

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

Д. І. Анпілогов, Н. В. Сніжко

Ряди ФУР'Є
вибрані питання

АКЦЕНТ ІТ
Запоріжжя
2014

УДК 517.518.45
ББК 22.161.5
А 69

Рекомендовано до видання Вченою радою ЗНТУ
(протокол №3 від 03.11.2014)

Рецензенти:

Л. М. Карпуков — завідувач кафедри захисту інформації Запорізького національного технічного університету, доктор технічних наук, професор

Г. В. Корнич — завідувач кафедри системного аналізу та обчислювальної математики Запорізького національного технічного університету, доктор фізико-математичних наук, професор

Анпілогов Д. І., Сніжко Н. В.

А 69

Ряди Фур'є. Вибрані питання : навчальний посібник / Д. І. Анпілогов, Н. В. Сніжко. — Запоріжжя : Акцент Інвесттрейд, 2014. — 92 с.

В доступній формі викладено основи теорії рядів Фур'є. Текст орієнтовано на студентів радіотехнічних спеціальностей. Відповідно до цього дібрано приклади застосування цих рядів.

Значна увага приділяється використанню засобів середовища MATLAB для візуалізації результатів розрахунків.

Для більш глибокого сприйняття матеріалу запропоновано варіанти завдань для самостійного виконання

УДК 517.518.45
ББК 22.161.5

ISBN 978-966-2602-75-III

© Д. І. Анпілогов, 2014
© Н. В. Сніжко, 2014
© ЗНТУ, 2014

З М І С Т

Вступ	5
1 Теоретичні відомості	6
1.1 Гармоніки	6
1.2 Коефіцієнти Фур'є	8
1.2.1 Властивість синус- і косинус-компонент	8
1.2.2 Знаходження коефіцієнтів Фур'є	9
1.2.3 Зміна інтервалу розкладання	11
1.3 Зауваження про збіжність	15
1.4 Розкладання за синусами і косинусами	16
1.4.1 Розкладання за синусами	16
1.4.2 Розкладання за косинусами	19
1.5 Приклади рядів Фур'є	22
1.5.1 Меандр	22
1.5.2 Імпульс у вигляді трапеції	25
2 Приклади застосування рядів Фур'є	33
2.1 Опір котушки змінному струму	33
2.2 Полірезонанс	44
2.2.1 Елементарна теорія резонансу	44
2.2.2 Випадок полігармонічного збудження	49
2.3 Дослідження <i>RC</i> -фільтрів	53
2.3.1 Проходження гармоніки через <i>RC</i> -фільтр	54
2.3.2 Випадок довільного сигналу	63

3 Використані скрипти	66
3.1 Деякі відомості про MATLAB	66
3.2 Часткові суми меандру	68
3.3 Імпульс у вигляді трапеції	70
3.4 Розрахунок опору котушки	72
3.5 Зіставлення напруги і струму котушки	73
3.6 Розрахунок резонансної кривої	74
3.7 Розрахунок полірезонансу	75
3.8 Робота <i>RC</i> -фільтрів	75
4 Індивідуальні завдання	78
4.1 Завдання 1	78
4.2 Завдання 2	79
4.3 Завдання 3	79
4.4 Завдання 4	80
4.5 Завдання 5	81
4.6 Завдання 6	81
4.7 Завдання 7	88
Бібліографічний список	90

Вступ

Ряди Фур'є є різновидом функціональних рядів. Доданки таких рядів – тригонометричні функції кратних частот, тому за допомогою рядів Фур'є можна представити будь-який періодичний сигнал або процес (принаймні такий, для якого можна побудувати фізичну реалізацію). З цього випливає важлива роль, яку апарат рядів Фур'є відіграє при дослідженні сигналів методами гармонічного аналізу. Одним з важливих прикладів такого дослідження є аналіз розв'язків диференціальних рівнянь вимушених коливань, які відбуваються під дією довільної періодичної змушуючої сили.

Крім того, аргументу функції можна надати сенс просторової координати. Тому ряди Фур'є зручно застосовувати при описанні просторово періодичних структур – випромінюючих антен (фазові антенні решітки), кристалічних ґраток і т.ін. При цьому значно спрощується розв'язування низки задач теорії дифракції.

Досить потужним виявляється застосування рядів Фур'є також при розв'язуванні диференціальних рівнянь в частинних похідних (рівнянь математичної фізики). Це відомі рівняння Лапласа, Пуассона, Гельмгольца (хвильове рівняння), рівняння переносу (теплопровідності, в'язкості, дифузії), та ін. Розроблено т.зв. метод Фур'є розділення змінних при розв'язуванні рівнянь такого типу.

Отже, вивчення рядів Фур'є є важливим обов'язковим елементом сучасної математичної освіти. В цій роботі викладено основи теорії рядів Фур'є та запропоновано задачі для самостійного розв'язування.

Для графічної інтерпретації отримуваних результатів нами широко використано середовище МАТЛАВ, тому окремий розділ присвячено роботі в цьому середовищі і викладенню текстів програм (скриптів).

Середовище МАТЛАВ містить вбудовані спеціалізовані функції для роботи з коефіцієнтами Фур'є у комплексній формі, але ми вважаємо за краще при першому знайомстві з предметом уникнути цього питання.

Зауважимо, нарешті, викладення орієнтовано на студентів радіотехнічних спеціальностей, звідки і випливає специфіка обраних для розглядання прикладів.

1

Теоретичні відомості

1.1 Гармоніки

Розглянемо деяку функцію $f = f(t)$, визначену на інтервалі $t \in [t_0; t_0 + T]$. Її можна представити у вигляді розвинення за т.зв. гармоніками – тригонометричними функціями аргументу t :

$$f(t) = a_0 + (a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) + \\ + (a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t) + (a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t) + \dots,$$

або

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t). \quad (1.1)$$

Тут позначено¹

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.2)$$

Гармонікою з номером k називатимемо функцію

$$f_k(t) = a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t.$$

¹В фізиці та техніці величину ω називають *циклічною частотою*. Якщо непорозуміння виникнути не може, зазвичай слово «циклічною» пропускають. Однак, в експерименті вимірюють іншу частоту: $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$.

Усі гармоніки при $k > 1$ мають частоти $\omega_k = k\omega$, кратні до основної частоти ω . При $k = 0$ виникає т.зв. нульова гармоніка $f_0 = a_0$. Її називають також *постійною складовою*.

Подальша задача полягає в знаходженні коефіцієнтів a_k, b_k .

Спочатку розглянемо елементарні перетворення гармоніки і наведемо основні терміни.

Викладаємо *метод введення допоміжного кута*. За його допомогою вдається перетворити гармоніку до такого вигляду, коли замість двох функцій вона містить лише одну – синус або косинус.

Обмежимося випадком, коли $a_k > 0, b_k > 0$. Маємо:

$$f_k(t) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \cos k\omega t + \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \sin k\omega t \right).$$

Безпосередніми перетвореннями неважко довести, що

$$\left| \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \right| \leq 1.$$

Оскільки множина значень функції синус вичерпується інтервалом $[-1; 1]$, то існує допоміжний кут φ_k такий², що

$$\sin \varphi_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}.$$

Тоді

$$\cos \varphi_k = +\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_k} = \sqrt{1 - \frac{a_k^2}{a_k^2 + b_k^2}} = \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}.$$

Гармоніка набуває вигляду

$$f_k(t) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} (\sin \varphi_k \cos k\omega t + \cos \varphi_k \sin k\omega t).$$

Позначимо

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}. \tag{1.3}$$

²Очевидно, при $a_k > 0, b_k > 0$ в першій чверті (на інтервалі $0 < \varphi_k < \pi/2$) такий кут існує і є єдиним.

Тоді з використанням відомої формули додавання³ отримуємо:

$$f_k(t) = c_k \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Тут величину φ_k можна знайти за формулою

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{a_k}{b_k}. \quad (1.4)$$

Величину c_k називають *амплітудою* гармоніки, а величину φ_k – *початковою фазою* гармоніки. При зміні величини c_k відбувається масштабування графіку $f_k(t)$ вздовж осі значень функції, а при зміні величини φ_k – зсув⁴ графіку $f_k(t)$ вздовж осі аргументу t .

Іноді буває зручно мати справу з усією гармонікою цілком, а іноді – окремо з синус- і косинус-компонентами гармоніки. Позначимо ці компоненти через

$$C_k(t) = \cos k\omega t, \quad S_k(t) = \sin k\omega t. \quad (1.5)$$

Тоді гармоніку можна подати у вигляді:

$$f_k(t) = a_k C_k(t) + b_k S_k(t). \quad (1.6)$$

1.2 Коефіцієнти Фур'є

1.2.1 Властивість синус- і косинус-компонент

Синус- та косинус-компоненти гармонік утворюють систему функцій, *попарно ортогональних* на інтервалі $t \in [t_0; t_0 + T]$ (при будь-якому t_0). Так називають наступні властивості цих компонент:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} C_k(t) S_i(t) dt = 0, \quad i, k = 0, 1, 2, \dots;$$

³Вона має вигляд $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

⁴Справді, $k\omega t + \varphi_k = k\omega \left(t + \frac{\varphi_k}{k\omega}\right)$. Позначимо $\tau_k = \frac{\varphi_k}{k\omega}$. Введемо заміну $t' = t + \tau_k$. Тоді вдається позбутися початкової фази: $k\omega t + \varphi_k = k\omega t'$. Отже, початкова фаза враховує зсув гармоніки на τ_k (запізнення чи випередження залежно від знаку числа τ_k).

Зауважимо, при проходженні сигналів через «чорні скриньки» (підсилювачі, фільтри тощо) гармоніки різних частот піддаються різним зсувам. Так виникають *фазові спотворення* форми сигналу.

$$\int_{t_0}^{t_0+T} C_k(t)C_i(t) dt = 0, \quad \int_{t_0}^{t_0+T} S_k(t)S_i(t) dt = 0, \quad i \neq k.$$

В цьому легко перекопатись безпосереднім інтегруванням. При використанні формули Ньютона-Лейбніца зручно (1.2) використовувати у вигляді $\omega T = 2\pi$.

Ці співвідношення виконуються в тому числі при умові, що один або два з індексів i, k дорівнюють нулю. При цьому приймається $C_0 \equiv 1, S_0 \equiv 0$. Зокрема, маємо:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} C_k(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} C_k(t)C_0(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} S_k(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} S_k(t)C_0(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

1.2.2 Знаходження коефіцієнтів Фур'є

Перейдемо до знаходження коефіцієнтів a_k, b_k . Представимо функцію $f(t)$ у вигляді

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k C_k(t) + b_k S_k(t)). \quad (1.7)$$

Будемо вважати, що почленне інтегрування цього розвинення є припустимим. Звичайно, необхідною умовою можливості почленно інтегрувати є збіжність ряду (1.7).

Постійна складова

Проінтегруємо рівняння (1.7) в інтервалі $t \in [t_0; t_0 + T]$:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = a_0 \int_{t_0}^{t_0+T} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{t_0}^{t_0+T} C_k(t) dt + b_k \int_{t_0}^{t_0+T} S_k(t) dt \right).$$

Кожний інтеграл під знаком суми дорівнює нулю за властивістю ортогональності. Тоді

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1.8)$$

Таким чином, вільний член a_0 має простий зміст – це *середнє інтегральне* функції $f(t)$ на періоді T . Справді, перепишемо (1.8) у вигляді $\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = a_0 T$. Очевидно, число a_0 дорівнює висоті прямокутника шириною T , який має таку ж площу, як площа під графіком функції $f(t)$, $t \in [t_0; t_0 + T]$.

Косинус-коефіцієнти

Домножимо (1.7) на $C_k(t)$ і проінтегруємо в інтервалі розвинування $t \in [t_0; t_0 + T]$. Виокремлюючи k -у гармоніку з загальної суми, отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) C_k(t) dt &= a_0 \int_{t_0}^{t_0+T} C_k(t) dt + \\ &+ a_k \int_{t_0}^{t_0+T} C_k^2(t) dt + b_k \int_{t_0}^{t_0+T} S_k(t) C_k(t) dt + \\ &+ \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^{\infty} \left(a_i \int_{t_0}^{t_0+T} C_i(t) C_k(t) dt + b_i \int_{t_0}^{t_0+T} S_i(t) C_k(t) dt \right). \end{aligned}$$

Серед усіх інтегралів в правій частині відмінним від нуля є лише співмножник при a_k . Він обчислюється безпосередньо⁵, і

⁵З використанням формули $\cos^2 z = \frac{1}{2} (1 + \cos 2z)$ зниження степеню маємо:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} C_k^2(t) dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 k\omega t dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2k\omega} \sin 2k\omega t \right) \Big|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{T}{2}, \end{aligned}$$

оскільки $\sin 2k\omega T = \sin 4k\pi = 0$.

ми отримуємо

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)C_k(t) dt = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos k\omega t dt. \quad (1.9)$$

Синус-коефіцієнти

Домножимо (1.7) на $S_k(t)$ і проінтегруємо в інтервалі розв'язання $t \in [t_0; t_0 + T]$. Виокремлюючи k -у гармоніку з загальної суми, отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)S_k(t) dt &= a_0 \int_{t_0}^{t_0+T} S_k(t) dt + \\ &+ a_k \int_{t_0}^{t_0+T} C_k(t)S_k(t) dt + b_k \int_{t_0}^{t_0+T} S_k^2(t) dt + \\ &+ \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^{\infty} \left(a_i \int_{t_0}^{t_0+T} C_i(t)S_k(t) dt + b_i \int_{t_0}^{t_0+T} S_i(t)S_k(t) dt \right). \end{aligned}$$

Серед усіх інтегралів в правій частині відмінним від нуля є лише співмножник при b_k : $\int_{t_0}^{t_0+T} S_k^2(t) dt = \frac{T}{2}$, і ми отримуємо

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)S_k(t) dt = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin k\omega t dt. \quad (1.10)$$

Зауважимо, отримані формули (1.8), (1.9), (1.10) можна застосовувати при будь-якому значенні t_0 . Обираючи різні значення t_0 , ми лише здійснюємо зсув інтервалу $[t_0; t_0 + T]$, на якому відбувається розкладання функції $f(t)$ в ряд Фур'є.

1.2.3 Зміна інтервалу розкладання

Найбільш простого вигляду формули (1.8), (1.9), (1.10) набувають при значеннях $t_0 = 0$, $T = 2\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Власне, саме

при цих значеннях їх зазвичай і наводять, і вони мають вигляд:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt.$$

Ряд Фур'є, який при цьому народжується, є

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (1.11)$$

Він збігається до функції $f(t)$ на інтервалі $t \in [0; 2\pi]$.

В більш загальному випадку може виявитись потрібним розкласти функцію $F(x)$ в ряд Фур'є на інтервалі $x \in [\alpha; \beta]$. Відповідно, в загальних формулах (1.8), (1.9), (1.10) треба буде використовувати значення параметрів $t_0 = \alpha$ (початок інтервалу розкладання), $T = \beta - \alpha$ (довжина інтервалу розкладання), $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\beta - \alpha}$. Тоді вирази для коефіцієнтів Фур'є

$$A_0 = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx, \quad A_k = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} F(x) \cos k \frac{2\pi}{\beta - \alpha} x dx,$$

$$B_k = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} F(x) \sin k \frac{2\pi}{\beta - \alpha} x dx.$$

Відповідно, виникає ряд

$$F(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos k \frac{2\pi}{\beta - \alpha} x + B_k \sin k \frac{2\pi}{\beta - \alpha} x \right). \quad (1.12)$$

Він збігається до функції $F(x)$ на інтервалі $x \in [\alpha; \beta]$.

При обчисленні інтегралів у виразах для коефіцієнтів A_0 , A_k , B_k можна ввести заміну змінних

$$x(t) = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} t + \alpha, \quad dx = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} dt. \quad (1.13)$$

Ця заміна відображає інтервал $x \in [\alpha; \beta]$ на інтервал $t \in [0; 2\pi]$. Справді, $x(0) = \alpha$, $x(2\pi) = \beta$. При внесенні такої заміни до

відповідних інтегралів виникає нова функція, яка є складною функцією аргументу t :

$$f(t) = F(x) = F(x(t)) = F\left(\frac{\beta - \alpha}{2\pi}t + \alpha\right).$$

Тут внутрішня функція – лінійна $x(t) = \frac{\beta - \alpha}{2\pi}t + \alpha$, а зовнішня – вихідна $F(x)$. Для постійної складової маємо:

$$A_0 = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \frac{\beta - \alpha}{2\pi} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = a_0.$$

Геометрично лінійна заміна (1.13) збільшує довжину інтервалу $x \in [\alpha; \beta]$ у $\frac{2\pi}{\beta - \alpha}$ разів і зсуває лівий кінець цього інтервалу у початок координат. Рівність $A_0 = a_0$ означає, що лінійне перетворення аргументу не змінює інтегрального середнього значення функції. Це є цілком зрозумілий результат. Справді, при збільшенні довжини інтервалу інтегрування (і відповідному розтягуванні графіка функції у горизонтальному напрямку) у декілька разів площа під графіком збільшується у стільки ж разів, тому вираз (1.8) залишається незмінним.

