і масою M

Обчислимо його момент інерції відносно осі Az , яка перпендикулярна до стержня та проходить через його кінець (Рис. 4.3)

Спрямуємо вісь Ax уздовж стержня. Тоді для довільного елемента довжиною dx :

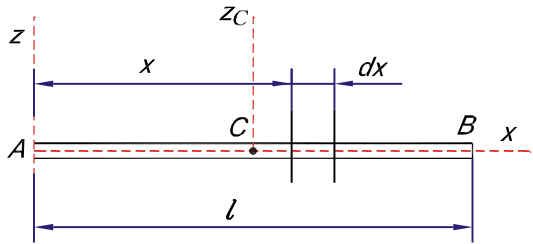


Рисунок 4.3

$$h = x,$$

а маса

$$dm = \rho_1 dx,$$

де $\rho_1 = \frac{M}{\ell}$ – маса одиниці довжини стержня.

Після підстановки цих величин у формулу (4.9) і заміни ρ_1 , отримаємо

$$I_{Az} = \int_0^{\ell} x^2 dm = \int_0^{\ell} \rho_1 x^2 dx = \rho_1 \frac{\ell^3}{3},$$

або

$$I_{Az} = \frac{1}{3} M \ell^2.$$

(4.12)

Момент інерції стержня відносно осі Cz , яка проходить через центр мас стержня, дорівнює $I_{Cz} = \frac{1}{12} M \ell^2$.

Тонке кругле однорідне кільце з радіусом R і масою M (однорідна тонка кругла труба)

Знайдемо момент інерції кільця відносно осі Cz , яка перпендикулярна до площини кільця та проходить через його центр (Рис. 4.4, а).

Оскільки всі точки кільця розміщені від осі Cz на відстанях $h_k = R$, то за формулою (4.4) матимемо

$$I_{Cz} = \sum_{k=1}^n m_k R^2 = R^2 \sum_{k=1}^n m_k = MR^2. \quad (4.13)$$

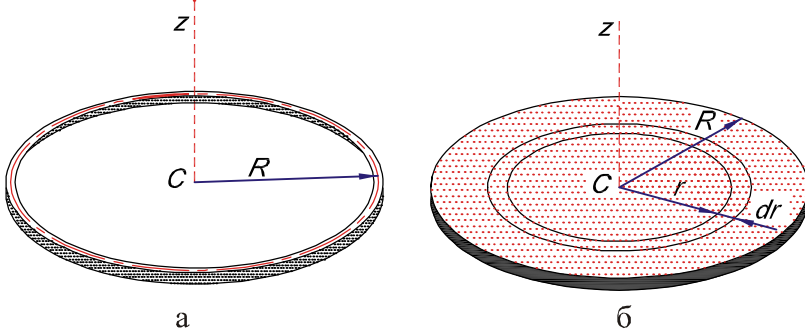


Рисунок 4.4

Кругла однорідна пластина з радіусом R і масою M (однорідний круглий суцільний циліндр)

Визначимо момент інерції круглої пластини відносно осі Cz , яка перпендикулярна до площини пластини та проходить через її центр (Рис. 4.4, б). Для цього виділимо елементарне кільце радіусом r і шириною dr . Площа цього кільця дорівнює $2\pi r dr$, а маса – $dm = \rho_2 2\pi r dr$, де $\rho_2 = \frac{M}{\pi R^2}$ – маса одиниці площі пластини. Тоді згідно з формулою (4.9)

$$I_{Cz} = \int_0^R \rho_2 2\pi r^3 dr = 2\pi \rho_2 \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho_2 \frac{R^4}{4}.$$

Замінивши $\rho_2 = \frac{M}{\pi R^2}$, отримаємо

$$I_{Cz} = 2\pi \frac{M}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2 \quad (4.14)$$

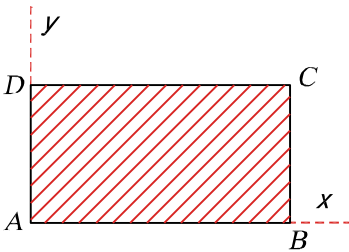


Рисунок 4.5

Формули моментів інерції інших однорідних тіл

Суцільна прямокутна пластина з масою M та сторонами $AB = a$, $AD = b$ (Рис. 4.5)

$$I_{Ax} = \frac{1}{3} Mb^2, I_{Ay} = \frac{1}{3} Ma^2, \quad (4.15)$$

- відносно осі розглянуто як стержень довжиною b :

$$I_{Ax} = \frac{1}{3} Mb^2; \quad (4.16)'$$

- відносно осі розглянуто стержень довжиною a :

$$I_{Ax} = \frac{1}{3} Ma^2; \quad (4.17)$$

б) **прямий суцільний круглий конус з масою M та радіусом основи R** (Рис. 4.6),

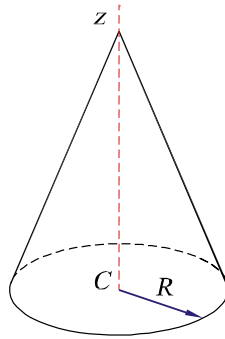


Рисунок 4.6

$$I_{Cz} = 0,3MR^2, \quad (4.18)$$

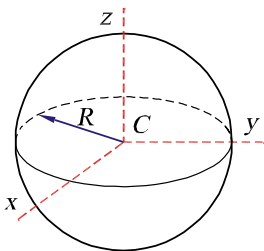


Рисунок 4.7

в) **суцільна куля з масою M та радіусом R** (Рис. 18.7),

$$I_{Cx} = I_{Cy} = I_{Cz} = 0,4MR^2 \quad (4.19)$$

Контрольні запитання

1. Що називають механічною системою?
2. Які сили називають зовнішніми, а які – внутрішніми?

3. Назвіть властивості внутрішніх сил.
4. Коли використовують поняття центра тяжіння та поняття центра мас?
5. Як визначити координати центра мас механічної системи?
6. Що називають моментом інерції механічної системи відносно точки та відносно осі?
7. Сформулюйте теорему Гюйгенса–Штейнера.
8. Запишіть формули для визначення моментів інерції однорідних тіл: стержня, кільця, круглої та прямокутної пластин, суцільних конуса та кулі.
9. Як зміниться момент інерції диска, якщо зміниться його товщина?
10. Як залежить момент інерції однорідної круглої труби відносно центральної осі від довжини труби?

ГЛАВА 5. ТЕОРЕМА ПРО РУХ ЦЕНТРА МАС СИСТЕМИ

5.1 Теорема про рух центра мас

У деяких випадках для визначення характеру руху системи (особливо твердого тіла), достатньо знати закон руху її центра мас. Щоб знайти цей закон, додамо ліві та праві частини рівнянь руху системи (5.1):

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i. \quad (5.1)$$

Перетворимо ліву частину отриманої рівності. Для цього з формули (5.2) для радіуса-вектора центра мас маємо:

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k = M \vec{r}_C.$$

Візьмемо від обох частин цієї рівності другу похідну за часом

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2}, \quad \text{або} \quad \sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = M \vec{a}_C,$$

де \vec{a}_C – прискорення центра мас системи. Підставивши отриману залежність в рівність (5.1) та враховуючи, що $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0$, отримаємо:

$$M \vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e. \quad (5.2)$$

Отже добуток маси системи на прискорення її центра мас дорівнює геометричній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на систему.

Порівнявши рівняння (5.2) з рівнянням руху матеріальної точки, теорему про рух центра мас можна сформулювати так:

Центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі системи і до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на систему.

Спроектувавши обидві частини рівності (5.2) на координатні осі, отримаємо:

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad M \ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e.$$

Ці рівняння є диференціальними рівняннями руху центра мас механічної системи в проекціях на осі декартової системи координат.

Відзначимо деякі властивості цієї теореми.

1. Теорема обґрунтовує методи динаміки точки. З рівнянь видно, що розв'язок, який ми отримуємо, вважаючи дане тіло матеріальною точкою, визначає закон руху центра мас цього тіла.

Якщо тіло рухається поступально, то його рух повністю визначається рухом центра мас. Таким чином, рух твердого тіла, що рухається поступально, можна розглядати як рух матеріальної точки, маса якої дорівнює масі тіла. В інших випадках тіло можна розглядати як матеріальну точку лише тоді, коли для визначення положення тіла достатньо знати положення його центра мас.

2. Теорема дозволяє при визначенні закону руху центра мас довільної системи виключити з розгляду всі невідомі внутрішні сили.

5.2 Закон збереження руху центра мас

З теореми про рух центра мас одержуємо важливі наслідки.

1. Якщо геометрична сума зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = 0,$$

то з рівняння (5.2) витікає, що $\vec{a}_C = 0$ або $\vec{v}_C = \overrightarrow{const}$. Отже, якщо сума зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то центр мас цієї системи рухається зі сталою за модулем і напрямком швидкістю, тобто рівномірно та прямолінійно.

Зокрема, якщо спочатку центр мас перебуває у стані спокою, то він і залишиться в стані спокою. Внутрішні сили руху центра мас змінити не можуть.

2. Якщо сума проєкцій зовнішніх сил на деяку вісь наприклад, вісь Ox дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0,$$

то перше з рівнянь (5.3) дає: $\ddot{x}_C = 0$ або $\dot{x}_C = v_{Cx} = const$.

Тобто, якщо сума проєкцій зовнішніх сил на деяку вісь дорівнює нулю, то проєкція швидкості центра мас системи на цю вісь є сталою величиною.

Зокрема, якщо в початковий момент $v_{Cx} = 0$, то і в будь-який інший момент $v_{Cx} = 0$, тобто центр мас системи не буде переміщатися вздовж осі Ox .

Ці наслідки виражають закон збереження руху центра мас системи.

Розглянемо приклади, що ілюструють використання закону збереження руху центра мас системи.

Рух центра мас Сонячної системи

Сили дії зірок на Сонячну систему – зовнішні сили. Якщо їх не враховувати, то Сонячна система рухається під дією внутрішніх сил. Отже, в першому наближенні центр мас Сонячної системи в світовому просторі рухається рівномірно та прямолінійно.

Рух по горизонтальній площині

За відсутності тертя ковзання людина за допомогою своїх мускульних зусиль (сили внутрішні) не змогла б рухатися вздовж горизонтальної площини, оскільки в цьому разі сума проєкцій на горизонтальну вісь Ox прикладених до людини зовнішніх сил (сила ваги та реакція площини) дорівнюють нулю й центр мас людини вздовж площини не буде переміщатися $x_C = const$. Якщо людина винесе праву ногу вперед, то її ліва нога посунеться назад, а загальний центр мас залишиться

нерухомим відносно осі.

За наявності сил тертя ковзання руху лівої ноги назад буде заважати сила тертя, яка спрямована вперед. Ця сила й буде тією зовнішньою силою, яка переміщає людину в бік її дії. Аналогічно проходить рух автомобіля, паровоза (Рис. 5.1).

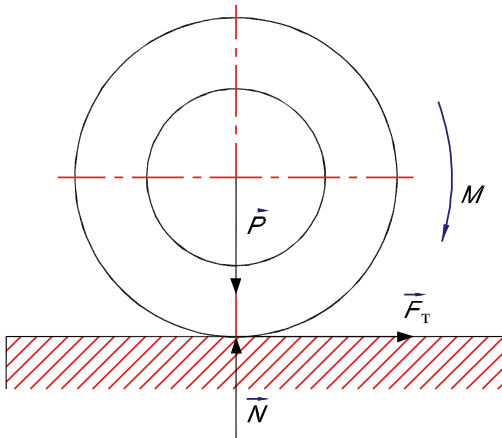


Рисунок 5.1

Контрольні запитання

1. Сформулюйте теорему про рух центра мас системи.
2. Які наслідки випливають з теореми про рух центра мас системи?
3. У чому полягає закон збереження руху центра мас системи?
4. Як рухається центр мас Сонячної системи?
5. Як людина здійснює рух по горизонтальній площині за наявності та відсутності сил тертя ковзання?
6. Який вплив мають внутрішні сили на рух центра мас системи?

ГЛАВА 6. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІЛЬКОСТІ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ТА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

6.1 Міри руху

Після вивчення диференціальних рівнянь руху системи точок може видаватися, що вивчення руху матеріальної системи можна звести до складання та аналізу диференціальних рівнянь.

Узагалі ця точка зору справедлива, але практично реалізувати такий шлях дослідження вдається лише для системи, яку складає невелика кількість матеріальних точок. Складність використання диференціальних рівнянь руху полягає перш за все в тому, що нам не відомі аналітичні залежності для внутрішніх сил та реакцій в'язей.

У теоретичній механіці розробили методи, які дозволяють обійти основні труднощі, що виникають при використанні диференціальних рівнянь руху механічної системи. З цією метою введені деякі векторні та скалярні величини, що характеризують рух усієї системи (так звані міри руху). До них належать:

- вектор кількості руху;
- вектор моменту кількості руху;
- кінетична енергія;
- сила інерції та головний вектор сил інерції;
- момент сил інерції та головний момент сил інерції.

Знаючи характер зміни цих величин, можна скласти часткове, а інколи й повне уявлення про рух механічної системи.

6.2 Кількість руху точки та системи точок

Основними характеристиками руху матеріальної точки та механічної системи є кількість руху та кінетична енергія.

Означення кількості руху матеріальної точки як міри механічного руху наведене в главі 1 при формулюванні другого закону Ньютона, де **кількістю руху матеріальної точки було названо векторну величину, що дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості**

$$\vec{q} = m\vec{v}.$$

Таким чином, вектор \vec{q} спрямований так само, як і вектор швидкості точки \vec{v} , тобто по дотичній до траєкторії руху точки.

Кількістю руху системи називають векторну величину \vec{Q} , що дорівнює геометричній сумі кількостей руху всіх точок системи (Рис. 6.1):

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k. \quad (6.1)$$

З рис 6.1 видно, що незалежно від величин швидкостей точок системи, вектор \vec{Q} може приймати довільні значення, а також дорівнювати нулю, коли многокутник, побудований із векторів $m_k \vec{v}_k$, замкнений. Очевидно, що за величиною \vec{Q} неможливо повністю з'ясувати характер руху системи.

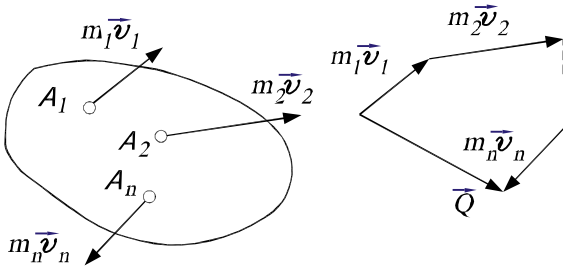


Рисунок 6.1

Знайдемо формулу, за допомогою якої значно легше обчислити величину \vec{Q} , а також з'ясувати її суть.

З формули, яка визначає положення центра мас його радіусом-вектором, маємо

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k = M \vec{r}_C. \quad (6.2)$$

Візьмемо похідну за часом від обох частин рівності (6.2).

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = M \frac{d\vec{r}_C}{dt}$$

або

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = M \vec{v}_C.$$

Звідси витікає, що

$$\vec{Q} = M \vec{v}_C, \quad (6.3)$$

тобто кількість руху системи дорівнює добутку маси всієї системи точок M на вектор швидкості її центра мас \vec{v}_C .

Рівність (6.3) можна трактувати так: **кількість руху механічної системи дорівнює кількості руху її центра мас, якщо масу всієї системи зосередити в центрі мас.**

Одиницею вимірювання кількості руху в SI є $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$ або $\text{Н} \cdot \text{с}$.

Вектор кількості руху \vec{Q} може бути заданий своїми проекціями, формули для яких отримуємо з (6.1) та (6.3) і теореми про проекції суми векторів:

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_{k=1}^n m_k v_{kx} = Mv_{Cx}; \\ Q_y &= \sum_{k=1}^n m_k v_{ky} = Mv_{Cy}; \\ Q_z &= \sum_{k=1}^n m_k v_{kz} = Mv_{Cz}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Задача 6.1. Однорідний циліндр масою $m = 20\text{кг}$ котиться без ковзання по горизонтальній площині зі швидкістю $v_C = 2\text{м}/\text{с}$. Визначити кількість руху циліндра.

Розв'язок

Кількості руху окремих точок циліндра мають різні напрямки. Головний вектор кількості руху циліндра \vec{Q} збігається за напрямком зі швидкістю центра мас циліндра, а його модуль дорівнює

$$Q = mv_C = 40\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с} = 40\text{Нс}.$$

6.3 Імпульс сили

Для характеристики дії сили на тіло за деякий проміжок часу використовують поняття імпульсу сили. Спочатку розглянемо елементарний імпульс сили, тобто імпульс сили за нескінченно малий проміжок часу dt .

Елементарним імпульсом сили називають векторну величину $d\vec{S}$, яка дорівнює добутку вектора сили \vec{F} на елементарний проміжок часу dt :

$$d\vec{S} = \vec{F} dt. \quad (6.5)$$

Елементарний імпульс сили спрямований по лінії дії сили.

Імпульс сили за довільний проміжок часу $[0, t_1]$ дорівнює означеному інтегралу від елементарного імпульсу, взятому в границях від нуля до t_1 :

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F} dt. \quad (6.6)$$

Якщо сила \vec{F} постійна за величиною та напрямом ($\vec{F} = \overline{const}$), то імпульс сили дорівнює $\vec{S} = \vec{F}t_1$, а модуль імпульсу сили – $S = Ft_1$.

Проекція імпульсу сили на осі координат, урахувуючи те, що інтеграл є границею суми, а проекція суми векторів на вісь дорівнює сумі проєкцій складових векторів на цю ж вісь, дорівнює:

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x dt, S_y = \int_0^{t_1} F_y dt, S_z = \int_0^{t_1} F_z dt. \quad (6.7)$$

Використовуючи проєкції вектора імпульсу сили на осі, можна побудувати вектор \vec{S} , знайти його модуль, а також кути з осями координат. Одиницями вимірювання імпульсу сили в SI є $[H \cdot c]$.

Для розв'язку основної задачі динаміки важливо виділити ті сили, імпульси яких можливо вирахувати наперед, не знаючи закону руху точки під дією цих сил. Із рівності (6.7) видно, що до таких належать лише сталі сили та сили, які залежать від часу.

Для визначення імпульсів сил, залежних від координат або швидкостей руху точки, необхідно додатково знати закон руху точки, тобто рівняння руху точки

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Виразивши x, y, z або v_x, v_y, v_z через час t , можна вирахувати інтеграли (6.7). Якщо закон руху точки невідомий, імпульси таких сил вирахувати неможливо.

6.4 Теорема про зміну кількості руху точки

Якщо на матеріальну точку діють декілька сил, то другий закон Ньютона можна записати так:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (6.8)$$

Нехай точка масою m рухається під дією сили $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$ (Рис. 6.2) та має в момент часу $t = 0$ швидкість \vec{v}_0 , а в момент часу t – швидкість \vec{v} . Тоді, помноживши обидві частини рівності (6.8) на dt та проінтегрувавши їх, отримаємо

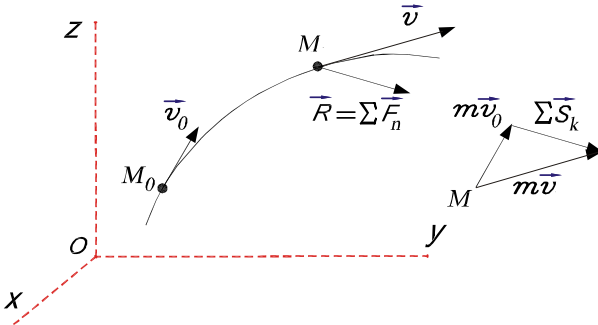


Рисунок 6.2

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d(m\vec{v}) = \int_0^t \sum_{k=1}^n \vec{F}_k dt$$

або

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \sum_{k=1}^n \int_0^t \vec{F}_k dt.$$

Права частина отриманої залежності є геометричною сумою імпульсів сил, а тому можна записати:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k. \quad (6.9)$$

Рівняння (6.9) виражає теорему про зміну кількості руху точки в інтегральній формі: **зміна кількості руху точки за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів сил, які діють на точку за той самий проміжок часу.**

Зауважимо, що залежність (6.9) є наслідком з другого закону Ньютона, який, у цьому разі, можна трактувати як теорему про зміну кількості руху в диференціальній формі. Проте завжди слід пам'ятати, що другий закон Ньютона є первинним і на ньому ґрунтуються доведення всіх теорем динаміки матеріальної точки в інерціальній системі відліку.

Для розв'язку задач часто використовують проекції рівності (6.9) на осі декартової системи координат:

$$\begin{cases} mv_x - mv_{0x} = \sum_{k=1}^n S_{kx}; \\ mv_y - mv_{0y} = \sum_{k=1}^n S_{ky}; \\ mv_z - mv_{0z} = \sum_{k=1}^n S_{kz}. \end{cases} \quad (6.10)$$

Якщо сили, що діють на точку, сталі, тобто

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = A_1, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = A_2, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = A_3,$$

то

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = A_1 t, \quad m\dot{y} - m\dot{y}_0 = A_2 t, \quad m\dot{z} - m\dot{z}_0 = A_3 t. \quad (6.11)$$

Після інтегрування (6.11) в границях від 0 до t отримаємо

$$\begin{cases} x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{A_1 t^2}{2m}; \\ y = y_0 + \dot{y}_0 t + \frac{A_2 t^2}{2m}; \\ z = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{A_3 t^2}{2m}, \end{cases} \quad (6.12)$$

де x_0, y_0, z_0 – початкові значення координат у момент часу $t = 0$. У випадку прямолінійного руху, що проходить вздовж осі Ox , рух точки описують першим з цих рівнянь.

Задача 6.2. Визначити проміжок часу T , необхідний для того, щоб точка вагою \vec{G} , що рухається по горизонтальній прямій під дією сталої сили \vec{F} , збільшила свою початкову швидкість v_0 в n разів.

Розв'язок

Прийmemo пряму, вздовж якої рухається точка, за вісь Ox . Тоді на основі (6.11) будемо мати

$$\frac{G}{g}(nv_0 - v_0) = FT,$$

звідси

$$T = \frac{Gv_0}{Fg}(n - 1).$$

Використовуючи раніше введене поняття імпульсу сили, запишемо теорему в іншому вигляді.

Кількість руху системи для $t = 0$ дорівнює \vec{Q}_0 , для $t = t_1 - \vec{Q}_1$. Тоді, помноживши обидві частини рівності (6.14) на dt і проінтегрувавши, отримуємо:

$$\begin{aligned} \vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 &= \sum_{k=1}^n \int_0^{t_1} \vec{F}_k^e dt, \\ \text{або} \quad \vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 &= \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Рівність (6.16) виражає теорему про зміну кількості руху системи в інтегральній формі.

Зміна кількості руху системи за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів зовнішніх сил, які діють на систему за той самий проміжок часу.

Векторне рівняння (6.16) еквівалентне трьом скалярним рівностям, що відповідають проєкціям рівняння (6.16) на осі інерційної системи координат:

$$\begin{cases} Q_{1x} - Q_{0x} = \sum_{k=1}^n S_{kx}^e; \\ Q_{1y} - Q_{0y} = \sum_{k=1}^n S_{ky}^e; \\ Q_{1z} - Q_{0z} = \sum_{k=1}^n S_{kz}^e. \end{cases} \quad (6.17)$$

Покажемо зв'язок між доведеною теоремою та теоремою про рух центра мас системи. Якщо $\vec{Q} = M\vec{v}_C$, то підставивши це значення в (6.14) і врахувавши, що $\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{a}_C$, отримуємо $M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e$, тобто вираз теореми про рух центра мас системи.

Таким чином, теорема про рух центра мас системи та теорема про зміну кількості руху системи є двома різними формами однієї й тієї ж теореми. Для вивчення руху твердого тіла, можна рівнозначно використовувати будь-яку з цих форм.

Але для неперервного середовища (рідина, газ) поняття про центр мас усієї системи практично втрачає сенс. Тоді для розв'язку задач користуються теоремою про зміну кількості руху системи.

Практична цінність теореми полягає в тому, що вона дає змогу виключити із розгляду наперед невідомі внутрішні сили.

6.6 Закон збереження кількості руху

З теореми про зміну кількості руху системи точок можна отримати важливі наслідки.

Наслідок 1. Якщо сума всіх зовнішніх сил, що діють на систему дорівнює нулю ($\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = 0$), тоді з рівняння (6.14) випливає, що $\vec{Q} = \overline{const}$. Таким чином: якщо сума всіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то вектор кількості руху системи сталий.

Наслідок 2. Якщо сума проєкцій зовнішніх сил, що діють на систему точок, на яку–небудь вісь дорівнює нулю ($\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0$), то із рівняння (6.15) випливає, що $Q_x = const$. Отже, якщо сума проєкцій зовнішніх сил, що діють на систему точок, на яку–небудь з осей дорівнює нулю, то проєкція головного вектора кількості руху системи на цю вісь величина стала.

Ці наслідки відображають закон збереження кількості руху системи. З них випливає, що внутрішні сили не можуть змінити кількість руху системи. Розглянемо деякі приклади.

Явище віддачі або відкату

Якщо розглядати гвинтівку та кулю як одну систему, то дія порохів газів при пострілі є внутрішньою силою. Ця сила не змінює сумарну кількість руху системи. Коли порохові гази, діючи на кулю, надають їй деяку кількість руху, направлену вперед, то вони одночасно повинні надати гвинтівці таку ж кількість руху в зворотному напрямку. Гвинтівка буде рухатись у бік, протилежний до руху кулі.

Реактивна тяга

У ракеті продукти горіння палива з великою швидкістю викидаються із сопла ракетного двигуна. Сили, які діють при цьому, є внутрішніми силами та не змінюють сумарну кількість руху системи ракета–продукти горіння палива. Оскільки гази, що викидаються із сопла реактивного двигуна, мають певну кількість руху, то ракета отримує при цьому відповідну кількість руху, яка направлена в бік, протилежний до напрямку руху газу.

Слід відмітити, що гвинтовий двигун надає літаку рух за рахунок відкидання назад частин повітря. У безповітряному просторі такий рух неможливий. Реактивний двигун надає рух за рахунок відкидання назад мас, що виробляються в самому двигуні. Цей рух можливий як в повітряному, так і в безповітряному просторах.

6.7 Теорема Ейлера

Теорему про зміну кількості руху системи в диференціальній формі використовують у механіці суцільного середовища.

Деяка рідина або газ рухається в трубі зі змінним перерізом. Виділимо частину труби об'ємом W (Рис. 6.3).

Цей об'єм обмежений бічною поверхнею труби та двома поперечними перерізами з площами σ_1 та σ_2 .

Позначимо через \vec{v}_1 , \vec{v}_2 та \vec{v} середні швидкості частин середовища, що протікають через відповідні перерізи. Тоді за одиницю часу через перерізи σ_1 ,

σ_2 , σ будуть протікати маси $\rho_1 \sigma_1 v_1$, $\rho_2 \sigma_2 v_2$, $\rho \sigma v$ де ρ_1 , ρ_2 , ρ – густина середовища у відповідному перерізі.

Будемо вважати, що швидкості окремих часток середовища та їх густина в кожному перерізі не змінюється з часом. Звідси випливає, що через кожний переріз за одиницю часу будуть протікати однакові кількості маси рідини, або газу, тобто

$$M_C = \rho_1 \sigma_1 v_1 = \rho_2 \sigma_2 v_2 = \rho \sigma v, \quad (6.18)$$

де M_C – секундна маса (маса рідини або газу, що протікає через довільний переріз труби за одиницю часу). Розмірність секундної маси в SI [кг/с].

Обчислимо зміну кількості руху рідини або газу, що заповнює об'єм W . Нехай в момент часу t рідина або газ займали об'єм W , який розміщений між перерізами σ_1 та σ_2 , та в момент часу $t + dt$ – займають об'єм, що розміщений між перерізами σ'_1 та σ'_2 . Оскільки через довільний переріз проходять однакові маси M_C то за час dt через перерізи σ_1 та σ_2 пройдуть маси $M_C dt$. Кількості руху їх будуть $M_C dt \vec{v}_1$, $M_C dt \vec{v}_2$, а

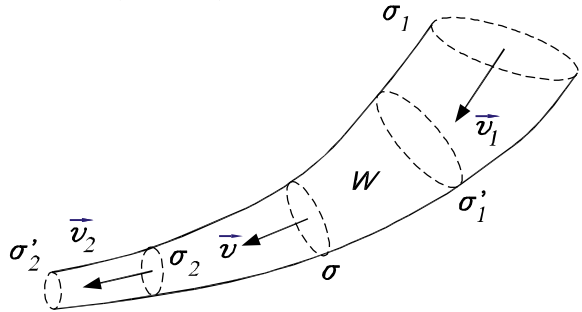


Рисунок 6.3

зміна кількості руху $d\vec{Q}$ рідини або газу за той сфвбq проміжок часу визначиться рівністю

$$\begin{aligned} d\vec{Q} &= M_C dt \vec{v}_2 - M_C dt \vec{v}_1. \\ \text{Звідси} \quad \frac{d\vec{Q}}{dt} &= M_C \vec{v}_2 - M_C \vec{v}_1. \end{aligned} \quad (6.19)$$

У формулі (6.19) величини $M_C \vec{v}_1$ та $M_C \vec{v}_2$ називають секундними кількостями руху рідини або газу в перерізах σ_1 та σ_2 .

Зовнішні сили, що діють на суцільне середовище, можна розділити на дві категорії:

1) масові сили або об'ємні (сили ваги), головний вектор яких позначимо $\vec{F}_{об}$;

2) поверхневі сили (сили тиску стінок на середовище, сили тертя виділеного об'єму середовища до стінки). Головний вектор поверхневих сил позначимо $\vec{F}_{пов}$.

Застосувавши до маси середовища теорему про зміну кількості руху матеріальної системи в диференціальній формі (6.14), отримаємо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = \vec{F}_{об} + \vec{F}_{пов},$$

або, використавши (6.19), запишемо:

$$\vec{F}_{об} + \vec{F}_{пов} + M_C \vec{v}_1 - M_C \vec{v}_2 = 0. \quad (6.20)$$

Залежність (6.20) виражає теорему Ейлера: **сума головних векторів об'ємних та поверхневих сил, а також секундних кількостей руху середовища, що протікає через два поперечних перерізи труби, дорівнює нулю, якщо вектори секундних кількостей руху спрямувати в середину виділеного перерізами об'єму.**

У проєкціях на осі координат рівність (6.20) має вигляд:

$$\begin{cases} X_{об} + X_{пов} + M_C v_{1x} - M_C v_{2x} = 0; \\ Y_{об} + Y_{пов} + M_C v_{1y} - M_C v_{2y} = 0; \\ Z_{об} + Z_{пов} + M_C v_{1z} - M_C v_{2z} = 0. \end{cases} \quad (6.21)$$

Задача 6.3. Визначити тиск на опору A коліна труби діаметром 20 см, який викликаний рухом води. Вісь труби розміщена в горизонтальній площині. По трубі тече вода зі швидкістю 4 м/с, вектор швидкості води при вході в трубу утворює кут 60° з вектором швидкості при виході із труби.

Розв'язок

Розглянемо зігнуту частину труби та позначимо через \vec{v}_1 та \vec{v}_2 вектори швидкостей води, а площі поперечного перерізу при вході та виході через σ_1 та σ_2 . Осі координат виберемо так, як показано на рис. 6.4. За умовою $v_1 = v_2 = v$, а також $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \pi R^2$.

Сили ваги спрямовані вертикально та їх проекції на осі координат дорівнюють нулю. Позначимо через $\vec{X}_{\text{пов}}$ та $\vec{Y}_{\text{нов}}$ проекції головного вектора сил тиску стінок трубопроводу на воду та запишемо перші два рівняння (6.21)

$$X_{\text{пов}} + M_C v_1 \cos 60^\circ - M_C v_2 = 0, \quad Y_{\text{нов}} - M_C v_1 \sin 60^\circ = 0.$$

Звідси

$$X_{\text{пов}} = M_C v (1 - \cos 60^\circ), \quad Y_{\text{нов}} = M_C v \sin 60^\circ,$$

$$R_{\text{нов}} = \sqrt{X_{\text{нов}}^2 + Y_{\text{нов}}^2} = M_C v \sqrt{0,5^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = M_C v.$$

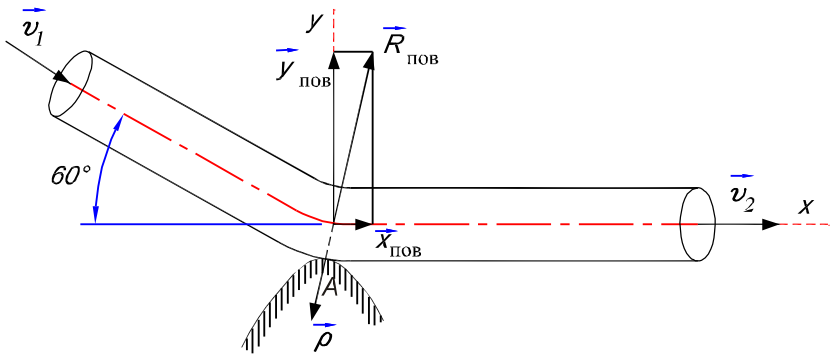


Рисунок 6.4

Таким чином, головний вектор поверхневих сил направлений по діагоналі паралелограма, побудованого на силах $\vec{X}_{\text{пов}}$ та $\vec{Y}_{\text{нов}}$ як на сторонах.