В той же час інші коефіцієнти Фур'є зазнають певного перетворення. З використанням заміни (1.13) маємо:

$$A_k = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_0^{2\pi} f(t) \cos \left\{ k \frac{2\pi}{\beta - \alpha} \left(\frac{\beta - \alpha}{2\pi}t + \alpha \right) \right\} \cdot \frac{\beta - \alpha}{2\pi} dt.$$

Позначаючи

$$\varphi_k = \frac{2k\pi\alpha}{\beta - \alpha},$$

отримуємо

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt + \varphi_k) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) (\cos kt \cos \varphi_k - \sin kt \sin \varphi_k) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos \varphi_k}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt - \frac{\sin \varphi_k}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt = \\
 &= a_k \cos \varphi_k - b_k \sin \varphi_k.
 \end{aligned}$$

Коефіцієнти при синусах перетворюються аналогічно. Остаточно отримуємо:

$$\begin{cases} A_k = a_k \cos \varphi_k - b_k \sin \varphi_k; \\ B_k = a_k \sin \varphi_k + b_k \cos \varphi_k. \end{cases} \quad (1.14)$$

Таким чином, попри рівність $f(t) = F(x)$, коефіцієнти Фур'є функцій $F(x)$ і $f(t)$ виявляються різними. В цьому немає нічого дивного, адже розкладання функцій $f(t)$ і $F(x)$ відбувається за синусами і косинусами різних аргументів, початки відліку яких зсунуто один відносно одного відповідно до заміни (1.13). Тому в цих двох розкладаннях гармоніки з однаковими номерами мають різні початкові фази, а отже – різні відношення коефіцієнтів Фур'є згідно з (1.4).

Втім, амплітуди (1.3) гармонік рядів Фур'є функцій $F(x)$ і $f(t)$ виявляються однаковими. Справді, з використанням (1.14) легко переконатися⁶, що

$$A_k^2 + B_k^2 = a_k^2 + b_k^2.$$

Більш за те, ряди функцій $F(x)$ і $f(t)$ теж виявляються однако-
вими. Справді, поточний доданок ряду (1.12) дорівнює

$$\begin{aligned}
 &A_k \cos k \frac{2\pi}{\beta - \alpha} x + B_k \sin k \frac{2\pi}{\beta - \alpha} x = \\
 &= (a_k \cos \varphi_k - b_k \sin \varphi_k) \cos \frac{x\varphi_k}{\alpha} + (a_k \sin \varphi_k + b_k \cos \varphi_k) \sin \frac{x\varphi_k}{\alpha} = \\
 &= a_k \left(\cos \varphi_k \cos \frac{x\varphi_k}{\alpha} + \sin \varphi_k \sin \frac{x\varphi_k}{\alpha} \right) + \\
 &+ b_k \left(-\sin \varphi_k \cos \frac{x\varphi_k}{\alpha} + \cos \varphi_k \sin \frac{x\varphi_k}{\alpha} \right) = \\
 &= a_k \cos \left(\frac{x\varphi_k}{\alpha} - \varphi_k \right) + b_k \sin \left(\frac{x\varphi_k}{\alpha} - \varphi_k \right).
 \end{aligned}$$

⁶Цю властивість коефіцієнтів Фур'є можна називати *інваріантністю* (тобто незмінністю) амплітуд гармонік по відношенню до фазових зсувів.

Оскільки

$$\frac{x\varphi_k}{\alpha} - \varphi_k = \left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)\varphi_k = \frac{x - \alpha}{\alpha} \cdot \frac{2k\pi\alpha}{\beta - \alpha} = k(x - \alpha) \cdot \frac{2\pi}{\beta - \alpha} = kt,$$

то

$$A_k \cos k \frac{2\pi}{\beta - \alpha} x + B_k \sin k \frac{2\pi}{\beta - \alpha} x = a_k \cos kt + b_k \sin kt.$$

Враховуючи, що $A_0 = a_0$, доходимо висновку, що ряди Фур'є функцій $f(t)$ і $F(x)$ співпадають один з одним.

Таким чином, маємо два рівноцінні способи розвинути функцію $F(x)$ в ряд Фур'є на нестандартному інтервалі $x \in [\alpha; \beta]$.

Спосіб 1. Користуємось складними загальними формулами (1.8), (1.9), (1.10), покладаючи в них $t_0 = \alpha$, $T = \beta - \alpha$, $\omega = \frac{2\pi}{\beta - \alpha}$. Одержуємо громіздку відповідь у вигляді (1.12), вираженому через x . Перевага цього способу полягає в тому, що не треба вводити ніяких нових складних функцій нового аргументу.

Спосіб 2. Цей спосіб дещо складніший, бо вимагає побудови нової складної функції $f(t) = F(x(t))$ нового аргументу t , пов'язаного зі старим аргументом x рівнянням (1.13). Проте тепер можна користуватись спрощеними варіантами загальних формул при $t_0 = 0$, $T = 2\pi$, $\omega = 1$ і отримувати відповідь в спрощеному вигляді (1.11). Щоправда, така відповідь буде вираженою через t . Втім, підставляючи в неї величину t , виражену з (1.13) через x , і далі користуючись формулами синуса (косинуса) суми, ми отримуємо відповідь в тій же формі, що і в способі 1.

1.3 Зауваження про збіжність

Отже, функція $f(t)$, задана на інтервалі $t \in [t_0; t_0 + T]$, «народжує» свій власний ряд:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t).$$

Його коефіцієнти обчислюють за формулами (1.8), (1.9), (1.10) (зазвичай в цих формулах кладуть $t_0 = 0$ або $t_0 = -\frac{T}{2}$).

Постає питання про збіжність отриманого ряду. Можна довести наступне. Нехай функція $f(t)$ задовольняє умови Дирихле:

1) інтервал $t \in [t_0; t_0 + T]$ можна розбити на кінцеву кількість інтервалів, всередині кожного з яких функція $f(t)$ є неперервною і монотонною;

2) в кожній точці t_* розриву існують лівобічна і правобічна границі ($f^- = \lim_{t \rightarrow t_* - 0} f(t)$ і $f^+ = \lim_{t \rightarrow t_* + 0} f(t)$ відповідно).

Тоді всередині інтервалу $t \in [t_0; t_0 + T]$ ряд Фур'є збігається:

1) в точці t неперервності – до значення функції в цій точці, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n f_k(t) \right) = f(t);$$

2) в точці t_* розриву – до середнього арифметичного ліво- і правобічного граничних значень, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n f_k(t_*) \right) = \frac{1}{2} (f^- + f^+).$$

1.4 Розкладання за синусами і косинусами

Ряд Фур'є деякої «старої» функції $f(t)$ – це «нова» функція, яка збігається зі «старою» в точках неперервності лише всередині інтервалу $t \in [t_0; t_0 + T]$. Поза межами цього інтервалу «стара» функція $f(t)$ може поводити себе як завгодно або бути невизначеною взагалі, і згідно з формулами (1.8), (1.9), (1.10) коефіцієнти a_k , b_k при цьому не зміняться. Отже, не зміниться і ряд. Очевидно, ряд є періодичною функцією з періодом T . Тому кажуть, що ряд Фур'є довизначає (або перевизначає) функцію до періодичної.

1.4.1 Розкладання за синусами

Нехай функцію $f(t)$ визначено на інтервалі $t \in [0; T]$. Довизначимо її до непарної, тобто визначимо іншу функцію:

$$f_1(t) = \begin{cases} -f(-t), & -T < t < 0; \\ f(t), & 0 < t < T. \end{cases}$$

Очевидно, $f_1(t) \equiv f(t)$ на інтервалі $t \in [0; T]$. Виконано чи не виконано цю тотожність поза межами цього інтервалу, нас не цікавить.

Область визначення функції $f_1(t)$ є інтервал $t \in [-T; T]$, тобто інтервал $t \in [-\frac{T_1}{2}; \frac{T_1}{2}]$ довжиною $T_1 = 2T$.

Для функції $f_1(t)$ побудуємо ряд Фур'є. Формули (1.8), (1.9), (1.10) набувають вигляду:

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f_1(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f_1(t) \cos k \frac{2\pi}{T_1} t dt, \quad b_k = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f_1(t) \sin k \frac{2\pi}{T_1} t dt.$$

Інтервал $[t_0; t_0 + T_1]$ інтегрування треба зсунути так, щоб він збігався з інтервалом $t \in [-\frac{T_1}{2}; \frac{T_1}{2}]$ розкладання. Очевидно, для цього достатньо покласти⁷ $t_0 = -\frac{1}{2}T_1$, і ми отримуємо

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) \cos k \frac{2\pi}{T_1} t dt, \quad b_k = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) \sin k \frac{2\pi}{T_1} t dt.$$

Підставимо сюди $T_1 = 2T$:

$$a_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) \cos k \frac{2\pi}{2T} t dt, \quad b_k = \frac{2}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) \sin k \frac{2\pi}{2T} t dt.$$

⁷Нагадаємо, ми маємо право обирати будь-яке значення t_0 .

З урахуванням непарності функції f_1 (і, відповідно, парності добутку $f_1 \sin k \frac{2\pi}{2T} t$ і непарності добутку $f_1 \cos k \frac{2\pi}{2T} t$) при інтегруванні в симетричних межах отримуємо:

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f_1(t) \sin k \frac{2\pi}{2T} t dt =$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^T f_1(t) \sin k \frac{2\pi}{2T} t dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k \left(\frac{\omega}{2}\right) t dt.$$

Тут, як і раніше, позначено $\omega = \frac{2\pi}{T}$. В останньому інтегралі замість f_1 ми написали f , оскільки тепер інтервал інтегрування є $t \in [0; T]$, а на цьому інтервалі функції f_1 і f співпадають.

Таким чином, отримуємо

$$a_0 = 0, \tag{1.8'}$$

$$a_k = 0, \tag{1.9'}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k \left(\frac{\omega}{2}\right) t dt. \tag{1.10'}$$

Остання формула є аналогічною до формули (1.10), одержуваної при $t_0 = 0$. Але тепер в якості частоти першої гармоніки використовується «половинна» частота $\frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{T}$, тому що перша гармоніка на інтервалі $t \in [0; T]$ повинна розмістити лише половину свого періоду (інша половина періоду тепер міститься на інтервалі $t \in [-T; 0]$). Як і раніше, період першої гармоніки дорівнює довжині інтервалу розкладання, але тепер такою довжиною є число $T_1 = 2T$. Відповідно, ряд Фур'є набуває вигляду

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k \left(\frac{\omega}{2}\right) t = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k \frac{\pi}{T} t. \tag{1.15}$$

Вираз (1.15) називають розкладанням функції $f(t)$ на інтервалі $t \in [0; T]$ за синусами. Формально до (1.15) можна підставити будь-яке значення t з інтервалу $t \in [-T; 0]$, і ми отримаємо значення функції $f_1(t)$ в точці t . Ніякого відношення це значення до функції $f(t)$ не має.

1.4.2 Розкладання за косинусами

Аналогічно, довізначимо функцію $f(t)$, визначену на інтервалі $t \in [0; T]$, до парної, тобто визначимо іншу функцію:

$$f_2(t) = \begin{cases} f(-t), & -T < t < 0; \\ f(t), & 0 < t < T. \end{cases}$$

Очевидно, $f_2(t) \equiv f(t)$ на інтервалі $t \in [0; T]$. Виконано чи не виконано цю тотожність поза межами цього інтервалу, нас не цікавить.

Областю визначення функції $f_2(t)$ є інтервал $t \in [-T; T]$, тобто інтервал $t \in [-\frac{T_2}{2}; \frac{T_2}{2}]$ довжиною $T_2 = 2T$. Для функції $f_2(t)$ побудуємо ряд Фур'є.

Формули (1.8), (1.9), (1.10) набувають вигляду:

$$a_0 = \frac{1}{T_2} \int_{t_0}^{t_0+T_2} f_2(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T_2} \int_{t_0}^{t_0+T_2} f_2(t) \cos k \frac{2\pi}{T_2} t dt, \quad b_k = \frac{2}{T_2} \int_{t_0}^{t_0+T_2} f_2(t) \sin k \frac{2\pi}{T_2} t dt.$$

Зсуваючи, як і вище, інтервал інтегрування на половину його довжини (тобто, покладаючи $t_0 = -\frac{1}{2}T_2$), отримуємо

$$a_0 = \frac{1}{T_2} \int_{-T_2/2}^{T_2/2} f_2(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T_2} \int_{-T_2/2}^{T_2/2} f_2(t) \cos k \frac{2\pi}{T_2} t dt, \quad b_k = \frac{2}{T_2} \int_{-T_2/2}^{T_2/2} f_2(t) \sin k \frac{2\pi}{T_2} t dt.$$

Підставимо сюди $T_2 = 2T$:

$$a_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_2(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{2T} \int_{-T}^T f_2(t) \cos k \frac{2\pi}{2T} t dt, \quad b_k = \frac{2}{2T} \int_{-T}^T f_2(t) \sin k \frac{2\pi}{2T} t dt.$$

З урахуванням парності функції f_2 (і, відповідно, парності добутку $f_2 \cos k \frac{2\pi}{2T} t$ і непарності добутку $f_2 \sin k \frac{2\pi}{2T} t$) при інтегруванні в симетричних межах отримуємо:

$$b_k = 0, \quad a_0 = \frac{2}{2T} \int_0^T f_2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f_2(t) \cos k \frac{2\pi}{2T} t dt =$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^T f_2(t) \cos k \frac{2\pi}{2T} t dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k \left(\frac{\omega}{2}\right) t dt.$$

Тут, як і раніше, позначено $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Крім того, при переході до інтервалу $t \in [0; T]$ замість f_2 задіяно функцію f .

Таким чином, отримуємо

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (1.8'')$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k \left(\frac{\omega}{2}\right) t dt, \quad (1.9'')$$

$$b_k = 0. \quad (1.10'')$$

Як бачимо, при підстановці $t_0 = 0$ з формули (1.8) виникає формула (1.8''); при підстановці $t_0 = 0$ і використанні $\frac{\omega}{2}$ замість ω з формули (1.9) виникає формула (1.9'').

Відповідно, ряд Фур'є набуває вигляду

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \left(\frac{\omega}{2}\right) t = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \frac{\pi}{T} t. \quad (1.16)$$

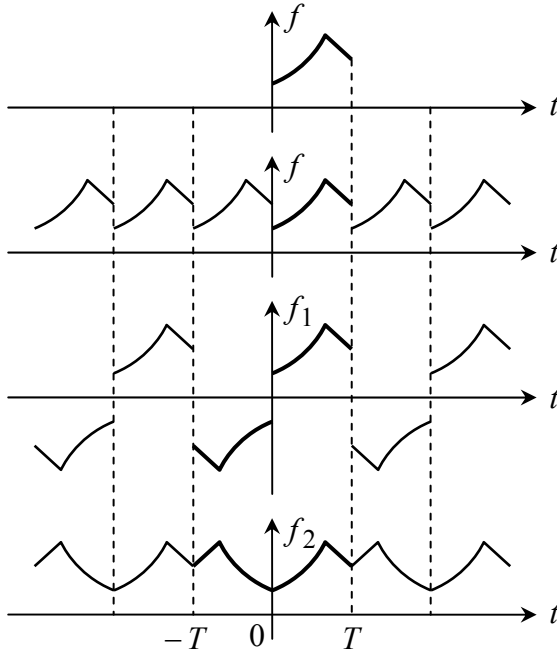


Рис. 1.1. Розкладання за синусами і косинусами

Вираз (1.16) називають розкладанням функції $f(t)$ на інтервалі $t \in [0; T]$ за косинусами. Формально до (1.16) можна підставити будь-яке значення t з інтервалу $t \in [-T; 0]$, і ми отримаємо значення функції $f_2(t)$ в точці t . Ніякого відношення це значення до функції $f(t)$ не має.

Функція $f(t)$ і її розкладання (1.15), (1.16) співпадають при $t \in [0; T]$, але поведуть себе у різний спосіб поза межами цього інтервалу. На рисунку 1.1 зверху зображено графік деякої функції $f(t)$, визначеної на інтервалі $t \in [0; T]$ (і взагалі ніяк не визначеної поза його межами). Далі побудовано графік ряду Фур'є цієї функції, отримуваний за формулами (1.8), (1.9), (1.10) при $t_0 = 0$. Ряд до визначає функцію до періодичної з періодом T . Далі побудовано графіки розкладань за синусами (f_1)

і косинусами (f_2). Періоди двох останніх розкладань дорівнюють $2T$.

Відтепер дію «розкласти функцію $f(t)$ в ряд Фур'є на інтервалі $t \in [0, T]$ за синусами (косинусами)» будемо розуміти як послідовність таких дій:

- утворити нову функцію $f_1(t)$ (або $f_2(t)$ відповідно), яка при $t \in [0; T]$ співпадає з функцією $f(t)$, а на інтервал $t \in [-T; 0]$ до визначається так, щоб бути непарною (парною) на інтервалі $t \in [-T; T]$. При цьому функція $f(t)$ на інтервалі $t \in [-T; 0]$ може поводити себе як завгодно або бути невизначеною взагалі (і ми це ігноруємо);
- розкласти в ряд Фур'є функцію $f_1(t)$ (або $f_2(t)$ відповідно, але не $f(t)$) на інтервалі $t \in [-T; T]$;
- обмежувачись значеннями аргументу t всередині інтервалу $t \in [0; T]$, вважати отримане розвинення таким, що описує функцію $f(t)$, оскільки на даному інтервалі f співпадає з f_1 (або з f_2 відповідно);
- усвідомити, що поза межами інтервалу $t \in [0; T]$ утворене розвинення до визначає вихідну функцію $f(t)$ до нової функції, періодичної з періодом $2T$ (а не T). Головним періодом нової функції є інтервал $t \in [-T; T]$.