Сила \vec{P} динамічного тиску на опору A дорівнює за модулем $\vec{R}_{\text{нов}}$ і спрямована в протилежний бік:

$$P = M_C v. \quad (6.22)$$

Згідно з формулою (6.18)

$$M_C = \rho \sigma v = \frac{\gamma}{g} \pi R^2 v, \text{ де } \rho = \frac{\gamma}{g}.$$

Підставивши в формулу (6.22) ці величини, отримаємо

$$P = \frac{\gamma}{g} \pi R^2 v^2 = \frac{1000}{9,81} \cdot 3,14 \cdot (0,1)^2 \cdot 4^2 \approx 572 \text{ Н}.$$

6.8 Рух тіла із змінною масою. Реактивний рух

В класичній механіці маса кожної точки або часток системи при русі вважається величиною постійною.

Проте, у природі і техніці часто зустрічаються тіла, маса яких змінюється в процесі їх руху (літаки, ракети, автомобілі, земля). У цьому параграфі буде розглянутий практично важливий випадок, коли процес зміни маси відбувається безперервно.

Тіло, маса якого безперервно змінюється з часом внаслідок приєднання до нього або відділення від нього матеріальних часток, називається тілом змінної маси.

Для тіла змінної маси $M=F(t)=f(t)$, де $F(t)$ – безперервна функція часу. Коли таке тіло рухається поступально, то його можна розглядати як точку змінної маси.

Знайдемо рівняння руху тіла, маса якого безперервно збуває з часом, на прикладі руху ракети, вважаючи її точкою змінної маси. Позначимо відносно (по відношенню до корпусу ракети) швидкість витікання продуктів горіння з ракети через \bar{u} , щоб виключити сили тиску, що виштовхують продукти горіння, зробивши ці сили внутрішніми, розглянемо в деякий момент часу t систему, яка складається з самої ракети і частки, що відділяється від неї впродовж часу dt (Рис. 6.5).

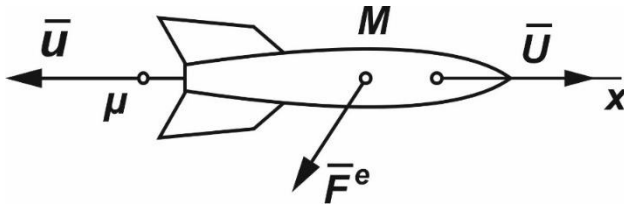


Рисунок 6.5

Маса цієї частки чисельно дорівнює величині dM , на яку за час dt змінюється маса ракети. Оскільки M – величина яка убиває, то $dM < 0$, і отже $\mu = |dM| = -dM$.

Рівняння (6.14) для даної системи можна представити у вигляді:

$$d\bar{Q} = \bar{F}^e dt, \quad (6.23)$$

де \bar{F}^e – геометрична сума прикладених до ракети зовнішніх сил.

Якщо швидкість \bar{v} ракети за час dt змінюється на величину $d\bar{v}$, то кількість руху даної системи отримує при цьому приріст $Md\bar{v}$. Частка, що відділяється, за той же час отримує додаткову швидкість \bar{u} . Отже, за час dt кількість руху частки зміниться на величину $\bar{u}m = -\bar{u}dM$, а для усієї системи вийде $d\bar{Q} = Md\bar{v} - \bar{u}dM$. Підставляючи це значення $d\bar{Q}$ в рівність (6.23) і поділивши обидві його частки на dt , отримаємо остаточно:

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}^e + \bar{u} \frac{dM}{dt}. \quad (6.24)$$

Рівняння (6.24) у векторній формі є **диференціальне рівняння руху точки змінної маси, яке називається рівнянням Мещерського¹**.

Враховуючи, що останній доданок в (6.24) по розмірності являється силою, і означаючи його через $\bar{\Phi}$, ми можемо рівняння (6.24) представити у вигляді

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}^e + \bar{\Phi}. \quad (6.25)$$

Таким чином, реактивний ефект зводиться до того, що на ракету при її русі додатково діє сила $\bar{\Phi}$, яка називається **реактивною силою**.

Величина $\frac{dM}{dt}$ чисельно дорівнює масі палива, яке витрачається за одиницю часу, т.п. секундній витраті маси палива $G_{\text{сек}}$. Таким чином,

¹ Мещерський І.В. (1859-1935) – видатний російський вчений-механік. Рівняння (6.24) дано в роботі 1897 р. Див. Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы, изд.2-е, Гостехиздат, 1952.

якщо врахувати знак, то $\frac{d\vec{M}}{dt} = -G_{\text{сек}}$. Звідси витікає, що $\vec{\Phi} = -\vec{u} \cdot G_{\text{сек}}$, т.е. реактивна сила дорівнює множенню секундної витрати маси палива на відносну швидкість витікання продуктів його згорання і **напрявлена протилежно цієї швидкості**.

Формула Ціолковського².

Знайдемо, як відбувається рух ракети під дією тільки однієї реактивної сили, рахуючи $\vec{F}^e = 0$, а відносну швидкість витікання \vec{u} постійної. Направимо координатну вісь x у бік руху (Рис.6.5). Тоді $v_x = v$, $u_x = u$ і рівняння (6.24) в прецесії на вісь x , якщо в ньому покласти $\vec{F}^e = 0$, набере вигляду:

$$M \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} \quad \text{або} \quad dv = -u \frac{dm}{M}.$$

Інтегруючи це рівняння і вважаючи, що в початковий момент маса $M = M_0$, а швидкість $v = v_0$ і спрямована уздовж осі Ox , отримаємо

$$v = v_0 + u \ln \frac{M_0}{M}. \quad (6.27)$$

Позначимо масу корпусу ракет із усім устаткуванням через M_K , а усю масу палива через M_T . Тоді, очевидно, $M_0 = M_K + M_T$. Підставляючи ці значення в рівність (6.27), отримаємо **формулу Ціолковського**, яка визначає швидкість ракети, коли усе паливо витрачено (швидкість у кінці активної ділянки):

$$v_I = v_0 + u \ln \left(1 + \frac{M_T}{M_K} \right). \quad (6.28)$$

Строго цей результат справедливий у безповітряному просторі і поза полем сил тяжіння. З формули (6.28) видно, що гранична швидкість ракети залежить:

- від її початкової швидкості \vec{v}_0 ;
- від відносної швидкості витікання (вильоту) продуктів згорання \vec{u} ;

² Ціолковський К.Е. (1857-1935) - видатний російський вчений та винахідник. Робота, в котрій дана формула (20.28), була опублікована в травні 1903 р. в журналі «Научное обозрение».

- від відносного запасу палива $z=M_T/M_K$ (**число Ціолковського**).

Дуже цікавий той факт, що від режиму роботи ракетного двигуна швидкість ракети у кінці періоду горіння не залежить.

Важливе практичне значення формули Ціолковського є у тому, що вона вказує можливі шляхи отримання великих швидкостей, необхідних для космічних польотів. Цими шляхами є збільшення M_T/M_K , \bar{u} і \bar{v}_0 , причому шлях збільшення \bar{u} і \bar{v}_0 ефективніший. Збільшення \bar{u} і M_T/M_K пов'язане з видом палива і конструкцією ракети. Вживання рідкого палива дозволяє отримати $u=3000/4500$ м/с. Але значення M_T/M_K у одноступінчатих ракет такі, що вони не дають швидкостей, необхідних для космічних польотів. Отримати необхідну швидкість можна шляхом використання багатоступінчастої ракети, частини якої по мірі витрачання палива автоматично відділяються від останнього ступеня, в результаті чого виникає додаткова (початкова) швидкість.

Подібна багатоступінчаста ракета була застосована для запуску перших у світі радянських штучних супутників Землі (4 жовтня і 3 листопада 1957 р.), а також при численних пусках інших космічних об'єктів, у тому числі кораблів, на яких здійснюють свої польоти космонавти.

Формула Ціолковського для багатоступінчастої ракети має вигляд (при $v_0 = 0$):

$$v = u_1 \ln z_1 + u_2 \ln z_2 + \dots + u_n \ln z_n, \quad (6.29)$$

де u_n - відносна швидкість витікання продуктів горіння з n -й ступені;

z_n – число Ціолковського для n -й ступені.

Задача 6.4

Відносна швидкість витікання газів з ракети $u=2400$ м/с. Скільки відсотків повинна складати маса палива M_T від стартової маси ракети M_K , щоб ракета набула швидкість $v=9000$ м/с? (Ракета переміщується поза полем тяжіння і поза атмосфери $v_0 = 0$).

Розв'язок

З формули (6.28) визначимо ($v_0 = 0$):

$$v_1 = u \ln\left(1 + \frac{M_T}{M_K}\right); \quad \ln\left(1 + \frac{M_T}{M_K}\right) = \frac{v_1}{u} = \frac{9000}{2400} = 3,75.$$

Звідки

$$1 + \frac{M_T}{M_K} = e^{3,75} = 42,51 \text{ або } \frac{M_T}{M_K} = 41,51.$$

Це означає, що $M_T = 41,5M_K$, т.ч. маса палива повинна складати приблизно 98% від стартової маси ракети.

Контрольні запитання

1. Які величини називають кількістю руху матеріальної точки та механічної системи?
2. Що називають елементарним імпульсом сили та імпульсом сили?
3. Запишіть теорему про зміну кількості руху точки та механічної системи в диференціальній та інтегральній формі.
4. Сформулюйте закон збереження кількості руху системи.
5. Поясніть явище віддачі під час вистрілу.
6. Запишіть теорему Ейлера у векторній формі та в проекціях на осі декартової системи координат.
7. Що називають тілом змінної маси?
8. Запишіть формулу Мещерського.
9. Запишіть формулу Ціолковського.
10. Як визначається реактивна сила?
11. Що називають числом Ціолковського?
12. Від чого залежить гранична швидкість ракети?
13. Коли був запуснен перший штучний супутник Землі?

ГЛАВА 7. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ МОМЕНТУ КІЛЬКОСТІ РУХУ ТОЧКИ ТА СИСТЕМИ

7.1 Момент кількості руху точки. Головний момент кількості руху системи

Іноді при вивченні руху точки замість зміни кількості руху $m\vec{v}$ виникає необхідність розглядати зміну моменту кількості руху.

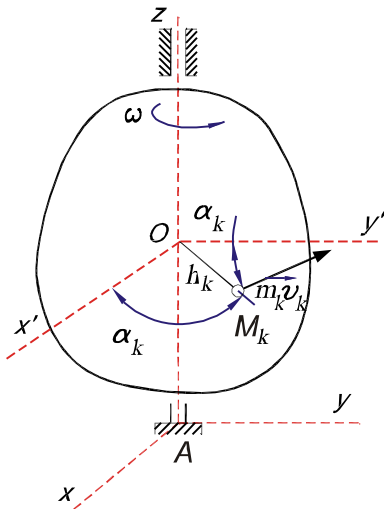


Рисунок 7.1

точок.

Головним моментом кількості руху (або кінетичним моментом) системи відносно даного центра O називають векторну величину \vec{K}_O , що дорівнює геометричній сумі моментів кількості руху всіх точок системи відносно цього центра

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(m_k \vec{v}_k). \quad (7.1)$$

Аналогічно визначають момент кількості руху системи відносно координатних осей:

Момент вектора кількості руху точки $m\vec{v}$ відносно даного центра O або осі Oz позначають $\vec{m}_O(m\vec{v})$ або $m_{Oz}(m\vec{v})$ і називають відповідно моментом кількості руху або кінетичним моментом точки відносно центра (осі).

Обчислюють момент вектора $m_k \vec{v}_k$ так само, як і момент сили.

При цьому вектор $m_k \vec{v}_k$ вважають прикладеним до рухомої точки M_k (Рис. 21.1). За модулем $|\vec{m}_O(m_k \vec{v}_k)| = m_k v_k h_k$, де h_k – довжина перпендикуляра, опущеного із центра O на напрямок вектора $m_k \vec{v}_k$.

Уведемо поняття моменту кількості руху для системи матеріальних

$$\begin{aligned} K_x &= \sum_{k=1}^n m_x(m_k \vec{v}_k), \\ K_y &= \sum_{k=1}^n m_y(m_k \vec{v}_k), \\ K_z &= \sum_{k=1}^n m_z(m_k \vec{v}_k). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Визначимо момент кількості руху точки та системи у векторній формі. Вектор $\vec{k}_O = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k$ називають **моментом кількості руху матеріальної точки відносно центра O** . Тоді **кінетичний момент системи відносно центра O**

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n \vec{k}_{Ok} = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k).$$

Кількість руху системи характеризує поступальний рух, головний момент кількості руху системи характеризує обертальний рух системи.

Щоб з'ясувати механічну суть величини \vec{K}_O і мати необхідні формули для розв'язку задач, знайдемо кінетичний момент тіла, яке обертається навколо нерухомої осі (Рис. 7.1).

Визначення вектора кінетичного моменту зводять до визначення його проєкцій K_x , K_y , K_z . Запишемо кінетичний момент тіла K_z відносно осі обертання. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю ω . Для довільної точки тіла, віддаленої від осі обертання на відстань h_k , швидкість дорівнює $v_k = \omega h_k$. Кінетичний момент для цієї точки

$$m_z(m_k \vec{v}_k) = m_k v_k h_k = m_k \omega h_k^2.$$

Для всього тіла одержимо

$$K_z = \sum_{k=1}^n m_z(m_k \vec{v}_k) = \left(\sum_{k=1}^n m_k h_k^2 \right) \omega.$$

Величина в дужках є моментом інерції тіла відносно осі Oz . Таким чином

$$K_z = I_z \omega. \quad (7.3)$$

Отже, кінетичний момент тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно тієї ж осі на кутову швидкість обертання тіла.

Якщо систему складають декілька тіл, що обертаються навколо однієї і тієї ж осі Oz , то

$$K_z = I_{1z}\omega_1 + I_{2z}\omega_2 + \dots + I_{nz}\omega_n. \quad (7.4)$$

Можна зауважити аналогію між формулами для визначення кількості руху та моменту кількості руху: кількість руху дорівнює добутку маси (величина, що характеризує інертність тіла при поступальному русі) на швидкість; кінетичний момент дорівнює добутку моменту інерції (величина, що характеризує інертність тіла при обертальному русі) на кутову швидкість.

У разі плоского руху тіло здійснює обертальний рух відносно осі, що перпендикулярна до площини руху та проходить через миттєвий центр швидкостей. Тоді кінетичний момент тіла $K_{Pz} = I_{Pz}\omega$, де I_{Pz} – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через миттєвий центр швидкостей. За теоремою Гюйгенса $I_{Pz} = I_{Cz} + Md^2$, де I_{Cz} – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла; d – відстань між осями Pz та Cz . Таким чином, кінетичний момент тіла при плоскому русі дорівнює:

$$K_{Pz} = (I_{Cz} + Md^2)\omega = K_{Cz} + Mv_C d = K_{Cz} + m_{Pz}(M\vec{v}_C), \quad (7.5)$$

де \vec{v}_C – швидкість центра мас тіла.

7.2 Теорема про зміну моменту кількості руху точки (Теорема моментів). Теорема моментів відносно осі

Розглянемо матеріальну точку масою m , що рухається під дією сили \vec{F} . Знайдемо для точки залежність між моментами векторів $m\vec{v}$ і \vec{F} відносно деякої осі Oz . Запишемо формулу для моменту сили відносно осі Oz

$$m_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x. \quad (7.6)$$

Аналогічно

$$m_z(m\vec{v}) = m(xv_y - yv_x), \quad (7.7)$$

де m винесено за дужки.

Від обох частин рівності (7.7) візьмемо похідну по часу:

$$\frac{d}{dt} [m_z(m\vec{v})] = m \left[\left(\frac{dx}{dt} v_y - \frac{dy}{dt} v_x \right) + \left(x \frac{dv_y}{dt} - y \frac{dv_x}{dt} \right) \right].$$

У правій частині вираз у перших дужках дорівнює нулю, так як $\frac{dx}{dt} = v_x$, $\frac{dy}{dt} = v_y$. Вираз в інших дужках відповідно до формули (7.6) дорівнює $m_z(\vec{F})$, оскільки

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_y \text{ і } m \frac{dv_x}{dt} = F_x.$$

Отже
$$\frac{d}{dt} [m_z(m\vec{v})] = m_z(\vec{F}). \quad (7.8)$$

Отримане рівняння виражає **теорему моментів відносно осі**: похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно осі дорівнює моменту сили, що діє на точку, відносно тієї ж осі.

Теорема моментів відносно центра

Теорема. Похідна за часом від вектора моменту кількості руху точки, який визначений відносно довільного центра, дорівнює векторному моменту сили, яка діє на точку, відносно того ж центра.

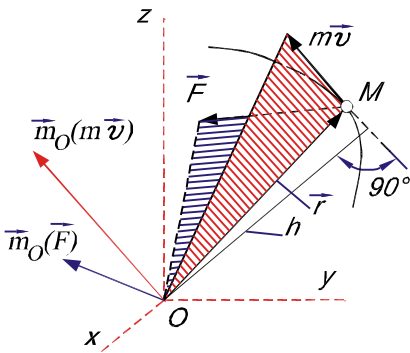


Рисунок 7.2

При цьому вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$ спрямований перпендикулярно до площини, що проходить через точку O та вектор сили \vec{F} , а вектор $\vec{m}_O(m\vec{v})$ – перпендикулярний до площини, що проходить через точку O та вектор $m\vec{v}$.

Продиференціювавши (7.9) за часом, маємо:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right) + \left(\vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} \right) = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F},$$

Знайдемо для матеріальної точки, що рухається під дією сили \vec{F} , залежність між моментами векторів $m\vec{v}$ та \vec{F} відносно довільного центра O .

Оскільки $\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ (Рис. 7.2), то

$$\vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (7.9)$$

оскільки $\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$ (векторний добуток паралельних векторів); а $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$.

$$\text{Тоді} \quad \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\text{або} \quad \frac{d}{dt} [\vec{m}_O(m\vec{v})] = m_O(\vec{F}). \quad (7.10)$$

Теорема моментів відносно центра доведена.

7.3 Рух точки під дією центральної сили. Закон площ (Закон Кеплера)

Центральною називають силу, лінія дії якої проходить через заданий центр O . Прикладом такої сили є сила тяжіння планети до Сонця або супутника Землі до Землі.

Використовуючи рівняння (7.10), розглянемо рух точки M під дією центральної сили \vec{F} (Рис. 7.3). Оскільки в даному випадку $m_O(\vec{F}) = 0$, то $\vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v} = \overrightarrow{const}$, або $\vec{r} \times \vec{v} = \overrightarrow{const}$, ($m = const$), тобто вектор $\vec{m}_O(\vec{v})$ сталий за модулем і за напрямком. Але вектор $\vec{m}_O(\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v}$ перпендикулярний до площини, в якій розміщені вектори \vec{r} та \vec{v} .

Отже, якщо вектор $\vec{r} \times \vec{v}$ має весь час сталий напрямок, то радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ та вектор швидкості \vec{v} будуть розміщені весь час в одній і тій самій площині.

Звідси можна зробити висновок, що траєкторія точки M буде плоскою кривою і

$$|\vec{m}_O(\vec{v})| = vh = const.$$

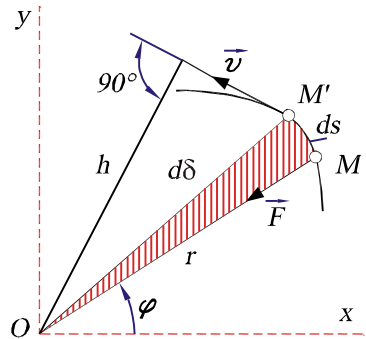


Рисунок 7.3

Отриманий результат має очевидне геометричне пояснення. Оскільки $vh = \frac{ds}{dt}h$, а $ds \cdot h = 2S_{\Delta OMM'} = 2d\delta$, де $d\delta$ – площа елементарного трикутника OOM' , то

$$vh = 2 \frac{d\delta}{dt}.$$

Величина $\frac{d\delta}{dt}$ визначає швидкість зміни площі, утвореної радіусом–вектором \vec{OM} під час руху точки M , і її називають **секторною швидкістю точки**. У розглянутому випадку ця швидкість стала

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{2} (m_o(\vec{v})) = const. \quad (7.11)$$

Отже, під дією центральної сили точка рухається по плоскій кривій з постійною секторною швидкістю, тобто так, що радіус–вектор точки за однакові проміжки часу описує однакові площі.

Цей закон має місце під час руху планет та супутників і виражає один із законів Кеплера. Розглянемо приклад. Орбітою планети, що рухається під дією сили тяжіння Сонця, є еліпс (Рис. 7.4).

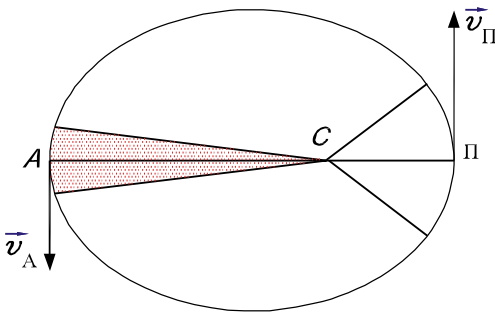


Рисунок 7.4

Сонце перебуває в фокусі C еліпса. Оскільки сила є центральною, то має місце закон площ. Тому в найближчій до Сонця точці орбіти P (**перигей**) швидкість планети \vec{v}_P буде найбільшою, а в найдальшій точці орбіти A (**афелій**) – швидкість \vec{v}_A буде найменшою.

Цей результат витікає з рівняння (7.11), яке для точок A та P дає $v_A \cdot AC = v_P \cdot CP$.

До цього висновку можна прийти, якщо врахувати, що площі секторів, утворених радіус–вектором за однакові проміжки часу, однакові; отже за той самий час планета в околі точки P повинна пройти більший шлях, ніж в околі точки A .

7.4 Теорема про зміну кінетичного моменту системи точок (теорема моментів)

Теорема моментів, доведена для однієї точки, буде справедлива для кожної точки системи. Отже, якщо розглянути точку системи з масою m_k , що має швидкість \vec{v}_k , то для неї можна записати

$$\frac{d}{dt} [\vec{m}_O(m_k \vec{v}_k)] = \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_O(\vec{F}_k^i),$$

де \vec{F}_k^e і \vec{F}_k^i – рівнодійні всіх зовнішніх та внутрішніх сил, що діють на точку .

Записавши такі рівняння для всіх точок системи та почленно додавши їх, одержимо:

$$\frac{d}{dt} [\sum_{k=1}^n \vec{m}_O(m_k \vec{v}_k)] = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^i).$$

Остання сума в отриманому виразі за властивостями внутрішніх сил системи дорівнює нулю. Тоді, врахувавши вираз (7.1), запишемо:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = [\sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^e)]. \quad (7.12)$$

Отримане рівняння виражає теорему моментів для системи: **похідна по часу від вектора головного моменту кількості руху системи (кінетичного моменту) відносно деякого центра дорівнює векторній сумі моментів усіх зовнішніх сил системи відносно того ж центра.**

Спроектувавши рівність (7.12) на осі нерухомої системи координат і прийнявши до уваги вираз (7.2), одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= \sum_{k=1}^n m_x(\vec{F}_k^e), \\ \frac{dK_y}{dt} &= \sum_{k=1}^n m_y(\vec{F}_k^e), \\ \frac{dK_z}{dt} &= \sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k^e). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Ці рівняння виражають теорему моментів відносно довільної нерухомої осі.

Доведеною теоремою широко користуються для вивчення обертального руху твердого тіла, а також у теорії гіроскопів та в теорії удару. Практична цінність теореми моментів у тому, що вона, аналогічно теоремі про зміну кількості руху, дозволяє виключити з розгляду невідомі внутрішні сили.

7.5 Закон збереження кінетичного моменту. Висновки з теореми моментів:

1. Якщо зовнішні сили такі, що геометрична сума моментів цих сил відносно даного центра дорівнює нулю, то вектор головного моменту кількості руху системи відносно того ж центра сталий.

Отже, якщо $\sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) = 0$, то $\vec{K}_O = \overrightarrow{const}$.

2. Якщо зовнішні сили такі, що сума моментів цих сил відносно деякої осі дорівнює нулю, то головний момент кількості руху системи відносно тієї ж осі сталий.

Тобто, якщо $\sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k^e) = 0$, то $K_z = const$.

Ці наслідки виражають закон збереження головного моменту кількості руху системи. Звідси виходить, що внутрішні сили не зможуть змінити головний момент кількості руху.

Розглянемо систему, що обертається навколо нерухомої осі Oz . Тоді, згідно з формулою (7.3), $K_z = I_z \omega$. Якщо в цьому випадку $\sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k^e) = 0$, то $I_z \cdot \omega = const$. Звідси такі висновки:

а) якщо система незмінна, тобто $I_z = const$, то $\omega = const$, тобто тверде тіло, закріплене на осі, обертається зі сталою швидкістю;

б) якщо система змінна, то під дією внутрішніх або зовнішніх сил її точки віддаляються або наближаються до осі Oz , що є причиною збільшення або зменшення I_z . Оскільки $I_z \cdot \omega = const$, то при збільшенні I_z кутова швидкість ω буде зменшуватись, а при зменшенні I_z – збільшуватись. Таким чином, дією внутрішніх сил можна змінювати кутову швидкість обертання системи.

Розглянемо деякі приклади.

Досліди з платформою Жуковського. Для демонстрації закону збереження кінетичного моменту зручно користуватися "**платформою Жуковського**". Це кругла горизонтальна платформа на кулькових опорних підшипниках, яка має можливість з малим тертям обертатися навколо вертикальної осі z . Для людини, яка стоїть на такій платформі, $\sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k^e) = 0$ і $I_z \cdot \omega = const$.

Якщо людина, розвівши руки в боки, надасть собі поштовхом обертального руху навколо осі, а потім опустить руки, то величина I_z зменшиться, а кутова швидкість ω зросте. Такий спосіб зміни кутової

швидкості широко використовують у балеті, в фігурному катанні на ковзанах, під час виконання стрибків у повітрі (сальто).

Обертання снаряда в каналі ствола. Розглядаючи ствол та снаряд як одну систему, бачимо, що сили тиску порохових газів під час стрільби будуть внутрішні та не змінять величину кінетичного моменту, який до стрільби дорівнював нулю. Допустимо, що снаряд починає обертатися, наприклад, вправо, то ствол буде намагатися обертатися вліво так, щоб в кожний момент часу виконувалась рівність

$$I_{\text{сн}}\omega_{\text{сн}} = I_{\text{ств}}\omega_{\text{ств}}.$$

Цьому обертанню ствола заважають цапфи, якими він закріплений на лафеті. Унаслідок цього з'являється додатковий тиск на цапфи.

Реактивний момент гвинта. Повітряний гвинт, що встановлений на гелікоптері, не лише відкидає повітря вниз, але і надає цій масі повітря обертального руху. Сумарний кінетичний момент рухомої маси повітря та гелікоптера тоді весь час дорівнює нулю, оскільки система спочатку була нерухома, а сили взаємодії між гвинтом та повітрям внутрішні. Тому гелікоптер розпочинає обертальний рух у бік, протилежний обертанню гвинта. Обертальний момент, що діє при цьому на корпус гелікоптера, називають реактивним моментом.

Щоб запобігти реактивному обертанню корпусу одnogвинтового гелікоптера, на його хвостовій частині ставлять другий гвинт. У багатогвинтового гелікоптера гвинти обертаються в різні боки.

Контрольні запитання

1. Що називають моментом кількості руху точки та системи?
2. Запишіть рівняння, які виражають теореми про зміну моменту кількості руху точки відносно центра та відносно осі.
3. Сформулюйте закон Кеплера.
4. Запишіть рівняння, які виражають теорему про зміну кінетичного моменту системи.
5. Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту.
6. Поясняйте досліди з платформою Жуковського.

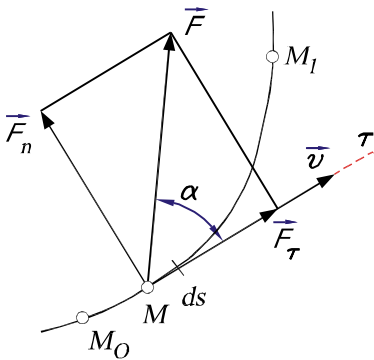
ГЛАВА 8. РОБОТА СИЛИ. ПОТУЖНІСТЬ

8.1 Елементарна робота сили, прикладеної до точки

Для характеристики дії сили, що діє на тверде тіло, використовують поняття роботи сили. **Робота сили характеризує ту дію сили, яка визначає зміну модуля швидкості рухомої точки.**

а) Натуральна форма опису руху точки.

Уведемо поняття елементарної роботи сили на нескінченно малому переміщенні ds (Рис. 8.1).



Елементарною роботою сили \vec{F} називають скалярну величину dA , яка дорівнює добутку проекції сили \vec{F} на вісь, дотичну до траєкторії руху точки, на елементарне переміщення

$$dA = F_t ds. \quad (8.1)$$

Рисунок 8.1

Це визначення відповідає поняттю про роботу як характеристику тієї дії сили, котра призводить до зміни модуля швидкості точки. Якщо розкласти силу на складові \vec{F}_t та \vec{F}_n , то модуль швидкості точки змінює складова \vec{F}_t , надаючи точці дотичне прискорення.

Складова \vec{F}_n змінює напрямок вектора швидкості \vec{v} , або, під час невідільного руху, змінює тиск на в'язь. Знаючи, що $F_t = F \cos \alpha$, отримаємо

$$dA = F ds \cos \alpha. \quad (8.2)$$

Таким чином, елементарна робота сили дорівнює добутку проекції сили на напрямок переміщення точки на елементарне переміщення ds , або елементарна робота сили дорівнює добутку модуля сили на елементарне переміщення ds та на косинус кута між напрямком сили та напрямком переміщення.

Якщо кут α гострий, то робота додатна. Якщо кут $\alpha = 0$, то елементарна робота $dA = Fds$. Якщо кут α тупий, то робота від'ємна. Для кута $\alpha = 180^\circ$ елементарна робота $dA = -Fds$. Якщо кут $\alpha = 90^\circ$, тобто сила перпендикулярна до переміщення, то елементарна робота сили дорівнює нулю.

Знак роботи має такий зміст: робота додатна, коли дотична складова сили спрямована в бік руху, тобто коли сила прискорює рух; робота від'ємна, коли дотична складова сили спрямована в бік, протилежний руху, тобто сила сповільнює рух.

Векторна форма опису руху точки

З кінематики відомо, що вектор елементарного переміщення $d\vec{r} = \vec{v}dt$, а $ds = |\vec{v}|dt$.

Звідси виходить, що $ds = |d\vec{r}|$. Використавши поняття скалярного добутку двох векторів, рівність (8.2) можна записати у вигляді

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Тобто, елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор елементарного переміщення точки прикладання сили.

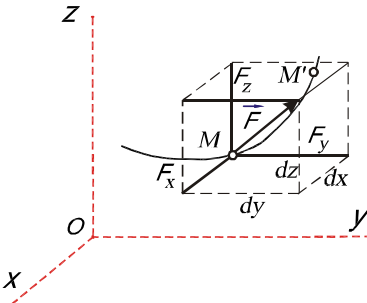
Координатна форма опису руху точки.

Запишемо аналітичну формулу елементарної роботи.

Для цього вектор сили \vec{F} спроектуємо на осі Ox, Oy, Oz .

На рис. 8.2 проєкціями вектора сили \vec{F} на осі є величини F_x, F_y, F_z .

Елементарне переміщення $MM' = ds$ складається з переміщень dx, dy, dz вздовж координатних осей, де x, y, z – координати точки M . Тоді роботу сили \vec{F} на переміщенні ds можна записати як суму робіт її



складових F_x, F_y, F_z на відповідних переміщеннях dx, dy, dz . Складова F_x виконує роботу лише на переміщенні dx , яка дорівнює $F_x dx$. Роботу двох інших складових сили на переміщеннях dy, dz записують аналогічно. Тоді елементарна робота сили:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (8.3)$$

Рисунок 8.2

Той же результат отримаємо, якщо розписати скалярний добуток (22.2*), $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$.

8.2 Робота сили

Роботу сили на довільному кінцевому переміщенні M_0M_1 (Рис. 8.1) обчислюють як інтегральну суму відповідних елементарних робіт

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau ds, \quad (8.4)$$

$$\text{або} \quad A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (8.5)$$

Тобто робота сили на довільному переміщенні M_0M_1 дорівнює взятому по цьому переміщенні інтегралу від елементарної роботи. Інтеграли в формулах (8.4) та (8.5) беруть вздовж кривої M_0M_1 , тобто ці інтеграли криволінійні.

Якщо величина $F_\tau = \text{const}$, то із (8.4)

$$A_{(M_0M_1)} = F_\tau s.$$

Такий випадок має місце тоді, коли діюча сила стала за величиною та за напрямком, а точка, до якої прикладена сила, рухається прямолінійно. Тоді $F_\tau = F \cos \alpha = \text{const}$ і робота сили

$$A_{(M_0M_1)} = Fs \cos \alpha.$$

Одиницею вимірювання роботи в SI є джоуль (1 Дж = 1 Нм).

Для розв'язку основних задач динаміки важливо виділити ті сили, роботу яких можна вирахувати, не знаючи закону руху точки, на яку діють ці сили. З формули (8.5) видно, що такими можуть бути лише сталі сили або сили, що залежать від положення рухомої точки.

Для обчислення роботи сил, що залежать від часу або швидкості руху точки, необхідно знати закон її руху, тобто координати x, y, z як функції часу. Тоді всі змінні величини можна виразити через t й обчислити інтеграл (8.5).

Не знаючи закону руху точки, тобто не розв'язавши основну задачу динаміки, роботу таких сил обчислити неможливо.

Графічний спосіб обчислення роботи

Якщо сила залежить від переміщення s і відомий графік залежності F_τ від s , то роботу сили \vec{F} можна обчислити графічно.

Нехай у положенні M_0 точка перебуває від початку відліку на відстані s_0 (Рис. 8.3), а в положенні M_1 – на відстані s_1 . Тоді за формулою (8.4), враховуючи геометричну суть інтеграла, одержимо:

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{s_0}^{s_1} F_\tau ds = \sigma,$$

де σ – величина заштрихованої на рис. 8.3 площі, помноженої на масштабний коефіцієнт.

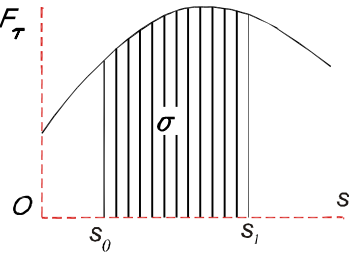


Рисунок 8.3

8.3 Потужність

Потужністю називають величину, що визначає роботу сили за одиницю часу,

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau v. \quad (8.6)$$

Отже потужність дорівнює добутку дотичної складової сили на швидкість руху.

Якщо робота виконується рівномірно, то потужність $N = \frac{A}{t}$, де t – час, протягом якого виконується робота A .

Підставивши в (8.6) вираз для dA із (8.2), одержимо

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v},$$

або, використовуючи поняття скалярного добутку двох векторів,

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z, \quad (8.7)$$

тобто потужність дорівнює скалярному добутку вектора сили \vec{F} на вектор швидкості \vec{v} точки прикладання сили.

Одиницею вимірювання потужності в SI є ват ($1\text{Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$).

З рівняння $N = F_t v$ видно, що у двигуна з потужністю N сила тяги F_t буде тим більша, чим менша швидкість руху v . Тому на підйомах включають понижену передачу, що дає змогу розвивати автомобільну максимальну силу тяги F_t .

8.4 Приклади обчислення роботи

Розглянуті нижче приклади можна використовувати під час розв'язування задач.

Робота сили ваги

Точка M , на яку діє сила ваги \vec{G} , переміщується з положення $M_0(x_0 y_0 z_0)$ в положення $M_1(x_1 y_1 z_1)$ (Рис. 8.4).

Виберемо осі координат так, щоб вісь Oz була спрямована верти-

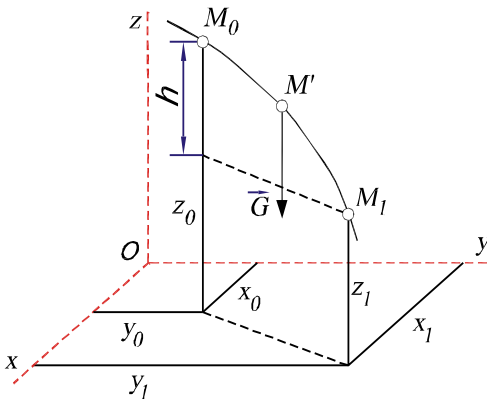


Рисунок 8.4

кально вгору. Тоді

$$G_x = G_y = 0, G_z = -G.$$

Підставивши ці значення в (8.5) і враховуючи, що змінною інтегрування є z , одержимо:

$$\begin{aligned} A_{(M_0 M_1)} &= \int_{M_0}^{M_1} (-G) dz = \\ &= -G \int_{z_0}^{z_1} dz = G(z_0 - z_1). \end{aligned}$$

Якщо точка M_0 розміщена вище від M_1 , то $z_0 - z_1 = h$, де h – величина вертикального переміщення точки; якщо

точка M_0 розміщена нижче від точки M_1 , то $z_0 - z_1 = -h$.

Таким чином

$$A_{(M_0 M_1)} = \pm Gh. \quad (8.8)$$

Робота сили ваги дорівнює взятому зі знаком плюс чи мінус добутку модуля сили на вертикальне переміщення точки її прикладання.

Робота додатна, якщо початкове положення точки вище від кінцевого. З отриманого результату видно, що **робота сили ваги не залежить від траєкторії рухомої точки**. Сили, які мають таку властивість, називають **потенціальними**.

Робота сил ваги, що діють на систему точок

Робота сили ваги елементарної частини з вагою G_k дорівнює $G_k(z_{k0} - z_{k1})$, де z_{k0}, z_{k1} – координати, що визначають початкове та кінцеве положення елементарної частини. Тоді сума робіт усіх сил ваги системи дорівнює

$$A = \sum_{k=1}^n G_k z_{k0} - \sum_{k=1}^n G_k z_{k1} = G(z_{C0} - z_{C1}) = \pm Gh_C, \quad (8.9)$$

де враховано, що $z_C G = \sum_{k=1}^n G_k z_k$, G – вага системи, h_C – вертикальне переміщення центра тяжіння.

Тобто, роботу сил ваги системи обчислюють як роботу їх рівнодійної G на переміщенні центра тяжіння системи.

Робота пружної сили

Розглянемо тіло M , яке лежить на горизонтальній площині та прикріплене до вільного кінця пружини (Рис. 8.5).

Точкою O відмітимо кінець недеформованої пружини ($AO = \ell_0$) і приймемо цю точку за початок осі Ox .

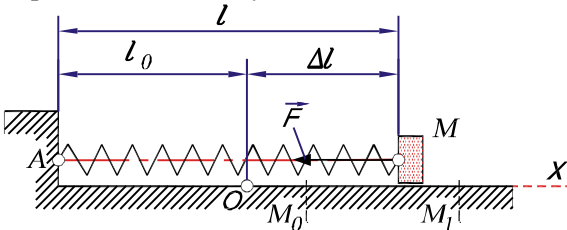


Рисунок 8.5

Після зміщення тіла M на $\Delta\ell$ від положення рівноваги на нього буде діяти сила \vec{F} , спрямована до точки O .

Величина цієї сили за законом Гука пропорційна видовженню пружини $\Delta\ell =$

$\ell - \ell_0$. У нашому випадку $\Delta\ell = x$. Тоді за модулем сила \vec{F} дорівнює

$$F = c|\Delta\ell| = c|x|,$$

де c – коефіцієнт жорсткості пружини. Розмірність c – [Н/м].

Знайдемо роботу сили пружності при переміщенні тіла з положення $M_0(x_0)$ в положення $M_1(x_1)$. Ураховуючи, що в цьому прикладі $F_x = -cx$; $F_y = F_z = 0$, одержимо

$$A_{M_0 M_1} = \int_{M_0}^{M_1} F_x dx = \int_{x_0}^{x_1} (-cx) dx = \frac{c}{2} (x_0^2 - x_1^2). \quad (8.10)$$

Цей результат можна отримати також за графіком залежності F від x , обчисливши площу σ заштрихованої на рис. 8.6 трапеції з урахуванням знаку роботи.

У формулі (8.10) $x_0 = \Delta\ell_{\text{поч}}$ – початкове видовження пружини, $x_1 = \Delta\ell_{\text{кін}}$ – кінцеве видовження пружини. Тоді

$$A_{M_0 M_1} = \frac{c}{2} [(\Delta\ell_{\text{поч}})^2 - (\Delta\ell_{\text{кін}})^2],$$

тобто робота сили пружності дорівнює половині добутку коефіцієнта жорсткості на різницю квадратів початкового та кінцевого видовжень (стиснень) пружини.

Робота буде додатною, коли $|\Delta\ell_{\text{поч}}| > |\Delta\ell_{\text{кін}}|$, тобто коли кінець пружини переміщається до рівноважного положення тіла на пружині. Отже, робота сили пружності \vec{F} залежить від значень $\Delta\ell_{\text{поч}}$ та $\Delta\ell_{\text{кін}}$ і не залежить від форми траєкторії тіла. Тобто, **сила пружності також потенціальна.**

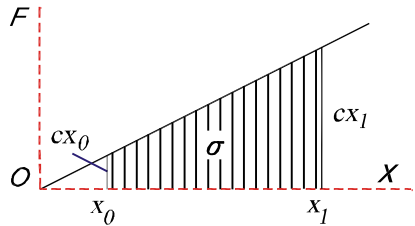


Рисунок 8.6

Робота сили тертя

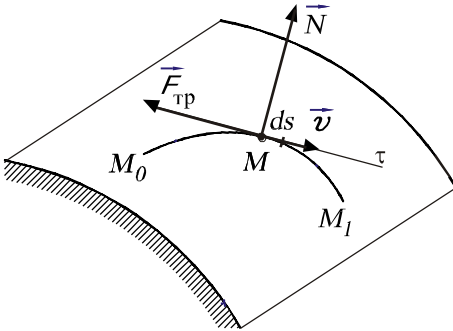


Рисунок 8.7

Розглянемо точку, що рухається по деякій шорсткій площині або прямій (Рис. 8.7). Сила тертя ковзання, що діє на точку, дорівнює за модулем fN , де f – коефіцієнт тертя ковзання, а N – нормальна реакція поверхні. Сила тертя ковзання спрямована в бік, протилежний переміщенню точки, тобто $F_{\text{тр}} = fN$. Тоді

$$A_{M_0 M_1} = - \int_{M_0}^{M_1} F_{\text{тр}} ds = - \int_{M_0}^{M_1} fN ds. \quad (8.11)$$

Якщо величина сили тертя стала, то $A_{M_0M_1} = -F_{\text{тр}}s$, де s – довжина дуги кривої M_0M_1 , по якій переміщається точка.

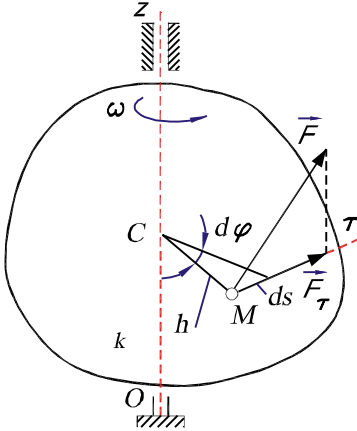


Рисунок 8.8

Таким чином, робота сили тертя ковзання завжди від'ємна. Оскільки ця робота залежить від довжини дуги M_0M_1 , то сила тертя ковзання не потенціальна.

Робота сили, прикладеної до тіла, що обертається

Елементарна робота сили \vec{F} , яка прикладена до тіла, яке обертається (Рис. 8.8), дорівнює

$$dA = F_\tau ds = F_\tau h d\phi.$$

де $ds = h d\phi$, $d\phi$ – кут повороту тіла.

Величину $F_\tau h = m_z(\vec{F}) = M_z$ називають обертальним моментом.

Тоді

$$dA = M_z d\phi. \quad (8.12)$$

Отже елементарна робота дорівнює добутку обертального моменту на елементарний кут повороту.

Формула (8.12) справедлива також для декількох сил, що діють на тіло, якщо врахувати $M_z = \sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k)$. При повороті тіла на кінцевий кут робота буде дорівнювати

$$A = \int_0^\phi M_z d\phi,$$

а у випадку сталого моменту ($M_z = \text{const}$):

$$A = \pm M_z \phi. \quad (8.13)$$

Знак роботи не залежить від знаку моменту M_z . Робота буде додатня тоді, коли напрям обертання та напрям моменту M_z однакові. Якщо напрям обертання та напрям моменту протилежні – то робота від'ємна.

Якщо на тіло діє пара сил, що лежить у площині, перпендикулярній до осі Oz , то M_z в формулах (8.12) – (8.13) буде моментом цієї пари.

Для визначення потужності використаємо рівність (8.6) і запишемо:

$$N = \frac{dA}{dt} = M_z \frac{d\phi}{dt} = M_z \omega. \quad (8.14)$$

Отже, якщо сили діють на тіло, яке обертається навколо нерухомої осі, то потужність дорівнює добутку обертального моменту на кутову швидкість. За тієї самої потужності обертальний момент буде тим більшим, чим менша кутова швидкість.

Робота моменту сили тертя кочення

На колесо радіуса R , що котиться по площині без ковзання, діє сила тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$, яка перешкоджає ковзанню точки дотику B колеса до площини. Елементарна робота цієї сили дорівнює

$$dA = -F_{\text{тр}} ds_B.$$

Але точка B у даному випадку є миттєвим центром швидкостей, тому її швидкість дорівнює нулю ($v_B = 0$). Отже дорівнюють нулю елементарне переміщення точки B ($ds_B = 0$), оскільки $ds_B = v_B dt$, та елементарна робота сили тертя на такому переміщенні ($dA = 0$).

Звідси випливає: при коченні без ковзання робота сили тертя ковзання на довільному переміщенні тіла дорівнює нулю; дорівнює нулю і робота реакції \vec{N} , прикладеної в точці B (Рис. 8.9, а).

Опір коченню, що виникає внаслідок деформації поверхні, складає пара сил, момент якої $M_{\text{коч}} = \delta N$, де δ – коефіцієнт тертя кочення.

Ураховуючи, що під час кочення кут повороту колеса $d\phi = \frac{ds_C}{R}$ одержимо:

$$dA = -\delta N d\phi = -\frac{\delta}{R} N ds_C,$$

де ds_C – елементарне переміщення центра C колеса.

Якщо $N = \text{const}$, то повна робота сили опору коченню буде дорівнювати

$$A = -\delta N \phi = -\frac{\delta}{R} N s_C. \quad (8.15)$$

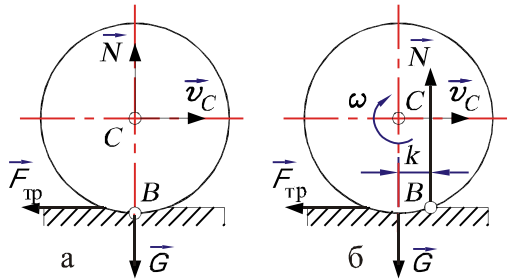


Рисунок 8.9

Оскільки величина $\frac{\delta}{R}$ мала, то за наявності інших сил опору, сили опору коченню можна не враховувати.

Робота сили тяжіння

Якщо Землю (планету) розглядати як однорідну кулю, то на точку M з масою m , що розміщена поза кулею або на її поверхні, буде діяти сила тяжіння \vec{F} . Ця сила, яка спрямована до центра O кулі, дорівнює

$$F = k \frac{m}{r^2}.$$

Коефіцієнт k можна визначити з умови, що на поверхні Землі ($r = R$, де R – радіус Землі) сила тяжіння дорівнює mg . Тоді

$$mg = F = k \frac{m}{R^2} \quad \text{і} \quad k = gR^2.$$

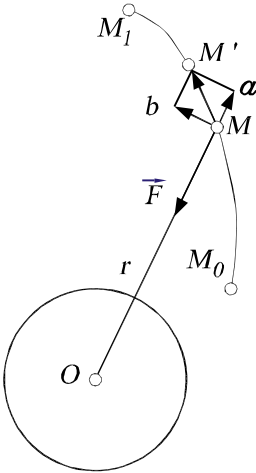


Рисунок 8.10

Запишемо елементарну роботу сили \vec{F} .

Як видно з рис. 8.10, елементарне переміщення M_0M_1 точки M можна розкласти: на переміщення \vec{Ma} , яке чисельно дорівнює переміщенню dr відстані $OM = r$ і спрямоване вздовж OM , та переміщення \vec{Mb} , яке перпендикулярне до OM ($\vec{Mb} \perp OM$), а також до сили \vec{F} .

На переміщенні \vec{Mb} робота сили \vec{F} дорівнює нулю, а на переміщенні \vec{Ma} , яке спрямоване протилежно до сили \vec{F} ,

$$dA = -Fdr = -k \frac{m}{r^2} dr.$$

Допустимо, що точка M переміщується з положення M_0 ($r = r_0$) у положення M_1 ($r = r_1$). Тоді робота сили \vec{F}

$$\begin{aligned} A_{M_0M_1} &= \int_{M_0}^{M_1} dA = -km \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = -km \int_{r_0}^{r_1} d\left(\frac{1}{r}\right) = \\ &= km \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right) = mgR^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Робота буде додатна, якщо $r_0 > r_1$, тобто коли кінцеве положення точки ближче до поверхні Землі ніж початкове.

Робота сили тяжіння не залежить від вигляду траєкторії, вздовж якої переміщається точка M , тобто сила тяжіння є потенціальною.

Контрольні запитання

1. Що називають елементарною роботою сили?
2. Як обчислюють роботу сили на довільному кінцевому переміщенні?
3. Як графічно можна обчислити роботу?
4. Що називають потужністю?
5. Як обчислюють роботу сили ваги, сили пружності, сили тертя кочення, сили тяжіння?
6. Які сили називають потенціальними?
7. Як обчислити роботу сили, прикладеної до тіла, що обертається?

ГЛАВА 9. ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ ТОЧКИ ТА СИСТЕМИ

9.1 Кінетична енергія точки та системи

Уведемо поняття ще однієї міри руху – кінетичної енергії.

Кінетичною енергією (або живою силою) точки називають скалярну величину $\frac{mv^2}{2}$, що дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості.

Кінетичною енергією системи називають скалярну величину T , що дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій усіх точок системи.

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}. \quad (9.1)$$

Кінетична енергія є характеристикою поступального та обертального рухів системи, тому теорему про зміну кінетичної енергії часто використовують для розв'язку задач.

Головна відмінність кінетичної енергії від уведених раніше характеристик \vec{Q} та \vec{K}_O полягає в тому, що кінетична енергія є величиною скалярною та додатною. Тому вона не залежить від напрямку руху частин системи і не характеризує зміну цих напрямків.

Відмітимо ще одну важливу обставину. Внутрішні сили, що діють на систему, не змінюють векторні характеристики \vec{Q} та \vec{K}_O . Але якщо під дією внутрішніх сил змінюються модулі швидкостей точок системи, то при цьому змінюється й величина T .

Якщо систему складають декілька тіл, то її кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій цих тіл:

$$T = \sum_{k=1}^n T_k. \quad (9.2)$$

Одиницею вимірювання кінетичної енергії у SI є $[\text{Дж}] = [H \cdot m] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \right]$.

9.2 Кінетична енергія твердого тіла

Матеріальна система дуже часто є твердим тілом або сукупністю твердих тіл. Тому потрібно вміти визначати кінетичну енергію твердого тіла, яке може здійснювати різні рухи.

Оскільки тверде тіло розглядають з неперервною розподіленою масою, то всі суми, що входять до виразу кінетичної енергії системи, переходять в інтеграли, а масу m_k окремої точки замінюють диференціалом dm . Тому формула для визначення кінетичної енергії твердого тіла має вигляд

$$T = \frac{1}{2} \int_{(M)} v^2 dm, \quad (9.3)$$

де інтегрування проводять по масі всього тіла.

Наведемо формули для обчислення кінетичної енергії тіла у випадках різних його рухів.

Поступальний рух

Під час поступального руху твердого тіла швидкості всіх його точок однакові (Рис. 9.1). Винісши v^2 у формулі (9.3) за знак інтеграла, одержимо:

$$T_{\text{пост}} = \frac{1}{2} v^2 \int_{(M)} dm = \frac{1}{2} M v_C^2. \quad (9.4)$$

Тут ураховано, що $\int_{(M)} dm = M$, а швидкості $v_k = v_C$.

Отже кінетична енергія тіла під час поступального руху дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості центра мас.

Аналогічний вираз одержимо використовуючи формулу (9.1), в яку замість v_k підставимо v_C :

$$T_{\text{пост}} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_C^2}{2} = \frac{1}{2} v_C^2 \sum_{k=1}^n m_k = \frac{1}{2} M v_C^2.$$

Обертальний рух

Якщо тверде тіло обертається навколо деякої нерухомої осі Oz , то модуль швидкості k -тої точки твердого тіла дорівнює $v_k = \omega h_k$, де

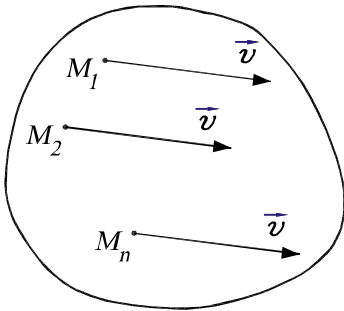


Рисунок 9.1

ω – модуль кутової швидкості твердого тіла, h_k – відстань від k -ої точки до осі обертання Oz . Підставивши в формулу (9.3) вираз для швидкості точки, одержимо

$$T = \frac{1}{2} \int_{(M)} \omega^2 h_k^2 dm.$$

Винісши у цьому виразі за знак інтеграла ω^2 (кутова швидкість однакова для всіх точок тіла та від змінної інтегрування не залежить), отримаємо

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \int_{(M)} h_k^2 dm,$$

де $\int_{(M)} h_k^2 dm = I_z$ – момент інерції тіла відносно осі обертання.

Таким чином

$$T_{об} = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \quad (9.5)$$

Використовуючи формулу (9.1), одержимо такий самий результат

$$T_{об} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2.$$

Плоскопаралельний рух

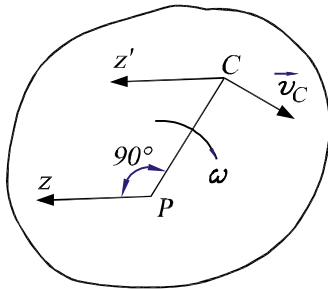


Рисунок 9.2

Під час плоскопаралельного руху швидкості точок тіла в кожний момент часу розподілені так, немов би тіло обертається навколо осі Pz , перпендикулярної до площини руху, що проходить через миттєвий центр швидкостей P (Рис. 9.2).

$$\text{Тобто} \quad T_{плоск} = \frac{1}{2} I_{Pz} \omega^2, \quad (9.6)$$

де I_{Pz} – момент інерції тіла відносно осі Pz , ω – кутова швидкість тіла. Величина I_{Pz} буде змінною, оскільки положення центра P під час руху тіла змінюється.

Уведемо постійний момент інерції $I_{Cz'}$ відносно осі, що проходить через центр мас C ($Cz' \parallel Pz$). За теоремою Гюйгенса $I_{Pz} = I_{Cz'} + Md^2$, де $d = CP$. Підставимо цей вираз у формулу (9.6). Урахувавши,

що точка P – миттєвий центр швидкостей, а $\omega \cdot d = \omega \cdot CP = v_C$, будемо мати:

$$T_{\text{плоск}} = \frac{1}{2} I_{Pz} \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} (I_{Cz'} + Md^2) = \frac{1}{2} I_{Cz'} \omega^2 + \frac{1}{2} Md^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{Cz'} \omega^2 + \frac{1}{2} Mv_C^2. \quad (9.7)$$

Під час плоскопаралельного руху кінетична енергія тіла дорівнює сумі кінетичних енергій: поступального руху тіла зі швидкістю центра мас і обертального руху тіла навколо центра мас.

Сферичний рух

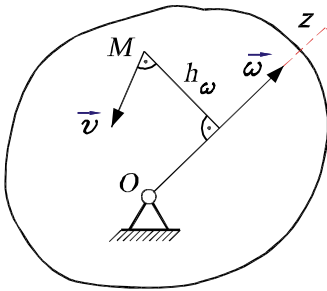


Рисунок 9.3

Під час сферичного руху твердого тіла (руху тіла з однією нерухомою точкою O) модуль швидкості довільної точки M визначається рівністю $v = \omega h_\omega$ (Рис. 9.3), де ω – кутова швидкість тіла, h_ω відстань від точки M до миттєвої осі обертання тіла Oz .

Порівнюючи сферичний рух з обертанням навколо нерухомої осі, коли $v = \omega \cdot h_k$, одержимо вираз для кінетичної енергії твердого тіла під час сферичного руху

$$T = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2, \quad (9.8)$$

де I_ω – момент інерції тіла відносно миттєвої осі обертання.

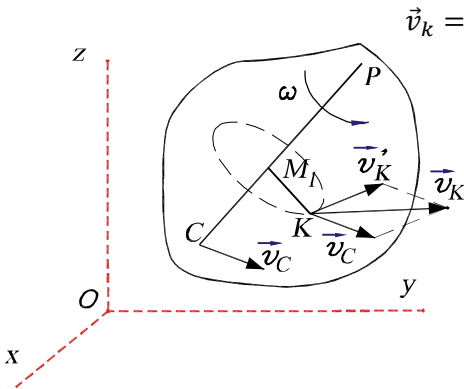
Під час сферичного руху кінетична енергія твердого тіла дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно миттєвої осі обертання на квадрат кутової швидкості.

Звернемо увагу на відмінність формул (9.5) та (9.8). Положення осі обертання Oz не змінюється відносно тіла, а тому момент інерції I_z у формулі (9.5) є величиною сталою. Положення миттєвої осі обертання змінюється відносно тіла, внаслідок цього момент інерції I_ω у формулі (9.8) є змінною величиною.

Загальний випадок руху

Якщо за полюс прийняти точку C – центр мас тіла (Рис. 9.4), то рух тіла в загальному випадку буде складатися з поступального руху

тіла зі швидкістю \vec{v}_C та обертального навколо миттєвої осі CP , що проходить через цей полюс. Тоді швидкість \vec{v}_k довільної точки тіла дорівнює геометричній сумі швидкості полюса \vec{v}_C і швидкості \vec{v}'_k , яку отримує точка при обертанні разом з тілом навколо осі CP , яка проходить через полюс,



$$\vec{v}_k = \vec{v}_C + \vec{v}'_k.$$

При цьому $v'_k = \omega \cdot h_k$, де h_k – відстань від точки до осі CP , а ω – абсолютна кутова швидкість обертання тіла навколо цієї осі. Звідси випливає, що

Рисунок 9.4

$$\vec{v}_k^2 = v_k^2 = (\vec{v}_C + \vec{v}'_k)^2 = \vec{v}_C^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}'_k + \vec{v}'_k^2.$$

Підставивши отриманий вираз у (9.1) і врахувавши, що $v'_k = \omega \cdot h_k$, одержимо:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_C^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 + \vec{v}_C \sum_{k=1}^n m_k v'_k.$$

Відмітимо, що $\sum_{k=1}^n m_k = M$ – маса тіла; $\sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = I_{CP}$ – момент інерції тіла відносно осі CP (миттєва вісь); $\sum_{k=1}^n m_k \vec{v}'_k = 0$, так як $\sum_{k=1}^n m_k \vec{v}'_k = M \vec{v}'_C$ (що витікає з формули $\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum m_k \vec{r}_k}{m} \right)$ або $\vec{v}'_C = \frac{\sum m_k \vec{v}'_k}{M}$).

Величина $M \vec{v}'_C$ є тією кількістю руху, яку одержує тіло при обертанні навколо осі CP , що проходить через центр мас тіла. Отже

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{CP} \omega^2. \quad (9.9)$$

Кінетична енергія тіла в загальному випадку руху дорівнює сумі кінетичної енергії поступального руху тіла зі швидкістю центра мас та кінетичної енергії обертального руху навколо миттєвої осі, що проходить через центр мас тіла (Теорема Кьонига).

Задача 9.1. Коток K з масою m_1 лежить на горизонтальній площині (Рис. 9.5). Коток обмотаний тросом, перекинутим через блок B радіуса r . До вільного кінця троса прикріплено вантаж Γ маси m_3 .

Під час опускання вантажу зі швидкістю \vec{v} трос приводить в рух без ковзання коток K . Визначити кінетичну енергію системи, якщо момент інерції блока B відносно осі обертання дорівнює I_2 ; коток вважати однорідним круглим циліндром, масу троса не враховувати.

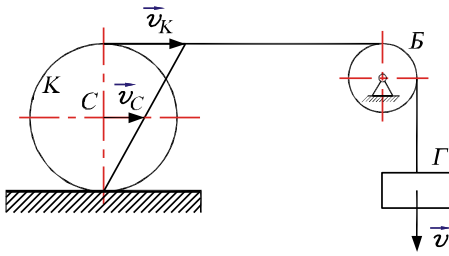


Рисунок 9.5

Розв'язок

Кінетична енергія системи

$$T = T_K + T_B + T_\Gamma.$$

Вантаж Γ рухається поступально і його кінетична енергія згідно з (9.4) дорівнює

$$T_\Gamma = \frac{1}{2} m_3 v^2.$$

Блок B обертається навколо нерухокої осі. Згідно з (9.5) його кінетична енергія

$$T_B = \frac{1}{2} I_2 \omega_B^2 = \frac{1}{2} I_2 \left(\frac{v}{r} \right)^2, \text{ так як } \omega_B = \frac{v}{r}.$$

Коток K здійснює плоский рух. Його кінетична енергія відповідно до (9.6)

$$T_K = \frac{1}{2} m_1 v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zc} \omega_K^2 = \frac{1}{2} m_1 \frac{v^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{m_1 R^2}{2} \cdot \frac{v^2}{4R^2} = \frac{3}{16} m_1 v^2.$$

Кінетичну енергію системи запишемо так

$$T = \frac{3}{16} m_1 v^2 + \frac{1}{2} I_2 \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2} m_3 v^2.$$

9.3 Теорема про зміну кінетичної енергії точки

Розглянемо точку маси m , яка під дією прикладеної до неї сили з положення M_0 , де вона має швидкість \vec{v}_0 , переміститься в положення M_1 , де її швидкість дорівнює \vec{v}_1 (Рис. 9.6).

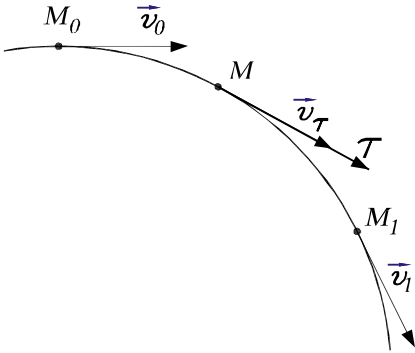


Рисунок 9.6

Запишемо основний закон руху точки $m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$ і спроекуємо цей вираз на дотичну до траєкторії руху в точці

$$ma_\tau = \sum_{k=1}^n F_{k\tau}. \quad (9.10)$$

Дотичне прискорення запишемо так

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v.$$

Тоді $m \frac{dv}{ds} v = \sum_{k=1}^n F_{k\tau}.$

Помножимо обидві частини рівностей на ds та внесемо m під

знак диференціала й одержимо

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^n dA_k, \quad (9.11)$$

де $F_{kz} ds = dA_k$ – елементарна робота сили \vec{F}_k .

Рівність (9.11) виражає **теорему про зміну кінетичної енергії точки в диференціальній формі**: повний диференціал кінетичної енергії точки дорівнює елементарній роботі усіх діючих на точку сил.

Після інтегрування обох частини рівності (9.11) в межах, що відповідають значенням швидкостей точки в початковому та кінцевому положеннях, отримаємо

$$\int_{v_0}^{v_1} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{(M_0M_1)} \sum_{k=1}^n dA_k \text{ або}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum_{k=1}^n A_{k(M_0M_1)}. \quad (9.12)$$

Рівність (9.12) виражає **теорему про зміну кінетичної енергії точки в інтегральній формі**: зміна кінетичної енергії точки на деякому її переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт усіх сил, які діють на точку на цьому переміщенні.

Випадок невільного руху точки. У разі невільного руху точки в праву частину рівності (9.12) увійде робота заданих активних сил \vec{F}_k^a і

робота реакцій в'язей \vec{N} . Обмежимося розглядом руху точки по нерухомій гладкій поверхні або кривій лінії.

У цьому випадку реакція \vec{N} (Рис. 9.7) напрямлена по нормалі до траєкторії точки та $N_\tau = 0$.

Тоді робота реакції нерухомої гладкої поверхні (або кривої) на довільному переміщенні точки дорівнює нулю й за виразом (9.12) одержимо:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{k(M_0M_1)}^a. \quad (9.13)$$

Таким чином, під час переміщення точки по нерухомій гладкій поверхні або кривій лінії зміна кінетичної енергії точки дорівнює сумі робіт прикладених до точки активних сил на цьому переміщенні.

Якщо поверхня (крива) шорстка, то до роботи активних сил додають роботу сил тертя ковзання.

Якщо поверхня (крива) рухається, то абсолютне переміщення точки M може бути не перпендикулярним до реакції й тоді робота реакції \vec{N} не дорівнює нулю.

Матеріальна точка рухається по гладкій поверхні із положення M_0 у положення M'_1 (Рис. 9.8).

Сама ж поверхня переміщується разом з точкою із положення M_0 в положення M'_0 .

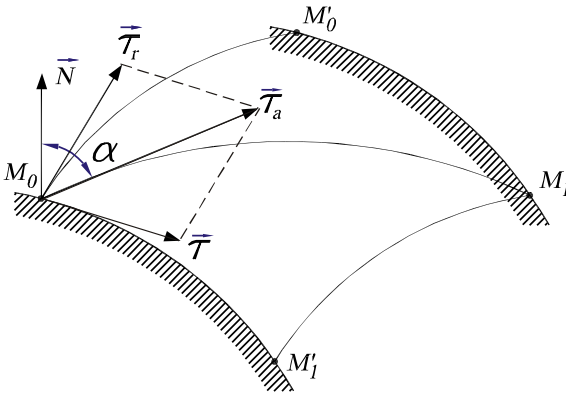


Рисунок 9.8

Сумарним переміщенням точки буде M_0M_1 .