1.5 Приклади рядів Фур'є

1.5.1 Меандр

Розглянемо періодичну послідовність прямокутних імпульсів амплітудою f_0 (рис. 1.2). Число T називають *періодом прямування імпульсів*, τ – *тривалістю імпульсу*, $Q = \frac{T}{\tau}$ – *скважністю*. Аналітично цю функцію на головному періоді $t \in [0; T]$ можна задати у вигляді

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & 0 < t < \tau; \\ 0, & \tau < t < T. \end{cases} \quad (1.17)$$

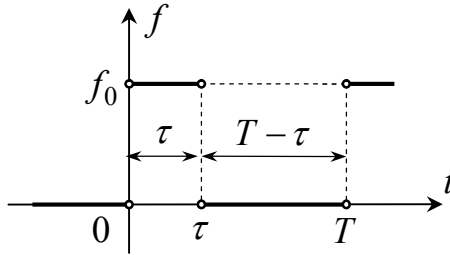


Рис. 1.2. Послідовність прямокутних імпульсів

Зазвичай (наприклад, у тактових генераторах, інших приладах синхронізації) використовують значення $Q = 2$. В цьому випадку послідовність прямокутних імпульсів називають *меандром*⁸. При $Q = 2$ тривалість τ складає рівно половину періоду T . В деяких інших випадках використовують інші значення скважності. Наприклад, типовим значенням скважності випромінювання активних імпульсних радіолокаторів є $Q = 1000$ (час випромінювання τ становить 0,1 % періоду, а 99,9 % всього часу роботи витрачається на прийом та аналіз ехо-сигналів).

Знайдемо коефіцієнти Фур'є функції (1.17). Маємо:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} f(t) dt + \frac{1}{T} \int_{\tau}^T f(t) dt.$$

Ми скористались *агритивністю* визначеного інтегралу. Вихідна функція задана кусочно, тому на різних інтервалах інтегрування вона має різні аналітичні вирази. Так, згідно з (1.17) в правій частині в першому інтегралі треба покласти $f(t) = f_0$, а в другому – $f(t) = 0$ (і останній інтеграл дорівнюватиме нулю). Маємо:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} f_0 dt = \left. \frac{f_0 t}{T} \right|_0^{\tau} = \frac{f_0 \tau}{T} = \frac{f_0}{Q}. \quad (1.18)$$

⁸Пропонуємо роздивитись анімацію за адресою:
[ru.wikipedia.org/wiki/Меандр_\(радиотехника\)](http://ru.wikipedia.org/wiki/Меандр_(радиотехника))

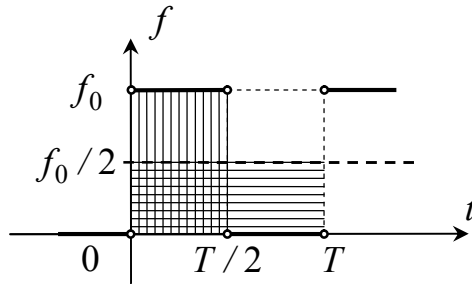


Рис. 1.3. Постійна складова меандру

Зокрема, для меандру $Q = 2$, і ми отримуємо $a_0 = \frac{f_0}{2}$. Це є цілком зрозумілий результат. Справді, постійна складова a_0 має сенс інтегрального середнього функції $f(t)$ на проміжку завдовжки T , тобто вона дорівнює висоті $\frac{f_0}{2}$ прямокутника шириною T (горизонтальна штриховка на рис. 1.3) з такою ж площею, як площа під графіком (вертикальна штриховка).

Позначаючи $\omega = \frac{2\pi}{T}$, маємо далі:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^{\tau} f_0 \cos k\omega t \, dt = \frac{2f_0}{k\omega T} \sin k\omega t \Big|_0^{\tau} = \frac{2f_0}{k \cdot 2\pi} \sin k\omega\tau = \\ &= \frac{f_0}{k\pi} \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \tau \right) = \frac{f_0}{k\pi} \sin \frac{2k\pi}{Q}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Зокрема, для меандру (тобто при $Q = 2$) за рахунок співвідношення $\sin k\pi = 0$ отримуємо $a_k = 0$.

Нарешті, маємо:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^{\tau} f_0 \sin k\omega t \, dt = \frac{2f_0}{k\omega T} \cos k\omega t \Big|_{\tau}^0 = \frac{2f_0}{k \cdot 2\pi} (\cos 0 - \cos k\omega\tau) = \\ &= \frac{f_0}{k\pi} \left(1 - \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \tau \right) \right) = \frac{f_0}{k\pi} \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{Q} \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Зокрема, для меандру (тобто при $Q = 2$) за рахунок співвідношення $\cos k\pi = (-1)^k$ отримуємо

$$b_k = \frac{f_0}{k\pi} (1 - (-1)^k).$$

Відповідно, для парних k отримуємо $b_k = 0$, для непарних k –

$$b_k = \frac{2f_0}{k\pi}.$$

Тоді розвинення меандру з амплітудою f_0 і періодом T в ряд Фур'є набуває вигляду:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + b_1 \sin \omega t + b_3 \sin 3\omega t + b_5 \sin 5\omega t + \dots = \\ &= \frac{f_0}{2} + \frac{2f_0}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right) = \\ &= \frac{f_0}{2} + \frac{2f_0}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)\omega t. \end{aligned}$$

Графіки цього розвинення з утриманням гармонік аж до частот 3ω , 5ω , 15ω показано на рис. 1.4.

Цей і інші рисунки, на яких відтворено графіки, отримувани чисельно, згенеровано в середовищі MATLAB з використанням скриптів, наведених в розділі «Використані скрипти».

1.5.2 Імпульс у вигляді трапеції

Розглянемо функцію, задану графічно (рис. 1.5). Потрібно: 1) записати її в аналітичному вигляді на інтервалі $t \in [0; T]$; 2) розкласти її в ряд Фур'є на цьому інтервалі; 3) до визначити задану функцію до непарної і парної і побудувати розвинення нових функцій на інтервалі $t \in [-T; T]$; 4) побудувати графіки отриманих розвинень у безрозмірних координатах.

1) Задана функція є кусочно-лінійною, і тому її аналітичний запис є

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2f_0}{T} \cdot t, & 0 < t < \frac{T}{2}; \\ f_0, & \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

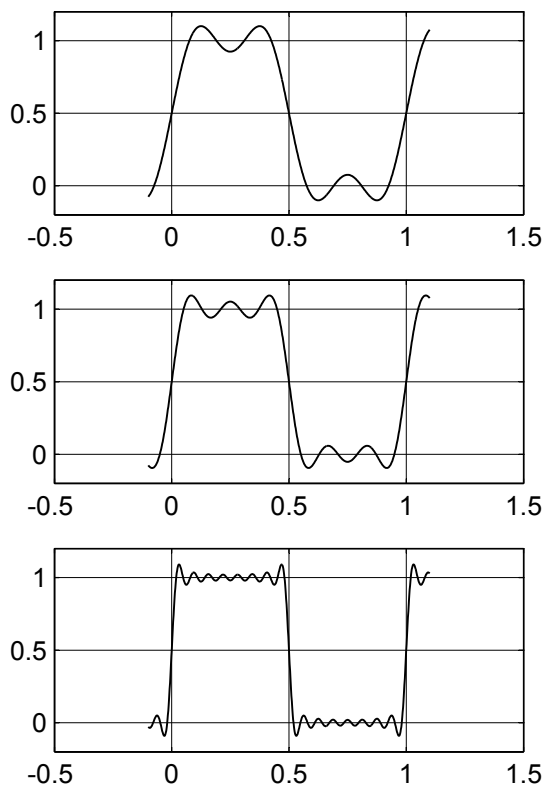


Рис. 1.4. Часткові суми меандру

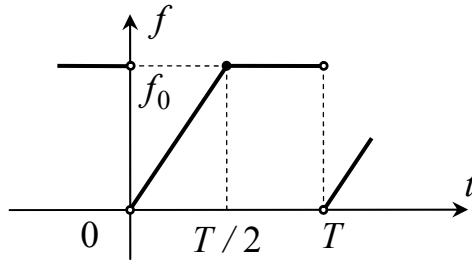


Рис. 1.5. Імпульс у вигляді трапеції

2) Оскільки функція задана кусочно, то при обчисленні коефіцієнтів Фур'є використовуватимемо аддитивність визначеного інтегралу (інтеграл вздовж деякого проміжку дорівнює сумі інтегралів вздовж окремих частин цього проміжку). Для постійної складової маємо:

$$a_0 = \frac{1}{T} \left(\int_0^{T/2} \frac{2f_0}{T} \cdot t \, dt + \int_{T/2}^T f_0 \, dt \right) = \frac{3}{4} f_0.$$

Позначимо $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

$$a_k = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} \frac{2f_0}{T} \cdot t \cos k\omega t \, dt + \int_{T/2}^T f_0 \cos k\omega t \, dt \right] = \frac{f_0}{k^2 \pi^2} [(-1)^k - 1].$$

Тут перший з двох інтегралів обчислено частинами. Аналогічно

$$b_k = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} \frac{2f_0}{T} \cdot t \sin k\omega t \, dt + \int_{T/2}^T f_0 \sin k\omega t \, dt \right) = -\frac{f_0}{k\pi}.$$

Тоді маємо:

$$f(t) = \frac{3}{4} f_0 - f_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^k}{k^2 \pi^2} \cos k\omega t + \frac{1}{k\pi} \sin k\omega t \right).$$

3) Для розкладання за синусами утворимо нову функцію $f_1(t)$, яка визначена на інтервалі $t \in [-T; T]$, є непарною і на інтервалі $t \in [0; T]$ співпадає з функцією $f(t)$. Розкладемо функцію $f_1(t)$ в ряд Фур'є на інтервалі $t \in [-T; T]$. (Нагадаємо, розкласти в ряд Фур'є функцію $f(t)$ за синусами на інтервалі $t \in [0; T]$ і розкласти в ряд Фур'є функцію $f_1(t)$ на інтервалі $t \in [-T; T]$ – це одне й те саме). Застосовуючи формули (1.8'), (1.9'), (1.10'), отримуємо: $a_0 = 0$, $a_k = 0$,

$$b_k = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} \frac{2f_0}{T} \cdot t \sin k \frac{\pi}{T} t dt + \int_{T/2}^T f_0 \sin k \frac{\pi}{T} t dt \right).$$

Тут перший інтеграл обчислюється частинами, і остаточний результат є

$$b_k = \frac{4f_0}{\pi^2} \left[\frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{2k} (-1)^k \right].$$

Тоді при $t \in [0; T]$ отримуємо

$$\begin{aligned} f(t) = f_1(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{T} t = \\ &= \frac{4f_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{2k} (-1)^k \right] \sin \frac{k\pi}{T} t. \end{aligned}$$

Аналогічно, для розкладання за косинусами утворимо нову функцію $f_2(t)$, яка визначена на інтервалі $t \in [-T; T]$, є парною і на інтервалі $t \in [0; T]$ співпадає з функцією $f(t)$. Розкладемо функцію $f_2(t)$ в ряд Фур'є на інтервалі $t \in [-T; T]$. Застосовуючи формули (1.8''), (1.9''), (1.10''), отримуємо: $b_k = 0$,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} \frac{2f_0}{T} \cdot t dt + \int_{T/2}^T f_0 dt \right). \\ a_k &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} \frac{2f_0}{T} \cdot t \cos k \frac{\pi}{T} t dt + \int_{T/2}^T f_0 \cos k \frac{\pi}{T} t dt \right). \end{aligned}$$

В останньому виразі перший інтеграл обчислюється частинами, і остаточний результат є

$$a_0 = \frac{3}{4}f_0, \quad a_k = \frac{4f_0}{k^2\pi^2} \left[\cos \frac{k\pi}{2} - 1 \right].$$

Тоді при $t \in [0; T]$ отримуємо

$$\begin{aligned} f(t) = f_2(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left(k \frac{\pi}{T} t \right) = \\ &= \frac{3}{4}f_0 + \frac{4f_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left[\cos \frac{k\pi}{2} - 1 \right] \cos \frac{k\pi}{T} t. \end{aligned}$$

4) Для поточної побудови графіків за отриманими формулами використано відповідний скрипт. Результат його роботи наведено на рис. 1.6.

При довизначенні функції $f(t)$ до парної (розкладання за косинусами) і далі до періодичної утворилась неперервна функція f_2 . Тому це розкладання збігається швидше за розкладання за синусами (яке виявилось розривним). Справді, коефіцієнти a_k пропорційні до $\frac{1}{k^2}$, в той час як коефіцієнти b_k пропорційні⁹ лише до $\frac{1}{k}$. Тому кількість утриманих на рис. 1.6 гармонік (використано діапазон $k = 1, 2, \dots, 30$) практично не дозволяє побачити відмінність косинус-розкладання від вихідної функції f , в той час як осциляції синус-розкладання ще є досить помітними.

Це спостереження є проявом більш загальної закономірності: чим вищий клас гладкості функції, тим швидше збігається її ряд Фур'є. Пояснимо це більш детально.

Диференціювання функції (можливо, кілька разів поспіль) може «погіршувати» її властивості. Так, функція $y(x) = |x|$ є нерерервною, але її похідна

$$y'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

⁹Мова йде про пропорційність, яка приблизно має місце лише при великих значеннях k . У фрагменті $\left(\frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{2k} (-1)^k \right)$ виразу для b_k головним членом є $\frac{\pi}{2k} (-1)^k$, оскільки $\left| \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} \right| \ll \left| \frac{\pi}{2k} (-1)^k \right|$ при $k \gg 1$.

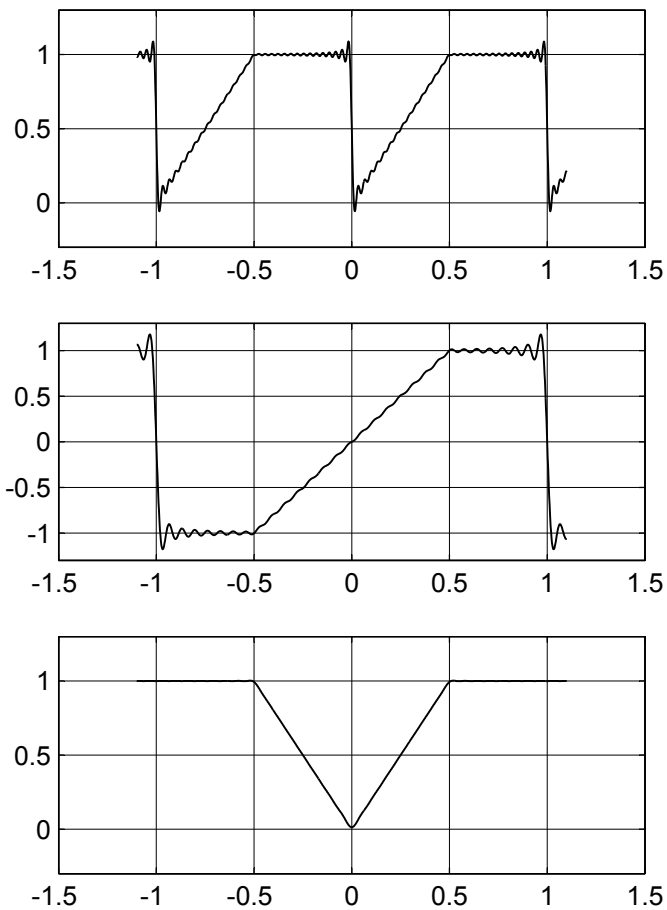


Рис. 1.6. Часткові суми імпульсу у вигляді трапеції

розривна в точці $x = 0$. Похідна в цій точці взагалі не існує, оскільки в точці $x = 0$ до графіка функції $y(x) = |x|$ не можна провести дотичну.

Функція

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \geq 0; \\ -\frac{x^2}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

є «кращою»: в точці $x = 0$ вона не тільки неперервна, а навіть диференційована¹⁰. Справді:

$$y'(x) = \begin{cases} x, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Кажуть, що ця функція є гладкою в точці $x = 0$ (графік в цій точці не має зламу, як графік $y(x) = |x|$, а поводить себе «гладко»; отже, можна провести дотичну, тобто похідна існує). Але друга похідна виявляється вже розривною функцією.

Функція

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{6}, & x \geq 0; \\ -\frac{x^3}{6}, & x < 0 \end{cases}$$

є ще «більш гладкою», оскільки розрив виникає лише після третього диференціювання.