Нормальна реакція гладкої поверхні \vec{N} перпендикулярна дотичній до поверхні $\vec{\tau}_r$ (відносний рух). Кут $\alpha = \angle N M_0 \vec{\tau}_a \neq 90^\circ$ ($\vec{\tau}_a$ – дотична до траєкторії абсолютного руху точки). Отже проекція \vec{N} на $\vec{\tau}_a$ не дорівнює нулю й робота нормальної реакції на абсолютному переміщенні не дорівнює нулю.

Будемо вважати, що всі складові, які входять до рівності (9.11), залежать від часу t . Розділивши обидві частини рівності (9.11) на dt , одержимо (третя форма теореми):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \frac{1}{dt} \sum_{k=1}^n dA_k = \sum_{k=1}^n \frac{dA_k}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k. \quad (9.14)$$

Отже, повна похідна по часу від кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює сумарній потужності сил, що діють на точку.

9.4 Теорема про зміну кінетичної енергії системи

Доведена раніше теорема справедлива для довільної точки системи. Таким чином, якщо розглянути деяку точку системи з масою m_k , що має швидкість \vec{v}_k , то для неї можна записати

$$d \left(\frac{m_k v_k^2}{2} \right) = dA_k^e + dA_k^i,$$

де dA_k^e і dA_k^i – елементарні роботи зовнішніх та внутрішніх сил, які діють на точку. Просумуємо такі рівняння для кожної точки системи

$$d \left(\sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} \right) = \sum_{k=1}^n dA_k^e + \sum_{k=1}^n dA_k^i, \quad (9.15)$$

$$\text{або} \quad dT = \sum_{k=1}^n dA_k^e + \sum_{k=1}^n dA_k^i. \quad (9.16)$$

Рівність (9.16) виражає теорему про зміну кінетичної енергії системи в диференціальній формі: **повний диференціал кінетичної енергії системи дорівнює сумі елементарних робіт усіх зовнішніх та внутрішніх сил, які діють на систему.**

Проінтегрувавши обидві частини цієї рівності в межах, що відповідають переміщенню системи з деякого початкового положення, де кінетична енергія дорівнює T_0 , у положення, де кінетична енергія становитиме T , отримаємо:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i. \quad (9.17)$$

Одержана залежність виражає теорему про зміну кінетичної енергії системи в інтегральному вигляді: **зміна кінетичної енергії системи за деякого її переміщення дорівнює сумі робіт усіх зовнішніх та внутрішніх сил, які діють на систему під час цього переміщення.**

Взявши похідну за часом від (9.17), одержимо

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dA_k^e}{dt} + \sum_{k=1}^n \frac{dA_k^i}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k^e + \sum_{k=1}^n N_k^i. \quad (9.18)$$

Повна похідна від кінетичної енергії за часом дорівнює сумі потужностей усіх зовнішніх та внутрішніх сил, прикладених до точок системи. На відміну від теореми про зміну кількості руху та про зміну кінетичного моменту, у формулах (9.16) – (9.18) наявні внутрішні сили.

Розглянемо два важливі випадки.

Незмінна система

Незмінною називають таку систему точок, де відстані між довільними точками при русі системи залишаються незмінними. Прикладом такої системи є абсолютно тверде тіло.

Дві точки B_1 та B_2 незмінної системи (Рис. 9.9) діють одна на одну з силами \vec{F}_{12}^i та \vec{F}_{21}^i ($\vec{F}_{12}^i = -\vec{F}_{21}^i$) і мають у даний момент швидкості \vec{v}_1 та \vec{v}_2 .

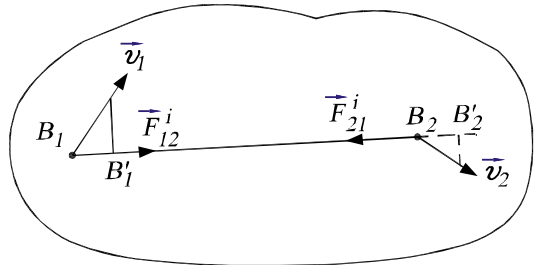


Рисунок 9.9

За проміжок часу dt переміщення цих точок $d\vec{s}_1 = \vec{v}_1 dt$ та $d\vec{s}_2 = \vec{v}_2 dt$, які напрямлені вздовж векторів \vec{v}_1 та \vec{v}_2 . Але відрізок $B_1 B_2$ незмінний і за відомою теоремою з кінематики проекції швидкостей \vec{v}_1 та \vec{v}_2 точок B_1 та B_2 , а також проекції переміщень $d\vec{s}_1$, $d\vec{s}_2$ на напрямок відрізка $B_1 B_2$ однакові між собою, тобто $\overrightarrow{B_1 B_1} = \overrightarrow{B_2 B_2}$.

Тоді елементарні роботи сил \vec{F}_{12}^i та \vec{F}_{21}^i однакові за модулем, але протилежні за знаком, та їх сума дорівнює нулю. Звідси робимо висновок, що для незмінної системи сума робіт усіх внутрішніх сил дорівнює нулю і формули (9.16) та (9.17) запишемо так:

$$dT = \sum_{k=1}^n dA_k^e \quad (9.19)$$

або
$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e. \quad (9.20)$$

Система з ідеальними в'язями

Розглянемо систему, на яку накладено в'язі, що не залежать від часу. Розділимо всі зовнішні та внутрішні сили, які діють на систему, на сили активні та реакції в'язей. Тоді рівняння (9.16) набуде вигляду:

$$dT = \sum_{k=1}^n dA_k^a + \sum_{k=1}^n dA_k^r,$$

де $\sum_{k=1}^n dA_k^a$ – сума елементарних робіт активних сил, $\sum_{k=1}^n dA_k^r$ – сума елементарних робіт реакцій в'язей.

Отже зміна кінетичної енергії системи залежить від роботи як активних сил, так і реакцій в'язей. Уведемо поняття ідеальної механічної системи, для якої наявність в'язей не впливає на зміну кінетичної енергії під час її руху. Для таких в'язей виконується умова:

$$\sum_{k=1}^n dA_k^r = 0. \quad (9.21)$$

Стаціонарні в'язі називають ідеальними, якщо сума робіт усіх реакцій в'язей на елементарному переміщенні системи дорівнює нулю.

Для механічної системи, на яку накладені ідеальні в'язі, маємо

$$dT = \sum_{k=1}^n dA_k^a \quad \text{або} \quad T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^a. \quad (9.22)$$

9.5 Силове поле

Розглянемо сили, які залежать від положення матеріальної точки в просторі.

Силowym полем називають частину простору, в кожній точці якого на розміщену в ньому матеріальну точку діє сила, однозначно визначена за величиною та напрямом у довільний момент часу.

Таким чином, у силowому полі має бути відома одна векторна функція \vec{F} , що залежить від радіуса-вектора точки \vec{r} та часу t

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t),$$

або три скалярні функції – проєкції сили \vec{F} на координатні осі

$$F_x = F_x(x, y, z, t), F_y = F_y(x, y, z, t), F_z = F_z(x, y, z, t).$$

Якщо сила \vec{F} явно залежить від часу t , силowe поле називають не-стаціонарним, якщо сила \vec{F} не залежить від t , силowe поле називають стаціонарним. Надалі будемо розглядати лише стаціонарні силowі поля, коли сила залежить від положення точки, тобто від її радіуса-вектора $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, а її проєкції є функціями координат точки:

$$F_x = F_x(x, y, z), F_y = F_y(x, y, z), F_z = F_z(x, y, z). \quad (9.23)$$

Звернемо увагу на дві властивості таких полів.

1. Робота сил стаціонарного силowego поля в загальному випадку залежить від початкового M_1 та кінцевого M_2 положень й траєкторії та не залежить від закону руху матеріальної точки по траєкторії.

2. Має місце рівність

$$A_{12} = -A_{21}, \quad (9.24)$$

де A_{12} – робота сил стаціонарного поля під час руху матеріальної точки від M_1 до M_2 , A_{21} – робота сил поля під час руху точки по тій самій траєкторії в зворотному напрямку від M_2 до M_1 .

Серед стаціонарних силowих полів важливе місце займають поля, робота сил яких не залежить від траєкторії руху точки та визначається лише положенням початкової й кінцевої точок шляху. Такі силowі поля називають потенціальними силowими полями. Згідно з визначенням для потенціальних сил робота не залежить від шляху і має місце рівність

$$A_{12}^I = A_{12}^{II} = A_{12}. \quad (9.25)$$

де I та II – довільні траєкторії, по яких матеріальна точка може перейти від M_1 до M_2 , а A_{12} – загальне значення роботи.

Роботу сили \vec{F} на переміщенні M_0M_1 визначають за формулою

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (9.26)$$

Обчислити інтеграл, що стоїть справа, не знаючи закону руху, можна тоді, коли сила залежить від координат точки. Але якщо вираз, що стоїть під знаком інтеграла, буде повним диференціалом деякої функції $U(x, y, z)$, тобто

$$dA = dU(x, y, z) \text{ або } F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU(x, y, z), \quad (9.27)$$

то роботу $A_{(M_0M_1)}$ можна обчислити, не знаючи траєкторії руху точки M .

Функцію $U(x, y, z)$, диференціал якої дорівнює елементарній роботі ($dU = dA$), називають силовою функцією.

Якщо у формулу (9.27) підставити вираз для dA з (9.26), то отримаємо

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} dU(x, y, z) = U_1 - U_0, \quad (9.28)$$

де $U_1(x, y, z)$ та $U_0(x, y, z)$ – значення силової функції в точках M_1 та M_0 поля.

Отже, робота потенціальної сили дорівнює різниці значень силової функції в кінцевій та початковій точках шляху та не залежить від вигляду траєкторії руху точки.

Під час переміщення точки по замкнутій траєкторії робота потенціальної сили дорівнює нулю.

Якщо встановлено, що співвідношення (9.27) має місце, то силову функцію визначають з виразу:

$$U = \int dA + C \text{ або } U = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + C. \quad (9.29)$$

Постійна інтегрування C може мати довільні значення, які визначають з початкових умов. Прикладом потенціальних сил є сили ваги, пружності та тяжіння. Покажемо, що для цих сил існують силові функції та знайдемо їх.

1. Для сили ваги, якщо вісь Oz спрямована вертикально вгору, $dA = -Gdz$, звідси, вважаючи $U = 0$ при $t = 0$ (нульова точка на початку системи координат), одержимо:

$$U = \int dA + C = - \int Gdz + C = -Gz + C = -Gz \quad (9.30)$$

(так як при $z = 0$ $U = 0$).

2. Для пружної сили, що діє вздовж осі Ox , $dA = -cxdx$, звідси, вважаючи $U = 0$ при $x = 0$, одержимо:

$$U = \int dA + C_1 = - \int cxdx + C_1 = -\frac{cx^2}{2} + C_1 = -\frac{cx^2}{2} \quad (9.31)$$

(так як при $x = 0$ $U = 0$).

3. Для сили тяжіння $dA = kmd \left(\frac{1}{r}\right) = mgR^2 d \left(\frac{1}{r}\right)$. Вважаючи, що нульова точка розміщена в нескінченності, одержимо:

$$U = \int dA + C = mgR^2 \int d \left(\frac{1}{r}\right) + C = mgR^2 \frac{1}{r}, \quad (9.32)$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

9.6 Поверхні рівня. Силові лінії

Якщо розглядати точки потенціального поля, в яких силова функція має одне і теж значення, наприклад $U = C$, то всі ці точки лежать на поверхні, яку називають поверхнею однакового рівня або поверхнею рівня. Рівняння поверхні рівня має вигляд

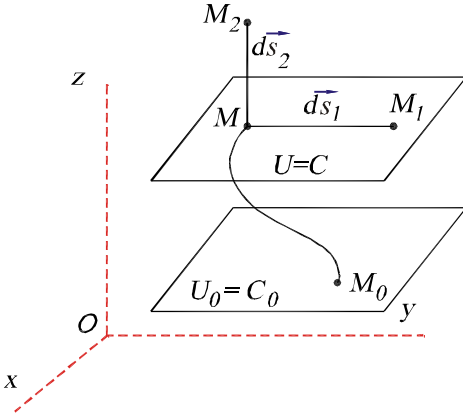


Рисунок 9.10

З другого боку

$$dA = U(M_1) - U(M) = C - C = 0.$$

Таким чином, $F \neq 0$, $ds_1 \neq 0$, тоді $\cos \angle (\vec{F}, \overrightarrow{MM_1}) = 0$, тобто кут між силою \vec{F} та переміщенням $\overrightarrow{MM_1}$, що лежить у дотичній до поверхні рівня площині, буде прямим.

2. Робота сили дорівнює нулю, якщо початкова та кінцева точки переміщення лежать на одній поверхні рівня

$$A = U - U_0 = C - C = 0. \quad (9.33)$$

3. Сила в потенціальному силовому полі завжди напрямлена у бік зростання значення силової функції.

Для доведення цієї властивості візьмемо точку M_2 на перпендикулярі до поверхні рівня в напрямку збільшення значення силової функції (Рис. 9.10).

Тоді елементарну роботу на елементарному переміщенні MM_2 запишемо так:

$$dA = F ds_2 \cos \angle (\vec{F}, \overrightarrow{MM_2}) = C_2 - C > 0,$$

$$U(x, y, z) = C.$$

Відзначимо деякі властивості поверхні рівня.

1. Сила в потенціальному силовому полі завжди перпендикулярна до площини, дотичної до поверхні рівня в даній точці.

Візьмемо поверхню рівня $U = C$ і на ній дві точки M та M_1 (Рис. 9.10). Запишемо елементарну роботу сили \vec{F} на переміщенні $d\vec{s}_1$ між цими точками:

$$dA = F ds_1 \cos \angle (\vec{F}, \overrightarrow{MM_1}).$$

оскільки $C_2 > C$.

Звідси випливає, що $\cos \angle (\vec{F}, \overrightarrow{MM_2}) > 0$, тому сила \vec{F} напрямлена по MM_2 у бік зростання значення силової функції.

Поряд з поверхнями рівня в силовому полі використовують поняття **силової лінії**, тобто лінії, у кожній точці якої сила напрямлена по дотичній до неї (Рис. 9.11).

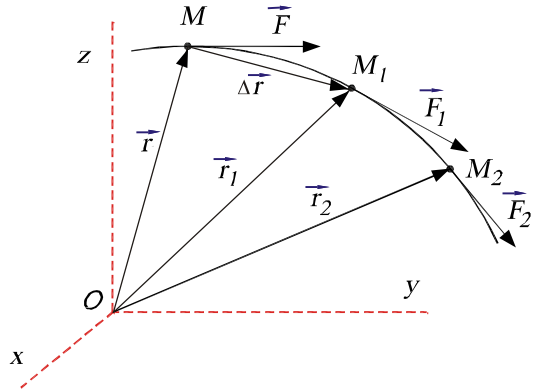


Рисунок 9.11

Оскільки вектор $d\vec{r}$ з проєкціями на осі Ox , Oy , Oz завжди напрямлений по дотичній до кривої, то з умови паралельності $d\vec{r}$ та \vec{F} (тобто $\vec{F}_x \parallel \vec{e}_x \rightarrow dx$; $\vec{F}_y \parallel \vec{e}_y \rightarrow dy$; $\vec{F}_z \parallel \vec{e}_z \rightarrow dz$) витікає, що

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}. \quad (9.34)$$

Ці диференціальні рівняння відносно x , y , z є диференціальними рівняннями силової лінії.

9.7 Потенціальна енергія

Для потенціальних сил вводять поняття потенціальної енергії, як величини, що характеризує "запас роботи", яким володіє матеріальна точка в даній точці силового поля. Щоб порівнювати між собою ці "запаси роботи", необхідно вибрати точку, в якій "запас роботи" дорівнює нулю.

Потенціальною енергією матеріальної точки в положенні M називають скалярну величину Π , яка дорівнює тій роботі, що виконують сили поля при переміщенні точки із положення M у нульове положення:

$$\Pi = A_{(MO)}. \quad (9.35)$$

За визначенням потенціальна енергія Π залежить від координат x, y, z точки M , тобто $\Pi = \Pi(x, y, z)$.

Будемо вважати, що нульові точки для функції $\Pi(x, y, z)$ та $U(x, y, z)$ збігаються.

Тоді $U_0 = 0$ і за формулою $A_{(M_0)} = U_0 - U = -U$, де U – значення силової функції в точці M поля. Звідси

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z). \quad (9.36)$$

Тобто потенціальна енергія в довільній точці силового поля дорівнює значенню силової функції в цій точці, взятій з оберненим знаком.

Звідси видно, що, розглядаючи всі властивості потенціального силового поля, замість силової функції можна користуватися поняттям потенціальної енергії.

Роботу потенціальної сили можна записати так:

$$A_{(M_1 M_2)} = \Pi_0 - \Pi. \quad (9.37)$$

Тобто робота потенціальної сили дорівнює різниці значень потенціальної енергії рухомої точки в початковому та кінцевому її положеннях.

Потенціальну енергію для відомих нам потенціальних сил можна знайти з рівностей (9.30) – (9.32), враховуючи, що $\Pi = -U$:

1. Для сили ваги $\Pi = Gz = mgh$;
2. Для сили пружності $\Pi = \frac{cx^2}{2}$;
3. Для сили тяжіння $\Pi = mgR^2 \frac{1}{r}$.

9.8 Закон збереження механічної енергії

Припустимо, що всі зовнішні та внутрішні сили, які діють на систему, потенціальні. Тоді для кожної точки системи робота прикладених сил дорівнює

$$A_k = \Pi_{k0} - \Pi_k.$$

Тобто, для всіх зовнішніх та внутрішніх сил

$$\sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n \Pi_{k0} - \sum_{k=1}^n \Pi_k = \Pi_0 - \Pi,$$

де $\Pi = \sum_{k=1}^n \Pi_k$ потенціальна енергія всієї системи.

Підставивши отриманий вираз у (9.17), одержимо

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi$$

або
$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = \text{const.} \quad (9.38)$$

Отже, у разі руху під дією потенціальних сил сума кінетичної та потенціальної енергій системи в кожній точці залишається сталою величиною.

У цьому й полягає закон збереження механічної енергії.

Величину $T + \Pi$ називають повною механічною енергією системи.

Якщо серед сил, які діють на систему, будуть непотенціальні сили, наприклад сили тертя, то повна механічна енергія під час руху буде зменшуватись та переходити в інші види енергії, наприклад у теплову.

Контрольні запитання

1. Що називають кінетичною енергією точки та системи?
2. Запишіть вирази для визначення кінетичної енергії при поступальному, обертальному та плоскопаралельному рухах твердого тіла.
3. Як визначити кінетичну енергію у випадку сферичного руху твердого тіла?
4. Сформулюйте теореми про зміну кінетичної енергії вільної та невільної точки.
5. Запишіть вираз теореми про зміну кінетичної енергії системи в диференціальній та інтегральній формах.
6. Які в'язі називають ідеальними?
7. Що називають силовим полем?
8. Сформулюйте властивості стаціонарних силових полів.
9. Що називають потенціальною енергією точки?
10. Як визначити потенціальну енергію для сил ваги, пружності та тяжіння?
11. Сформулюйте закон збереження механічної енергії.

ГЛАВА 10. ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

10.1 Основні задачі динаміки твердого тіла

Систему матеріальних точок, в якій відстань між двома довільними точками залишається сталою під час руху, називають незмінною системою. Якщо точки системи розміщені неперервно, тобто суцільно заповнюють область простору системи, то таку незмінну систему називають абсолютно твердим тілом.

Завдяки незмінності відстаней між окремими частинами, абсолютно тверде тіло є механічною системою, що відрізняється від інших систем особливими властивостями, наприклад, сталістю моментів інерції. Тому динаміку твердого тіла розглядають окремо.

У статистиці ми розглянули умови рівноваги системи сил, що прикладені до абсолютно твердого тіла, та умови, при яких тверде тіло перебуває у стані рівноваги. Рівняння руху твердого тіла, визначення кінематичних характеристик точок твердого тіла розглянуті у кінематиці. Під час вивчення динаміки твердого тіла виникають більш складні задачі, які ділять на дві групи. **До першої групи належать задачі**, в яких за заданим рухом твердого тіла необхідно знайти систему сил, під дією якої відбувається цей рух. **До другої групи належать задачі**, в яких за відомими силами, що діють на тверде тіло, необхідно, враховуючи початкові умови, знайти закон руху тіла, а для невільного тіла ще і реакції в'язей.

10.2 Поступальний рух твердого тіла

Нехай тверде тіло поступально рухається відносно нерухомої інерціальної системи відліку $Oxuz$. Візьмемо ще одну систему координат $Cx_1y_1z_1$, з'єднану з твердим тілом (Рис. 10.1). Система рухається разом з тілом поступально. Початок системи – в центрі мас твердого тіла – в точці C . Координати центра мас тіла будуть функціями часу:

$$x_C = f_1(t); y_C = f_2(t); z_C = f_3(t). \quad (10.1)$$

Звідси випливає, що відносно поступально рухомої системи координат $Cx_1y_1z_1$, тіло перебуває в стані спокою. Отже, кутова швидкість та моменти кількості руху тіла відносно центра мас дорівнюють нулю й згідно з теоремою про зміну кінетичного моменту

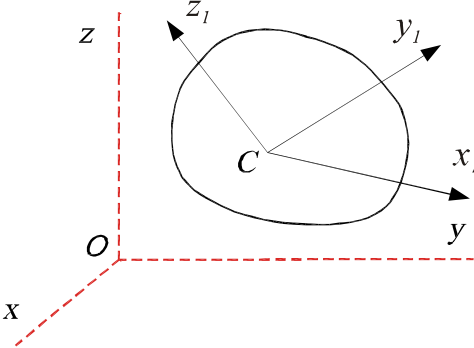


Рисунок 10.1

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_C^e$$

(якщо $\vec{K}_C = 0$ то $\vec{M}_C^e = 0$).

Якщо врахувати, що початкова кутова швидкість тіла для поступального руху дорівнює нулю, тобто $\omega_0 = 0$, то будемо мати необхідні та достатні умови поступального руху твердого тіла. Для поступального руху твердого тіла необхідно та достатньо, щоб головний момент усіх зовнішніх

сил відносно центра мас тіла та початкова кутова швидкість тіла дорівнювали нулю.

Для одержання диференціальних рівнянь поступального руху твердого тіла скористаємося теоремою про рух центра мас

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e, \quad \text{або} \quad M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e, \quad (10.2)$$

де x_C, y_C, z_C – координати центра мас у рухомій системі відліку, M – маса твердого тіла, $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \sum_{k=1}^n F_{kz}^e$ – проекції зовнішніх сил на нерухомі осі координат.

Для розв'язку першої задачі динаміки координати центра мас є відомими функціями часу (10.1). Взявши від них другі похідні по часу ($\ddot{x}_C, \ddot{y}_C, \ddot{z}_C$) та використавши (10.2), одержимо проекції головного вектора зовнішніх сил, його модуль та напрямні косинуси:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad R_y^e = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad R_z^e = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e; \\ R^e = \sqrt{(R_x^e)^2 + (R_y^e)^2 + (R_z^e)^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x^e}{R}, \cos \beta = \frac{R_y^e}{R}, \cos \gamma = \frac{R_z^e}{R}.$$

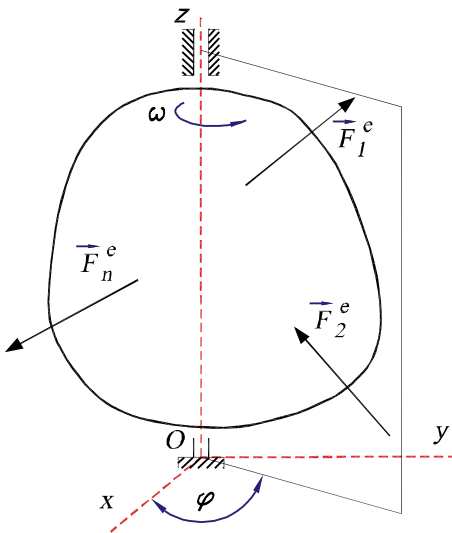
Для розв'язку другої задачі динаміки відомі R_x^e , R_y^e , R_z^e , а співвідношення (10.2) є диференціальними рівняння руху. Їх розв'язок при початкових умовах визначить рух центра мас (10.1)

$$x_C = f_1(t, C_1, C_2); y_C = f_2(t, C_3, C_4); z_C = f_3(t, C_5, C_6),$$

де C_1, C_2, \dots, C_6 – невідомі сталі інтегрування, які визначають з початкових умов: при $t = 0$

$$\begin{aligned} x_C &= x_{C_0}, & \dot{x}_C &= \dot{x}_{C_0}, & y_C &= y_{C_0}, \\ \dot{y}_C &= \dot{y}_{C_0}, & z_C &= z_{C_0}, & \dot{z}_C &= \dot{z}_{C_0}. \end{aligned}$$

10.3 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі



Для твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі (Рис. 10.2) під дією системи зовнішніх сил: $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \dots, \vec{F}_n^e$, запишемо теорему про зміну кінетичного моменту відносно осі Oz

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e). \quad (10.3)$$

Кінетичний момент тіла, що обертається навколо нерухомої осі,

$$K_z = I_z \omega = I_z \frac{d\phi}{dt}.$$

Рисунок 10.2

Підставивши значення K_z в (10.3), одержимо диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла

$$I_z \frac{d^2\phi}{dt^2} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e). \quad (10.4)$$

З (24.4) видно, що добуток моменту інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення дорівнює обертельному моменту

$$I_Z \varepsilon = M_Z^e, \quad (10.5)$$

де $\varepsilon = \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$ – кутове прискорення твердого тіла; $M_Z^e = \sum_{k=1}^n M_Z(\vec{F}_k^e)$ – обертальний момент зовнішніх сил.

Рівність (10.5) показує, що за постійного обертового моменту M_Z^e , чим більший момент інерції тіла, тим меншим є кутове прискорення й навпаки. Отже, момент інерції тіла для обертового руху відіграє таку ж роль, як маса тіла для поступального руху.

Рівняння (10.4) дає змогу: 1) знаючи обертальний момент, знайти $\phi = f(t)$ – закон обертового руху твердого тіла навколо нерухомої осі; 2) знаючи закон обертового руху, тобто $\phi = f(t)$, знайти обертальний момент M_Z^e .

Під час розв'язку другої задачі необхідно пам'ятати, що в загальному випадку M_Z^e залежить від t , ϕ та $\dot{\phi} = \omega$. Для вивчення обертового руху твердого тіла навколо нерухомої осі можна використовувати теорему про зміну кінетичної енергії тіла.

Відзначимо такі окремі випадки:

1. Якщо $M_Z^e = \sum_{k=1}^n M_Z(\vec{F}_k^e) = 0$, то $\frac{d^2\phi}{dt^2} = 0$, $\frac{d\phi}{dt} = \omega = const$, $\phi = \phi_0 + \omega t$, тобто тіло обертається рівномірно зі сталою кутовою швидкістю.

2. Якщо $M_Z^e = const$, то і $\varepsilon = const$, тобто обертальний рух рівнозмінний.

10.4 Фізичний та математичний маятники

Фізичним маятником називають тверде тіло, яке має можливість здійснювати коливний рух навколо нерухомої осі під дією сили ваги.

Проведемо через центр ваги C тіла площину, перпендикулярну до осі обертання. Точку перетину цієї площини з віссю обертання називають точкою підвісу. Виберемо початок координат у точці підвісу (у точці O) (Рис. 10.3).

Вісь Oz сумістимо з віссю обертання, осі Ox та Oy розмістимо в площині, що проходить через центр ваги тіла та точку підвісу. Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо осі Oz має такий вигляд:

$$I_z \ddot{\phi} = M_z^e,$$

де ϕ – кут між нерухомою віссю Ox_1 та лінією OC .

У цьому випадку $M_z^e = -Ga \sin \phi = -Mga \sin \phi$. Тоді диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла запишемо так:

$$I_z \cdot \ddot{\phi} = -Mga \sin \phi$$

$$\text{або} \quad \ddot{\phi} + \frac{Mga}{I_z} \sin \phi = 0.$$

Розглянемо випадок малих коливань, для яких можна вважати, що $\sin \phi \approx \phi$. Тоді записане рівняння набуде вигляду:

$$\ddot{\phi} + \frac{Mga}{I_z} \phi = 0$$

$$\text{або} \quad \ddot{\phi} + k^2 \phi = 0, \quad (10.6)$$

де $k^2 = \frac{Mga}{I_z}$. Це диференціальне рівняння вільних прямолінійних коливань точки і його загальний розв'язок

$$\phi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Якщо при $t = 0$ маятник відхилений від положення рівноваги на малий кут $\phi = \phi_0$ і відпущений без початкової кутової швидкості ($\omega_0 = \dot{\phi}_0 = 0$), то сталі інтегрування дорівнюють: $C_1 = \phi_0, C_2 = 0$. **Закон малих коливань маятника** при таких початкових умовах

$$\phi = \phi_0 \cos(kt).$$

Отже, **малі коливання фізичного маятника є гармонійними коливаннями**. Період малих гармонійних коливань фізичного маятника визначають за формулою:

$$T_\phi = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Mga}}. \quad (10.7)$$

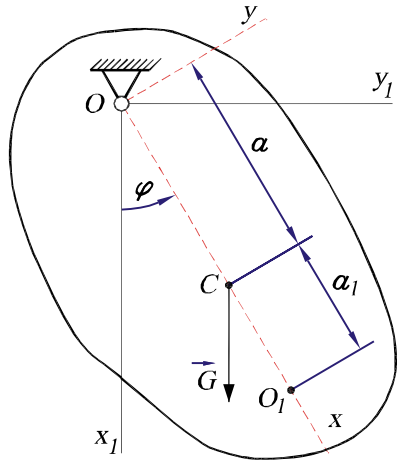


Рисунок 10.3

Як бачимо, період коливань фізичного маятника не залежить від початкового кута ϕ_0 . Цей результат наближений, оскільки було прийнято, що $\sin \phi \approx \phi$. Якщо проінтегрувати диференціальне рівняння руху без наближень, то період T_ϕ буде залежати від ϕ_0 і в першому наближенні залежність для періоду малих коливань можна записати так

$$T_\phi = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Mga}} \left(1 + \frac{\phi_0^2}{16} + \dots\right).$$

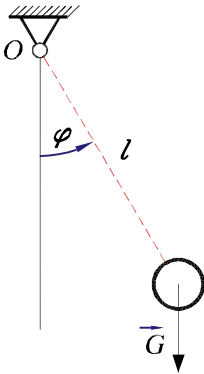


Рисунок 10.4

Математичним маятником називають вантаж малих розмірів, підвішений на нерозтяжній нитці довжиною ℓ , який має можливість здійснювати коливальний рух навколо нерухомої точки підвісу під дією сили ваги.

Для математичного маятника

$$I_z = m\ell^2 = \frac{G}{g}\ell^2, \quad a = OC = \ell \quad (\text{Рис. 10.4}).$$

Підставивши цю залежність у (24.6), отримаємо диференціальне рівняння руху математичного маятника:

$$\ddot{\phi} + \frac{mga}{I_z}\phi = 0,$$

або

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\phi = 0. \quad (10.8)$$

Ураховуючи, що $k = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, для періоду малих коливань математичного маятника отримаємо:

$$T_m = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (10.9)$$

З порівняння формул (24.7) та (24.9) видно, що для

$$\ell_1 = \frac{I_z g}{Ga} = \frac{I_z}{ma} \quad (10.10)$$

період коливань математичного маятника дорівнює періоду коливань фізичного маятника. Довжину ℓ_1 такого математичного мая-

тника, період коливань якого дорівнює періоду коливань фізичного маятника, називають зведеною довжиною фізичного маятника.

Точку O_1 , що розміщена від осі підвісу на відстані $OO_1 = \ell_1 = a + a_1$, називають центром гойдання фізичного маятника. За теоремою Гюйгенса $I_z = I_C + Ma^2$. Тоді формула (10.10) набуде вигляду:

$$\ell_1 = \frac{I_z}{Ma} = \frac{I_C}{Ma} + \frac{Ma^2}{Ma} = \frac{I_C}{Ma} + a = a_1 + a, \quad (a_1 = \frac{I_C}{Ma}).$$

Звідси виходить, що відстань OO_1 завжди більша від $OC = a$, тобто, центр гойдання фізичного маятника завжди розміщений нижче від його центра мас.

Якщо поміняти місцями точку підвісу та центр гойдання фізичного маятника, то зведену довжину ℓ_2 запишемо так:

$$\ell_2 = O_1C + \frac{I_C}{M \cdot O_1C} = \frac{I_C}{Ma} + a = \ell_1 = a_1 + \frac{I_C}{Ma_1} = a_1 + a,$$

де $a = \frac{I_C}{Ma_1}$.

Отже, точки O та O_1 взаємозамінні. Якщо точка O – точка підвісу фізичного маятника, точка O_1 – центр його гойдання; то зробивши точку O_1 точкою підвісу, отримаємо центр гойдання фізичного маятника в точці O . При цьому період коливань фізичного маятника залишається без зміни. Цю властивість фізичного маятника використовують у зворотному маятнику Картера для визначення прискорення сили тяжіння у різних точках земної поверхні.

10.5 Експериментальне визначення моментів інерції

Розглянемо один із способів експериментального визначення моментів інерції неоднорідних твердих тіл або тіл складної конфігурації – спосіб крутильних коливань. Тіло, для якого необхідно визначити момент інерції, підвішують на пружний стержень або струну так, щоб центр мас тіла був розміщений на продовженні осі стержня (Рис. 10.5). Закрутивши стержень, жорстко зв'язаний з тілом, на малий кут, вимірюють період малих коливань системи.

Для малого кута закручування пружний момент пропорційний куту закручування. Диференціальне рівняння крутильних коливань системи матиме вигляд:

$$I_C \cdot \ddot{\phi} = -k\phi,$$

де k – коефіцієнт, що характеризує пружні властивості стержня (струни).

Період коливань системи дорівнює

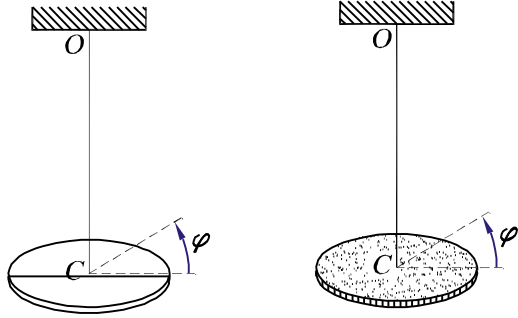


Рисунок 10.5

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_C}{k}}. \quad (10.11)$$

Після цього на той самий стержень (струну) підвішують тіло, момент інерції якого відомий і дорівнює I_C^* та виміряють період коливань

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{I_C^*}{k}}. \quad (10.12)$$

Виключивши з рівностей (10.11) та (10.12) невідомий коефіцієнт k , одержимо формулу для визначення моменту інерції тіла

$$I_C = I_C^* \left(\frac{T}{T^*}\right)^2.$$

10.6 Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоскопаралельний рух твердого тіла можна розглядати як рух центра мас тіла та рух тіла відносно центра мас. Під час такого руху центр мас тіла рухається паралельно до нерухомої площини, а рух відносно центра мас є обертальним рухом твердого тіла відносно осі, що проходить через центр мас перпендикулярно до нерухомої площини.

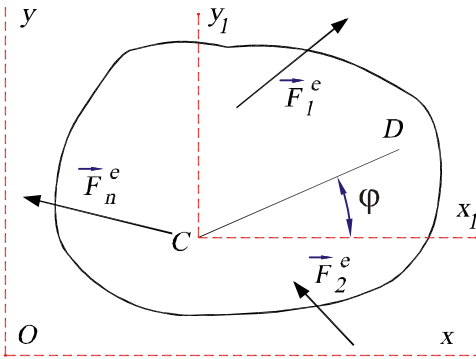


Рисунок 10.6

На рис. 10.6 зображено переріз тіла площиною, паралельною до площини руху. Центр мас тіла розміщений у площині перерізу.

У цій самій площині на тіло діє система зовнішніх сил $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \dots, \vec{F}_n^e$. Тоді рівняння руху точки C запишемо відповідно до теореми про рух центра мас системи

$$M \cdot \vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e. \quad (10.13)$$

Закон обертального руху навколо центра C визначається рівнянням (10.5), оскільки теорема, за якою одержано це рівняння, справедлива й для руху системи навколо центра мас. Проектуючи обидві частини рівності (10.13) на координатні осі, дістанемо:

$$M a_{Cx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; M a_{Cy} = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e; I_C \varepsilon = \sum_{k=1}^n m_C (\vec{F}_k^e); \quad (10.14)$$

Або

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e; I_C \ddot{\phi} = \sum_{k=1}^n m_C (\vec{F}_k^e). \quad (10.15)$$

Залежності (10.15) є диференціальними рівняння плоского (плоскопаралельного) руху твердого тіла. Якщо рух твердого тіла задано, тобто відомо $x_C = f_1(t)$, $y_C = f_2(t)$, $\phi = f_3(t)$, то після подвійного диференціювання цих функцій та подальшої підстановки в (10.15), знайдемо сили, під дією яких проходить рух тіла.

Якщо відомі $F_{kx}^e, F_{ky}^e, M_C^e$, то рівняння (10.15) будуть утворювати систему трьох диференціальних рівнянь плоского руху тіла. Після розв'язку цих рівнянь і визначення сталих інтегрування, одержимо закон плоского руху твердого тіла

$$x_C = f_1(t), y_C = f_2(t), \phi = f_3(t).$$

Якщо тіло здійснює невільний рух, то до заданих сил необхідно додати реакції в'язей. Тоді диференціальні рівняння плоского руху набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= \sum_{k=1}^n F_{kx}^e + R_x; \\ M\ddot{y}_C &= \sum_{k=1}^n F_{ky}^e + R_y; \\ I_C\ddot{\phi} &= M_C^e + M_C^R. \end{aligned} \quad (10.16)$$

де R_x, R_y – суми проекцій усіх реакцій на осі Sx, Sy ; M_C^R – сума моментів всіх реакцій відносно центра мас.

Для розв'язку другої задачі динаміки до рівнянь (10.16) необхідно додати рівняння в'язей. Зауважимо, що деколи замість одного з диференціальних рівнянь (10.16) доцільно застосувати теорему про зміну кінетичної енергії.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачі динаміки твердого тіла.
2. Запишіть диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла.
3. Запишіть диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла.
4. Що називають фізичним та математичним маятниками ?
5. Як визначити період малих коливань фізичного та математичного маятників?
6. Як експериментально визначити моменти інерції неоднорідних твердих тіл або тіл складної конфігурації ?
7. Запишіть диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла.

ГЛАВА 11. ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА

11.1 Метод кінетостатики для точки

Усі методи розв'язування задач динаміки, що ми досі розглядали, ґрунтуються на рівняннях, що випливають з законів Ньютона безпосередньо або ж з загальних теорем, які є наслідком цих законів. Однак цей шлях не єдиний. Виявляється, що рівняння руху або умови рівноваги механічної системи можна отримати, поклавши в основу замість законів Ньютона інші загальні положення, які називають **принципами механіки**. У багатьох випадках застосування цих принципів дозволяє знайти більш ефективні методи розв'язання відповідних задач. У цій главі буде розглянуто один з загальних принципів механіки, який називають принципом Д'Аламбера. Особливо зручний цей принцип (метод кінетостатики), якщо потрібно визначити реакції в'язей, коли відомий закон руху точки та активні сили.

Розглянемо цей принцип. Для цього запишемо рівняння

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R},$$

що виражає основний закон динаміки для невільної точки у вигляді:

$$\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a}) = 0, \quad (11.1)$$

де \vec{F} – рівнодійна всіх активних сил, \vec{R} – рівнодійна всіх реакцій в'язей.

Увівши позначення

$$\vec{F}^{\text{ін}} = -m\vec{a}, \quad (11.2)$$

дістанемо
$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}^{\text{ін}} = 0. \quad (11.3)$$

Силу $\vec{F}^{\text{ін}}$, вектор якої дорівнює за модулем добутку маси точки на її прискорення та напрямлений протилежно до вектора прискорення, називають силою інерції (або даламберовою силою інерції).

Залежність (11.3) еквівалентна другому закону Ньютона та виражає принцип Д'Аламбера для однієї матеріальної точки: **якщо в будь-який момент часу до рівнодійної \vec{F} усіх активних сил і рівнодійної \vec{R} усіх реакцій в'язей, які діють на точку, додати силу інерції $\vec{F}^{\text{ін}}$ точки, то отримана система сил буде зрівноваженою.**

Застосовуючи принцип Д'Аламбера, слід пам'ятати, що до матеріальної точки прикладені тільки сили \vec{F} і \vec{R} , тобто активна сила та реакція. Сила ж інерції $\vec{F}^{\text{ін}}$ до точки не прикладена. Тому рівняння (11.3) не можна розглядати як умову рівноваги (спокою) точки. Метод кінестатики є лише формальним прийомом зведення рівняння динаміки до рівняння статички, однак під час розв'язання практичних задач такий прийом має ряд переваг.

11.2 Явище невагомості

Розглянемо явище, яке за існуючою традицією, хоч і не цілком точно, називають невагомістю. Припустимо, що платформа A рухається

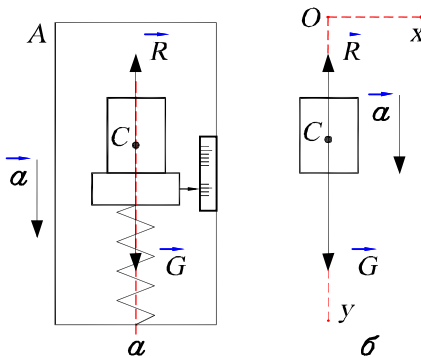


Рисунок 11.1

вертикально вниз із заданим прискоренням \vec{a} (Рис. 11.1).

На платформі встановлена пружинна вага, на якій лежить вантаж C . Стрілка ваги фіксує силу, з якою вантаж тисне на вагу. Коли платформа перебуває в спокої (або рухається рівномірно), стрілка ваги показує на шкалі дійсну вагу вантажу C .

З'ясуємо, який тиск чинить вантаж на вагу, якщо платформа A рухається вниз з прискоренням \vec{a} . На вантаж C діють дві сили: сила ваги $\vec{G} = m\vec{g}$ і реакція \vec{R} з боку пружинної ваги. Рівняння руху вантажу має вигляд

$$m\vec{a} = \vec{R} + m\vec{g} \quad (11.4)$$

або, в проекції на вісь Oy ,

$$ma = -R + mg.$$

Отже, величина реакції ваги

$$R = m(g - a). \quad (11.5)$$

Таку ж величину має спрямований униз тиск \vec{R}' , який тіло чинить на вагу. Деформація пружини під дією сили \vec{R}' виявиться меншою, ніж у стані рівноваги. Стрілка ваги вкаже нову "вагу" вантажу, яка дорівнює $mg - ma$. Її відношення до дійсної ваги складає

$$n = \frac{mg - ma}{mg} = 1 - \frac{a}{g}. \quad (11.6)$$

де n – коефіцієнт перевантаження.

Звичайно, сила тяжіння тіла до Землі не змінилася, бо гравітаційне поле Землі не залежить від того, чи рухається вантаж, чи перебуває в спокої. Змінилися лише сили взаємодії між вантажем і пружинною вагою. Якщо збільшити прискорення \vec{a} , то реакція, як це видно з (11.5), зменшиться. Нарешті, коли $a = g$, реакція буде дорівнювати нулю і стрілка пружинної ваги зупиниться на нульовій поділці шкали. Взаємодія між вантажем і пружинною вагою зникає. Говорять, що наступила "невагомість".

Якщо прискорення a перевищить значення g , то вантаж відірветься від пружинної ваги та буде вільно падати. Платформа, що опускається з більшим прискоренням, буде віддалятися від вантажу, що падає. Якщо ж вантаж прикріплений до пружинної ваги, то платформа буде тягнути його вниз, причому перевантаження стане від'ємним і сила дії вантажу на пружинну вагу виявиться спрямованою вгору.

Повернемося до стану видимої невагомості, коли перевантаження дорівнює нулю. Цей стан призводить до незвичних відчуттів у людини, яка перебуває в ліфті, у космічному кораблі або в літаку. Людина насправді перестає відчувати вагу свого тіла. **У звичайних умовах між окремими частинами людського тіла існують сили взаємодії, зумовлені масовими силами (силами ваги) і поверхневими силами (реакцією підлоги).** Ці сили, прикладені до складної системи матеріальних точок – людського тіла, викликають появу численних внутрішніх сил. Саме поява цих внутрішніх сил (натяг м'язів, реакції суглобів, тиск на нервові кінцівки вестибулярного апарату тощо) викликає у людини відчуття вагомості.

У стані невагомості зникають внутрішні сили взаємодії між окремими частинами тіла, зникає і відчуття вагомості. У цих умовах втрачають зміст звичні поняття "вгори" і "вниз". Відштовхнувшись від опори, людина набуває додаткової швидкості та рухається до тих пір, поки не наштовхнеться на перепону.

11.3 Метод кінетостатики для системи

Так само, як і для однієї матеріальної точки, диференціальним рівнянням руху матеріальної системи можна придати форму рівнянь статки. Цей метод часто застосовують у розрахунках, особливо для визначення динамічних реакцій опор твердого тіла.

З системи матеріальних точок розглянемо одну з масою m_k . Під дією прикладених до неї зовнішніх і внутрішніх сил \vec{F}_k^e і \vec{F}_k^i (до яких входять і активні сили, і реакції в'язей) точка отримує відносно інерціальної системи відліку певне прискорення \vec{a}_k . Тоді, враховуючи позначення (11.2), основному рівнянню динаміки, написаному для точки системи, можна надати вигляд рівняння статки

$$\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^{iH} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (11.7)$$

На підставі (11.7) сформулюємо принцип Д'Аламбера для системи: **якщо в будь-який момент часу до кожної з точок системи, окрім внутрішніх і зовнішніх сил, які діють на точки системи, прикласти відповідні сили інерції, то отримана система сил буде перебувати в рівновазі і до неї можна застосувати всі рівняння статки.**

Додаючи почленно всі рівняння (11.7), отримаємо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{iH} = 0. \quad (11.8)$$

У виразі (11.8) перша сума $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e$ дорівнює головному вектору \vec{R}^e всіх зовнішніх сил (у тому числі й реакцій в'язей), які прикладені до системи, друга сума за властивостями внутрішніх сил дорівнює нулю $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0$, остання сума $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{iH}$ дорівнює головному вектору \vec{R}^{iH} сил інерції. Таким чином

$$\vec{R}^e + \vec{R}^{in} = 0, \quad (11.9)$$

тобто в кожний момент часу сума головних векторів зовнішніх сил і сил інерції рухомої матеріальної системи дорівнює нулю.

Виберемо довільний полюс O і проведемо з нього до точки M_k радіус-вектор \vec{r}_k (Рис. 11.2). Якщо визначити векторні добутки кожного з рівнянь (11.7) на відповідний радіус-вектор \vec{r}_k і додати всі добутки, дістанемо

$$\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^i) + \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{in}) = 0.$$

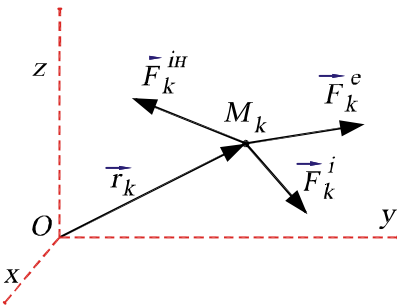


Рисунок 11.2

Перша сума дорівнює головному моменту \vec{M}_O^e всіх зовнішніх сил, прикладених до системи, друга сума – головному моменту всіх внутрішніх сил і дорівнює нулю за властивостями внутрішніх сил, остання сума дорівнює головному моменту \vec{M}_O^{in} сил інерції, при цьому всі моменти слід обчислювати відносно вибраного полюса O

Тоді
$$\vec{M}_O^e + \vec{M}_O^{in} = 0, \quad (11.10)$$

тобто в кожний момент часу сума головних моментів зовнішніх сил (активних сил і реакцій в'язей) та сил інерції рухомої матеріальної системи дорівнює нулю.

Якщо в рівняннях (11.9) і (11.10) зовнішні сили представити як суму активних сил і реакцій в'язей, тобто

$$\vec{F}_k^e = \vec{F}_k^a + \vec{F}_k^r, \quad (11.11)$$

то рівняння (11.9) і (11.10) набудуть вигляду:

$$\vec{R}^a + \vec{R}^r + \vec{R}^{in} = 0, \quad (11.12)$$

$$\vec{M}_O^a + \vec{M}_O^r + \vec{M}_O^{in} = 0, \quad (11.12')$$

де \vec{R}^r і \vec{M}_O^r – відповідно головний вектор реакцій в'язей і головний момент цих реакцій відносно центра O .

Двом векторним рівнянням (11.12) відповідають шість рівнянь метода кінетостатики в проекціях на осі декартових координат:

$$\begin{aligned} R_x^a + R_x^r + R_x^{\text{ін}} &= 0, & M_x^a + M_x^r + M_x^{\text{ін}} &= 0 \\ R_y^a + R_y^r + R_y^{\text{ін}} &= 0, & M_y^a + M_y^r + M_y^{\text{ін}} &= 0, \\ R_z^a + R_z^r + R_z^{\text{ін}} &= 0, & M_z^a + M_z^r + M_z^{\text{ін}} &= 0. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Рух твердого тіла цілком визначається цими шістьма рівняннями кінетостатики, так само як рівновага твердого тіла цілком визначається відповідними шістьма рівняннями. Якщо систему утворюють декілька тіл, то можна скласти відповідні рівняння кінетостатики для кожного тіла зокрема.

З усього сказаного слідує, що застосування методу кінетостатики для твердого тіла вимагає передусім уміння обчислити головний вектор і головний момент його сил інерції. Знаючи їхні проекції на вибрані осі координат, потрібно скласти рівняння кінетостатики, з яких визначити невідомі величини.

11.4 Головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла

Покажемо, що рівняння (11.12) є математичним записом теореми про зміну кількості руху і теореми про зміну кінетичного моменту матеріальної системи відповідно.

Дійсно, головний вектор усіх сил інерції дорівнює

$$\vec{R}^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ін}} = -\sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k,$$

бо $\vec{a}_k = \dot{\vec{v}}_k$. Але сума $\sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = M \vec{v}_C$ є кількістю руху матеріальної системи. Отже,

$$\vec{R}^{\text{ін}} = -\frac{d\vec{Q}}{dt} = -M \vec{a}_C, \quad (11.14)$$

тобто головний вектор усіх сил інерції точок матеріальної системи дорівнює похідній за часом від кількості руху матеріальної системи, помноженій на -1 .

Якщо в (11.14) прискорення \vec{a}_C розкласти на дотичне та нормальне, то $\vec{R}^{\text{ін}}$ розділимо на складові

$$\vec{R}_\tau^{\text{ін}} = -M\vec{a}_C^\tau; \quad \vec{R}_n^{\text{ін}} = -M\vec{a}_C^n. \quad (11.15)$$

Головний момент усіх сил інерції дорівнює

$$\vec{M}_O^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\text{ін}}) = -\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k) = -\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}).$$

Ураховуючи, що

$$\vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) - \frac{d\vec{r}_k}{dt} \times m_k \vec{v}_k = \frac{d}{dt} (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k),$$

бо $\frac{d\vec{r}_k}{dt} \times m_k \vec{v}_k = 0$ (вектори $\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{v}_k$ та $m_k \vec{v}_k$ паралельні), одержимо

$$\vec{M}_O^{\text{ін}} = -\frac{d\vec{K}_O}{dt} = -I_O \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (11.16)$$

де $\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k)$ – кінетичний момент матеріальної системи.

Отже, головний момент усіх сил інерції дорівнює похідній за часом від кінетичного моменту матеріальної системи, помноженій на -1 .

Підставляючи вирази (11.14) та (11.16) у рівняння (11.12), отримаємо відповідно теореми про зміну кількості руху та кінетичного моменту матеріальної системи.

Головний вектор і головний момент сил інерції знайдемо для деяких окремих випадків руху твердого тіла.

1. Поступальний рух.

У цьому випадку тіло ніякого обертання навколо центра O не має. Звідси робимо висновок, що $\vec{M}_O^e = 0$, і з рівняння (11.10) маємо $\vec{M}_O^{\text{ін}} = 0$. Отже, під час поступального руху сили інерції твердого тіла зводять до однієї рівнодійної, що дорівнює $\vec{R}^{\text{ін}} = -M \vec{\varepsilon} \vec{a}_C$ і проходить через центр мас тіла.

2. Плоскопаралельний рух.

Нехай тіло має площину симетрії та рухається паралельно до неї. Унаслідок симетрії головний вектор і результуюча пара сил інерції, як і центр мас тіла точка C , лежать у площині симетрії. Тоді, помістивши центр зведення сил інерції в точку C , отримаємо з рівності (11.10)

$$M_C^{\text{ін}} = -\sum_{k=1}^n m_C(\vec{F}_k^e).$$

З іншого боку, з диференціального рівняння обертального руху маємо рівність $\sum_{k=1}^n m_C(\vec{F}_k^e) = I_C \varepsilon$. Звідси робимо висновок, що

$$M_C^{\text{ін}} = -I_C \varepsilon. \quad (11.17)$$

Таким чином, у разі плоскопаралельного руху **систему сил інерції зводять до сили, яка дорівнює $\vec{R}^{\text{ін}}$ (див.(11.14)) і прикладена в центрі мас C тіла, та до пари сил, яка лежить у площині симетрії тіла і момент якої визначають за формулою (11.17).**

Знак мінус в формулі (11.17) показує, що напрям моменту протилежний до напряму кутового прискорення тіла.

3. Обертання навколо осі.

Нехай тіло має площину симетрії, а вісь обертання Cz перпендикулярна до цієї площини і проходить через центр мас тіла.

Тоді даний випадок буде окремим випадком попереднього. Але при цьому $\vec{a}_C = 0$, отже, і $\vec{R}^{\text{ін}} = 0$.

Отже, в такому разі **систему сил інерції зводять до однієї пари сил, яка лежить в площині, перпендикулярній до осі обертання тіла, і момент якої дорівнює**

$$M_Z^{\text{ін}} = -I_Z \varepsilon.$$

При розв'язанні задач за формулами (11.14) і (11.17) обчислюють модулі відповідних величин, а їх напрямки вказують на рисунку до задачі.

Задача 11.1. Однорідний стержень AB з довжиною ℓ і вагою \vec{G} прикріплений шарніром A до вертикального вала, що обертається з кутовою швидкістю ω (Рис. 11.3).

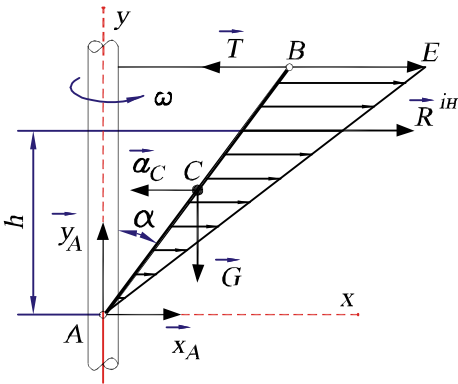


Рисунок 11.3

Знайти натяг \vec{T} горизонтальної нитки, яка утримує стержень під кутом α до вала.

Розв'язок

Користуючись принципом Д'Аламбера, приєднуємо до зовнішніх сил \vec{G} , \vec{T} , \vec{X}_A , \vec{Y}_A , які діють на стержень, сили інерції.

Для кожного елемента стержня з масою Δm відцентрова сила інерції дорівнює $\Delta m \omega^2 x$, де x – відстань елемента від осі обертання Ay .

Рівнодійна \vec{R}^{in} цих розподілених за лінійним законом паралельних сил проходить через центр ваги трикутника ABE , тобто на відстані $h = \frac{2}{3} \ell \cos \alpha$ від осі Ax .

Оскільки ця рівнодійна дорівнює головному вектору сил інерції³, то з формули (11.14) одержимо

$$R^{in} = Ma_C = M\omega^2 x_C = \frac{G}{g} \omega^2 \frac{\ell}{2} \sin \alpha.$$

З рівняння статки $\sum_{k=1}^n m_A(\vec{F}_k) = 0$, отримаємо

$$T \ell \cos \alpha - R^{in} h - G \frac{\ell}{2} \sin \alpha = 0.$$

Підставивши сюди значення \vec{R}^{in} і h , знайдемо остаточно

$$T = G \left(\frac{\ell \omega^2}{3g} \sin \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

Друге рішення.

Цю задачу можна розв'язати обчислюючи суму моментів сил інерції відносно центра A безпосереднім інтегруванням.

³ Із статки відомо, що для будь-якої системи сил рівнодійна (якщо вона існує) дорівнює головному вектору цих сил.

Отже, рівнодійна сил інерції, коли вона існує, дорівнює \vec{R}^{in} , але при поступальному русі ця рівнодійна може не проходити через центр мас тіла, що і має місце у даному випадку.

Проведемо вздовж стержня AB вісь $A\xi$. На кожний елемент стержня $d\xi$, з координатою ξ діє сила інерції, яка дорівнює $\omega^2 x dm$. Її момент відносно центра A дорівнює $y\omega^2 x dm$.

Тоді рівняння моментів буде становити

$$\sum m_A(F_K) \equiv Tl \cos \alpha - G \frac{\ell}{2} \sin \alpha - \int_0^\ell \omega^2 y x dm = 0. \quad (a)$$

Записуючи всі величини, які стоять під знаком інтеграла, через ε , отримаємо:

$$x = \xi \sin \alpha, y = \xi \cos \alpha, dm = \frac{M}{\ell} d\xi.$$

В результаті будемо мати:

$$\int_0^\ell \omega^2 y x dm = \frac{M}{\ell} \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \int_0^\ell \xi^2 d\xi = \frac{1}{3} \frac{G}{g} \ell^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Підставляючи це значення у рівність (a), знаходимо для T той самий вираз, що і у попередньому розв'язку.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для однієї матеріальної точки.
2. Охарактеризуйте явище невагомості.
3. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для системи матеріальних точок та запишіть відповідні рівняння статки.
4. Як визначити сили інерції при поступальному, обертальному та плоскопаралельному рухах твердого тіла?
5. Що називають даламберовою силою інерції?

ГЛАВА 12. ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРІЯ ГІРОСКОПА

12.1 Основне припущення елементарної теорії гіроскопа

Гіроскопом називають симетричне однорідне тіло, яке здійснює рух навколо нерухомої точки O , розташованої на осі симетрії Oz (Рис. 12.1, 12.2). Вісь симетрії гіроскопа Oz є головною центральною віссю інерції. Оскільки гіроскопи є тілами обертання навколо осі Oz , то дві інші осі координат у площині, перпендикулярній до цієї осі, є головними осями інерції й мають однакові моменти інерції $I_x = I_y$.

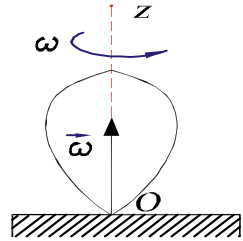


Рисунок 12.1

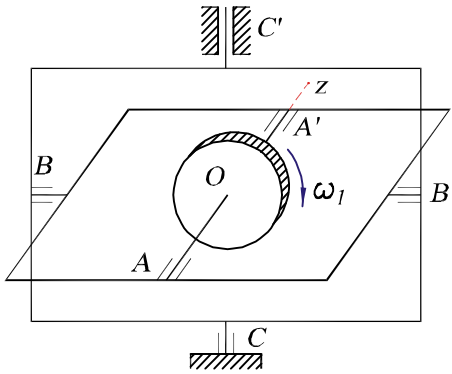


Рисунок 12.2

Прикладами гіроскопа є дзига, що має нерухому точку O (Рис. 12.1), та гіроскоп з кардановим кріпленням (Рис. 12.2).

В останньому випадку ротор обертається навколо своєї осі симетрії Oz , яка вставлена в підшипники A і A' внутрішньої рамки, що може обертатися навколо осі BB' , розміщеної в підшипниках на зовнішній рамці. Зовнішня рамка може обертатися навколо нерухомої осі CC' .

Нерухому точку O гіроскопа називають точкою кріплення гіроскопа.

Наведені приклади гіроскопів є гіроскопами з трьома степенями вільності, тому що можуть здійснювати вільне обертання навколо трьох осей. Особливі властивості гіроскопів забезпечують їх широке застосування в техніці. Так, на морських судах установлені гіроскопічні компаси, що набагато надійніші за магнітні компаси; гіроскопи застосовують для визначення на рухомому об'єкті (літак, корабель, ракета) вертикалі місця, необхідної для обчислення координат об'єкта; з

допомогою гіроскопів стабілізують гарматні платформи на кораблях та вагони однорейкової залізниці; створюють автопілоти для літаків, здійснюють автоматичне керування польотом ракет тощо.

Нехай гіроскоп обертається навколо своєї осі симетрії Oz з великою кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$, а ця вісь у свою чергу обертається з порівняно невеликою кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$ (Рис. 12.3).

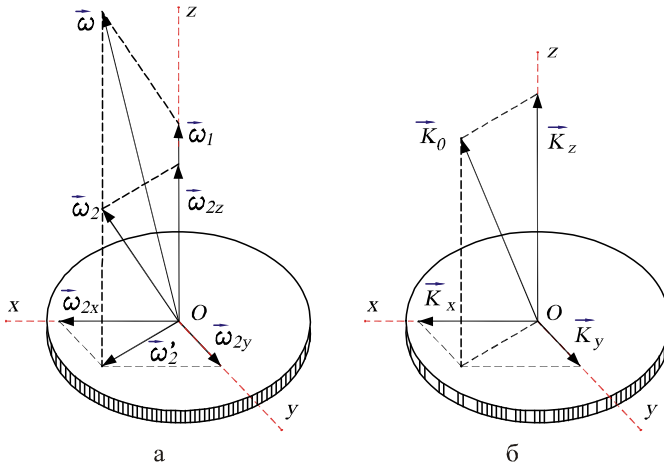


Рисунок 12.3

Виходячи з теорії додавання обертань навколо осей, що перетинаються, абсолютна кутова швидкість $\vec{\omega}$ дорівнює

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (12.1)$$

Швидкість будь-якої точки гіроскопа та її проекції на осі координат визначають за залежностями

$$\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{\ell}_k, \quad (12.2)$$

$$\begin{cases} v_{kx} = \omega_y z_k - \omega_z y_k \\ v_{ky} = \omega_z x_k - \omega_x z_k, \\ v_{kz} = \omega_x y_k - \omega_y x_k \end{cases} \quad (12.3)$$

а кінетичний момент відносно центра та відносно осей координат обчислюють за формулами

$$\begin{cases} \vec{K}_O = \sum_{k=1}^n m_k (\vec{\ell}_k \times \vec{v}_k), & K_x = \sum_{k=1}^n m_k (\vec{\ell}_k \times \vec{v}_k)_x, \\ K_y = \sum_{k=1}^n m_k (\vec{\ell}_k \times \vec{v}_k)_y, & K_z = \sum_{k=1}^n m_k (\vec{\ell}_k \times \vec{v}_k)_z. \end{cases} \quad (12.4)$$

Після підстановок з урахуванням, що осі координат є головними осями інерції ($I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$), отримаємо (Рис. 12.3, б):

$$K_x = I_x \omega_x, \quad K_y = I_y \omega_y, \quad K_z = I_z (\omega_1 + \omega_{2z}). \quad (12.5)$$

Основне припущення елементарної теорії гіроскопа.

Оскільки для гіроскопів $I_x = I_y \approx 0,6I_z$, а $\omega_1 \geq 3000 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, то величинами $\omega_{2x}, \omega_{2y}, \omega_{2z}$ порівняно з величиною ω_1 можна знехтувати та без значної похибки вважати, що вектор кінетичного моменту \vec{K}_O збігається з віссю обертання ротора гіроскопа OZ , тобто

$$K_O = I_z \omega_1 \quad \text{і} \quad \vec{K}_O = I_z \vec{\omega}_1 = I_z \omega_1 \vec{k}, \quad (12.6)$$

де \vec{k} – одиничний орт осі OZ .

Теорію руху гіроскопа, побудовану на наведеному припущенні, називають елементарною теорією гіроскопа. Для подальшого вивчення руху гіроскопа будемо користуватися **теоремою Резаля**, яка по суті є кінематичною інтерпретацією теореми про зміну кінетичного

моменту механічної системи. Відповідно до цієї теореми

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e, \quad (12.7)$$

де \vec{M}_O^e – головний момент усіх зовнішніх сил, що діють на механічну систему, відносно нерухомої точки O .

Як відомо, похідна за часом від будь-якого вектора є швидкістю кінця цього вектора при його переміщенні по годографу вектора. Отже

$$\vec{u} = \frac{d\vec{K}_O}{dt} - \text{швидкість кінця вектора } \vec{K}_O \text{ по годографу цього вектора.}$$

Враховуючи це, вираз (12.7) запишемо у вигляді **теореми Резаля**:

$$\vec{u} = \vec{M}_O^e, \quad (12.8)$$

тобто, **швидкість кінця вектора кінетичного моменту механічної системи дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил, що діють на систему.**

12.2 Вільний (астатичний) гіроскоп

Розглянемо гіроскоп з трьома степенями вільності (рис. 12.2). Якщо сума моментів усіх зовнішніх сил, що діють на гіроскоп, відносно його нерухомого центра мас O дорівнює нулеві, то гіроскоп називають **астатичним** (або зрівноваженим).

Прикладом вільного (астатичного) гіроскопа є гіроскоп з кардановим кріпленням (Рис. 12.2), якщо знехтувати тертям в осях.

Для виявлення властивостей цього гіроскопа спочатку припустимо, що він не обертається навколо своєї осі, тобто перебуває в стані спокою. Якщо ударом сили, що діє миттєво, надати осі гіроскопа певну кутову швидкість $\vec{\omega}_1$, то надалі вісь гіроскопа буде рівномірно обертатися з цією кутовою швидкістю.