Кажуть, що клас гладкості функції є тим більш високим, чим більше номер похідної, після знаходження якої виникає розрив. Домовились вважати, що при наявності розриву типу стрибка має місце 0-гладкість; неперервні функції є не менш ніж 1-гладкими; принаймні одноразово диференційовані функції є не менш ніж 2-гладкими, і т.д.

Функції $\sin x$, $\cos x$ формально належать нескінченно високому класу гладкості: їх можна диференціювати необмежену кількість разів, і кожного разу отримувати диференційовані функції.

У загальному випадку чим вищий клас гладкості, тим швидше модулі коефіцієнтів Фур'є прямують до нуля (тобто тим в

¹⁰Нагадаємо, диференційованість функції є більш жорсткою вимогою: з диференційованості функції в даній точці випливає її неперервність в цій точці, але з неперервності не випливає диференційованість.

більшому степені індекс k сумування входить в знаменники виразів для коефіцієнтів Фур'є). Відповідно, тим швидше ряд збігається, і тим меншу кількість гармонік можна утримувати при проведенні практичних розрахунків.

Розглянемо один граничний випадок. Утворимо такий ряд:

$$\alpha \cos x + \beta \sin x = (\alpha \cos x + \beta \sin x) + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Оскільки функція $y = \alpha \cos x + \beta \sin x$ належить нескінченно високому класу гладкості, то коефіцієнти Фур'є нескінченно швидко прямують до нуля. Тобто вже при $k = 2$ маємо

$$a_k = a_2 = 0, \quad b_k = b_2 = 0.$$

При більших значення k тим паче маємо $a_k = b_k = 0$. Інакше кажучи, ряд Фур'є першої гармоніки і є ця перша гармоніка: фактично розвинення першої гармоніки в ряд Фур'є встановлює, що ця гармоніка дорівнює сама собі. При цьому амплітуди усіх вищих гармонік дорівнюють нулю. При практичних розрахунках в цьому прикладі достатньо утримувати лише першу гармоніку.

2

Приклади застосування рядів Фур'є

2.1 Опір котушки змінному струму

Як відомо, опір котушки змінному струму дорівнює

$$X_L = \omega L, \quad (2.1)$$

де L – індуктивність котушки, ω – циклічна частота струму. Період коливань $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Формулу (2.1) отримують, розглядаючи дію напруги, яка змінюється за гармонічним законом. Відмінність форми напруги від синусоїдальної робить формулу (2.1) непридатною.

Застосування рядів Фур'є є зручним способом врахувати негармонічність напруги при обчисленні опору котушки змінному струму. Нехай на котушку подано напругу, яка здійснює періодичні коливання за законом $U(t)$ з періодом T . З урахуванням (1.5), (1.6) прийнемо цей закон у вигляді¹

$$U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cos(\omega t + \varphi_k). \quad (2.2)$$

¹Ми розглядаємо лише ідеальну котушку, омичний опір R якої дорівнює нулю. Тому постійна складова U_0 має бути відсутньою. В іншому разі за законом Ома струм через котушку виявляється б нескінченно великим.

Ідеальна котушка є лінійною системою, що дозволяє застосувати принцип суперпозиції до описання режиму її роботи. По відношенню до нашої задачі можна надати таке формулювання цього принципу: «струм, який виникає в результаті дії суми деяких напруг, дорівнює сумі струмів, кожен з яких виникав би в результаті дії відповідної напруги за умови відсутності інших напруг»². За суттю цей принцип встановлює взаємну незалежність окремих внесків в загальний струм, тобто він встановлює, що виникнення додаткової напруги тягне за собою відповідне виникнення додаткового внеску в загальний струм, але ця додаткова напруга не впливає на величину внесків в загальний струм, зумовлених дією інших напруг.

Розглянемо спочатку спрощений випадок, коли сума (2.2) містить лише два доданки – з номерами k і n , тобто має вигляд

$$U(t) = U_k \cos(k\omega t + \varphi_k) + U_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

За усталеного режиму коливань внески в струм котушки відстають за фазою від відповідних напруг на $\frac{\pi}{2}$, і тому мають вигляд

$$i_k(t) = I_k \cos\left(k\omega t + \varphi_k - \frac{\pi}{2}\right) = I_k \sin(k\omega t + \varphi_k),$$

$$i_n(t) = I_n \cos\left(n\omega t + \varphi_n - \frac{\pi}{2}\right) = I_n \sin(n\omega t + \varphi_n).$$

Тут амплітуди

$$I_k = \frac{U_k}{k\omega L}, \quad I_n = \frac{U_n}{n\omega L} \quad (2.3)$$

²Розглянемо, наприклад, послідовний ланцюг, який складається з резистора опором R та двох ідеальних джерел з ЕРС \mathcal{E}_1 і \mathcal{E}_2 постійної напруги. Струм в колі, очевидно, $I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R}$. Цей результат можна отримати як суму двох внесків: $I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R}$ і $I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R}$. Тут I_1 і є струм, який виникав би в результаті дії ЕРС \mathcal{E}_1 за умови відсутності ЕРС \mathcal{E}_2 , а I_2 – струм, який виникав би в результаті дії ЕРС \mathcal{E}_2 за умови відсутності ЕРС \mathcal{E}_1 . Можливість представити загальний струм у вигляді суми двох внесків, $I = I_1 + I_2$, зумовлена саме лінійністю закону Ома, який встановлює пряму пропорційність між напругою та струмом в вигляді «струм = $\frac{\text{напруга}}{\text{опір}}$ ». Додаткові труднощі виникають лише у зв'язку з тим, що окремі внески залежать від часу. Тому ми будемо додавати миттєві значення внесків $i_k(t)$ для конкретного моменту часу t .

струмів-внесків обчислено за законом Ома для ланцюгів змінного струму з використанням (2.1). Застосовуючи принцип суперпозиції для довільного моменту часу, струм в котушці знайдемо у такий спосіб:

$$i(t) = i_k(t) + i_n(t) = I_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + I_n \sin(n\omega t + \varphi_n).$$

Зауважимо тепер, що обидва доданки мають період, який цілу³ кількість разів розміщується на періоді T . Тому спроба використати *амперметр середніх значень* ні до чого не призведе – покази такого амперметру дорівнюватимуть нулю, оскільки для згаданих доданків нулю дорівнює інтегральне середнє на періоді (для першого доданка – на періоді T_k , і отже, на періоді T ; для другого доданка – на періоді T_n , і отже, на періоді T). Застосування *амперметра миттєвих значень* також не врятує положення, оскільки при досить великих частотах ω він фізично не буде встигати здійснювати вимірювання. Тому в нагоді може статись лише *амперметр середньоквадратичних значень*.

Визначимо середньоквадратичне значення сумарного струму як величину

$$\tilde{i} = \sqrt{\langle i^2(t) \rangle}.$$

Тут ламані дужки позначають інтегральне середнє на періоді. Треба спочатку піднести вираз $i(t)$ до другого⁴ степеню, потім знайти інтегральне середнє цього квадрату на періоді T (який є спільним для обох доданків), і, нарешті, видобути з цього результату квадратний корінь. Маємо:

$$\langle i^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt =$$

³Справді, період першої синусоїди $T_k = \frac{2\pi}{(k\omega)} = \frac{T}{k}$, період другої синусоїди $T_n = \frac{2\pi}{(n\omega)} = \frac{T}{n}$. Отже, $T = kT_k = nT_n$.

⁴Інтегральне середнє значення струму на періоді дорівнює нулю за рахунок того, що синусоїдальний струм набуває від'ємних значень протягом такого ж часу, як і відповідних додатних значень. На відміну від цього, миттєве значення *квадрату* струму бути від'ємним не може. Саме тому середньоквадратичне значення (на відміну від середнього значення) буде додатним числом.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{T} \int_0^T (I_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + I_n \sin(n\omega t + \varphi_n))^2 dt = \\
 &= \frac{I_k^2}{T} \int_0^T \sin^2(k\omega t + \varphi_k) dt + \frac{I_n^2}{T} \int_0^T \sin^2(n\omega t + \varphi_n) dt + \\
 &\quad + \frac{2I_k I_n}{T} \int_0^T \sin(k\omega t + \varphi_k) \sin(n\omega t + \varphi_n) dt.
 \end{aligned}$$

Детально розглянемо перший з цих інтегралів. З використанням формули додавання (див. виноску на с. 8) і позначень (1.5) маємо:

$$\begin{aligned}
 \sin^2(k\omega t + \varphi_k) &= (\sin k\omega t \cos \varphi_k + \cos k\omega t \sin \varphi_k)^2 = \\
 &= (S_k(t) \cos \varphi_k + C_k(t) \sin \varphi_k)^2 = \\
 &= S_k^2(t) \cos^2 \varphi_k + C_k^2(t) \sin^2 \varphi_k + 2S_k(t)C_k(t) \sin \varphi_k \cos \varphi_k.
 \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \sin^2(k\omega t + \varphi_k) dt &= \cos^2 \varphi_k \int_0^T S_k^2(t) dt + \sin^2 \varphi_k \int_0^T C_k^2(t) dt + \\
 &\quad + 2 \sin \varphi_k \cos \varphi_k \int_0^T S_k(t)C_k(t) dt.
 \end{aligned}$$

Вище (див. п. 1.2.2) було встановлено, що

$$\int_0^T S_k^2(t) dt = \int_0^T C_k^2(t) dt = \frac{T}{2}, \quad \int_0^T S_k(t)C_k(t) dt = 0.$$

Отже

$$\int_0^T \sin^2(k\omega t + \varphi_k) dt = \cos^2 \varphi_k \cdot \frac{T}{2} + \sin^2 \varphi_k \cdot \frac{T}{2} + 0 = \frac{T}{2}.$$

Аналогічно встановлюємо, що

$$\int_0^T \sin^2(n\omega t + \varphi_n) dt = \frac{T}{2}, \quad (2.4)$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t + \varphi_k) \sin(n\omega t + \varphi_n) dt = 0. \quad (2.5)$$

Цікаво зауважити, що ці результати не залежать від початкових фаз φ_k, φ_n . Остаточно маємо

$$\langle i^2(t) \rangle = \frac{I_k^2}{T} \cdot \frac{T}{2} + \frac{I_n^2}{T} \cdot \frac{T}{2} + 0 = \frac{I_k^2 + I_n^2}{2}.$$

Тоді середньоквадратичне значення сили струму дорівнює

$$\tilde{i} = \sqrt{\frac{I_k^2 + I_n^2}{2}}.$$

Розмірковуючи аналогічно, для середньоквадратичного значення напруги одержуємо

$$\tilde{U} = \sqrt{\frac{U_k^2 + U_n^2}{2}}.$$

Отже, за законом Ома котушці слід приписати опір

$$X_L = \frac{\tilde{U}}{\tilde{i}} = \sqrt{\frac{U_k^2 + U_n^2}{I_k^2 + I_n^2}}. \quad (2.6)$$

Зокрема, якби напруга була гармонічною з частотою $\omega^* = k\omega$, треба було б покласти $U_n = 0, I_n = 0$, і ми б отримали

$$X_L = \frac{U_k}{I_k} = k\omega L = \omega^* L,$$

що узгоджується з (2.1). Остаточно значення опору котушки бігармонічному струмові ми отримали б, підставляючи (2.3) до (2.6).

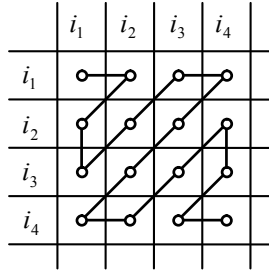


Рис. 2.1. Організація перебору сполучень співмножників

Нехай тепер сума (2.2) містить n доданків. Відповідно, миттєве значення сили струму

$$i(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t) = \sum_{k=1}^n I_k \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Тут амплітуди гармонік

$$I_k = \frac{U_k}{k\omega L}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Знову обчислимо середньоквадратичне значення. Піднесення суми струмів $i_k(t)$ до квадрату здійснимо у такий спосіб:

$$i^2 = (i_1 + i_2 + \dots + i_n) \cdot (i_1 + i_2 + \dots + i_n).$$

Кожний доданок першої «дужки» треба помножити на кожний доданок другої «дужки». Щоб не втратити жодного добутку, переберемо усі сполучення співмножників способом, організацію якого (при $n = 4$) зрозуміло з рисунку 2.1:

$$\begin{aligned} i^2 = & i_1^2 + (i_1 i_2 + i_2 i_1) + (i_3 i_1 + i_1 i_3) + \\ & + (i_1 i_4 + i_2 i_3 + i_3 i_2 + i_4 i_1) + (i_4 i_2 + i_2 i_4) + (i_3 i_4 + i_4 i_3) + i_4^2. \end{aligned}$$

Очевидно, при збільшенні n цей вираз значно ускладниться, але його структура залишиться незмінною: квадрат миттєвого

струму дорівнюватиме сумі квадратів і перехресних добутків. При усередненні (тобто при інтегруванні) квадрат k -го струму перетвориться на $\frac{I_k^2}{2}$ у відповідності з (2.4), а кожний перехресний добуток – на нуль у відповідності з (2.5), причому незалежно від початкових фаз φ_k . Тоді середньоквадратичне значення сили струму дорівнює

$$\tilde{i} = \sqrt{\frac{I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2}{2}}.$$

Розмірковуючи аналогічно, для середньоквадратичного значення напруги одержуємо

$$\tilde{U} = \sqrt{\frac{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}{2}}.$$

Отже, за законом Ома катушці слід приписати опір

$$X_L = \frac{\tilde{U}}{\tilde{i}} = \sqrt{\frac{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}{I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2}} = \left(\frac{\sum_{k=1}^n U_k^2}{\sum_{k=1}^n I_k^2} \right)^{1/2}.$$

Підставляючи сюди $I_k = \frac{U_k}{k\omega L}$, отримуємо:

$$X_L = \omega L \left(\frac{\sum_{k=1}^n U_k^2}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{U_k}{k}\right)^2} \right)^{1/2}. \quad (2.7)$$

Зокрема, якби тут кожна сума містила лише перший доданок, ми знову отримали б узгодження з (2.1).

Нехай тепер сума (2.2) містить нескінченну кількість доданків. У виразі (2.7) треба здійснити граничний перехід при $n \rightarrow \infty$:

$$X_L = \omega L \left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{U_k}{k}\right)^2} \right)^{1/2}. \quad (2.8)$$

Відповідно, постає питання про збіжність цих рядів.

Уявлення про цю збіжність отримаємо з таких міркувань. Функція (2.2) є математичною моделлю деякого фізичного сигналу, тому вона є неперервною, і, отже, задовольняє умови Дирихле. Тому розвинення (2.2) є збіжним. Тоді з необхідної умови збіжності випливає, що амплітуди U_k гармонік прямують до нуля. При піднесенні до квадрату ці амплітуди, очевидно, ще швидше прямуватимуть до нуля. Отже, за ознакою порівняння чисельник у виразі (2.8) тим паче буде збіжними. Тоді очевидно, знаменник тим паче збігається за ознакою порівняння.

Зауважимо також, енергія коливань пропорціональна квадрату їх амплітуди, тому збіжність чисельника у виразі (2.8) має простий фізичний зміст: енергія розглядуваних коливань є скінченною.

Розглянемо випадок, коли на котушку індуктивністю L подано змінну напругу у вигляді послідовності прямокутних імпульсів аналогічно до (1.17):

$$U(t) = \begin{cases} U_0 - \frac{U_0}{Q}t, & 0 < t < \tau; \\ -\frac{U_0}{Q}(t - \tau), & \tau < t < T. \end{cases}$$

З цього закону вилучено постійну складову; як і раніше, позначено $Q = \frac{T}{\tau}$. Тоді коефіцієнти Фур'є згідно з (1.18), (1.19), (1.20) дорівнюють

$$a_0 = 0, \quad a_k = \frac{U_0}{k\pi} \sin \frac{2k\pi}{Q}, \quad b_k = \frac{U_0}{k\pi} \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{Q} \right).$$

Позначимо $\psi_k = \frac{2k\pi}{Q}$. Тоді квадрат амплітуди k -ї гармоніки згідно з (1.3) дорівнює

$$\begin{aligned} U_k^2 &= a_k^2 + b_k^2 = \frac{U_0^2}{k^2\pi^2} \left(\sin^2 \psi_k + (1 - \cos \psi_k)^2 \right) = \\ &= \frac{U_0^2}{k^2\pi^2} \left(\sin^2 \psi_k + 1 - 2 \cos \psi_k + \cos^2 \psi_k \right) = \frac{U_0^2}{k^2\pi^2} (2 - 2 \cos \psi_k) = \\ &= \frac{4U_0^2}{k^2\pi^2} \cdot \frac{1 - \cos \psi_k}{2} = \frac{4U_0^2}{k^2\pi^2} \sin^2 \frac{\psi_k}{2} = \frac{4U_0^2}{k^2\pi^2} \sin^2 \frac{k\pi}{Q}. \end{aligned}$$

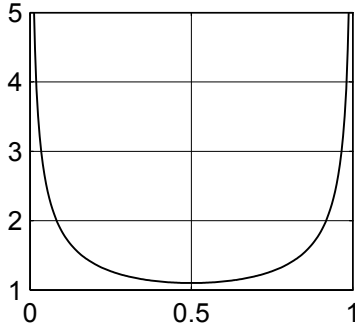


Рис. 2.2. Залежність опору котушки від скважності

Підставимо цей вираз до (2.8):

$$X_L = \omega L \left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{k\pi}{Q}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \sin^2 \frac{k\pi}{Q}} \right)^{1/2}.$$

Результати розрахунків за цією формулою з утриманням 200 доданків представлено на рисунку 2.2 при запуску відповідного скрипта.