Зовсім інакше буде вести себе вісь гіроскопа під час удару, якщо він обертався навколо осі з великою кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$. У цьому випадку вісь гіроскопа залишиться практично нерухомою. Оскільки

для вільного гіроскопа $\vec{M}_O^e = 0$, а отже $\vec{K}_O = \overline{const}$ або $I_z \omega_1 \vec{k} = \overline{const}$, то вектор \vec{K}_O , який визначає напрямок осі гіроскопа Oz , зберігає в нерухомій системі координат свій напрямок. **Цю властивість зрівноваженого (вільного) гіроскопа зберігати незмінним напрямком осі обертання використовують у різних гіроскопічних приладах: гіроскопічних компасах, автопілотах тощо.**

Якщо на вісь гіроскопа буде діяти будь-яка сила, але дуже малий проміжок часу τ , то таку дію можна розглядати як дію ударного імпульсу $\vec{S} = \vec{F}\tau$. Тоді за теоремою Резаля швидкість \vec{u} переміщення кінця вектора \vec{K}_O існує тільки в цей нескінченно малий проміжок часу τ , отже можна вважати, що вісь гіроскопа практично не змінить свого напрямку. Математично це положення підтвердимо в наступному параграфі.

12.3 Дія сил на вісь гіроскопа

Ми розглядали рух вільного (астатичного) гіроскопа. Перейдемо до вивчення руху гіроскопа, до осі якого прикладена сила \vec{F} (Рис. 12.4). Розглянемо особливості руху осі гіроскопа в порівнянні з рухом осі такого самого тіла, що не має власного обертання навколо осі симетрії Oz .

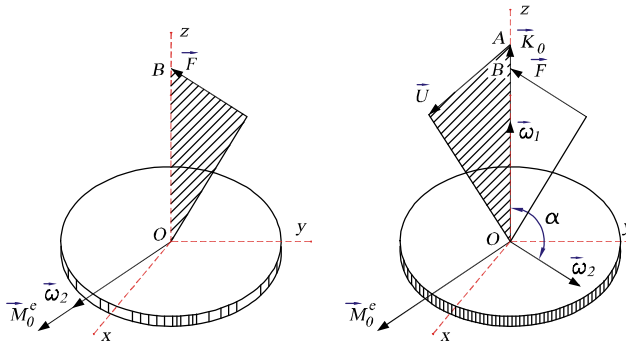


Рисунок 12.4

Нехай центр тяжіння в обох випадках розташований у нерухомій точці O , тертям в якій знехтуємо. Якщо до нерухомого тіла в точці B

прикладемо силу \vec{F} , то тіло буде обертатись з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$ (Рис. 12.4, а) навколо осі, перпендикулярної до площини розташування сили й осі OZ . Якщо дія сили припиниться, то тіло буде рухатися по інерції з досягнутою кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$.

Зовсім інакше веде себе гіроскоп (Рис. 12.4, б), що обертається навколо власної осі симетрії Oz з великою кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$.

За теоремою Резаля точка A (кінець вектора \vec{K}_O осі гіроскопа Oz) почне рух зі швидкістю $\vec{u} = \vec{M}_O^e$. Це означає, що вісь гіроскопа буде обертатися з якоюсь кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$, що перпендикулярна до площини розташування осі Oz і швидкості \vec{u} , причому

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{\omega}_2 \times \vec{OA} \\ \text{або} \quad \vec{M}_O^e &= \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_O = I_z (\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1). \end{aligned} \quad (12.10)$$

$$\text{Звідси} \quad M_O^e = \omega_2 I_z \omega_1 \sin \alpha \quad \text{і} \quad \omega_2 = \frac{M_O^e}{I_z \omega_1 \sin \alpha}. \quad (12.11)$$

Обертання осі гіроскопа називають його **прецесією**. Згідно з (12.11) сформулюємо таке правило прецесії: якщо до осі гіроскопа прикласти зовнішні сили, що створюють момент відносно нерухомої точки O , то та вісь гіроскопа, по якій напрямлений кінетичний момент, почне прецесіювати в напрямку вектора головного моменту цих сил з кутовою швидкістю ω_2 , яка пропорційна головному моменту зовнішніх сил і обернено пропорційна кінетичному моменту гіроскопа.

Формула для оцінки кута прецесії φ за малий проміжок часу τ має вигляд

$$\varphi = \omega_2 \tau = \frac{M_O^e \tau}{I_z \omega_1 \sin \alpha}. \quad (12.12)$$

З останньої формули виходить, що кут φ тим менший, чим більший кінетичний момент $I_z \omega_1$ гіроскопа. Якщо цей момент дуже великий, а дія сил відбувається за нескінченно малий проміжок часу τ , то

φ нескінченно мала величина. Отже, підтверджено зауваження в кінці попереднього параграфу про те, що короткочасна дія сил не відхиляє вісь гіроскопа від її початкового напрямку.

12.4 Прецесія гіроскопа під дією сили ваги

Розглянемо рух гіроскопа (дзиги), поставленого під кутом θ до вертикалі, під дією сили ваги \vec{G} (Рис. 12.5), яка створює момент відносно нерухомої точки O .

Цей момент \vec{M}_O^e діє в горизонтальній площині, яка перпендикулярна до площини розташування сили \vec{G} і центра O , причому

$$M_O^e = G \cdot OC \cdot \sin \theta. \quad (12.13)$$

За теоремою Резаля швидкість \vec{u} точки A кінця вектора \vec{K}_O дорівнює цьому моменту $\vec{u} = \vec{M}_O^e$ і напрямлена перпендикулярно до площини осей Oz і $O\zeta$.

Це означає, що вісь Oz разом з вектором \vec{K}_O описує конічну поверхню

навколо осі $O\zeta$ з кутовою швидкістю прецесії

$$\omega_2 = \frac{u}{K_O \sin \theta} = \frac{M_O^e}{K_O \sin \theta} = \frac{G \cdot OC \cdot \sin \theta}{I_z \omega_1 \sin \theta} = \frac{G \cdot OC}{I_z \omega_1},$$

що не залежить від кута θ .

12.5 Гіроскопічний момент

Розглянемо тепер випадок, коли рух гіроскопа заданий, а потрібно визначити сили, що діють на гіроскоп. Будемо вважати, що гіроскоп обертається зі сталою кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$ навколо своєї осі симетрії, а ця вісь обертається з кутовою швидкістю прецесії $\vec{\omega}_2$

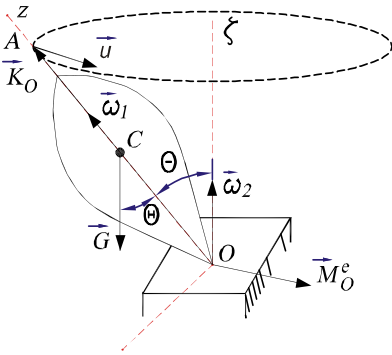


Рисунок 12.5

(Рис. 12.6).

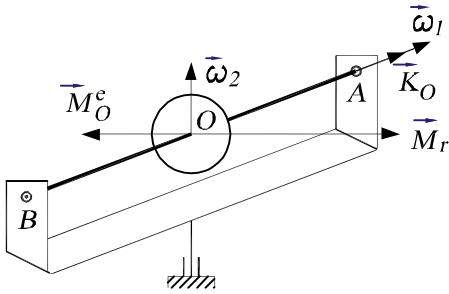


Рисунок 12.6

Момент зовнішніх сил \vec{M}_O^e , під дією яких вісь гіроскопа здійснює прецесію з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$, визначають за формулою (12.10).

Цей момент зумовлений дією підшипників у точках A і B на вісь гіроскопа при обертанні рамки гіроскопа з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$. За принципом рівності дії

та протидії вісь гіроскопа діє на рамку в підшипниках A і B силами, що утворюють так званий гіроскопічний момент \vec{M}_r

$$\vec{M}_r = -\vec{M}_O^e = I_z (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2),$$

або
$$M_r = I_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta,$$

де θ – кут між векторами кутових швидкостей $\vec{\omega}_2$ і $\vec{\omega}_1$.

Як видно на рис. 12.6, гіроскопічний момент діє так, ніби намагається повернути вектор $\vec{\omega}_1$ до збігання з вектором $\vec{\omega}_2$, що дає можливість сформулювати таке правило: **при наданні осі гіроскопа вимушеної прецесії вісь гіроскопа намагається стати паралельною осі вимушеної прецесії так, щоб напрямок вектора $\vec{\omega}_1$ збігався з напрямком вектора $\vec{\omega}_2$, повертаючись на кут менший за 180° . Це правило називають правилом Жуковського.**

Задача 12.1. Турбіна корабля (Рис. 12.7) обертається на горизонтальній осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$. Визначити силу гіроскопічного тиску на кожний підшипник, коли корабель буде здійснювати поворот з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$.

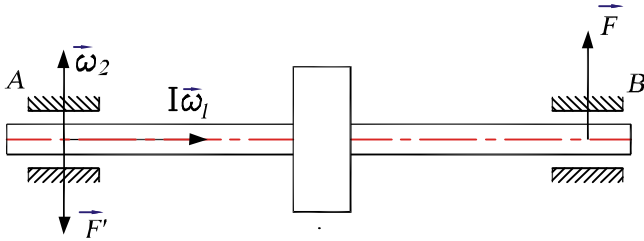


Рисунок 12.7
Розв'язок

Якщо корабель буде здійснювати поворот з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$, то з ним буде повертатися і вал турбіни. Гіроскопічний момент, що при цьому виникає, є моментом пари сил \vec{F} і \vec{F}' , прикладених до підшипників. Як видно з рис. 12.7 та згідно з правилом Жуковського

$$M_r = F \cdot AB = I_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta .$$

При $\theta = 90^\circ$ знаходимо силу гіроскопічного тиску на кожний підшипник

$$F = \frac{I_z \omega_1 \omega_2}{AB} .$$

Для великих значень кінетичного моменту турбіни $I\omega_1$ ця сила достатньо велика, тому її слід урахувувати у відповідних інженерних розрахунках.

Контрольні запитання

1. Що називають гіроскопом?
2. Наведіть приклади гіроскопів.
3. Сформулюйте теорему Резаля.
4. Що таке астатичний гіроскоп?
5. Що таке прецесія осі гіроскопа та як визначити кут прецесії?
6. Запишіть формулу для визначення гіроскопічного моменту та сформулюйте правило Жуковського.
7. Основне припущення елементарної теорії гіроскопа.

ГЛАВА 13. ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Загальні теореми динаміки та одержані з них наслідки дають научні засоби дослідження руху матеріальної системи. Користуючись ними, можна відразу скласти диференціальні рівняння, розв'язок яких визначає рух системи та отримати відповіді на поставлені запитання.

Однак застосування загальних теорем пов'язане з відомими труднощами. Передусім, практично неможливо строго класифікувати задачі та вказати, в якому випадку яка теорема швидше дозволить розв'язати задачу. Окрім того, при складанні диференціальних рівнянь руху матеріальної системи за допомогою загальних теорем динаміки часто доводиться розчленовувати систему, збільшувати число рівнянь і вводити невідомі величини (реакції в'язей), визначення яких не завжди потрібне за умовою задачі.

Аналітична механіка дає загальні методи, з допомогою яких можна скласти диференціальні рівняння руху, не вводячи реакцій ідеальних в'язей. Методи аналітичної механіки є корисними не тільки в теоретичних дослідженнях, але і в практичних інженерних розрахунках.

13.1 В'язі та їхня класифікація

Систему матеріальних точок називають **вільною**, якщо положення та швидкості окремих її точок можуть приймати довільні значення. Систему називають **невільною**, якщо матеріальні точки в системі внаслідок певних обмежень не можуть займати у просторі довільні положення та мати які завгодно швидкості. Умови, якими формулюють обмеження на положення або рух точок системи в просторі, називають **в'язями**. В аналітичній механіці необхідно більш докладно розглядати в'язі, що накладені на точки механічної системи.

Математично в'язі можуть бути виражені рівняннями, в які входять час, координати точок системи та їхні похідні за часом різних порядків. Для однієї точки рівняння в'язі в загальному випадку можна записати у формі

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, t) = 0. \quad (13.1)$$

Надалі будемо розглядати в'язі, у рівняння яких входять похідні від координат за часом не вищі від першого порядку. Для механічної системи, яку складають n точок, s рівнянь в'язей подають такою системою рівнянь:

$$f_i(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (13.2)$$

В'язі, які описують рівняннями, називають **утримуючими (двобічними)**.

Прикладом утримуючої в'язі є з'єднання двох матеріальних точок жорстким невагомим і нерозтяжним стержнем довжиною ℓ (Рис. 13.1). Рівняння такої в'язі

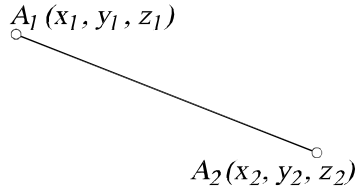


Рисунок 13.1

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \ell^2,$$

де x_1, y_1, \dots, z_2 – координати точок A_1 і A_2 .

Деколи в механіці розглядають ще **неутримувальні (однобічні)** в'язі. Умови обмеження для неутримувальних в'язей мають вигляд нерівностей. Прикладом такої в'язі є з'єднання двох матеріальних точок абсолютно гнучкою нерозтяжною та неваговою ниткою довжиною ℓ . Залежність для опису такої в'язі має вигляд

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \leq \ell^2.$$

Коли нитка натягнута, то в наведеній залежності має місце знак рівності, коли нитка не натягнута – знак нерівності. У такому разі рух системи можна розділити на частини так, що на одних в'язь буде утримуючою (знак рівності), а на інших в'язь можна розглядати відсутньою (знак нерівності). Далі будемо розглядати лише випадки утримуючих в'язей.

В'язі називають голономними (геометричними), якщо їхні рівняння не містять похідних від координат за часом або диференціалів координат.

В'язі називають неголономними (кінематичними), якщо їхні рівняння містять похідні від координат за часом або диференціали координат і якщо неможливо за допомогою інтегрування представити ці рівняння як залежності між координатами та часом.

Рівняння голономної в'язі для системи має вигляд

$$f(x_k, y_k, z_k, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (13.3)$$

З голономних в'язей (геометричних) диференціюванням можна отримати в'язі, рівняння яких містять похідні (так звані **кінематичні в'язі**).

З неголономних в'язей голономні, як це видно з означення, отримати неможливо. Важливий клас механічних систем з неголономними в'язями інтенсивно досліджують у наш час. Надалі будемо розглядати системи, на які накладені голономні в'язі.

Під час руху механічної системи координати точок і їхні похідні за часом, які входять у рівняння в'язей, можуть залежати від часу. Крім того, в рівняння в'язей окрім координат і їхніх похідних час може входити явно,.

В'язі, в рівняння яких час явно не входить, називають стаціонарними або склерономними. В'язі, в рівняння яких час входить явно, називають нестаціонарними або реономними.

Рівняння стаціонарної в'язі для системи має вигляд

$$f(x_k, y_k, z_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (13.4)$$

Отже, в першому прикладі в'язь є утримувальною, голономною та стаціонарною.

13.2 Можливі переміщення. Ступінь вільності

Для формулювання принципу можливих переміщень, який визначає умови рівноваги механічної системи, слід розглянути поняття можливого, або віртуального, переміщення.

Для однієї точки можливим переміщенням називають нескінченно мале (елементарне) **уявне** переміщення, яке допускають у даний момент часу накладені на точку в'язі.

Для можливого переміщення не потрібен час на його виконання. Це уявне переміщення, яке могла б здійснити точка при накладених на неї в'язях у даний фіксований момент часу. На відміну від елементарного справжнього переміщення $d\vec{r}$, яке здійснює точка за час dt під дією прикладених сил при заданих початкових умовах і накладених в'язях, можливе переміщення $\delta\vec{r}$ визначається тільки в'язями в даний момент часу. Проекції можливого переміщення $\delta\vec{r}$ на осі координат, або варіації координат, позначають $\delta x, \delta y, \delta z$, а проекції елементарного дійсного переміщення на осі координат, або диференціали координат, при зміні часу dt позначають dx, dy, dz . Можливе переміщення $\delta\vec{r}$, як і дійсне $d\vec{r}$, є вектором і його зображують направленим прямолінійним відрізком. Очевидно, що елементарне дійсне переміщення точки належить до числа можливих, якщо в'язь стаціонарна (і дійсне переміщення не містить переміщення разом зі в'яззю).

Можливе переміщення точки $\delta\vec{r}$ вважають ізохронною варіацією радіуса–вектора, тобто його диференціалом, але при фіксованому часі, коли змінюються тільки координати точки ($\delta x, \delta y, \delta z$ – **ізохронні варіації координат точки, що допускаються в'язями**). Дійсне переміщення $d\vec{r}$ є повним диференціалом радіуса–вектора, що визначається по зміні координат точки залежно від зміни часу; dx, dy, dz – повні диференціали координат точки при зміні незалежного змінного часу t на величину dt .

Можливим переміщенням системи називають будь–яку сукупність можливих переміщень точок системи (3n).

У загальному випадку система може мати нескінченно багато можливих переміщень. Унаслідок наявності в'язей s , накладених на систему, не всі можливі переміщення є незалежними.

Число **незалежних можливих** переміщень називають **числом степенів вільності** системи ($H=3n-s$).

Вільна точка має три степені вільності. У цьому разі можливі переміщення (варіації) $\delta x, \delta y, \delta z$ є незалежними. Якщо точка рухається по поверхні $f(x, y, z, t) = 0$, то $\delta x, \delta y, \delta z$ зв'язані співвідношенням

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0, \quad (13.5)$$

яке одержують розкладом у степеневий ряд функції

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = 0,$$

нехтуючи доданками другого і більш високого порядків малості відносно $\delta x, \delta y, \delta z$ і враховуючи рівність $f(x, y, z) = 0$.

Незалежних варіацій координат, а отже, і степенів вільності, буде дві. Час при цьому не варіюється, він фіксований.

13.3 Елементарна робота сили на можливому переміщенні. Ідеальні в'язі

Елементарну роботу сили на можливому переміщенні обчислюють за відомими формулами, наприклад,

$$\delta A = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z.$$

Для механічної системи з n точок, до яких прикладені сили, елементарну роботу цих сил на будь-якому можливому переміщенні системи відповідно виразимо так:

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k. \quad (13.6)$$

Елементарна робота сил у цьому разі залежить від вибору можливого переміщення системи.

Позначимо сили реакцій в'язей для точок системи \vec{R}_k . Голономні та неголономні в'язі, елементарна робота сил реакцій яких на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнює нулю, називають ідеальними або в'язями без тертя. Отже для ідеальних в'язей виконується умова

$$\sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (13.7)$$

Важливо відзначити, що ця умова повинна виконуватися для всіх можливих переміщень системи. Наведемо приклади ідеальних в'язей.

1. **У абсолютно твердому** тілі точки зв'язані ідеальними в'язями. Силами реакцій в'язей у цьому випадку є внутрішні сили, для яких сума елементарних робіт цих сил на будь-яких елементарних переміщеннях точок тіла дорівнює нулю.

2. **Абсолютно гладка поверхня** або **абсолютно гладка лінія** є **ідеальною в'яззю** для точки. Можливі переміщення таких в'язей напружені по дотичних до поверхонь або ліній, а реакції – по нормалях до них, тобто $\vec{R}_k \perp \delta\vec{r}_k$ і $\vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = R_k \delta r_k \cos\angle(\vec{R}_k, \delta\vec{r}_k) = 0$.

3. **Гнучкі нерозтяжні в'язі** типу ниток, канатів, тросів тощо, що з'єднують точки системи, є ідеальними в'язями. У кожному перерізі такої в'язі реакції однакові за модулем і протилежні за напрямом, а переміщення однакові.

4. **Закріплені точки системи** є ідеальними в'язями, бо їхні можливі переміщення дорівнюють нулю.

5. **Шорстка поверхня для котків**, що котяться без ковзання при відсутності тертя кочення і з **однією точкою дотику**, є ідеальною в'яззю, бо можливі переміщення в точці дотику дорівнюють нулю.

13.4 Принцип можливих переміщень

Розглянемо умову рівноваги механічної системи. Передусім необхідно уточнити слово "рівновага". Якщо сили, прикладені до вільної матеріальної точки, зрівноважені, то це означає тільки те, що сума сил дорівнює нулю, сама ж точка може виконувати рівномірний та прямолінійний рух. Для того, щоб точка перебувала в спокої, умови, що накладають на сили, необхідно доповнити вимогою рівності нулю початкової швидкості точки.

Принцип можливих переміщень, або принцип Лагранжа, містить необхідні та достатні умови рівноваги деяких механічних систем. Принцип можливих переміщень формулюється так: **для рівноваги механічної системи, підпорядкованої ідеальним стаціонарним і утримуючим в'язям, необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт всіх активних сил, прикладених до точок системи, дорівнювала нулю на будь-якому можливому переміщенні системи, якщо швидкості точок системи в даний момент часу дорівнюють нулю.** Тобто

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (13.8)$$

Необхідність. Доведемо, що якщо система перебуває в рівновазі, то активні сили задовольняють умову (13.8). Справді, якщо система перебуває в рівновазі, то для кожної її точки виконується умова:

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

де \vec{R}_k – сила реакції в'язі. Якщо помножимо скалярно обидва доданки рівності на можливе переміщення $\delta \vec{r}_k$ точки M_k і додамо одержані рівності для всіх точок системи, то дістанемо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0.$$

Згідно з умовою ідеальності в'язей $\sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$ і для активних сил отримуємо умову (13.8).

Достатність умови (13.8) рівноваги системи доводять методом від супротивного. Припускаємо, що умова (13.8) і всі інші умови виконуються, а система вийшла з рівноваги. Нехай при цьому принаймні для однієї точки системи не буде виконуватися умова рівноваги сил, тобто $\vec{F}_k + \vec{R}_k \neq 0$.

За умовою теореми всі в'язі стаціонарні, тому дійсне переміщення точки за час dt буде збігатися з одним із можливих переміщень $\delta \vec{r}_k$.

На підставі теореми про зміну кінетичної енергії сума робіт усіх активних сил і реакцій в'язей на цьому переміщенні буде додатна, бо при переході зі стану спокою у рух система отримає додатний приріст кінетичної енергії. Отже,

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k + \vec{R}_k) \cdot \delta \vec{r}_k > 0,$$

або
$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k > 0.$$

За умовою теореми в'язі ідеальні, тому друга сума дорівнює нулю, $\sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$. Отже

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k > 0.$$

Несумісність цієї нерівності з умовою (13.8) і доводить достатність принципу можливих переміщень.

Примітка. Відзначимо, що в усіх міркуваннях ми уживали термін «можливі переміщення». У літературі часто зустрічаємо інший термін – «віртуальні переміщення» – від латинського слова *virtualis* – можливий. Якщо користуватися терміном «можливе переміщення», то для нестационарних в'язей ми повинні сказати: «дійсне елементарне переміщення не є можливим» (бо дійсне елементарне переміщення не збігається ні з одним з можливих переміщень). У цьому випадку краще користуватися терміном «віртуальне переміщення».

Контрольні запитання

1. Наведіть класифікацію в'язей.
2. Що називають можливим переміщенням?
3. Чим відрізняються дійсні та можливі переміщення і що між ними спільного?
4. Які в'язі називають ідеальними?
5. Наведіть приклади ідеальних в'язей.
6. Сформулюйте принцип можливих переміщень.
7. Для яких в'язей справедливий принцип можливих переміщень?

ГЛАВА 14. ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ

14.1 Узагальнені координати системи

Нехай систему складають n точок. Отже її положення в просторі в кожний момент часу визначається $3n$ координатами точок системи, наприклад, декартовими координатами x_k, y_k, z_k . Припустимо, що на систему накладені голономні в'язі, рівняння яких у загальному випадку можуть містити також похідні від координат точок. Але після інтегрування в'язі звели до геометричних і записали у вигляді

$$f_i(x_k, y_k, z_k, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (14.1)$$

Розглядаємо тільки утримувальні в'язі. Тоді $3n$ координат зв'язані s рівняннями і незалежних координат буде $H = 3n - s$.

Будь-які H декартових координат можна задати незалежно одна від одної. Інші координати визначають з рівнянь в'язей. Замість H незалежних декартових координат можна вибрати будь-які інші незалежні параметри q_1, q_2, \dots, q_H , що залежать від усіх або частини декартових координат точок системи.

Незалежні параметри, які визначають положення системи в просторі у кожний момент її руху, називають узагальненими координатами системи.

У загальному випадку вони можуть залежати від усіх декартових координат точок системи, тобто

$$q_i = q_i(x_k, y_k, z_k), \quad i = 1, 2, \dots, H, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (14.2)$$

Задання узагальнених координат повністю визначає положення точок системи відносно вибраної системи відліку.

У вільної точки три узагальнені координати. Якщо точка рухається по заданій поверхні, то узагальнених координат буде тільки дві й так далі. Використовуючи рівняння в'язей (14.1) і вирази

узагальнених координат через декартові (14.2), можна виразити декартові координати через узагальнені, тобто

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_H, t); \quad y_k = y_k(q_1, q_2, \dots, q_H, t); \\ z_k = z_k(q_1, q_2, \dots, q_H, t).$$

Відповідно для радіуса–вектора кожної точки системи $\vec{r}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k}$ отримаємо

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_H, t). \quad (14.3)$$

У разі стаціонарних в'язей час явно не входить у рівняння в'язей. Тому в залежності (14.3) час увійде тільки неявно, через узагальнені координати, якщо система рухається. Для голономних систем вектор можливого переміщення точки $\delta \vec{r}_k$ відповідно до (14.3) можна виразити у формі

$$\delta \vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_H} \delta q_H = \sum_{i=1}^H \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (14.4)$$

Система, що має H незалежних узагальнених координат, характеризується також H незалежними можливими переміщеннями, або варіаціями $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_H$, якщо в'язі голономні. Тобто для голономних систем число незалежних можливих переміщень збігається з числом незалежних узагальнених координат.

Отже, число ступенів вільності голономної системи дорівнює числу незалежних узагальнених координат цієї системи, тобто дорівнює $H = 3n - s$.

Розглянемо як приклад кривошипно–шатунний механізм (Рис. 14.1). Його положення на площині цілком визначається заданням положення трьох його точок O , A і B з координатами $(0,0)$, (x_A, y_A) і $(x_B, 0)$.

Координат, які не дорівнюють нулю, тільки три, тобто $3n = 3$. Можна скласти два рівняння в'язей, урахуваючи, що $OA = r$, $AB = \ell$. Маємо

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2; (x_B - x_A)^2 + y_A^2 = \ell^2. \quad (14.5)$$

Число ступенів вільності

$$H = 3n - s = 3 - 2 = 1.$$

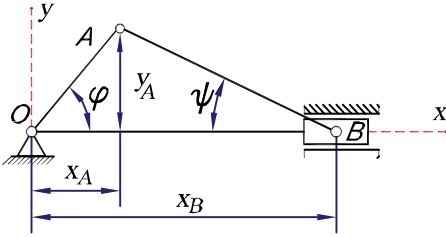


Рисунок 14.1

З трьох координат, які не дорівнюють нулю, тільки одну можна задати незалежно. Дві інші виражають через неї як розв'язок рівнянь в'язей.

За незалежну координату можна вибрати будь-яку з трьох координат x_A, y_A, x_B або будь-

яку комбінацію цих координат. Зручно за незалежну узагальнену координату вибрати кут φ , тобто

$$q = \varphi = \arctg \frac{y_A}{x_A}. \quad (14.6)$$

З рівнянь (14.5) і (14.6) координати x_A, y_A, x_B можна виразити через φ . Для цього потрібно розв'язати систему рівнянь відносно координат. Проте зручно, не розв'язуючи системи рівнянь, виразити координати через кут φ за допомогою рис. 14.1. Отримаємо

$$x_A = r \cos \varphi; \quad y_A = r \sin \varphi; \quad x_B = r \cos \varphi + \ell \cos \psi.$$

Але
$$y_A = r \sin \varphi = \ell \sin \psi; \quad \sin \psi = \frac{r}{\ell} \sin \varphi;$$

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\ell} \sqrt{\ell^2 - r^2 \sin^2 \varphi}.$$

З урахуванням цього вирази для координат набувають вигляду

$$x_A = r \cos \varphi; \quad y_A = r \sin \varphi; \quad x_B = r \cos \varphi + \sqrt{\ell^2 - r^2 \sin^2 \varphi}.$$

Ці значення декартових координат задовільняють рівняння (14.5) і (14.6).

14.2 Узагальнені сили

Визначення узагальнених сил

Сума елементарних робіт сил, які діють на точки системи, на можливому її переміщенні дорівнює:

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (14.7)$$

Нехай голономна система має H степенів вільності. Тоді її положення в просторі визначається H узагальненими координатами q_1, q_2, \dots, q_H . Відповідно до (28.4) маємо

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^H \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (14.8)$$

Підставивши (14.8) у (14.7) і змінивши порядок додавання за індексами k та i , одержимо

$$\delta A = \sum_{i=1}^H \left(\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^H Q_i \delta q_i, \quad (14.9)$$

де скалярну величину $Q_i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$ називають **узагальненою**

силою, віднесеною до узагальненої координати q_i . Використовуючи відомий вираз для скалярного добутку двох векторів, узагальнену силу можна також подати у вигляді

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right), \quad (14.10)$$

де F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекції сили на осі координат; x_k, y_k, z_k – координати точки прикладання сили.

Розмірність узагальненої сили

Розмірність узагальненої сили відповідно до (14.9) залежить від розмірності δq_i , яка сумісна з розмірністю q_i , так:

$$[Q_i] = \frac{[\delta A]}{[\delta q_i]} = \frac{[A]}{[q_i]}. \quad (14.11)$$

Тобто розмірність узагальненої сили дорівнює розмірності роботи сили, поділеної на розмірність узагальненої координати, до якої віднесена узагальнена сила.

Обчислення узагальнених сил

1. Узагальнену силу можна обчислити за формулою (14.10)

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).$$

2. Узагальнену силу можна обчислити як коефіцієнт при відповідній варіації узагальненої координати у виразі для елементарної роботи (14.9)

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^H Q_i \delta q_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_H \delta q_H. \quad (14.12)$$

3. Найбільш доцільним є спосіб обчислення узагальнених сил, що впливає з (14.10), коли системі надати таке можливе переміщення, при якому змінюється тільки одна координата, а інші залишаються незмінними. Так, якщо $\delta q_1 \neq 0$, а $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_H = 0$, то з (14.10) маємо

$$Q_1 = \frac{\left(\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k \right)_{q_1}}{\delta q_1}. \quad (14.13)$$

Індекс Q_1 вказує на те, що суму елементарних робіт обчислюємо на можливому переміщенні, при якому змінюється тільки координата q_1 .

4. Для потенціальних сил за їх визначенням

$$F_{kx} = -\frac{\partial U}{\partial x_k}; \quad F_{ky} = -\frac{\partial U}{\partial y_k}; \quad F_{kz} = -\frac{\partial U}{\partial z_k}, \quad (14.14)$$

$$\text{де } U = U(x_k, y_k, z_k) = U(q_1, q_2, \dots, q_H) \quad (14.15)$$

силова функція, яка залежить від координат точок системи, а через них і від узагальнених координат.

Для узагальненої сили, згідно з її визначенням, з урахуванням (14.14) і (14.15) маємо

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Таким чином, у випадку існування силової функції

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (14.16)$$

тому що потенціальна енергія системи зв'язана з силовою функцією співвідношенням

$$\Pi = -U + \text{const.}$$

Отже, узагальнена сила дорівнює частинній похідній за відповідною координатою від силової функції.

14.3 Умови рівноваги механічної системи

Умови рівноваги системи виводять з принципу можливих переміщень. Вони можуть застосовуватися до систем, для яких цей принцип є справедливим. Згідно з принципом можливих переміщень, умова

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$$

є необхідною й достатньою для рівноваги системи. Але відповідно до (14.12)

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_H \delta q_H.$$

Отже, необхідною й достатньою умовою рівноваги механічної системи є рівність

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_H \delta q_H = 0. \quad (14.17)$$

Унаслідок того, що узагальнені координати незалежні, їхні варіації $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_H$ є також незалежними довільними нескінченно малими величинами. Можна прийняти варіацію $\delta q_1 \neq 0$, а всі інші $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_H = 0$. Тоді з (14.17) отримаємо $Q_1 = 0$. Аналогічно, прийнявши $\delta q_2 \neq 0$, а $\delta q_1 = \delta q_3 = \dots = \delta q_H = 0$, будемо мати $Q_2 = 0$ і так далі.

Таким чином, з (14.17) одержуємо такі умови рівноваги системи:

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots, Q_H = 0. \quad (14.18)$$

Отже, для рівноваги механічної системи з голономними стаціонарними ідеальними утримувальними в'язям, у момент, коли швидкості всіх точок системи дорівнюють нулю, необхідно й достатньо, щоб усі узагальнені сили дорівнювали нулю.

У статичі для рівноваги вільного твердого тіла, що має шість степенів вільності, було одержано шість умов рівноваги для прикладених до тіла сил. Ці умови можна отримати також, прирівнявши до нуля кожен з шести узагальнених сил. Для цього слід вибрати за узагальнені координати декартові координати x, y, z будь-якої точки тіла та кути повороту тіла навколо осей координат, що проходять через цю точку. Узагальнені сили, віднесені до координат x, y, z , перетворяться відповідно у суми проєкцій прикладених сил на ці осі, а узагальнені сили, віднесені до кутів повороту навколо осей координат, – у суми моментів сил відносно цих осей.

Умови рівноваги (14.18) для системи, що перебуває під дією потенціальних сил, разом з (14.16) дадуть такі умови для силової функції:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad Q_H = \frac{\partial U}{\partial q_H} = 0 \quad (14.19)$$

$$\text{або } Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \dots, \quad Q_H = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_H} = 0,$$

тобто всі частинні похідні від силової функції за узагальненими координатами дорівнюють нулю. Це є необхідною умовою існування екстремума силової функції. Отже, у разі рівноваги механічної системи, яка перебуває під дією потенціальних сил, силова функція та потенціальна енергія можуть досягати екстремума.

Задача 14.1. Однорідний стержень вагою \vec{G}_1 має довжину ℓ і може обертатися навколо осі A у вертикальній площині. Розміщена на ньому кулька має вагу \vec{G}_2 (Рис. 14.2). Довжина пружини AM дорівнює в ненапруженому стані a , а її жорсткість – c .

Визначити умови рівноваги системи.

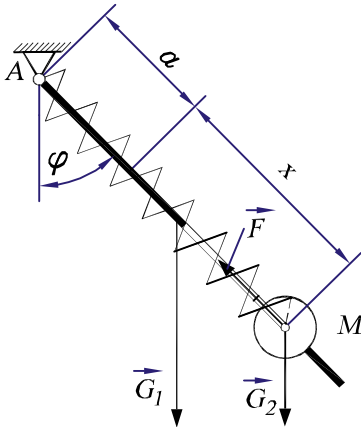


Рисунок 14.2

Розв'язок

Система має два степені вільності: переміщення кульки

вздовж стержня та поворот стержня навколо точки A . Припустимо, що система перебуває в одному з можливих положень.

При цьому кут відхилення стержня від вертикального положення дорівнює φ , а пружина розтягнута на величину $x^* = x + x_{\text{ст}}$, де $x_{\text{ст}}$ – деформація пружини у стані рівноваги системи.

За узагальнені координати виберемо $q_1 = \varphi$ та $q_2 = x$. Складемо вираз для потенціальної енергії системи:

$$\Pi = \frac{cx^2}{2} + \left[\frac{\ell}{2} G_1 + (x + x_{\text{ст}} + a) \cdot G_2 \right] \cdot [1 - \cos \varphi].$$

Умови рівноваги системи мають вигляд:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -\left[\frac{\ell}{2} G_1 + (x + x_{\text{ст}} + a) G_2 \right] \sin \varphi = 0, \quad (14.20)$$

$$Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -cx - G_2[1 - \cos\varphi] = 0. \quad (14.21)$$

З виразу (14.20) випливає, що система перебуває у рівновазі при $\varphi = 0$. Тоді з (14.21) отримуємо $x = x^* - x_{\text{ст}} = 0$. Отже, в положенні рівноваги $x^* = x_{\text{ст}}$. З умови рівноваги кульки при $\varphi = 0$ маємо:

$$x_{\text{ст}} = \frac{G_2}{c}.$$

14.4 Загальне рівняння динаміки

Відповідно до принципу Д'Аламбера для будь-якої механічної системи активні сили, сили реакцій в'язей разом з силами інерції задовільняють умову рівноваги сил для кожної точки системи, тобто

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{F}_k^{\text{ін}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (14.22)$$

де \vec{F}_k – активна сила, \vec{R}_k – сила реакції в'язі, $\vec{F}_k^{\text{ін}}$ – сила інерції точки. Помноживши скалярно кожен з цих сил на можливе переміщення точки $\delta\vec{r}_k$ і додавши рівняння для всіх точок системи, одержимо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ін}} \cdot \delta\vec{r}_k = 0. \quad (14.23)$$

Це і є загальне рівняння динаміки для системи з будь-якими в'язями. Для системи з ідеальними в'язями, для яких другий доданок у (14.23) дорівнює нулю, будемо мати одну з форм загального рівняння динаміки:

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k + \vec{F}_k^{\text{ін}}) \delta\vec{r}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n \delta A_k^a + \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{ін}} = 0; \quad (14.24)$$

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k) \delta\vec{r}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n (F_k - m_k \ddot{r}_k) \delta r_k = 0,$$

в яких силу інерції через прискорення \vec{a}_k відносно інерціальної системи координат виражають у вигляді

$$\vec{F}_k^{\text{ін}} = -m_k \vec{a}_k = -m_k \ddot{\vec{r}}_k,$$

де \vec{r}_k – радіус-вектор точки.

Таким чином, відповідно до загального рівняння динаміки: у будь-який момент руху системи з ідеальними в'язями сума елементарних робіт усіх активних сил та сил інерції точок системи дорівнює нулю на будь-якому можливому переміщенні системи (Принцип Д'Аламбера-Лагранжа).

Розкриваючи скалярний добуток векторів у (14.24), дістанемо вираз загального рівняння динаміки в аналітичній формі:

$$\sum_{k=1}^n [(F_{kx} + F_{kx}^{\text{ін}}) \delta x_k + (F_{ky} + F_{ky}^{\text{ін}}) \delta y_k + (F_{kz} + F_{kz}^{\text{ін}}) \delta z_k] = 0$$

або

$$\sum_{k=1}^n [(F_{kx} - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k] = 0. \quad (14.25)$$

Для використання загального рівняння динаміки необхідно вміти обчислювати елементарну роботу сил інерції системи на можливих переміщеннях.

Елементарна робота сил інерції під час поступального руху

Сили інерції під час поступального руху зводять до рівнодійної $\vec{R}^{\text{ін}} = -M\vec{a}_C = -M\vec{a}$. Для суми елементарних робіт сил інерції на поступальному можливому переміщенні отримаємо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ін}} \delta \vec{r}_k = \vec{R}^{\text{ін}} \delta \vec{r}_C = \vec{R}^{\text{ін}} \delta \vec{r} = -M\vec{a} \delta \vec{r},$$

де $\delta \vec{r}_C = \delta \vec{r}$ – можливе переміщення центра мас і будь-якої точки тіла, бо поступальне можливе переміщення для всіх точок тіла однакове, однакові також прискорення, тобто $\vec{a}_C = \vec{a}$.

Елементарна робота сил інерції під час обертального руху

У разі обертання тіла навколо нерухомої осі можливим переміщенням тіла є поворот на елементарний кут $\delta\varphi$ навколо цієї осі. У разі зведення до точки O на осі обертання сили інерції зводять до головного вектора $\vec{R}^{\text{ін}}$ і головного моменту $\vec{M}_O^{\text{ін}}$.

Головний вектор сил інерції прикладений до нерухомої точки і його елементарна робота на можливому переміщенні дорівнює нулю. Щодо головного моменту сил інерції, то роботу виконує тільки його проекція на вісь обертання $M_z^{\text{ін}} = -I_z \varepsilon$.

Таким чином, для суми робіт сил інерції на можливому переміщенні $\delta\varphi$ маємо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ін}} \cdot \delta\vec{r}_k = M_z^{\text{ін}} \delta\varphi = -I_z \varepsilon \delta\varphi,$$

якщо поворот на кут $\delta\varphi$ надати в напрямку дугової стрілки кутового прискорення.

Елементарна робота сил інерції під час плоского руху

Під час плоского руху можливе переміщення складається з поступального переміщення $\delta\vec{r}_C$ разом з полюсом, за який виберемо центр мас, і повороту на елементарний кут $\delta\varphi$ навколо осі Cz .

Суму елементарних робіт сил інерції на плоскому можливому переміщенні зводять до елементарної роботи головного вектора сил інерції $\vec{R}^{\text{ін}} = -M\vec{a}_C$ на можливому переміщенні центра мас й елементарної роботи головного моменту сил інерції на елементарному повороті $\delta\varphi$ навколо осі Cz , що проходить через центр мас.

При цьому роботу може виконувати тільки проекція головного моменту сил інерції на вісь Cz , тобто $M_{Cz}^{\text{ін}} = -I_{Cz} \varepsilon$. Таким чином, у цьому випадку маємо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = \vec{R}^{\text{ін}} \delta\vec{r}_C + M_{Cz}^{\text{ін}} \delta\varphi = -M\vec{a}_C \delta\vec{r}_C - I_{Cz} \varepsilon \delta\varphi,$$

якщо поворот на кут $\delta\varphi$ направити по дуговій стрілці для ε .

Задача 14.2. Два тіла масами m_1 і m_2 зв'язані між собою абсолютно гнучкою та нерозтяжною ниткою, перекинutoю через блок K масою m_3 . (Рис. 14.3).

Уважаючи блок однорідним диском і нехтуючи масою нитки та тертям, визначити прискорення руху вантажів ($m_1 > m_2$).

Розв'язок

Припустимо, що вантаж 1 має прискорення \vec{a}_1 , напрямлене вниз. Оскільки нитка нерозтяжна, то рівняння в'язі має вигляд

$$y_1 + y_2 = \ell,$$

звідси $\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$, тобто $a_1 = -a_2$, і $\delta y_1 = -\delta y_2$.

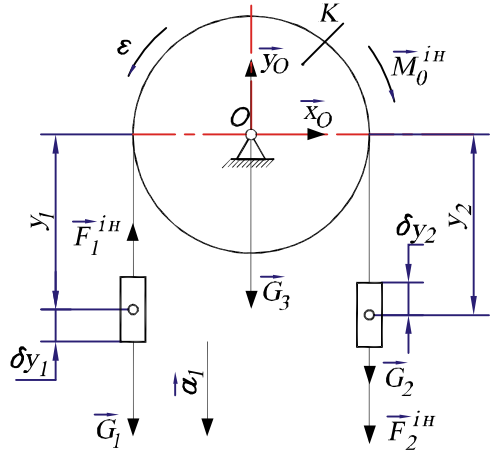


Рисунок 14.3

Елементарний кут повороту $\delta\varphi = \frac{\delta y_1}{R}$. Визначимо величини сил інерції:

$$F_1^{\text{ін}} = m_1 a_1; F_2^{\text{ін}} = m_2 a_2 = m_2 a_1; M_O^{\text{ін}} = I_{Oz} \varepsilon = \frac{m_3 R^2}{2} \frac{a_1}{R}, \left(\varepsilon = \frac{a_1}{R} \right).$$

Складемо загальне рівняння динаміки, задавши можливе переміщення δy_1 вантажу 1:

$$G_1 \delta y_1 - F_1^{\text{ін}} \delta y_1 - M_O^{\text{ін}} \delta\varphi - G_2 \delta y_1 - F_2^{\text{ін}} \delta y_1 = 0.$$

Елементарна робота сил $\vec{G}_3, \vec{X}_O, \vec{Y}_O$ дорівнює нулю, оскільки $\delta s_O = 0$.

Підставляючи значення сил інерції та переміщень, одержимо

$$m_1 g \delta y_1 - m_1 a_1 \delta y_1 - \frac{m_3 R^2}{2} \frac{a_1}{R} \frac{\delta y_1}{R} - m_2 g \delta y_1 - m_2 a_1 \delta y_1 = 0,$$

звідси прискорення вантажів

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + 0,5m_3}.$$

14.5 Рівняння Лагранжа другого роду

Щоб знайти рівняння руху механічної системи з геометричними утримувальними в'язями в узагальнених координатах, використаємо загальне рівняння динаміки у вигляді:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k + \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{ін}} = 0. \quad (14.26)$$

З метою узагальнення не будемо вважати, що всі накладені на систему в'язі є ідеальними. Тому в першу суму можуть входити як робота активних сил, так і, наприклад, робота сил тертя. Нехай система має H степенів вільності та її положення визначають узагальнені координати q_1, q_2, \dots, q_H .

Тоді за формулою (14.7)

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_H \delta q_H. \quad (14.27)$$

Очевидно, що так само, як це було зроблено раніше для сил \vec{F}_k , можна перетворити до узагальнених координат елементарну роботу сил інерції. При цьому дістанемо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{ін}} &= Q_1^{\text{ін}} \delta q_1 + Q_2^{\text{ін}} \delta q_2 + \\ &+ \dots + Q_H^{\text{ін}} \delta q_H = \sum_{i=1}^H \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ін}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \end{aligned} \quad (14.28)$$

де $Q_1^{\text{ін}}, Q_2^{\text{ін}}, \dots, Q_H^{\text{ін}}$ – узагальнені сили інерції, що дорівнюють:

$$Q_i^{\text{in}} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{in}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}, \quad (i=1,2,\dots,H). \quad (14.29)$$

Підставляючи (14.27) і (14.28) у рівняння (14.26), отримаємо

$$(Q_1 + Q_1^{\text{in}})\delta q_1 + (Q_2 + Q_2^{\text{in}})\delta q_2 + \dots + (Q_H + Q_H^{\text{in}})\delta q_H = 0. \quad (14.30)$$

Оскільки всі δq_i між собою незалежні, то отримана рівність може виконуватися лише тоді, коли кожний з коефіцієнтів при $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_H$ окремо дорівнює нулю, тобто

$$Q_1 + Q_1^{\text{in}} = 0, \quad Q_2 + Q_2^{\text{in}} = 0, \quad \dots, \quad Q_H + Q_H^{\text{in}} = 0. \quad (14.31)$$

Одержаними рівняннями можна безпосередньо користуватися при розв'язанні задач динаміки. Однак процес складання цих рівнянь значно спроститься, якщо виразити всі узагальнені сили інерції, що входять у ці рівняння, через кінетичну енергію системи.

Перетворимо спочатку величину Q_1^{in} . Оскільки сила інерції будь-якої з точок системи $\vec{F}_k^{\text{in}} = -m_k \vec{a}_k = -m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}$, то з формули (14.31) отримаємо

$$-Q_1^{\text{in}} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}. \quad (14.32)$$

Щоб виразити Q_1^{in} через кінетичну енергію системи, треба перетворити праву частину рівності (14.32) так, щоб вона містила тільки швидкості \vec{v}_k точок системи. З цією метою зауважимо передусім, що

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \right) - \vec{v}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \right). \quad (14.33)$$

У справедливості рівності (14.33) легко переконатися, продиференціювавши добуток, що стоїть праворуч в дужках. Урахуємо далі, що

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{v}_k = \dot{\vec{r}}_k, \quad \frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1,$$

де \dot{q}_1 – узагальнена швидкість, що відповідає узагальненій координаті q_1 .

Тоді для похідних від \vec{r}_k , що входять у (14.33), буде справедливим таке:

1. Частинна похідна від \vec{r}_k по q_1 є границя відношення частинного приросту $(\Delta\vec{r}_k)_1$ до приросту Δq_1 . Звідси відповідно до правила Лопітала (позначаючи $\partial\vec{r}_k$ просто як $\Delta\vec{r}_k$) знайдемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1} &= \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}_k}{\Delta q_1} = \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt}(\Delta\vec{r}_k)}{\frac{d}{dt}(\Delta q_1)} = \\ &= \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta\left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}\right)}{\Delta\left(\frac{dq_1}{dt}\right)} = \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_k}{\Delta\dot{q}_1} = \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_1}. \end{aligned} \quad (14.34)$$

2. Операції повного диференціювання по t і частинного диференціювання по q_1 переставні, що дає

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}\right) = \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_1}. \quad (14.35)$$

Користуючись співвідношеннями (14.34) і (14.35), запишемо рівність (14.33) так

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_k \cdot \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_1}\right) - \vec{v}_k \cdot \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \frac{\partial\vec{v}_k^2}{\partial\dot{q}_1}\right) - \frac{1}{2} \frac{\partial\vec{v}_k^2}{\partial q_1}.$$

Тоді вираз (14.32), якщо врахувати, що маса – величина стала, а сума похідних дорівнює похідній від суми, запишемо у такому вигляді

$$\begin{aligned}
 -Q_1^{\text{ін}} &= \sum_{k=1}^n m_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_k^2}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_k^2}{\partial q_1} \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_k \bar{v}_k^2}{\partial \dot{q}_1} \right) - \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_k \bar{v}_k^2}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2} \right) = \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1},
 \end{aligned}$$

де $T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}$ – кінетична енергія системи.

Аналогічні вирази можна отримати для всіх інших узагальнених сил інерції. Тоді рівняння (14.31) набувають вигляду

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1, \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2, \\
 &\dots \dots \dots \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_H} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_H} &= Q_H.
 \end{aligned} \tag{14.36}$$

Рівняння (14.36) є диференціальними рівняннями руху системи в узагальнених координатах або рівняннями Лагранжа другого роду. Кількість цих рівнянь дорівнює числу степенів вільності системи.

Рівняння Лагранжа другого роду дають єдиний та достатньо простий метод розв'язання задач динаміки. Важлива перевага цих рівнянь полягає в тому, що їхній вигляд і число не залежать ні від кількості тіл, що входять в дану систему, ні від того, як ці тіла рухаються. Крім того, при ідеальних в'язях до правих частин рівнянь

(14.36) входять узагальнені активні сили та ці рівняння дозволяють заздалегідь виключити з розгляду всі невідомі реакції в'язей.

Основна задача динаміки в узагальнених координатах полягає в тому, щоб, знаючи узагальнені сили та початкові умови, знайти закон руху системи у вигляді

$$q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \quad \dots, \quad q_H = f_H(t),$$

тобто визначити узагальнені координати як функції часу. Оскільки кінетична енергія T залежить від узагальнених швидкостей \dot{q}_i , то при диференціюванні рівнянь (14.36) по t в лівих частинах цих рівнянь з'являться другі похідні по часу \ddot{q}_i . Отже, рівняння Лагранжа є звичайними диференціальними рівняннями другого порядку відносно узагальнених координат q_1, q_2, \dots, q_H .

Випадок потенціальних сил

Якщо всі сили, які діють на систему, потенціальні, то, використовуючи формули

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \quad \dots, \quad Q_H = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_H},$$

перше з рівнянь (14.36) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_1} = 0.$$

Остання рівність справедлива тому, що потенціальна енергія залежить тільки від координат q_1, q_2, \dots, q_H , а від узагальнених швидкостей не залежить і $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_1} = 0$. Аналогічно перетворюються всі

інші рівняння системи (14.36). Введемо функцію

$$L = T - \Pi. \quad (14.37)$$

Функцію L від узагальнених координат і узагальнених швидкостей, що дорівнює різниці між кінетичною та потенціальною енергіями системи, називають **функцією Лагранжа** або **кінетичним потенціалом**. Тоді у випадку потенціальних сил рівняння Лагранжа набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} &= 0. \end{aligned} \quad (14.38)$$

З цього випливає, що стан механічної системи, на яку діють потенціальні сили, визначається заданням однієї тільки **функції Лагранжа**, тому що, знаючи цю функцію, можна скласти диференціальні рівняння руху системи.

Задача 14.3. На кінцях тонкого однорідного стержня AB з довжиною ℓ і масою m на кінцях розміщені повзуни A і B , які ковзають під дією сили ваги стержня по напрямних Ox і Oy (Рис. 14.4).

Нехтуючи масою повзунів і силами тертя, скласти диференціальні рівняння руху стержня та визначити його кутове прискорення.

Розв'язок

Стержень має один степінь вільності, тому його положення будемо визначати однією узагальненою координатою – кутом φ . На рис. 14.4 зображена тільки активна сила – сила ваги $m\vec{g}$.

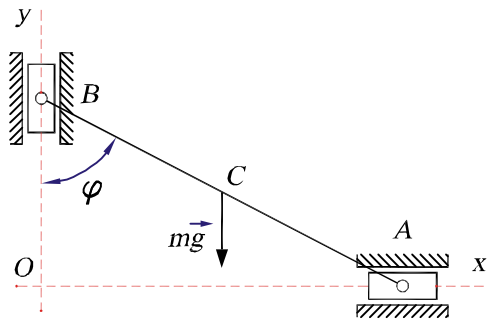


Рисунок 14.4

Реакції опор \vec{N}_A і \vec{N}_B показувати не слід, тому що вони не ввійдуть у рівняння Лагранжа, яке запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q.$$

Кінетична енергія стержня

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2,$$

де m – маса стержня, v_C – швидкість його центра мас C , $I_C = \frac{m\ell^2}{12}$ – момент інерції стержня відносно осі Cz , що проходить через точку C перпендикулярно до площини руху.

Для обчислення швидкості точки C знайдемо її координати

$$x_C = \frac{1}{2} \ell \sin \varphi, \quad y_C = \frac{1}{2} \ell \cos \varphi.$$

Диференціюючи за часом, отримаємо

$$\dot{x}_C = \frac{1}{2} \ell \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y}_C = -\frac{1}{2} \ell \dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Звідси
$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = \frac{1}{4} \ell^2 \dot{\varphi}^2.$$

Підставляючи значення I_C і v_C у вираз для T , дістанемо

$$T = \frac{1}{2} m \frac{\ell^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{12} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\varphi}^2.$$

Для визначення узагальненої сили, знайдемо вираз потенціальної енергії системи, вважаючи, що у горизонтальному положенні стержня $\Pi = 0$:

$$\Pi = \frac{1}{2} m l g \cos \varphi.$$

Узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті φ , і доданки, що входять у рівняння Лагранжа другого роду, будуть мати вигляд

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} m g l \sin \varphi ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} m l^2 \dot{\varphi} ; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} ; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 .$$

Підставляючи ці вирази у рівняння Лагранжа, отримаємо

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} m g l \sin \varphi ,$$

звідси
$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2l} \sin \varphi .$$

Це рівняння і є диференціальним рівнянням руху стержня; воно також визначає кутове прискорення стержня $\varepsilon = \ddot{\varphi}$.

Контрольні запитання

1. Що називають узагальненими координатами системи?
2. Скільки узагальнених координат має вільна точка та вільне тіло?
3. Чому дорівнює число незалежних узагальнених координат голономної системи?
4. Записати вирази для узагальненої сили.
5. Сформулюйте необхідні й достатні умови рівноваги механічної системи з голономними стаціонарними ідеальними утримуючими в'язями.
6. Як визначити елементарну роботу сил інерції під час поступального, обертального та плоскопаралельного рухах твердого тіла?
7. Що називають функцією Лагранжа?
8. Записати рівняння Лагранжа другого роду для механічної системи, на яку діють потенціальні сили.
9. Записати загальне рівняння динаміки для механічної системи з будь-якими в'язями та з ідеальними в'язями.

ГЛАВА 15. МАЛІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ БІЛЯ ПОЛОЖЕННЯ СТІЙКОЇ РІВНОВАГИ

Коливання – одне з найбільш розповсюджених явищ у природі, фізиці та техніці. Коливання часто є причиною багатьох аварій та катастроф і шкідливо впливають на людину. Поряд з цим коливання використовують у багатьох технологічних операціях та галузях техніки і для їх вивчення використовують різноманітні математичні методи.

Ми розглянемо основні властивості малих коливань механічних систем з одним і двома степенями вільності на основі застосування рівнянь Лагранжа другого роду. Механічна система може здійснювати малі коливання тільки біля положення так званої стійкої рівноваги, означення якої розглянемо насаперед.

15.1 Положення рівноваги та його стійкість

Розглянемо механічну систему з ідеальними стаціонарними геометричними в'язями, положення та рух якої визначають незалежні узагальнені координати q_1, q_2, \dots, q_N . Для вивчення коливань необхідно насаперед визначити ті положення, в яких система перебуває в рівновазі.

Як відомо, в стані рівноваги всі узагальнені сили дорівнюють нулеві, тому для консервативної системи запишемо такі залежності

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_N} = 0, \quad (15.1)$$

де Π – потенціальна енергія системи.

Розв'язуючи рівняння (15.1) відносно узагальнених координат q_1, q_2, \dots, q_N , знайдемо положення рівноваги механічної системи.

Для вивчення малих коливань механічної системи слід встановити, чи стійким є визначене положення рівноваги, чи нестійким.

Для наочності розглянемо положення рівноваги стержня AB (Рис. 15.1) з горизонтальною віссю обертання, що проходить через точку A

Стержень має два положення рівноваги при $\varphi = 0$ і $\varphi = 180^\circ$. У положенні рівноваги сили, прикладені до стержня, зрівноважені. Щоб установити, чи буде дане положення рівноваги стійким, потрібно надати системі незначне відхилення від цього положення. Якщо сили намагаються повернути систему в це положення рівноваги, то таке **положення рівноваги вважають стійким** (нижнє положення стержня). Означення поняття положення стійкої рівноваги дано в роботах **О.М.Ляпунова**. Якщо узагальнені координати q_1, q_2, \dots, q_N відрахувати від положення рівноваги та початкові значення узагальнених швидкостей і координат позначити відповідно $\dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}, \dots, \dot{q}_{N0}$ та $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{N0}$, то за Ляпуновим, рівновагу механічної системи називають стійкою, якщо для будь-якого як завгодно додатньо малого числа ε можна вказати два інші малі додатні числа η_1 і η_2 такі, що коли початкові збурення системи задовільняють умови $|q_{i0}(t)| < \eta_1$, $|\dot{q}_{i0}(t)| < \eta_2$, то надалі під час руху механічної системи задовільняються умови $|q_i(t)| < \varepsilon$ для всіх узагальнених координат.

Якщо навколо положення стійкої рівноваги всі узагальнені координати та швидкості з часом прямують до нуля

$$q_i(t) \rightarrow 0, \quad \dot{q}_i(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

то таке положення рівноваги називають **асимптотично стійким**. Таким чином, положення рівноваги вважають стійким, якщо можна задати достатньо малу область зміни початкових значень узагальнених координат і узагальнених швидкостей біля положення рівноваги, для яких величини узагальнених координат при подальшому русі системи обмежені заданою величиною ε . Оскільки в положенні рівноваги мають місце рівності (15.1), то потенціальна енергія в положенні рівноваги досягає свого екстремального значення.

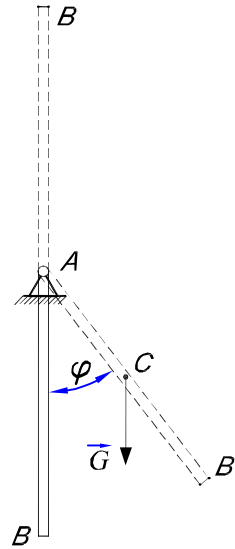


Рисунок 15.1

Для визначення стійкості даного положення рівноваги користуються **теоремами Лагранжа–Дирихле** і Ляпунова, які надамо без доведень. Теорема Лагранжа–Дирихле встановлює достатні умови стійкості положення рівноваги системи: **положення рівноваги механічної системи з голономними ідеальними стаціонарними в'язями буде стійким, якщо в ньому потенціальна енергія системи має мінімум.** Ця теорема може бути доповнена двома теоремами Ляпунова, що встановлюють умови нестійкості рівноваги:

1. Рівновага механічної системи нестійка, якщо її потенціальна енергія в положенні рівноваги не має мінімуму та його відсутність визначається складовими другого порядку малості у розкладі потенціальної енергії в ряд за степенями узагальнених координат біля положення рівноваги.

2. Рівновага механічної системи нестійка, якщо потенціальна енергія Π у положенні рівноваги має максимум і його наявність визначається складниками найменшого порядку малості в розкладі потенціальної енергії в ряд за степенями узагальнених координат біля положення рівноваги.

Згідно з теоремами Лагранжа–Дирихле та Ляпунова для встановлення стійкості положення рівноваги консервативної системи необхідно переконатися, які екстремальні значення має потенціальна енергія системи в цьому положенні.

Розглянемо одне із положень рівноваги, в якому виконуються рівності (15.1). Будемо вважати, що в цьому положенні потенціальна енергія дорівнює нулеві і від цього положення відраховують узагальнені координати

$$\Pi_0 = \Pi(0, 0, \dots, 0) = 0 . \quad (15.2)$$

Розкладемо потенціальну енергію біля положення рівноваги в ряд Маклорена за степенями узагальнених координат

$$\begin{aligned}
\Pi(q_1, q_2, \dots, q_H) = & \Pi_0 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \right)_0 q_1 + \dots + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_H} \right)_0 q_H + \\
& + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} \right)_0 q_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_H^2} \right)_0 q_H^2 + \right. \\
& \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 q_1 q_2 + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_{H-1} \partial q_H} \right)_0 q_{H-1} q_H \right] + \dots
\end{aligned} \tag{15.3}$$

Індекс 0 тут і далі означає, що ці величини обчислюють при $q_1 = q_2 = \dots = q_H = 0$. Ми обмежилися членами другого порядку малості щодо q_1, q_2, \dots, q_H . Ураховуючи рівності (15.1), (15.2) та приймаючи для коефіцієнтів при членах другого степеня позначення

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 = c_{ij}, \tag{15.4}$$

одержимо такий вираз для потенціальної енергії біля взятого положення рівноваги

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + \dots + c_{HH} q_H^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + \\
& + \dots + 2c_{H-1H} q_{H-1} q_H) + \dots
\end{aligned} \tag{15.5}$$

Коефіцієнти c_{ij} називають **коефіцієнтами жорсткості** механічної системи.

Знак потенціальної енергії визначається знаком квадратичної форми в формулі (15.5), оскільки відкинуті члени ряду більш високого порядку малості щодо q_1, q_2, \dots, q_H . Якщо квадратична форма напевно додатня біля даного положення рівноваги, а $\Pi_0 = 0$, то в цьому положенні потенціальна енергія має мінімум і воно буде положенням стійкої рівноваги.

Питання про знак квадратичної форми вирішується теоремою

Сильвестра: для того щоб квадратична форма була напевно додатньою, необхідно та достатньо, щоб усі діагональні мінори матриці квадратичної форми були додатніми. Матриця квадратичної форми (15.5) та її діагональні мінори мають вигляд

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1H} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2H} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{H1} & c_{H2} & \dots & c_{HH} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = c_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \dots \quad (15.6)$$

Таким чином, критерієм того, що квадратична форма є напевно додатньою і що відповідне положення рівноваги системи є стійким, буде

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_H > 0. \quad (15.7)$$

Доведення теореми Сильвестра можна знайти в курсах лінійної алгебри.

15.2 Кінетична енергія механічної системи біля положення рівноваги

Обчислимо кінетичну енергію механічної системи з голономними стаціонарними ідеальними в'язями, для якої радіус-вектори точок залежать тільки від узагальнених координат і не залежать явно від часу

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_H). \quad (15.8)$$

Швидкість кожної точки

$$\vec{v}_k = \dot{\vec{r}}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_H} \dot{q}_H \quad (15.9)$$

і тоді вираз для кінетичної енергії має вигляд

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k = \quad (15.10)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_H} \dot{q}_H \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_H} \dot{q}_H \right) m_k$$

або

$$T = \frac{1}{2} [A_{11} \dot{q}_1^2 + \dots + A_{HH} \dot{q}_H^2 + 2A_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2A_{H-1H} \dot{q}_{H-1} \dot{q}_H], \quad (15.11)$$

де прийняті позначення для $A_{ij} = A_{ji}$

$$A_{ij} = A_{ij}(q_1, \dots, q_H) = \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}, \quad (i, j = 1, \dots, H). \quad (15.12)$$

Якщо біля положення стійкої рівноваги механічної системи коефіцієнти розкласти в ряд Тейлора за степенями узагальнених координат

$$A_{ij}(q_1, \dots, q_H) = (A_{ij})_0 + \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_1} \right)_0 q_1 + \dots + \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_H} \right)_0 q_H + \dots, \quad (15.13)$$

то, нехтуючи величинами третього порядку малості щодо величин q_i , \dot{q}_i і прийнявши позначення $(A_{ij})_0 = a_{ij}$, одержимо вираз для кінетичної енергії

$$T = \frac{1}{2} [a_{11} \dot{q}_1^2 + \dots + a_{HH} \dot{q}_H^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2a_{H-1H} \dot{q}_{H-1} \dot{q}_H]. \quad (15.14)$$

Коефіцієнти a_{ij} називають **інерційними коефіцієнтами** механічної системи.

Як видно, кінетична енергія механічної системи виражена квадратичною формою і оскільки вона завжди величина додатня, то ця форма напевно додатня та її коефіцієнти за теоремою Сильвестра задовільняють умови:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$\dots, \Delta_H = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1H} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{H1} & \dots & a_{HH} \end{vmatrix} > 0. \quad (15.15)$$

15.3 Функція Релея та узагальнені сили опору при малих коливаннях біля положення рівноваги механічної системи

Оскільки функція Релея

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \mu_k v_k^2, \quad (15.16)$$

яку використовують для обчислення узагальнених сил опору

$$Q_{\phi}^i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}, \quad (15.17)$$

має вигляд аналогічний до виразу кінетичної енергії (15.10), то вона біля положення рівноваги механічної системи теж набирає аналогічного до (15.14) вигляду

$$\Phi = \frac{1}{2} [b_{11} \dot{q}_1^2 + \dots + b_{HH} \dot{q}_H^2 + 2b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2b_{H-1H} \dot{q}_{H-1} \dot{q}_H], \quad (15.18)$$

де коефіцієнти b_{ij} обчислюють за такими ж формулами як і a_{ij} , в яких замість мас m_k використовують коефіцієнти μ_k опору середовища.