По горизонтальній осі відкладено значення $z = \frac{1}{Q}$, а по вертикальній – відношення $\frac{X_L}{\omega L}$. При зміні z в діапазоні від 0 до 1 скважність зменшується від нескінченності до одиниці. Практичні розрахунки обмежено діапазоном $\varepsilon \leq z \leq 1 - \varepsilon$.

Точці $z = \frac{1}{2}$ відповідає значення $Q = 2$ (випадок меандру). Як бачимо, у цьому разі відношення $\frac{X_L}{\omega L}$ лише приблизно на 10% відрізняється від одиниці. Це значить, що формула (2.1) для випадку меандру призводить до похибки 10%. Але при $z \rightarrow 0$ (тобто при $Q \rightarrow \infty$) опір котушки необмежено зростає. Це є очевидним результатом: при збільшенні скважності спектр послідовності прямокутних імпульсів насичується вищими гармоніками, і значна частка енергії коливань припадає на дуже високі частоти, на яких опір котушки стає великим.

Зауважимо також наступне. Достатньо обмежитись лише

однією (наприклад, лівою) половиною графіка рис. 2.2, оскільки він є симетричним відносно прямої $z = \frac{1}{2}$. Справді, розглянемо дві точки з симетричними абсцисами: $z_1 = \frac{1}{2} - \Delta z$ і $z_2 = \frac{1}{2} + \Delta z$, $0 < \Delta z < \frac{1}{2}$. Доведемо, що фрагмент $F(z) = \sin^2 \frac{k\pi}{Q} z = \sin^2 k\pi z$ формули опору в цих точках є однаковим:

$$F(z_{1,2}) = \sin^2 k\pi z_{1,2} = \sin^2 k\pi \left(\frac{1}{2} \pm \Delta z \right) = \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2} \pm k\pi \Delta z \right).$$

За формулами зведення ми будемо отримувати однакове значення $\sin^2 k\pi \Delta z$ при парному k і однакове значення $\cos^2 k\pi \Delta z$ при непарному k .

Нарешті, отримаємо ще результати розрахунків, які підтвердять достовірність викладеного вище. Нехай напруга на котушці змінюється за законом

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t).$$

Для послідовності прямокутних імпульсів амплітуди U_0 зі скважністю Q за відсутності постійної складової маємо:

$$a_k = \frac{U_0}{k\pi} \sin \frac{2k\pi}{Q}, \quad b_k = \frac{U_0}{k\pi} \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{Q} \right).$$

Тоді струм в котушці з урахуванням фазових зсувів змінюватиметься за законом

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k\omega L} \cos \left(k\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{b_k}{k\omega L} \sin \left(k\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Зіставити миттєві значення напруги $u(t)$ і струму $i(t)$ можна за допомогою рисунку 2.3, який одержано при запуску відповідного скрипта.

Як бачимо, струм виявляється кусочно-лінійним. Це відповідає закону Фарадея для ЕРС самоіндукції⁵: $\mathcal{E}(t) = -L \cdot \frac{di}{dt}$. В

⁵В котушці відбувається різновид явища електромагнітної індукції, який називають самоіндукцією. Можна робити вигляд, ніби це явище не відбувається, натомість в схему додатково включено штучно вигадане джерело ЕРС $\mathcal{E}(t)$, наявність якого моделює явище самоіндукції. При цьому, оскільки омичний опір котушки дорівнює нулю, падіння напруги на ній також дорівнює нулю: $\mathcal{E}(t) + u(t) = 0$. Отже, фактично напруга на котушці $u(t) = -\mathcal{E}(t) = +L \cdot \frac{di}{dt}$.

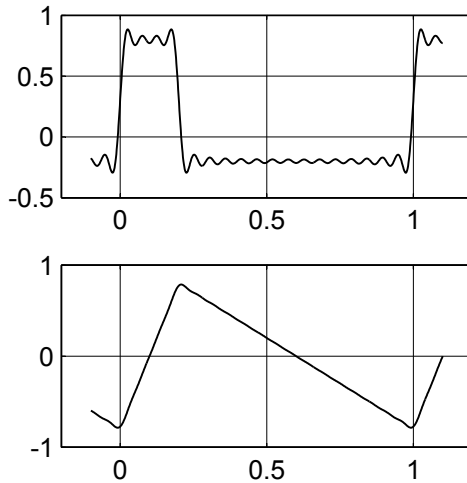


Рис. 2.3. Струм котушки при імпульсному збудженні

ті моменти часу, коли струм рівномірно зростає, напруга приймає постійне додатне значення; в ті моменти часу, коли струм рівномірно спадає (в нашому випадку – повільніше), напруга приймає постійне від'ємне значення (в нашому випадку – менше за абсолютною величиною, тобто за модулем).

Зауважимо також, струм (на відміну від напруги) виявився неперервною⁶ функцією часу. Коефіцієнти Фур'є струму пропорційні до $\frac{1}{k^2}$, а коефіцієнти Фур'є напруги – до $\frac{1}{k}$. Тому ряд Фур'є струму збігається швидше; осциляції на графіку напруги ще видно (власне, ці осциляції зумовлені похибкою, яка виникає за рахунок скінченної кількості утримуваних доданків), а на графіку струму – вже практично не видно. Схожа ситуація

⁶В електротехніці при вивченні перехідних процесів в лінійних ланцюгах формують т.зв. *закони комутації*. Ці закони забороняють стрибкоподібну зміну струму через котушку і стрибкоподібну зміну напруги на конденсаторі в моменти комутації (включення, виключення, переключення тощо). Інше означає б нескінченно швидку зміну магнітної (відповідно, електричної) енергії, тобто генерацію нескінченно великої потужності. При цьому стрибкоподібну зміну струму через конденсатор і напруги на котушці не заборонено. Отже, одержана нами залежність струму від часу не протирічить законам комутації.

мала місце при обговоренні рис. 1.6.

2.2 Полірезонанс

Розглянемо послідовний коливальний контур, який складається з котушки індуктивністю L , конденсатора ємністю C , резистора опором R . Нехай під дією джерела ЕРС $\mathcal{E}(t)$ в контурі тече струм $i(t)$. Якби ЕРС $\mathcal{E}(t)$ здійснювала гармонічні коливання, амплітуда струму досягала би максимального значення при співпадінні частоти коливань ЕРС і частоти вільних коливань в контурі. Це і є явище резонансу. Дослідимо більш детально поведінку струму в контурі при довільній (але періодичній) залежності $\mathcal{E}(t)$.

2.2.1 Елементарна теорія резонансу

Нехай в момент часу t заряд конденсатора дорівнює $Q(t)$. За визначенням миттєвого значення струм в контурі $i(t) = Q'(t)$. Тоді електромагнітна енергія, накопичена в контурі

$$W_{\text{ем}} = \frac{Li^2}{2} + \frac{Q^2}{2C} = \frac{L(Q')^2}{2} + \frac{Q^2}{2C}.$$

Нехай за час Δt (раховуючи від моменту t) через джерело проходить заряд ΔQ . Нехай проміжок часу Δt є настільки малим, що зміною ЕРС на його протязі можна знехтувати. Тоді робота сторонніх сил за цей час $\Delta A_{\text{стор}} = \mathcal{E}(t)\Delta Q$. За законом збереження енергії ця робота витрачається на приріст електромагнітної енергії в контурі та частково виділяється в формі теплоти Джоуля на резисторі:

$$\Delta A_{\text{стор}} = \Delta W_{\text{ем}} + \Delta W_{\text{тепл}},$$

$$\mathcal{E}(t)\Delta Q = \Delta W_{\text{ем}} + \Delta W_{\text{тепл}}.$$

Розділимо це рівняння на Δt :

$$\mathcal{E}(t) \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta W_{\text{ем}}}{\Delta t} + \frac{\Delta W_{\text{тепл}}}{\Delta t}.$$

Здійснимо граничний перехід при $\Delta t \rightarrow 0$. Відношення $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, $\frac{\Delta W_{\text{ем}}}{\Delta t}$ перетворяться на похідні, а відношення $\frac{\Delta W_{\text{тепл}}}{\Delta t}$ – на миттєве значення теплової (джоулевої) потужності $P_{\text{тепл}} = i^2 R$. Отримуємо:

$$\mathcal{E}(t)i = W'_{\text{ем}} + P_{\text{тепл}},$$

$$\mathcal{E}(t)i = \left(\frac{Li^2}{2} + \frac{Q^2}{2C} \right)' + i^2 R.$$

Математично вираз для магнітної (електричної) енергії є складною функцією: внутрішня – $i(t)$ ($Q(t)$), зовнішня – піднесення до другого степеню. Враховуючи це, маємо:

$$\mathcal{E}(t)i = Lii' + \frac{1}{C}QQ' + i^2 R.$$

Скорочуючи на i (і враховуючи, що $i = Q'$), одержимо:

$$\mathcal{E}(t) = Li' + \frac{1}{C}Q + iR.$$

Це рівняння має простий фізичний зміст: ЕРС джерела вичерпується сумою ЕРС самоіндукції⁷ Li' , напруги на конденсаторі $\frac{Q}{C}$ і падіння напруги на резисторі iR , як і має бути при послідовному з'єднанні за законом Кірхгофа.

Введемо позначення

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Тоді

$$Q'' + 2\beta Q' + \omega_0^2 Q = \frac{1}{L}\mathcal{E}(t). \quad (2.9)$$

Отримали звичайне диференціальне рівняння вимушених коливань. Шуканою функцією є $Q(t)$.

Характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

⁷Власне, ЕРС самоіндукції дорівнює $-Li'$. Фактична напруга на котушці відрізняється знаком; див. виноску на с. 42.

Його корені $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega$. Тут позначено $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння

$$Q_{\text{одн}}(t) = e^{-\beta t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t). \quad (2.10)$$

Нехай ЕРС джерела змінюється за гармонічним законом з частотою Ω :

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_1 (\cos \Omega t + \varphi_1).$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$Q_{\text{неодн}}(t) = M \cos \Omega t + N \sin \Omega t.$$

Маємо

$$Q'_{\text{неодн}}(t) = -M\Omega \sin \Omega t + N\Omega \cos \Omega t.$$

$$Q''_{\text{неодн}}(t) = -M\Omega^2 \cos \Omega t - N\Omega^2 \sin \Omega t.$$

Підставимо функцію $Q_{\text{неодн}}(t)$ і її похідні до (2.9). Методом невизначених коефіцієнтів при функціях $\cos \Omega t$, $\sin \Omega t$ одержуємо систему:

$$\begin{cases} -M\Omega^2 + 2N\beta\Omega + M\omega_0^2 & = \frac{\mathcal{E}_1}{L} \cdot \cos \varphi_1; \\ -N\Omega^2 - 2M\beta\Omega + N\omega_0^2 & = -\frac{\mathcal{E}_1}{L} \cdot \sin \varphi_1. \end{cases}$$

В матричній формі

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \Omega^2 & 2\beta\Omega \\ -2\beta\Omega & \omega_0^2 - \Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}_1}{L} \cdot \cos \varphi_1 \\ -\frac{\mathcal{E}_1}{L} \cdot \sin \varphi_1 \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці системи

$$\Delta = (\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2.$$

Оскільки $\beta \neq 0$, то обидва ці повні квадрати не можуть одночасно дорівнювати нулю. Тоді $\Delta > 0$, і отже $\Delta \neq 0$. Тоді розв'язок цієї системи існує і є єдиним. За правилами Крамера:

$$M = \frac{\mathcal{E}_1}{L\Delta} \{ \cos \varphi_1 (\omega_0^2 - \Omega^2) + \sin \varphi_1 \cdot 2\beta\Omega \},$$

$$N = \frac{\mathcal{E}_1}{L\Delta} \{ -\sin \varphi_1 (\omega_0^2 - \Omega^2) + \cos \varphi_1 \cdot 2\beta\Omega \}.$$

Згідно з відомою теоремою загальний розв'язок неоднорідного рівняння (2.9) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і часткового розв'язку неоднорідного рівняння:

$$Q(t) = e^{-\beta t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + M \cos \Omega t + N \sin \Omega t.$$

Для режиму усталених коливань за рахунок швидкого згасання співмножника $e^{-\beta t} \rightarrow 0$ отримуємо:

$$Q(t) = M \cos \Omega t + N \sin \Omega t.$$

Таким чином, при гармонічному збудженні на частоті Ω в контурі виникають гармонічні коливання також на частоті Ω незалежно від власної частоти ω_0 . Амплітуду цих коливань знайдемо згідно з (1.3):

$$Q_1 = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{\mathcal{E}_1}{L \sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (2.11)$$

Важливо зауважити, що цей результат не залежить від початкової фази φ_1 . Справді, неважливо, якою була початкова фаза, оскільки її необхідно було знати для обчислення констант A і B , а тепер мова йде лише про амплітуду усталених коливань.

Співвідношення (2.11) задає амплітуду коливань заряду в контурі. Ця амплітуда залежить від частоти збудження Ω .

Формула (2.11) задає т.зв. *резонансну криву*. Вона пояснює різке можливе збільшення амплітуди Q_1 навіть при постійній (і, можливо, достатньо малій) амплітуді збудження \mathcal{E}_1 ; достатньо лише в належний спосіб підібрати потрібну частоту збудження Ω .

Знайдемо максимум функції (2.11). Покладемо $\Omega^2 = x$. Очевидно, достатньо знайти мінімум функції

$$f(x) = (x - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 x.$$

Це є квадратична функція однієї змінної. Її графік – парабола гілками догори. Отже, мінімум цієї функції існує і є єдиним. Маємо:

$$f'(x) = 2(x - \omega_0^2) + 4\beta^2 = 0.$$

Точка мінімуму $x_0 = \omega_0^2 - 2\beta^2$. Тому положення максимуму виразу (2.11) спостерігається при частоті збудження

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{x_0} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

В коливальних системах з малими втратами виконується нерівність $\beta \ll \omega_0$, і тому можна вважати, що

$$\Omega_{\text{res}} \approx \omega_0.$$

Таким чином, *резонанс* – це фізичне явище, яке полягає в збільшенні амплітуди вимушених коливань при співпадінні частот: збуджуючої $\Omega = \Omega_{\text{res}}$ і власної ω_0 . Математично резонанс виглядає як поява максимуму на резонансній кривій.

На окрему увагу заслуговує оцінка значення цього максимуму. Значення мінімуму функції f :

$$\min f = f(x_0) = 4\beta^2 (\omega_0^2 - \beta^2) \approx 4\beta^2 \omega_0^2.$$

Тоді

$$\max Q_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{L\sqrt{\min f}} \approx \frac{\mathcal{E}_1}{2L\beta\omega_0}.$$

Очевидно тепер, що при $\beta \rightarrow 0$ ми отримуємо нескінченне зростання значення максимуму резонансної кривої. При цьому амплітуда \mathcal{E}_1 залишається незмінною (і навіть, можливо, дуже малою).

Для формування уявлення про вплив рівня втрат β на вигляд резонансної кривої введемо заміни змінних

$$F = \frac{Q_1 L \omega_0^2}{\mathcal{E}_1}, \quad Z = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad B = \frac{\beta}{\omega_0}.$$

Формула (2.11) набуде вигляду:

$$F(Z) = \frac{1}{\sqrt{(Z^2 - 1)^2 + 4B^2 Z^2}}.$$

З'ясуємо фізичний зміст величини F . Маємо:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{L\omega_0^2} = \frac{\mathcal{E}_1}{L \cdot \frac{1}{LC}} = C\mathcal{E}_1 = Q^*.$$

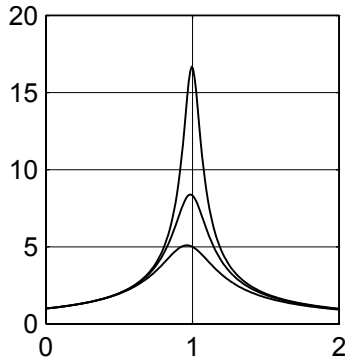


Рис. 2.4. Приклади резонансних кривих

Величина Q^* є зарядом, до якого зарядився би конденсатор, якби джерело \mathcal{E}_1 було джерелом постійного струму. Отже, відношення $F = \frac{Q_1}{Q^*}$ показує, у скільки разів фактична амплітуда коливань заряду на даній частоті $\Omega = Z\omega_0$ більша порівняно із зарядом у статичному випадку.

Резонансні криві при $B = 0,03$, $B = 0,06$, $B = 0,1$ побудовано на рис. 2.4. При найвищому (з використаних нами при розрахунках) рівні втрат ($B = 0,1$) зміщення положення максимуму в бік менших частот є досить помітним. Графіки рис. 2.4 побудовано при виконанні відповідного скрипта.

2.2.2 Випадок полігармонічного збудження

Елементарна теорія резонансу в системі з одним ступенем свободи, викладена в попередньому пункті, зазвичай будується в припущенні, що коливання ЕРС збуджуючого джерела відбуваються за гармонічним законом.

Розглянемо тепер більш загальний випадок, коли права частина рівняння (2.9) – довільна періодична функція $\mathcal{E}(t)$ з періодом T , яка задовольняє умови Дирихле. Подібно до (2.2) по-

кладаємо

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t).$$

Тут позначено

$$f_k(t) = \mathcal{E}_k \cos(k\Omega t + \varphi_k), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Рівняння (2.9) набуває вигляду

$$Q'' + 2\beta Q' + \omega_0^2 Q = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n f_k(t). \quad (2.12)$$

Як і раніше, побудуємо суму загального розв'язку (2.10) однорідного рівняння і будь-якого часткового розв'язку неоднорідного рівняння. З плином часу доданок (2.10) прямує до нуля, і залишається знайти лише частковий розв'язок.

Рівняння (2.12) є лінійним, і тому до нього можна застосувати принцип суперпозиції. Розглянемо n рівнянь вигляду

$$Q'' + 2\beta Q' + \omega_0^2 Q = \frac{1}{L} f_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.13)$$

Кожне з них збігається з (2.9), і тому має частковий розв'язок

$$q_k(t) = M_k \cos k\Omega t + N_k \sin k\Omega t = Q_k (\cos k\Omega t + \psi_k), \quad (2.14)$$

причому подібно до (2.11) маємо

$$Q_k = \sqrt{M_k^2 + N_k^2} = \frac{\mathcal{E}_k}{L \sqrt{\left((k\Omega)^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2 (k\Omega)^2}}.$$

Тоді шуканий частковий розв'язок є

$$Q(t) = \sum_{k=1}^n q_k(t). \quad (2.15)$$

Справді, оскільки кожна з функцій (2.14) задовольняє відповідне рівняння (2.13), то

$$q_k'' + 2\beta q_k' + \omega_0^2 q_k = \frac{1}{L} f_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Додамо всі такі рівняння:

$$\sum_{k=1}^n q_k'' + 2\beta \sum_{k=1}^n q_k' + \omega_0^2 \sum_{k=1}^n q_k = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n f_k(t).$$

Оскільки похідна суми дорівнює сумі похідних, то

$$\left(\sum_{k=1}^n q_k \right)'' + 2\beta \left(\sum_{k=1}^n q_k \right)' + \omega_0^2 \sum_{k=1}^n q_k = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n f_k(t),$$

що з урахуванням (2.15) збігається з (2.12).

Середньоквадратичне значення виразу (2.15), як і вище, дорівнює кореню з половини суми квадратів амплітуд гармонік:

$$\tilde{Q} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_k^2} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\mathcal{E}_k^2}{(k^2 \Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 k^2 \Omega^2}}.$$

Це співвідношення і задає реакцію послідовного коливального контуру на дію джерела періодичної ЕРС з періодом $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ і амплітудами гармонік \mathcal{E}_k .

Розглянемо тепер випадок, коли джерело генерує прямокутні імпульси амплітуди \mathcal{E}_0 . Нехай джерело працює за законом, подібним до (1.17):

$$\mathcal{E}(t) = \begin{cases} \mathcal{E}_0 - \frac{\mathcal{E}_0}{Q}, & 0 < t < \tau; \\ -\frac{\mathcal{E}_0}{Q}, & \tau < t < T. \end{cases}$$

З цього закону вилучено постійну складову; як і раніше, позначено $Q = \frac{T}{\tau}$. Тоді квадрати амплітуд гармонік, обраховані на підставі (1.19), (1.20), становлять

$$\mathcal{E}_k^2 = \frac{4\mathcal{E}_0^2}{k^2 \pi^2} \sin^2 \frac{k\pi}{Q}.$$

Для середньоквадратичного значення заряду отримуємо:

$$\tilde{Q} = \frac{\mathcal{E}_0 \sqrt{2}}{\pi L \omega_0^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{k\pi}{Q}}{\left(k^2 \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2 + 4 \frac{\beta^2}{\omega_0^2} k^2 \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}}$$

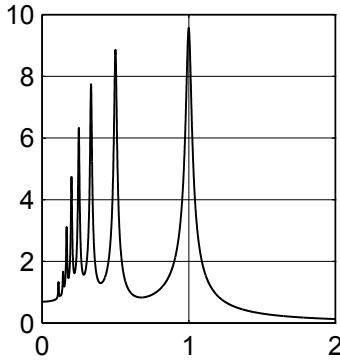


Рис. 2.5. Резонансна крива при полігармонічному збудженні

Введемо заміни змінних

$$\Phi = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\tilde{Q}L\omega_0^2}{\mathcal{E}_0}, \quad Z = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad B = \frac{\beta}{\omega_0}.$$

Остання формула набуде вигляду:

$$\Phi = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{k\pi}{Q}}{(k^2 Z^2 - 1)^2 + 4B^2 k^2 Z^2}}.$$

Для остаточного отримання розрахункової формули залишається здійснити граничний перехід при $n \rightarrow \infty$. Втім, практичні розрахунки можна вести і при скінченній кількості доданків. Ми при цьому будемо нехтувати енергією коливань, зосередженою на частотах вищих гармонік.

Результати розрахунків представлено на рисунку 2.5, отриманому при таких значеннях параметрів: втрати – $B = 0,02$, скважність – $Q = 8$. Утримано 9 гармонік. Відповідний скрипт надається.

З рисунку 2.5 видно, що максимуми з'являються на частотах $Z = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, тобто на частотах збудження $\Omega = \frac{1}{k}\omega_0$. Справді, якщо частота першої гармоніки Ω , то частота k -ї гармоніки дорівнює $\Omega_k = k\Omega = \omega_0$. Це означає, що якщо базова

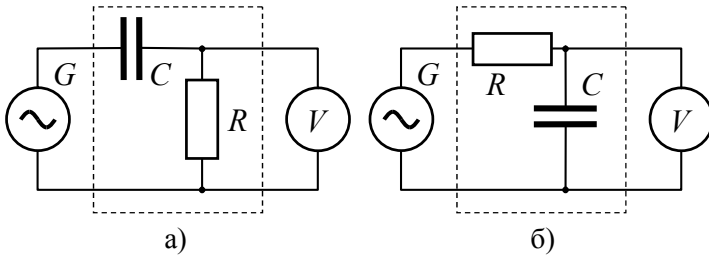


Рис. 2.6. Схема RC -фільтру

частота Ω в k разів менша за власну частоту ω_0 , то частота k -ї гармоніки як раз збігається з власною частотою ω_0 ; наявність саме k -ї гармоніки і тягне за собою виникнення відповідного максимуму. Інакше кажучи, якщо частота k -ї гармоніки збігається з власною частотою ω_0 , то ця гармоніка резонує незважаючи на наявність інших гармонік.

2.3 Дослідження RC -фільтрів

Розглянемо проходження деякого періодичного сигналу через RC -фільтр. Його схему зображено на рисунку 2.6. Через G позначено генератор змінного струму, R – резистор, C – конденсатор, V – вольтметр. Вольтметр вважатимемо ідеальним⁸.

Штриховою лінією обмежено власне RC -фільтр. Отже, генератор G постачає сигнал, який для фільтру є вхідним (сигналом на вході фільтру), а вольтметр отримує сигнал, який для фільтру є вихідним (сигналом на виході фільтру).

Спочатку розглянемо спрощений випадок, коли генератор працює за законом гармонічних коливань, а далі – ускладнений випадок, коли з генератора надходить сигнал у вигляді

⁸Ідеальним називають вольтметр, внутрішній опір якого є нескінченно великим. Тому струм через вольтметр не тече, тобто розгалуження струму у вузлі, де з'єднуються конденсатор, резистор і вольтметр, не відбувається. Отже, конденсатор і резистор з'єднано послідовно, і їх струми однакові. Вольтметр в цій схемі потрібен лише для візуалізації вихідного сигналу, і на режим роботи ланцюга не впливає.

послідовності прямокутних імпульсів⁹.

2.3.1 Проходження гармоніки через RC -фільтр

Амплітудно-частотні характеристики RC -фільтрів

Нехай на послідовний RC -ланцюг подано синусоїдальну напругу

$$U(t) = U_1 \cos(\omega t - \varphi),$$

і струм ланцюга становить

$$i(t) = I_1 \cos \omega t.$$

Струм випереджає вхідну напругу (тобто ту напругу, яку генератор G подає на вхід фільтру) за фазою на деякий (поки що невідомий) кут φ .

Як на резисторі, так і на конденсаторі відбуваються гармонічні коливання напруги на частоті ω , але коливання напруги на резисторі є синфазними з коливаннями струму, а коливання напруги на конденсаторі відстають за фазою на $\frac{\pi}{2}$ від коливань струму. Отже, напруги на резисторі і конденсаторі дорівнюють

$$U_R(t) = U_{R0} \cos \omega t,$$

$$U_C(t) = U_{C0} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U_{C0} \sin \omega t.$$

За законом Ома для амплітуд маємо:

$$U_{R0} = I_1 R, \quad U_{C0} = I_1 X_C = \frac{I_1}{\omega C}.$$

Тоді

$$U_R(t) = I_1 R \cos \omega t, \quad U_C(t) = \frac{I_1}{\omega C} \sin \omega t.$$

⁹Практично згенерувати сигнал у такій формі набагато простіше, ніж гармонічний сигнал. Це робить проста схема на двох транзисторах, яку називають *мультивібратором*. Втім, сучасна інтегральна елементна база надає багато інших можливостей сконструювати мультивібратор. Наприклад, можна використовувати інтегральні схеми таймерів.

Оскільки конденсатор і резистор з'єднано послідовно, то для будь-якого моменту часу маємо:

$$U(t) = U_C(t) + U_R(t),$$

$$U_1 \cos(\omega t - \varphi) = \frac{I_1}{\omega C} \sin \omega t + I_1 R \cos \omega t.$$

Застосувавши формулу косинуса різниці¹⁰, методом невизначених коефіцієнтів при функціях $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} U_1 \cos \varphi = I_1 R; \\ U_1 \sin \varphi = \frac{I_1}{\omega C}. \end{cases}$$

Її очевидний розв'язок отримаємо, по-перше, розділивши друге рівняння на перше:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R\omega C} = \frac{1}{\omega \tau}.$$

Тут через $\tau = RC$ позначено т.зв. *сталу часу* ланцюга. Одразу ж маємо:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\omega \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}},$$

$$\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}.$$

По-друге, підносячи кожне рівняння системи до квадрату і додаючи їх, одержуємо:

$$U_1^2 = I_1^2 \left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} \right) = I_1^2 R^2 \left(1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2} \right),$$

$$I_1 = U_1 \cdot \frac{\omega \tau}{R \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}.$$

Тоді напруги на резисторі і конденсаторі

$$U_R(t) = U_1 \cdot \frac{\omega \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos \omega t, \quad U_C(t) = U_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \sin \omega t.$$

¹⁰Вона має вигляд $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

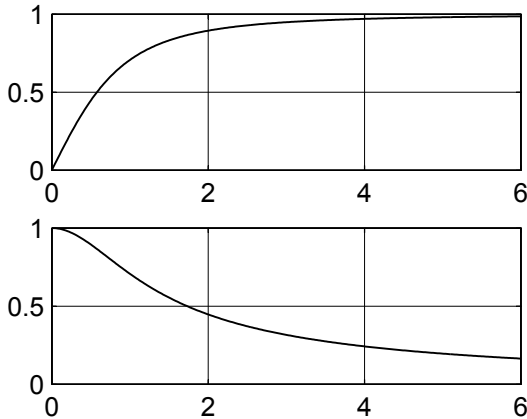


Рис. 2.7. Амплітудно-частотні характеристики

В схемі рис. 2.6 а вихідною (тобто тією, яка поступає з виходу фільтру на вольтметр) є напруга на резисторі, тому для цієї схеми коефіцієнт передачі сигналу *за амплітудою*

$$T_1(\omega) = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}.$$

Тут фраза «за амплітудою» означає наступне. Величина $U_{\text{вих}}$ не є вихідною напругою, вона є саме амплітудою цієї напруги, тобто постійним (незалежним від часу) числом $U_1 \cdot \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$. Аналогічно, величина $U_{\text{вх}}$ є постійним (незалежним від часу) числом U_1 .

В схемі рис. 2.6 б роль вихідної відіграє напруга на конденсаторі, тому для цієї схеми коефіцієнт передачі сигналу за амплітудою

$$T_2(\omega) = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}.$$

Графіки функцій $T_1(\omega)$ і $T_2(\omega)$ зображено на рисунку 2.7 ($T_1(\omega)$ – зверху, $T_2(\omega)$ – знизу). По горизонтальній осі відкладено безрозмірний аргумент $\omega\tau$. Залежності $T_1(\omega)$, $T_2(\omega)$ називають *амплітудно-частотними характеристиками*. Ці хара-

ктеристики пояснюють селективні¹¹ властивості розглядуваних ланцюгів.

Ланцюг на схемі а) майже без втрат пропускає через себе сигнали дуже високих частот, оскільки $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} T_1(\omega) = 1$, і

$$U_{\text{вих}} = T_1 U_{\text{вх}} = U_{\text{вх}}.$$

Сигнали дуже низьких частот цей ланцюг через себе не пропускає, оскільки $\lim_{\omega \rightarrow +0} T_1(\omega) = 0$, і

$$U_{\text{вих}} = T_1 U_{\text{вх}} = 0.$$

Справді, на дуже високих частотах конденсатор є подібним до короткого замикання, а на дуже низьких – до розриву ланцюга. Тому схему а) називають фільтром високих частот (ФВЧ).

Навпаки, ланцюг на схемі б) майже без втрат пропускає через себе сигнали дуже низьких частот: $\lim_{\omega \rightarrow +0} T_2(\omega) = 1$, і

$$U_{\text{вих}} = T_2 U_{\text{вх}} = U_{\text{вх}}.$$

Сигнали дуже високих частот цей ланцюг через себе не пропускає, оскільки $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} T_2(\omega) = 0$, і

$$U_{\text{вих}} = T_2 U_{\text{вх}} = 0.$$

Схему б) називають фільтром низьких частот (ФНЧ).

Перетворення коефіцієнтів Фур'є

Зосередимось тепер на *фазових*¹² співвідношеннях.

Схема а). Вихідною є напруга на резисторі; фаза її коливань на φ більша за фазу коливань вхідної напруги. Отже, якщо на вхід ланцюга подано напругу

$$U_{\text{вх}} = a \cos \omega t,$$

¹¹Ланцюг ніби «сам обирає», як йому поводитись по відношенню до сигналу тієї чи іншої частоти.

¹²При проходженні через RC-ланцюг вхідний сигнал перетворюється на вихідний. Тому RC-ланцюг перетворює коефіцієнти Фур'є вхідного сигналу на коефіцієнти Фур'є вихідного сигналу. Тому вихідний сигнал, окрім іншої амплітуди (яка визначається функцією $T_1(\omega)$ або $T_2(\omega)$), згідно з (1.4) буде також мати деяку іншу початкову фазу. Кажучи про фазові співвідношення, ми фактично маємо на увазі знаходження перетворених коефіцієнтів Фур'є.