15.4 Малі коливання механічної системи з одним ступенем вільності біля положення стійкої рівноваги

Розглянемо рух консервативної механічної системи з одним ступенем вільності біля положення її стійкої рівноваги, в якому узагальнена координата q дорівнює нулеві. Нехай при $t = 0$ систему відхилили від положення рівноваги й її точкам надали невеликі

початкові швидкості, такі, що в подальшому русі узагальнена координата q та узагальнена швидкість \dot{q} будуть малі за модулем унаслідок руху біля положення стійкої рівноваги.

Ці умови дозволяють для дослідження руху системи використовувати наведені вище вирази для потенціальної й кінетичної енергій та функції Релея.

Для системи з одним ступенем вільності маємо з формул (15.4), (15.13) і (15.17) для потенціальної енергії

$$\Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad (15.19)$$

де $c > 0$; для кінетичної енергії

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad (15.20)$$

де $a > 0$; для функції Релея

$$\Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2, \quad (15.21)$$

де $b > 0$.

Будемо вважати, що на точки механічної системи крім консервативних сил та сил опору діють збурювальні сили, узагальнена сила яких має періодичний характер

$$Q_B = H \sin(pt + \delta). \quad (15.22)$$

Складемо рівняння Лагранжа другого роду, що матиме такий вигляд

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_{\Pi} + Q_{\Phi} + Q_B, \quad (15.23)$$

де $Q_{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}$ – потенціальна узагальнена сила, $Q_{\Phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$ –

узагальнена сила опору, Q_B – узагальнена збурювальна сила.

Тоді
$$Q_{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -cq, \quad Q_{\Phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -b\dot{q},$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = a\ddot{q}. \quad (15.24)$$

Відповідно до (29.23) отримаємо

$$a\ddot{q} = -cq - b\dot{q} + H \sin(pt + \delta), \quad (15.25)$$

або
$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = h \sin(pt + \delta), \quad (15.26)$$

де
$$k^2 = \frac{c}{a}, \quad 2n = \frac{b}{a}, \quad h = \frac{H}{a}.$$

Ми одержали диференціальне рівняння, яке цілком аналогічне до диференціального рівняння змушених коливань матеріальної точки в середовищі з опором.

Якщо сили опору відсутні ($b=0$), отримаємо диференціальне рівняння змушених коливань у середовищі без опору

$$\ddot{q} + k^2q = h \sin(pt + \delta), \quad (15.27)$$

Якщо збурювальні сили відсутні ($H=0$), то відповідно матимемо диференціальні рівняння вільних незгасаючих коливань

$$\ddot{q} + k^2q = 0 \quad (15.28)$$

і вільних згасаючих коливань

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0. \quad (15.29)$$

Розв'язки цих диференціальних рівнянь й аналіз відповідних коливань детально розглянуті в главі 16 «Прямолінійні коливання точки».

15.5 Малі коливання механічної системи з двома степенями вільності біля положення стійкої рівноваги

Як уже відомо з теорії коливань однієї матеріальної точки, а отже і системи точок з одним ступенем вільності, надзвичайно важливим у практичних розрахунках є обчислення циклічної частоти вільних коливань з метою запобігти появі досить небезпечного явища – резонанса, коли амплітуда коливань механічної системи може досягти якої завгодно величини при наближенні частоти збурювальних сил до частоти вільних коливань системи.

Якщо частоту вільних коливань точки або системи точок з одним ступенем вільності обчислюють за формулою

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{або} \quad k = \sqrt{\frac{c}{a}},$$

то для системи з двома та більшим числом ступенів вільності таких частот буде відповідно дві або більше й їх обчислення дещо ускладнене.

Щоб показати, як розв'язують цю задачу як основну задачу теорії коливань, ми розглянемо малі коливання механічної системи з двома степенями вільності.

Для системи з двома степенями вільності з формул (15.4), (15.13) маємо біля положення стійкої рівноваги:

для потенціальної енергії

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2), \quad (15.30)$$

$$\text{де } \Delta_1 = c_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0;$$

для кінетичної енергії

$$T = \frac{1}{2} [a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2], \quad (15.31)$$

$$\text{де } \Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Складемо рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}. \quad (15.32)$$

Обчисливши відповідні похідні від виразів (15.30) і (15.31), отримаємо такі лінійні диференціальні рівняння малих вільних коливань механічної системи з двома степенями вільності:

$$\begin{aligned} [a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1] + [a_{12}\ddot{q}_2 + c_{12}q_2] &= 0, \\ [a_{12}\ddot{q}_1 + c_{12}q_1] + [a_{22}\ddot{q}_2 + c_{22}q_2] &= 0. \end{aligned} \quad (15.33)$$

Механічні системи, для яких квадратичні вирази для кінетичної і потенціальної енергій (15.4) і (15.13) є точними без відкидання членів більш високого порядку, називають лінійними. Для цих систем рівняння (15.33) є точними рівняннями. Математична теорія малих коливань не відрізняється від теорії лінійних коливань, але останні можуть бути і не малими.

Розв'язок рівнянь (15.33) шукаємо в формі

$$q_1 = A_1 \sin(kt + \alpha), \quad q_2 = A_2 \sin(kt + \alpha), \quad (15.34)$$

де сталі величини A_1 , A_2 , k , α потрібно визначити.

Підставляємо (15.34) у диференціальні рівняння (15.33) і одержуємо тотожності, в яких сталі коефіцієнти при $\sin(kt + \alpha)$ повинні дорівнювати нулеві:

$$\begin{cases} A_1(c_{11} - a_{11}k^2) + A_2(c_{12} - a_{12}k^2) = 0, \\ A_1(c_{12} - a_{12}k^2) + A_2(c_{22} - a_{22}k^2) = 0. \end{cases} \quad (15.35)$$

Однорідна система лінійних рівнянь щодо A_1 і A_2 має розв'язок відмінний від нуля, якщо визначник цієї системи дорівнює нулеві:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{12} - a_{12}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0,$$

або в таких двох формах

$$f(k^2) = (c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0, \quad (15.36)$$

$$f(k^2) = (a_{11}a_{22} -$$

$$-a_{12}^2)k^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12})k^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = 0. \quad (15.37)$$

Одержане рівняння (15.36) або еквівалентне йому рівняння (15.37) називають рівнянням частот і тільки для значень частот k , що задовільняють це рівняння, існують відмінні від нуля A_1, A_2 а, отже, $i q_1, q_2$.

Покажемо, що обидва корні цього рівняння щодо k^2 дійсні й додатні. Користуючись відношеннями біля формул (15.30) і (15.31), з рівностей (15.36) чи (15.37) відповідно отримаємо:

$$f(0) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, \quad f(\infty) > 0,$$

$$f\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) = \left(\frac{a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11}}{a_{11}}\right)^2 < 0,$$

$$f\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) = \left(\frac{a_{22}c_{12} - a_{12}c_{22}}{a_{22}}\right)^2 < 0.$$

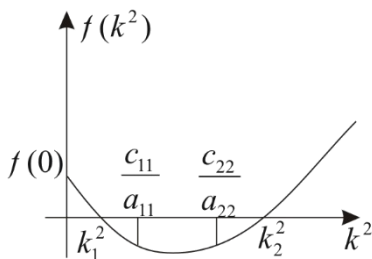


Рисунок 15.2

Це означає, що між $k^2 = 0$ і $k^2 = \infty$ графік функції $f = f(k^2)$ перетинає вісь у двох точках (Рис. 15.2), що визначають два додатніх кореня k_1^2 і k_2^2 рівняння частот.

Кожному додатньому значенню k_1^2 і k_2^2 відповідає один окремий розв'язок (15.34), причому кожній частоті відповідають свої значення й окремі лінійно незалежні розв'язки, а тому загальний розв'язок буде їх лінійною комбінацією:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= A_2^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (15.38)$$

Із рівнянь (15.35)

$$\frac{A_2^{(i)}}{A_1^{(i)}} = \left(\frac{c_{11} - a_{11} k_i^2}{c_{12} - a_{12} k_i^2} \right) = \mu_i, (i = 1, 2), \quad (15.39)$$

а тому вирази (15.38) можна записати так

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= A_1^{(1)} \mu_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \mu_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (15.40)$$

Чотири сталі $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, α_1 , α_2 визначають з початкових умов. Величини

$$q_1^{(1)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1), \quad q_2^{(1)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) \mu_1$$

називають головними коливаннями для частоти k_1 ,

$$q_1^{(2)} = A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad q_2^{(2)} = A_1^{(2)} \mu_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) -$$

головними коливаннями для частоти k_2 .

Вільні лінійні коливання механічної системи з двома степенями вільності складаються з суми двох головних гармонійних коливань з частотами k_1 і k_2 .

Частоти $k_1^1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}$ і $k_2^1 = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}$ (Рис. 15.2) називають

парціальними частотами системи.

Коефіцієнти μ_1 і μ_2 називають коефіцієнтами форми коливань.

Частоти коливань k_1 і k_2 , коефіцієнти форми коливань μ_1 і μ_2 є головними характеристиками малих коливань системи з двома

степенями вільності.

На закінчення відзначимо, що методи складання та інтегрування диференціальних рівнянь малих коливань, а також визначення їх частот для системи з двома степенями вільності біля положення стійкої рівноваги без жодних змін можна перенести на системи з більшим числом степенів вільності.

Контрольні запитання

1. Яке положення рівноваги називають стійким?
2. Сформулюйте теорему Лагранжа–Дирихле, яка встановлює достатні умови стійкості положення рівноваги.
3. Сформулюйте теореми Ляпунова, що встановлюють умови нестійкості рівноваги.
4. Запишіть диференціальні рівняння малих коливань механічних систем з одним та двома степенями вільності.

ГЛАВА 16. ТЕОРІЯ УДАРУ

16.1 Основні поняття і означення

Ударом називають механічне явище, під час якого за нескінченно малий проміжок часу, тобто майже миттєво, швидкості деяких або всіх точок механічної системи змінюються на кінцеві величини в порівнянні з їх значеннями безпосередньо перед ударом.

Зустрічаються різні за характером випадки ударних явищ. У найпростіших випадках удар має місце при миттєвому накладанні або знятті в'язей, зіткненні двох тіл з різними швидкостями. У більш складних випадках ударні явища мають місце під час ковання, штампування, забивання свай, зіткнення коліс транспорту з нерівностями дороги тощо.

Зміна швидкостей точок під час удару на скінченні величини означає, що точки одержують надзвичайно великі ударні прискорення, оскільки час зміни швидкостей нескінченно малий, і отже, на точки діють надзвичайно великі ударні сили.

Характерний графік зміни ударної сили \vec{F} за час удару τ має вигляд, показаний на рис. 16.1.

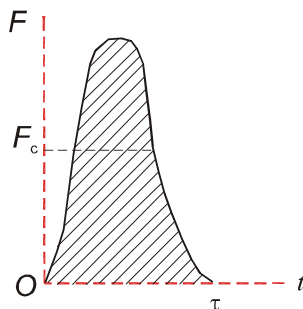


Рисунок 16.1

У багатьох випадках не є необхідним детальне знання закону зміни ударної сили. Достатньо знати імпульс цієї сили за час удару. Ударним імпульсом називають векторну величину

$$\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F} dt, \quad (16.1)$$

модуль якої зображений на рис. 30.1 заштрихованою площею.

За теоремою про середнє значення функції імпульс \vec{S} можна подати у вигляді

$$\vec{S} = \vec{F}_c \cdot \tau, \quad S = F_c \cdot \tau, \quad (16.2)$$

де \vec{F}_c називають **середньою ударною силою**, величина якої є сталою за час удару та дає такий самий ударний імпульс, як і змінна ударна сила \vec{F} .

Середня ударна сила згідно з її означенням має величину порядку $1/\tau$, тобто при малому τ є дуже великою.

Імпульс сталої за модулем сили \vec{F}_k за час удару можна за допомогою (16.2) записати так

$$\vec{S} = \vec{F}_k \cdot \tau, \quad S = F_k \tau. \quad (16.3)$$

Цей імпульс має величину порядку τ і є величиною малою порівняно з ударним імпульсом. Тому імпульсами неударних сил можна знехтувати в порівнянні з **ударними імпульсами**.

Переміщення S точок за час удару τ можна визначити за формулою

$$S = v_c \tau. \quad (16.4)$$

де v_c – середня швидкість за час удару будь-якої точки механічної системи. Оскільки v_c – скінчена величина (константа), а час удару дуже малий, то порядок малості переміщення S такий самий, як і величини $v_c \tau$.

Це твердження впливає з однієї з властивостей нескінчено малих величин. Тому переміщенням точок за час удару можна знехтувати.

Отже, з наведених міркувань впливають такі **підсумки**:

1. Дією неударних сил за час удару можна знехтувати.
2. Нехтуючи переміщеннями точок за час удару, механічну систему за цей час можна вважати нерухомою.
3. Зміну швидкості будь-якої точки за час удару визначають за теоремою про зміну кількості руху точки

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{S} = \vec{F}_c \tau, \quad (16.5)$$

де \vec{u} – швидкість точки після удару, \vec{v} – швидкість точки до удару, \vec{S} – ударний імпульс. Залежність (16.5) є основним рівнянням теорії удару.

16.2 Загальні теореми динаміки при ударі

Як уже було зазначено, основним рівнянням теорії удару є (16.5), де за теоремою про зміну кількості руху точки при ударі:

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{S}. \quad (16.6)$$

Отже зміна кількості руху точки за час удару дорівнює ударному імпульсу, прикладеному до точки.

У проєкціях на координатні осі маємо:

$$mu_x - mv_x = S_x, \quad mu_y - mv_y = S_y, \quad mu_z - mv_z = S_z. \quad (16.7)$$

Для будь-якої точки механічної системи розділимо ударні імпульси на зовнішні та внутрішні, тоді:

$$m_k \vec{u}_k - m_k \vec{v}_k = \vec{S}_k^e + \vec{S}_k^i. \quad (16.8)$$

Додаючи такі формули для всіх точок механічної системи, отримаємо

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{u}_k - \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^i. \quad (16.9)$$

Враховуючи, що $\sum_{k=1}^n m_k \vec{u}_k = \vec{Q}_u$ – кількість руху механічної

системи після удару, $\sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = \vec{Q}_v$ – кількість руху механічної

системи до удару, $\sum_{k=1}^n \vec{S}_k^i = 0$ – як сума всіх внутрішніх імпульсів,

отримаємо теорему про зміну кількості руху механічної системи при ударі

$$\vec{Q}_u - \vec{Q}_v = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e, \quad (16.10)$$

тобто: зміна кількості руху механічної системи за час удару дорівнює геометричній сумі зовнішніх ударних імпульсів, прикладених до точок системи. З (16.10) бачимо, що внутрішні ударні імпульси не впливають на зміну кількості руху механічної системи.

У проекціях на координатні осі матимемо:

$$\begin{aligned} Q_{ux} - Q_{vx} &= \sum_{k=1}^n S_{kx}^e, \\ Q_{uy} - Q_{vy} &= \sum_{k=1}^n S_{ky}^e, \\ Q_{uz} - Q_{vz} &= \sum_{k=1}^n S_{kz}^e. \end{aligned} \quad (30.11)$$

Якщо рівність (16.6) домножимо векторно на радіус-вектор точки, враховуючи, що він один і той самий до удару і після удару (за час удару точка не переміщається), то отримаємо

$$\vec{r} \times m\vec{u} - \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{S},$$

тобто, отримаємо теорему про зміну кінетичного моменту точки при ударі

$$\vec{m}_O(m\vec{u}) - \vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{m}_O(\vec{S}) \quad (16.12)$$

або

$$\vec{k}_O^u - \vec{k}_O^v = \vec{m}_O(\vec{S}), \quad (16.13)$$

яку можна сформулювати так: зміна кінетичного моменту точки відносно будь-якого центра за час удару дорівнює моменту ударного імпульса відносно цього центра.

У випадку механічної системи, на точки якої діють зовнішні та внутрішні ударні імпульси, теорему про зміну кінетичного моменту

точки при ударі запишемо так

$$\vec{k}_O^u - \vec{k}_O^v = \vec{m}_O(\vec{S}_i^i) + \vec{m}_O(\vec{S}_i^e) \quad (16.14)$$

і додамо їх для всіх точок системи

$$\sum_{k=1}^n \vec{k}_O^u - \sum_{k=1}^n \vec{k}_O^v = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{S}_k^i) + \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{S}_k^e).$$

Суми, що стоять зліва у цьому виразі, є кінетичними моментами механічної системи після удару \vec{K}_O^u та до удару \vec{K}_O^v , сума моментів внутрішніх ударних імпульсів у правій частині виразу дорівнює нулю. Тоді остаточно запишемо теорему про зміну кінетичного момента механічної системи при ударі

$$\vec{K}_O^u - \vec{K}_O^v = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{S}_k^e) \quad (16.15)$$

тобто: зміна кінетичного моменту механічної системи відносно будь-якого центра O за час удару дорівнює геометричній сумі моментів усіх зовнішніх ударних імпульсів відносно цього центра.

З рівності (16.15) видно, що внутрішні ударні імпульси не впливають на зміну кінетичного момента механічної системи.

16.3 Удар точки по нерухомій поверхні

Удар називають прямим, якщо швидкість точки \vec{v} перед ударом напрямлена по нормалі до поверхні в точці M удару (Рис. 16.2). Після удару точка відокремиться від поверхні зі швидкістю \vec{u} , напрямленою теж по нормалі до поверхні.

Процес удару точки до поверхні можна розділити на фазу деформації та фазу відновлення форми тіл. Фазу деформації відраховують по часу від моменту початку

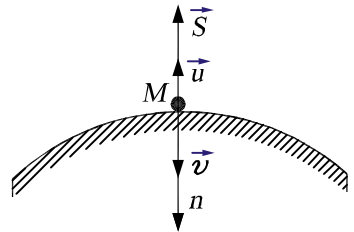


Рисунок 16.2

удару до моменту найбільшої деформації тіл. У кінці цієї фази швидкість точки дорівнює нулеві. За час фази відновлення матеріальні тіла від моменту часу найбільшої деформації до часу відокремлення тіл відновлюють свою початкову форму при пружному ударі – частково, при абсолютно пружному – повністю. При абсолютно непружному ударі форма тіл не відновлюється зовсім і удар має лише одну фазу деформації тіл.

За час удару на точку діє реактивний ударний імпульс \vec{S} з боку поверхні, який можна представити як суму двох фазових імпульсів, віднесених до часу деформації тіл і до часу відновлення їх форм

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2. \quad (16.16)$$

Відношення числових значень ударних імпульсів за другу та першу фази удару називають коефіцієнтом відновлення

$$k = \frac{S_2}{S_1}. \quad (16.17)$$

Оскільки $S_1 \geq S_2$, то $0 \leq k \leq 1$ і при абсолютно пружному ударі $k = 1$, а при абсолютно непружному ударі $k = 0$.

Застосуємо теорему про зміну кількості руху точки за першу та другу фази окремо в проекції на нормаль \vec{n} , ураховуючи, що швидкість точки між фазами дорівнює нулеві

$$0 - mv = -S_1, \quad -tu - 0 = -S_2, \quad (16.18)$$

$$\text{звідси} \quad S_1 = mv, \quad S_2 = tu, \quad k = \frac{S_2}{S_1} = \frac{u}{v}. \quad (16.19)$$

Як бачимо, коефіцієнт відновлення при прямому ударі точки дорівнює відношенню числових значень швидкостей точки після удару та до удару.

Якщо виразити повний ударний імпульс залежно від коефіцієнта відновлення, то з формул (16.16) і (16.17) маємо

$$S = S_1 + S_2 = m(v + u) = mv(1 + k), \quad (16.20)$$

звідси при $k=1$, $- S = 2mv$, при $k=0$, $- S = mv$, тобто, ударний імпульс при абсолютно пружному ударі вдвоє більший від ударного імпульсу при абсолютно непружному ударі.

Експериментальне визначення коефіцієнта відновлення

Коефіцієнт відновлення для матеріалів деяких тіл при їх ударних взаємодіях можна визначати експериментально, виходячи з формули (16.19) (Рис. 16.3), якщо виміряти висоту h_2 , на яку підніметься тіло у вигляді кульки внаслідок прямого удару по нерухомій поверхні після падіння з заданої висоти h_1 .

Швидкість кульки перед ударом при падінні з висоти h_1 дорівнює $v = \sqrt{2gh_1}$.

Щоб кулька після удару могла піднятися на висоту h_2 , вона повинна мати швидкість $u = \sqrt{2gh_2}$. Тоді для

коефіцієнта відновлення маємо

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \quad (16.21)$$

Таким чином, знаючи коефіцієнт відновлення k для даних матеріалів і швидкість v точки перед ударом, можна знайти її швидкість u після прямого удару по нерухомій поверхні та імпульс, що діє на точку за час цього удару

$$u = kv, \quad S = mv(1 + k). \quad (16.22)$$

Косий удар

Удар називають непрямым або косим, якщо вектор швидкості \vec{v} точки перед ударом утворює кут α з нормаллю до поверхні.

При $\alpha = 0$ матимемо прямий удар. Кут α називають кутом

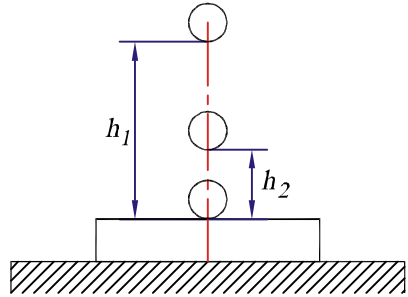


Рисунок 16.3

падіння. Вектор швидкості \vec{u} точки після удару утворює кут β з нормаллю до поверхні, який називають кутом відбиття (Рис. 16.4).

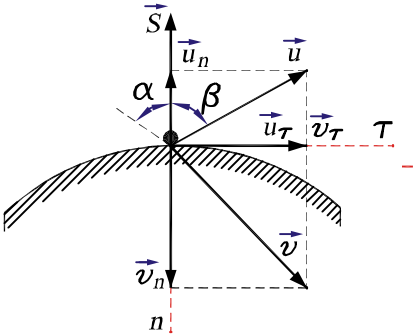


Рисунок 16.4

Приймаючи поверхню настільки гладкою, щоб ударне тертя вважати відсутнім, запишемо теорему про зміну ударного імпульсу

$$\vec{S} = m\vec{u} - m\vec{v}, \quad (16.23)$$

що напрямлений по нормалі до поверхні, причому

$$\begin{cases} S = S_n = mu_n - mv_n, \\ S_{1n} = mv_n, \\ S_{2n} = mu_n, \\ S_\tau = 0 = mu_\tau - mv_\tau, \\ u_\tau = v_\tau. \end{cases} \quad (16.24)$$

Коефіцієнт відновлення в цьому випадку

$$k = \frac{S_{2n}}{S_{1n}} = \frac{u_n}{v_n}, \quad (16.25)$$

тобто дорівнює відношенню величин нормальної складової швидкості точки після удару та до удару.

Якщо для даних двох матеріалів коефіцієнт відновлення відомий, то, знаючи кут падіння α і швидкість точки до удару \vec{v} , для швидкості точки після удару \vec{u} , імпульса \vec{S} і кута відбиття β , отримаємо такі вирази:

$$u_n = kv_n, u_\tau = v_\tau, S = m(1+k)v_n, \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{k}\operatorname{tg}\alpha. \quad (16.26)$$

Як і у випадку прямого удару для ударного імпульсу при $k = 0$ і $k = 1$ відповідно маємо:

$$S = mv_n \quad \text{і} \quad S = 2mv_n, \quad (16.27)$$

тобто імпульс при абсолютно пружному ударі вдвоє більший від імпульсу при абсолютно непружному ударі.

16.4 Прямий центральний удар двох тіл

Удар двох тіл називають прямим центральним, якщо спільна нормаль поверхонь тіл у точці удару проходить через їх центри мас і швидкості центрів мас до удару напрямлені по цій спільній нормалі.

Прикладом такого удару є удар двох однорідних куль, центри яких до удару рухаються по одній і тій самій прямій (Рис. 16.5)

Нехай маси тіл дорівнюють

m_1 і m_2 та їх швидкість до удару

\vec{v}_1 і \vec{v}_2 , а після удару відповідно

\vec{u}_1 та \vec{u}_2 .

Задача полягає в тому, щоб за відомими масами тіл, їх швидкостями до удару та коефіцієнтом відновлення k обчислити швидкості тіл після удару.

Застосуємо для кожного тіла в обох фазах удару теорему про зміну кількості руху в проекції на вісь C_1x , напрямлену по лінії удару (Рис. 16.5)

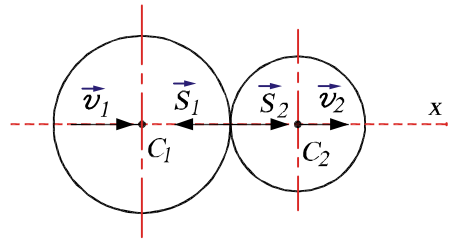


Рисунок 16.5

$$m_1u - m_1v_1 = -S_1', \quad m_1u_1 - m_1u = -S_1'',$$

$$m_2 u_2 - m_2 v_2 = -S_2', \quad m_2 u_2 - m_1 u_1 = -S_2'', \quad (16.28)$$

де u – спільна швидкість тіл у кінці першої фази удару,
 $S_1' = -S_2'$, $S_1'' = -S_2''$ – за принципом рівності дії та протидії.

Ураховуючи залежність (16.17), для коефіцієнта відновлення отримаємо

$$k = \frac{S_1''}{S_1'} = \frac{S_2''}{S_2'}, \quad (16.29)$$

і враховуючи (16.28), а також рівності:

$$S_1' = -S_2', \quad S_1'' = -S_2'' \quad \text{і} \quad S_1' + S_2'' = S_2' + S_2'', \quad (16.30)$$

маємо:

$$\begin{aligned} u &= \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \\ u &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2. \end{aligned} \quad (16.31)$$

Тоді для коефіцієнта відновлення одержимо вираз

$$k = \frac{S_1''}{S_1'} = \frac{m_1 u - m_1 u_1}{m_1 v_1 - m_1 u},$$

з якого при підстановці замість u його виразу (16.31) в знаменник за першою формулою, а в чисельник за другою, остаточно дістанемо

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}. \quad (16.32)$$

З цього виразу для k видно, що в чисельнику та в знаменнику

маємо відповідно відносні швидкості куль після удару та до удару, а тому цей коефіцієнт можна назвати коефіцієнтом відновлення відносних швидкостей куль.

Якщо k відоме, то з третьої формули (16.31) і (16.32) знайдемо u_1 і u_2

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1(m_1 - m_2k) + m_2v_2(1+k)}{m_1 + m_2}, \\ u_2 &= \frac{v_2(m_2 - m_1k) + m_1v_1(1+k)}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (16.33)$$

Ударні імпульси можна обчислити за формулами (16.28), враховуючи (16.33).

Розглянемо два випадки:

а) Абсолютно непружний удар ($k=0$). У цьому випадку знаходимо

$$u_1 = u_2 = u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \quad (16.34)$$

Обидві кулі рухаються з однаковою швидкістю.

Ударний імпульс S дорівнює

$$S = S_1' + S_1'' = S_2' + S_2'' = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \quad (16.35)$$

б) Абсолютно пружний удар ($k=1$). У цьому випадку

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2), \\ u_2 &= v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2), \end{aligned} \quad (16.36)$$

а для імпульсу S матимемо:

$$S = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \quad (16.37)$$

Як видно з формул (16.35) і (16.37), при абсолютно пружному

ударі ударний імпульс удвоє більший, ніж при абсолютно непружному ударі. В окремому випадку, коли $m_1 = m_2$ з (16.36) одержимо

$$u_1 = v_2, u_2 = v_1.$$

тобто дві кулі однакової маси при абсолютно пружному ударі обмінюються швидкостями.

16.5 Втрата кінетичної енергії при непружному ударі двох тіл. Теорема Карно

Обчислимо величину втраченої кінетичної енергії за час абсолютно непружного удару двох куль

$$T_v - T_u,$$

де $T_v = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)$ – кінетична енергія куль до удару;

$T_u = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$ – кінетична енергія куль після удару.

З урахуванням рівності (16.34) T_u можна записати так

$$T_u = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = \frac{1}{2}(m_1 v_1 + m_2 v_2)u. \quad (16.38)$$

Величина втраченої кінетичної енергії

$$\begin{aligned} T_v - T_u &= T_v - 2T_u + T_u = \\ &= \frac{1}{2} \left[(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - 2m_1 v_1 u - 2m_2 v_2 u + (m_1 u^2 + m_2 u^2) \right] \end{aligned}$$

або

$$T_v - T_u = T_v - 2T_u + T_u = \frac{1}{2} \left[m_1 (v_1 - u)^2 + m_2 (v_2 - u)^2 \right]. \quad (16.39)$$

Різниці $(v_1 - u)$, $(v_2 - u)$ можна назвати **втраченими швидкостями** куль при ударі, а праву частину рівності (16.39) – кінетичною енергією втрачених швидкостей $T_{(u-v)}$, а тому рівність (16.39) відображає теорему Карно при абсолютно непружному ударі: **втрачена кінетична енергія при абсолютно непружному ударі двох куль дорівнює кінетичній енергії втрачених швидкостей куль**, тобто

$$T_v - T_u = T_{(u-v)} \quad (16.40)$$

16.6 Удар по тілу в обертальному русі

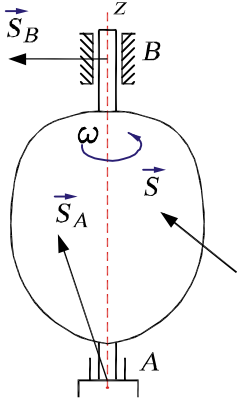


Рисунок 16.6

Розглянемо тіло, що обертається навколо осі Az з кутовою швидкістю ω_0 (Рис. 16.6). Нехай у деякий момент часу $t = 0$ на тіло подіяв ударний імпульс \vec{S} . Тоді рівняння (16.15) в проєкції на вісь обертання набуде вигляду

$$K_z^u - K_z^v = m_z(\vec{S}), \quad (16.41)$$

бо моменти реактивних імпульсів \vec{S}_A і \vec{S}_B відносно осі z , що виникають у підшипниках, дорівнюють нулеві.

Оскільки

$$K_z^v = I_z \omega_0, \quad K_z^u = I_z \omega,$$

де ω –кутова швидкість тіла після удару, то з (16.41) маємо:

$$I_z(\omega - \omega_0) = m_z(\vec{S})$$

$$\text{або} \quad \omega = \omega_0 + \frac{1}{I_z} m_z(\vec{S}). \quad (16.42)$$

Формула (16.42) визначає зміну кутової швидкості тіла відносно осі обертання.

Кутова швидкість тіла за час удару змінюється на величину, що дорівнює відношенню моменту ударного імпульсу до моменту інерції тіла відносно осі обертання.

Контрольні запитання

1. Що називають ударом?
2. Сформулюйте основне допущення теорії удару.
3. Як визначають зміну швидкості будь-якої точки за час удару?
4. Сформулюйте загальні теореми динаміки при ударі.
5. Опишіть процес удару точки по поверхні.
6. Що таке коефіцієнт відновлення та як його визначити експериментально?
7. Дайте визначення прямого та непрямого ударів.
8. Сформулюйте теорему Карно.
9. Як змінюється кутова швидкість тіла, яке обертається, за час удару?
10. Чому в теорії удару не враховують теорему про зміну кінетичної енергії?

ЛІТЕРАТУРА

1. **Павловський, М.А.** Теоретична механіка [Текст]: підручник / М.А. Павловський // Видавництво «Техніка», Київ. - 2002. - 512 с.
2. **Яскілка, М.Б.** Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки [Текст]: посібник / М.Б. Яскілка – К.: Вища шк.: Веселка, 1999. – 351 с.
3. **Штанько, П.К.** Теоретична механіка [Текст]: навчальний посібник / П.К. Штанько, В.Г. Шевченко, Л.Ф. Дзюба, В.Р. Пасіка, О.М. Поляков; за ред. Штанько П.К. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2013. - 376 с.
4. **Бутенин, Н.В.** Курс теоретической механики [Текст]: В 2–х Т.: Учеб. пособие для студ. вузов / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2002. – 736 с.
5. **Бухгольц, Н.Н.** Основной курс теоретической механики [Текст] / Н.Н. Бухгольц; перераб. и с доп. С.М. Тарга. Ч. 1–2. – М., «Наука», 1972. – 467с.
6. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учеб. /С.М. Тарг; 13–е изд. Стереотип. – М. Высш. Школа, 2001. – 416 с.
7. **Мещерский, И.В.** Задачи по теоретической механике [Текст]: учеб. пособие для вузов. / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 38–е изд. Стереотип. – СПб.: Лань, 2001. – 448 с.
8. **Яблонский, А.А.** Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст]: учебное пособие для вузов / А.А. Яблонский; 7–е изд. испр. – М.: Интеграл–Пресс, 2002. – 384 с.
9. **Бать, М.И.** Теоретическая механика в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие для вузов / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – 9–е изд., перераб. – М.: Наука, 1990. – Том 1: Статика и кинематика. – 1990. – 670 с.- Том 2: Динамика. – 1966. – 664 с.
10. **Смерека, І.П.** Короткий довідник з теоретичної механіки [Текст]: навчальний посібник / І.П. Смерека, А.Ф. Барвінський, Б.Д. Білоус, І.В. Кузьо, Я.А. Зінько - Львів: «Інтелект-Захід», 2001. - 240 с.