то на виході виникає напруга з амплітудою, збільшеною в T_1 разів і фазою, збільшеною на кут φ , тобто

$$U_{\text{вих}} = T_1 a \cos(\omega t + \varphi).$$

Відповідно, якщо на вхід ланцюга подано напругу

$$U_{\text{вх}} = b \sin \omega t,$$

то на виході виникає напруга

$$U_{\text{вих}} = T_1 b \sin(\omega t + \varphi).$$

Отже, за принципом суперпозиції реакцією схеми а) на вхідну гармоніку

$$U_{\text{вих}}(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (2.16)$$

є вихідний сигнал

$$\begin{aligned} U_{\text{вих}}(t) &= T_1 a \cos(\omega t + \varphi) + T_1 b \sin(\omega t + \varphi) = \\ &= T_1 \{a(\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) + b(\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi)\} = \\ &= (T_1 a \cos \varphi + T_1 b \sin \varphi) \cos \omega t + (-T_1 a \sin \varphi + T_1 b \cos \varphi) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Інакше кажучи, гармоніка $U_{\text{вих}}(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ вхідної напруги при проходженні через ланцюг а) перетворюється на гармоніку $U_{\text{вих}}(t) = a' \cos \omega t + b' \sin \omega t$ вихідної напруги, причому

$$\begin{cases} a' = T_1 a \cos \varphi + T_1 b \sin \varphi; \\ b' = -T_1 a \sin \varphi + T_1 b \cos \varphi. \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{aligned} T_1 \cos \varphi &= \frac{\omega \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cdot \frac{\omega \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} = \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}, \\ T_1 \sin \varphi &= \frac{\omega \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} = \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \end{aligned}$$

Тоді дія ланцюга а) на вхідний сигнал (2.16) полягає в наступному. Якщо вхідний сигнал – гармоніка частотою ω з коефіцієнтами Фур'є a, b , то вихідний сигнал – теж гармоніка частотою ω , тільки з новими коефіцієнтами Фур'є a', b' , причому

$$\begin{cases} a' = a \cdot \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} + b \cdot \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} = \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} (a \omega \tau + b); \\ b' = -a \cdot \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} + b \cdot \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} = \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} (-a + b \omega \tau). \end{cases} \quad (2.17)$$

Схема б). Вихідною є напруга на конденсаторі; фаза її коливань на $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ менша за фазу коливань вхідної напруги¹³. Отже, якщо на вхід ланцюга подано напругу (2.16), то реакцією схеми б) на це є вихідний сигнал з амплітудою, збільшеною в T_2 разів і з фазою, зменшеною на кут ψ :

$$\begin{aligned} U_{\text{вих}}(t) &= T_2 a \cos(\omega t - \psi) + T_2 b \sin(\omega t - \psi) = \\ &= T_2 a \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi\right) + T_2 b \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \\ &= T_2 a \sin(\omega t + \varphi) - T_2 b \cos(\omega t + \varphi) = \\ &= T_2 \{a (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) - b (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi)\} = \\ &= (T_2 a \sin \varphi - T_2 b \cos \varphi) \cos \omega t + (T_2 a \cos \varphi + T_2 b \sin \varphi) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Інакше кажучи, гармоніка (2.16) вхідної напруги в результаті проходження через ланцюг б) перетворюється на гармоніку $U_{\text{вих}}(t) = a'' \cos \omega t + b'' \sin \omega t$ вихідної напруги, причому

$$\begin{cases} a'' = T_2 a \sin \varphi - T_2 b \cos \varphi; \\ b'' = T_2 a \cos \varphi + T_2 b \sin \varphi. \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{aligned} T_2 \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cdot \frac{\omega \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} = \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \\ T_2 \sin \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2}. \end{aligned}$$

Тоді дія ланцюга б) на вхідний сигнал (2.16) полягає в такому перетворенні коефіцієнтів Фур'є

$$\begin{cases} a'' = a \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} - b \cdot \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} (a - b \omega \tau); \\ b'' = a \cdot \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} + b \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} (a \omega \tau + b). \end{cases} \quad (2.18)$$

¹³Різницю фаз коливань напруги джерела живлення і напруг на резисторі і конденсаторі (а також на котушці індуктивності, якби її було включено до складу ланцюга) зручно дослідити за допомогою методу векторних діаграм. Викладення суті цього методу до наших планів не входить. Більш детально ознайомитись з цим методом можна у книзі [4].

Деякі граничні випадки

Величині τ ми можемо надати будь-яке додатне значення, в певний спосіб обираючи номінали елементів R і C . Частота ω при цьому може виявитись «високою»¹⁴ (якщо виконається нерівність $\omega \gg \frac{1}{\tau}$), або «низькою» (якщо виконається нерівність $\omega \ll \frac{1}{\tau}$). Позначимо $x = \omega\tau$. Очевидно, у разі високих частот отримаємо $x \gg 1$, а у разі низьких частот – $x \ll 1$. Розглянемо наступні окремі випадки.

Проходження сигналу високої частоти через ланцюг а). У цьому разі $x \gg 1$, і перетворення (2.17) наближено набувають вигляду:

$$a' = \frac{x}{1+x^2}(ax+b) = \frac{ax^2+bx}{1+x^2} = \frac{a+\frac{b}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} \approx \frac{a+0}{0+1} = a;$$
$$b' = \frac{x}{1+x^2}(-a+bx) = \frac{-ax+bx^2}{1+x^2} = \frac{-\frac{a}{x}+b}{\frac{1}{x^2}+1} \approx \frac{-0+b}{0+1} = b.$$

Отже, сигнали високих частот проходять через ланцюг а) практично не змінюючись. При цьому зберігається не тільки амплітуда¹⁵ (оскільки $(a')^2 + (b')^2 = a^2 + b^2$, див. (1.3)), а ще й початкова фаза (оскільки $\operatorname{tg} \frac{a'}{b'} = \operatorname{tg} \frac{a}{b}$, див. (1.4)). Так і має бути, оскільки на дуже високих частотах опір $X_C = \frac{1}{\omega C}$ конденсатора практично дорівнює нулю, тобто конденсатор в схемі можна замінити коротким замиканням. При цьому напруги на джерелі і на вольтметрі співпадатимуть.

Проходження сигналу низької частоти через ланцюг а). У цьому разі $x \ll 1$, і перетворення (2.17) наближено набувають вигляду (при нехтуванні малою x^2 вищого порядку малості)

$$a' = \frac{x}{1+x^2}(ax+b) = \frac{ax^2+bx}{1+x^2} \approx \frac{0+bx}{1+0} = bx = b\omega\tau;$$

¹⁴Слова «високою», «низькою» взято в лапки, оскільки мова взагалі не йде про абсолютне значення частоти ω . Одна й та сама частота ω може виявитись «високою» для одного RC -ланцюга і в той же час «низькою» для деякого іншого RC -ланцюга.

¹⁵Нагадаємо, $T_1(+\infty) = 1$.

$$b' = \frac{x}{1+x^2}(-a+bx) = \frac{-ax+bx^2}{1+x^2} \approx \frac{-ax+0}{1+0} = -ax = -a\omega\tau.$$

Отже, реакцією¹⁶ схеми а) на вхідний сигнал

$$U_{\text{вх}}(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

є вихідний сигнал

$$\begin{aligned} U_{\text{вих}}(t) &= a' \cos \omega t + b' \sin \omega t \approx b\omega\tau \cos \omega t - a\omega\tau \sin \omega t = \\ &= \tau(-a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t) = \tau \cdot \frac{d}{dt}(a \cos \omega t + b \sin \omega t) = \tau \cdot \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Таким чином, якщо вхідний сигнал має низьку частоту, то схема а) здійснює диференціювання цього сигналу (з точністю до мультиплікативної константи τ , незалежної від частоти ω). З цієї причини схему а) називають *диференціюючим RC-ланцюгом*. Оскільки розглядуваний ланцюг є лінійною системою, то, застосовуючи принцип суперпозиції, можна стверджувати наступне. При проходженні через ланцюг а) буде відбуватись диференціювання не тільки окремої гармоніки, а й будь-якої лінійної комбінації гармонік, тобто будь-якого періодичного сигналу, спектр (набір частот) якого зверху обмежено граничною частотою, значно меншою за параметр $\frac{1}{\tau}$.

Проходження сигналу низької частоти через ланцюг б). У цьому разі $x \ll 1$, і перетворення (2.18) наближено набувають вигляду (при нехтуванні малими x і x^2):

$$a'' = \frac{a-bx}{1+x^2} \approx \frac{a-0}{1+0} = a;$$

$$b'' = \frac{ax+b}{1+x^2} \approx \frac{0+b}{1+0} = b.$$

Отже, сигнали низьких частот проходять через ланцюг б) практично не змінюючись.

¹⁶Масться на увазі наближена реакція при виконанні умови $\omega \ll \frac{1}{\tau}$.

Проходження сигналу високої частоти через ланцюг б). У цьому разі $x \gg 1$, і перетворення (2.18) наближено набувають вигляду

$$a'' = \frac{a - bx}{1 + x^2} = \frac{\frac{a}{x} - b}{\frac{1}{x} + x} \approx \frac{0 - b}{0 + x} = -\frac{b}{x} = -\frac{b}{\omega\tau};$$

$$b'' = \frac{ax + b}{1 + x^2} = \frac{a + \frac{b}{x}}{\frac{1}{x} + x} \approx \frac{a + 0}{0 + x} = \frac{a}{x} = \frac{a}{\omega\tau}.$$

Отже, реакцією схеми б) на вхідний сигнал

$$U_{\text{вх}}(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

є вихідний сигнал

$$\begin{aligned} U_{\text{вих}}(t) &= a'' \cos \omega t + b'' \sin \omega t \approx -\frac{b}{\omega\tau} \cos \omega t + \frac{a}{\omega\tau} \sin \omega t = \\ &= \frac{1}{\tau} \left(\frac{a}{\omega} \sin \omega t - \frac{b}{\omega} \cos \omega t \right). \end{aligned}$$

Звідси знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} &= \frac{1}{\tau} \left(\frac{a}{\omega} \sin \omega t - \frac{b}{\omega} \cos \omega t \right)' = \\ &= \frac{1}{\tau} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) = \frac{1}{\tau} U_{\text{вх}}(t). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$U_{\text{вих}}(t) = \frac{1}{\tau} \int U_{\text{вх}}(t) dt.$$

Таким чином, якщо вхідний сигнал має високу частоту, то схема б) здійснює інтегрування цього сигналу (з точністю до мультиплікативної константи $\frac{1}{\tau}$, незалежної від частоти ω). З цієї причини схему б) називають *інтегруючим RC-ланцюгом*. Оскільки розглядуваний ланцюг є лінійною системою, то, застосовуючи принцип суперпозиції, можна стверджувати наступне. При проходженні через ланцюг б) буде відбуватись інтегрування не тільки окремої гармоніки, а й будь-якої лінійної комбінації гармонік, тобто будь-якого періодичного сигналу, спектр (набір частот) якого знизу обмежено граничною частотою, значно більшою за параметр $\frac{1}{\tau}$.

2.3.2 Випадок довільного сигналу

Нехай тепер на вхід RC -ланцюга подано будь-який періодичний сигнал з періодом T . Позначаючи $\omega = \frac{2\pi}{T}$, побудуємо ряд Фур'є цього сигналу (для спрощення постійну складову виключено)

$$U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t.$$

Згідно з принципом суперпозиції перетворення (2.17), (2.18) (для схем а), б) відповідно) можна застосувати до кожної гармоніки окремо. При цьому вихідний сигнал схеми а) складе

$$V_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \cos k\omega t + b'_k \sin k\omega t.$$

З урахуванням того, що частота k -ї гармоніки дорівнює $k\omega$ (а не ω), перетворення (2.17) треба прийняти у вигляді

$$\begin{cases} a'_k = \frac{k\omega\tau}{1+k^2\omega^2\tau^2} (a_k k\omega\tau + b_k); \\ b'_k = \frac{k\omega\tau}{1+k^2\omega^2\tau^2} (-a_k + b_k k\omega\tau). \end{cases} \quad (2.17')$$

Відповідно, вихідний сигнал схеми б) складе

$$V_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a''_k \cos k\omega t + b''_k \sin k\omega t.$$

Коефіцієнти a''_k , b''_k одержимо, прийнявши перетворення (2.18) у вигляді

$$\begin{cases} a''_k = \frac{1}{1+k^2\omega^2\tau^2} (a_k - b_k k\omega\tau); \\ b''_k = \frac{1}{1+k^2\omega^2\tau^2} (a_k k\omega\tau + b_k). \end{cases} \quad (2.18')$$

Для прикладу розглянемо проходження сигналу¹⁷

$$U(t) = \begin{cases} U_0 - \frac{U_0}{Q}, & 0 < t < \tau; \\ -\frac{U_0}{Q}, & \tau < t < T, \end{cases} \quad Q = \frac{T}{\tau}$$

через RC -ланцюг. Маємо:

$$U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t.$$

¹⁷Цей сигнал відрізняється від (1.17) відсутністю постійної складової.

Позначено $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Згідно з (1.19), (1.20) маємо:

$$a_k = \frac{U_0}{k\pi} \sin \frac{2k\pi}{Q}, \quad b_k = \frac{U_0}{k\pi} \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{Q} \right).$$

Тоді коефіцієнти Фур'є вихідного сигналу знаходимо для схеми а) за формулами (2.17')

$$\begin{cases} a'_k &= \frac{kx}{1+k^2x^2} (a_k kx + b_k); \\ b'_k &= \frac{kx}{1+k^2x^2} (-a_k + b_k kx). \end{cases}$$

Відповідно, для схеми б) – за формулами (2.18')

$$\begin{cases} a''_k &= \frac{1}{1+k^2x^2} (a_k - b_k kx); \\ b''_k &= \frac{1}{1+k^2x^2} (a_k kx + b_k). \end{cases}$$

В обох випадках позначено $x = \omega\tau$. Вираз для вихідного сигналу

$$V'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \cos k\omega t + b'_k \sin k\omega t,$$

$$V''(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a''_k \cos k\omega t + b''_k \sin k\omega t.$$

для схем а), б) відповідно. Результати розрахунків за наведеними формулами зображено на рисунку 2.8. Використано відповідний скрипт.

В якості вхідного сигналу прийнято меандр ($Q = 2$). З лівого боку показано роботу диференціюючої схеми а), з правого – інтегруючої схеми б). У верхньому рядку наведено вхідний меандр (враховано 100 гармонік). В середньому рядку надано графіки вихідного сигналу низької частоти ($x_1 = 0,3$), в нижньому рядку – високої частоти ($x_2 = 4$). Тому графіки ліворуч знизу і праворуч посередині схожі на графіки зверху (сигнал проходить практично без змін). Більшої схожості можна досягти, зменшуючи x_1 і збільшуючи x_2 . Графік ліворуч посередині є наближеним результатом диференціювання меандру, а праворуч знизу – його інтегрування.

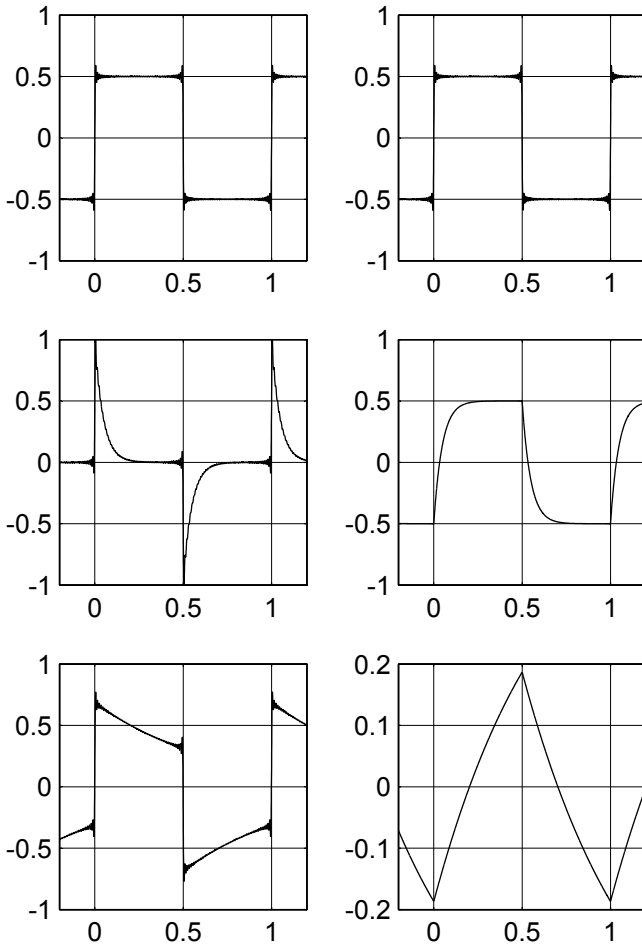


Рис. 2.8. Проходження меандру через RC -фільтри

3

Використані скрипти

3.1 Деякі відомості про **MATLAB**

Низку графіків, представлених в роботі, було отримано при запуску відповідних скриптів в середовищі **MATLAB**. Це дуже зручно, оскільки дозволяє зосередитись на математичному боці питання, а середовищу доручити автоматично вирішувати такі проблеми, як вибір масштабу, побудова ліній сітки, підписи на осях і т.ін.

Ми наводимо тексти скриптів з такої причини. Вважаємо за доцільне, щоб читач самостійно запустив кожен програму і, змінюючи різні параметри (скважність, інтервал розкладання тощо), спостерігав зміни в отримуваних ним результатах. На наше переконання, це надасть змогу більш глибоко усвідомити викладений матеріал.

Надамо деякі пояснення щодо роботи в цьому середовищі.

Текст скрипту набирають в будь-якому текстовому редакторі і зберігають в файлі з розширенням «*.m» (наприклад, «myfile01.m»). Можливо створювати ці файли навіть програмою «notepad.exe» («Блокнот»), тільки треба вручну змінити розширення «*.txt» на розширення «*.m». Втім, вважатимемо за краще використовувати редактор m-файлів, який входить до складу середовища **MATLAB**.

Створений m-файл запускають на виконання, обираючи в

головному меню вікна редактора m-файлів команду Debug-Run, або ж просто натискаючи клавішу F5.

Один і той самий скрипт можна запускати кілька разів поспіль. При цьому в робочому просторі (Workspace) залишаються значення змінних від попередніх запусків. Тому перед виконанням файлу треба очищати робочий простір. Саме це робить команда `clear all;`, з якої починається кожний скрипт.

Рядки, які починаються з символу відсотку («%»), містять лише коментар і на роботу програми не впливають; їх можна не набирати.

В наведених нижче скриптах досить активно використано цикли `for ... end`. Саме всередині циклів нараховано масиви значень певних змінних. Команда `plot(t, x)` відтворює графік залежності $x(t)$, причому x є масивом¹, який складається з багатьох значень $x(j)$, кожне з яких окремо нараховано всередині циклу.

В результаті виконання команди `grid on;` на графіку виникає координатна сітка.

Якщо команда `plot;` в скрипті зустрінеться двічі, то відтворення другого графіку буде відбуватись в тому ж вікні. При цьому зображення першого графіку буде стертим. Щоб цього не відбувалось (коли ми хочемо в одній системі координат переглянути два графіки одночасно), треба перший графік утримати від видалення. Це досягається командою `hold on;`. Зазвичай команди `grid on;` і `hold on;` виникають в скрипті одна за одною.

Якщо ми хочемо відтворити два (або більше) графіки в одному вікні, але в різних системах координат (це може бути зру-

¹Звісно, в команді `plot(t, x)` аргумент t також є масивом, причому команда `plot(t, x)` не буде працювати, якщо масиви t і x містять різну кількість даних. Про цю кількість можна дізнатись, здійснивши мишею «double click» на позначенні змінної в робочому просторі.

Більш точно кажучи, команду `plot` ми зазвичай використовуємо у вигляді `plot(t, x, 'k')`. Параметр $'k'$ вимагає будувати графік чорним (без цього параметру графік було б намальовано світло-синім). Крапка з комою (як і після будь-якого оператора) не дозволяє середовищу формувати відгуки у вікні Command Window, щоб не відволікати нашої уваги.

Більш детально про команду `plot` можна дізнатись, набравши у вікні Command Window текст `help plot` (і натиснувши «Enter»). Аналогічну допомогу MATLAB надає і стосовно інших команд.

чним для порівняння графіків), можна використовувати команду `subplot`; . Вона нічого не малює, а лише розподіляє окремі ділянки вікна між окремими системами координат.

Усі інші команди в наданих скриптах виконують лише розрахункові дії і, на нашу думку, пояснень не потребують. Таким чином, вступ до мови **MATLAB** є достатнім для розуміння і самостійної модифікації наведених скриптів. Зауважимо, що виконання скриптів відбувається в режимі інтерпретації (тобто компіляція з утворенням `exe`-файлу не є потрібною). Тому помилки (у разі їх виникнення) виявляються лише на етапі виконання. Про це вікно `Command Window` надає відповідні повідомлення (зазвичай шрифтом червоного кольору) із зазначенням номеру рядка, який містить помилку.

Зробимо ще одне зауваження. Дуже не хотілося б, щоб читач, який вперше запускає **MATLAB**, почав думати, ніби це середовище створене для побудови графіків у такий дивний спосіб. Насправді **MATLAB** є надпотужним середовищем, призначеним для вирішення найрізноманітніших проблем прикладної математики і математичного моделювання, причому в контексті конкретних предметних областей: механіки, аеродинаміки, електротехніки, аналізу сигналів і створення дискретних і аналогових фільтрів, теорії управління тощо. Ми обрали **MATLAB** не за цю надпотужність, а за зручне поєднання легкості розуміння скриптів і високої якості отримуваних графічних результатів з можливістю швидко переглядати у вікні `Workspace` значення змінних, які фігурують у розрахунках.

Нижче в цьому розділі наводяться тексти скриптів із зазначенням номерів рисунків, створених за їх допомогою.

3.2 Часткові суми меандру

Цей скрипт використано при відтворенні рис. 1.4. При самостійному запуску цього скрипта цікаво збільшити один (або декілька) з параметрів `Ng1`, `Ng2`, `Ng3`. Відмінність між отримуваним зображенням і ідеальним графіком рис. 1.4 поступово зникатиме. В околі точки розриву $t = 0,5$ спостерігається сплеск, амплітуда якого зменшується при збільшенні кількості утримуваних гармонік. Спостерігати цей сплеск при дуже ве-

ликій кількості утримуваних гармонік зручно з використанням інструменту «Zoom In», розташованого в панелі інструментів вікна, яке містить зображення.

```
clear all;
%Часткові суми меандру
f0 = 1.0;%амплітуда
T = 1.0;%період розкладання
w = 2.0 * pi / T;%основна частота розкладання
Np = 803;%кількість точок на графіках
Ng1 = 3;%кількість утримуваних гармонік
Ng2 = 5;%кількість утримуваних гармонік
Ng3 = 15;%кількість утримуваних гармонік
tmin = -0.1 * T;%точка початку побудови графіків
tmax = 1.1 * T;%точка кінця побудови графіків
dt = (tmax-tmin) / (Np - 1);%крок по аргументу t
%створюємо масив точок,
%в яких будемо обчислювати значення функцій
for j=1:Np
t(j) = tmin + (j - 1) * dt;
end
%нараховуємо амплітуди гармонік
a0 = 0.5 * f0;
for k=1:Ng3
b(k) = f0 * (1.0 - cos(k * pi))/ k / pi;
end
%В кожній точці інтервалу [tmin, tmax]
% накопичуємо значення гармонік
for j=1:Np
f1(j) = a0;
f2(j) = a0;
f3(j) = a0;
for k=1:Ng1
f1(j) = f1(j) + b(k) * sin(k * w * t(j));
end
for k=1:Ng2
f2(j) = f2(j) + b(k) * sin(k * w * t(j));
end
for k=1:Ng3
```

```
f3(j) = f3(j) + b(k) * sin(k * w * t(j));
end
end
subplot(3,1,1);
plot (t,f1,'k');
grid on;
subplot(3,1,2);
plot (t,f2,'k');
grid on;
subplot(3,1,3);
plot (t,f3,'k');
grid on;
```

3.3 Імпульс у вигляді трапеції

Цей скрипт використано при відтворенні рис. 1.6.

```
clear all;
%Імпульс у вигляді трапеції
f0 = 1.0;%амплітуда
T = 1;%основний період розкладання
w = 2.0 * pi / T;%основна частота розкладання
Nr = 1203;%кількість точок на графіках
Ng = 30;%кількість утримуваних гармонік
tmin = -1.1 * T;%точка початку побудови графіків
tmax = 1.1 * T;%точка кінця побудови графіків
dt = (tmax-tmin) / (Nr-1);%крок по аргументу t
%створюємо масив точок,
%в яких будемо обчислювати значення функцій
for j=1:Nr
t(j) = tmin + (j - 1) * dt;
end
%1) основне розкладання
%нараховуємо амплітуди гармонік
a0 = 0.75 * f0;
for k=1:Ng
a(k)=(f0*cos(k*pi)-1.0)/k/k/pi/pi;
b(k)=-f0/k/pi;
end
```

```
%В кожній точці інтервалу [tmin, tmax]
%накопичуємо значення гармонік
for j=1:Np
f(j) = a0;
for k=1:Ng
f(j)=f(j)+a(k)*cos(k*w*t(j))+b(k)*sin(k*w*t(j));
end
end
%2) розкладання за синусами
%нараховуємо амплітуди гармонік
for k=1:Ng
bs(k) = sin(k * pi / 2.0) / k / k;
bs(k) = bs(k) - pi * cos(k * pi) / 2.0 / k;
bs(k) = bs(k) * 4.0 * f0 / pi / pi;
end
%В кожній точці інтервалу [tmin, tmax]
%накопичуємо значення гармонік
for j=1:Np
fs(j) = 0.0;
for k=1:Ng
fs(j) = fs(j) + bs(k) * sin(0.5 * k * w * t(j));
end
end
%3) розкладання за косинусами
%нараховуємо амплітуди гармонік
ac0 = 0.75 * f0;
for k=1:Ng
ac(k) = cos(k * pi / 2.0) - 1.0;
ac(k) = ac(k) * 4.0 * f0 / pi / pi / k / k;
end
%В кожній точці інтервалу [tmin, tmax]
%накопичуємо значення гармонік
for j=1:Np
fc(j) = ac0;
for k=1:Ng
fc(j) = fc(j) + ac(k) * cos(0.5 * k * w * t(j));
end
end
```

```
subplot(3,1,1);  
plot (t,f,'k');  
grid on;  
subplot(3,1,2);  
plot (t,fs,'k');  
grid on;  
subplot(3,1,3);  
plot (t,fc,'k');  
grid on;
```

3.4 Розрахунок опору котушки

Цей скрипт використано при відтворенні рис. 2.2.

```
clear all;  
%Залежність опору котушки  
%від скважності прямокутних імпульсів  
N = 200;%кількість точок на графіку  
M = 200;%кількість доданків, утримуваних в сумах  
epsilon = 0.01;  
zmin = epsilon;%початок діапазону зміни z  
zmax = 1.0 - epsilon;%кінець діапазону зміни z  
dz = (zmax-zmin) / (N-1);%крок за аргументом z  
for j = 1 : N  
z(j) = zmin + (j - 1) * dz;  
Q(j) = 1.0 / z(j);  
%розрахунок опору методом накопичення  
S1 = 0.0;%чисельник  
S2 = 0.0;%знаменник  
for k = 1 : M  
sin2 = sin(k * pi / Q(j)) * sin(k * pi / Q(j));  
S1 = S1 + sin2 / k / k;  
S2 = S2 + sin2 / k / k / k / k;  
end  
x(j) = sqrt(S1 / S2);  
end  
plot(z, x, 'k');  
grid on;
```

3.5 Зіставлення напруги і струму котушки

Цей скрипт використано при відтворенні рис. 2.3.

```
clear all;
%напруга і струм котушки
%при імпульсному збудженні
U0 = 1.0;%амплітуда
Q = 5.0;%скважність
L = 0.1;%індуктивність
T = 1.0;%період розкладання
w = 2.0 * pi / T;%основна частота розкладання
Np = 803;%кількість точок на графіках
Ng = 18;%кількість утримуваних гармонік
tmin = -0.1 * T;%точка початку побудови графіків
tmax = 1.1 * T;%точка кінця побудови графіків
dt = (tmax-tmin) / (Np - 1);%крок по аргументу t
%створюємо масив точок,
%в яких будемо обчислювати значення функцій
for j=1:Np
t(j) = tmin + (j - 1) * dt;
end
%нараховуємо амплітуди гармонік напруги
for k=1:Ng
a(k) = U0*sin(2.0*k*pi/Q)/k/pi;
b(k) = U0*(1.0-cos(2.0*k*pi/Q))/k/pi;
end
%В кожній точці інтервалу [tmin, tmax]
%накопичуємо значення гармонік
for j=1:Np
u(j) = 0.0;
tok(j) = 0.0;
for k=1:Ng
u(j)=u(j)+a(k)*cos(k*w*t(j))+b(k)*sin(k*w*t(j));
tok(j)=tok(j)+a(k)*cos(k*w*t(j)-pi/2.0)/k/w/L;
tok(j)=tok(j)+b(k)*sin(k*w*t(j)-pi/2.0)/k/w/L;
end
end
subplot(2,1,1);
```

```
plot (t,u,'k');  
grid on;  
subplot(2,1,2);  
plot (t,tok,'k');  
grid on;
```

3.6 Розрахунок резонансної кривої

Цей скрипт використано при відтворенні рис. 2.4.

```
clear all;  
%Резонансна крива при різних рівнях втрат B  
B1 = 0.03;  
B2 = 0.06;  
B3 = 0.1;  
N = 200;%кількість точок на графіку  
Zmin = 0.0;%початок діапазону зміни z  
Zmax = 2.0;%кінець діапазону зміни z  
dZ = (Zmax-Zmin)/(N-1);%крок за аргументом Z  
for j = 1 : N  
Z(j) = Zmin + (j - 1) * dZ;  
F1(j) = (Z(j) - 1.0) * (Z(j) - 1.0);  
F1(j) = F1(j) + 4.0 * B1 * B1 * Z(j) * Z(j);  
F1(j) = 1.0 / sqrt(F1(j));  
F2(j) = (Z(j) - 1.0) * (Z(j) - 1.0);  
F2(j) = F2(j) + 4.0 * B2 * B2 * Z(j) * Z(j);  
F2(j) = 1.0 / sqrt(F2(j));  
F3(j) = (Z(j) - 1.0) * (Z(j) - 1.0);  
F3(j) = F3(j) + 4.0 * B3 * B3 * Z(j) * Z(j);  
F3(j) = 1.0 / sqrt(F3(j));  
end  
plot(Z, F1, 'k');  
grid on;  
hold on;  
plot(Z, F2, 'k');  
hold on;  
plot(Z, F3, 'k');
```

3.7 Розрахунок полірезонансу

Цей скрипт використано при відтворенні рис. 2.5.

```
clear all;
%Резонансна крива полірезонансу
%при збудженні меандром
В = 0.02;
N = 5000;%кількість точок на графіку
NG = 9;%кількість утримуваних гармонік
Q = 8.0;%скважність
Zmin = 0.0;%початок діапазону зміни z
Zmax = 2.0;%кінець діапазону зміни z
dZ = (Zmax-Zmin)/(N-1);%крок за аргументом Z
for j = 1 : N
Z(j) = Zmin + (j - 1) * dZ;
F(j) = 0.0;
%у внутрішньому циклі -
%накопичення внесків гармонік
for k = 1 : NG
chis = sin(k*pi/Q)*sin(k*pi/Q)/k/k;
znam = k * k * Z(j) * Z(j) - 1.0;
znam = znam * znam;
znam = znam + 4.0 * В * В * k * k * Z(j) * Z(j);
F(j) = F(j) + chis / znam;
end
F(j) = sqrt(F(j));
end
```

3.8 Робота RC-фільтрів

Цей скрипт використано при відтворенні рис. 2.8.

```
clear all;
%проходження меандру через RC-фільтри
x1 = 0.3;
x2 = 4.0;
U0 = 1.0;
Q = 2.0;
T = 1.0;
```

```
tmin = -0.25 * T;
tmax = 1.25 * T;
w = 2.0 * pi / T;
Ng = 100;
%розрахунок коефіцієнтів Фур'є
for k = 1 : Ng
a(k) = U0*sin(2.0*k*pi/Q)/k/pi;
b(k) = U0*(1.0-cos(2.0*k*pi/Q))/k/pi;
as1(k) = k * x1 * (a(k) * k * x1 + b(k));
as1(k) = as1(k) / (1.0 + k * k * x1 * x1);
bs1(k) = k * x1 * (b(k) * k * x1 - a(k));
bs1(k) = bs1(k) / (1.0 + k * k * x1 * x1);
as2(k) = k * x2 * (a(k) * k * x2 + b(k));
as2(k) = as2(k) / (1.0 + k * k * x2 * x2);
bs2(k) = k * x2 * (b(k) * k * x2 - a(k));
bs2(k) = bs2(k) / (1.0 + k * k * x2 * x2);
ass1(k) = (a(k) - b(k) * k * x1);
ass1(k) = ass1(k) / (1.0 + k * k * x1 * x1);
bss1(k) = (a(k) * k * x1 + b(k));
bss1(k) = bss1(k) / (1.0 + k * k * x1 * x1);
ass2(k) = (a(k) - b(k) * k * x2);
ass2(k) = ass2(k) / (1.0 + k * k * x2 * x2);
bss2(k) = (a(k) * k * x2 + b(k));
bss2(k) = bss2(k) / (1.0 + k * k * x2 * x2);
end
Np = 3000;
dt = (tmax - tmin) / (Np - 1);
%розрахунок значень функцій методом накопичення
for i = 1 : Np
tt(i) = tmin + (i - 1) * dt;
U(i) = 0.0;
Vs1(i) = 0.0;
Vs2(i) = 0.0;
Vss1(i) = 0.0;
Vss2(i) = 0.0;
for k = 1 : Ng
U(i) = U(i) + a(k) * cos(k * w * tt(i));
U(i) = U(i) + b(k) * sin(k * w * tt(i));
```

```
Vs1(i) = Vs1(i) + as1(k) * cos(k * w * tt(i));
Vs1(i) = Vs1(i) + bs1(k) * sin(k * w * tt(i));
Vs2(i) = Vs2(i) + as2(k) * cos(k * w * tt(i));
Vs2(i) = Vs2(i) + bs2(k) * sin(k * w * tt(i));
Vss1(i) = Vss1(i)+ass1(k)*cos(k*w*tt(i));
Vss1(i) = Vss1(i)+bss1(k)*sin(k*w*tt(i));
Vss2(i) = Vss2(i)+ass2(k)*cos(k*w*tt(i));
Vss2(i) = Vss2(i)+bss2(k)*sin(k*w*tt(i));
end
end
subplot(3,2,1);
plot(tt, U, 'k');
grid on;
subplot(3,2,3);
plot(tt, Vs1, 'k');
grid on;
subplot(3,2,5);
plot(tt, Vs2, 'k');
grid on;
subplot(3,2,2);
plot(tt, U, 'k');
grid on;
subplot(3,2,4);
plot(tt, Vss1, 'k');
grid on;
subplot(3,2,6);
plot(tt, Vss2, 'k');
grid on;
```

4

Індивідуальні завдання

4.1 Завдання 1

Знайти інтегральне середнє значення заданої функції $f(t)$ на заданому інтервалі $t \in [a; b]$. Схематично зобразити графік функції і знайдене інтегральне середнє значення.

1. $f(t) = |t|, t \in [-1; 3]$.

3. $f(t) = t^2, t \in [-3; 3]$.

5. $f(t) = t^2, t \in [0; 1]$.

7. $f(t) = t^3, t \in [-\pi; \pi]$.

9. $f(t) = t^4, t \in [-1; 1]$.

11. $f(t) = \sin |t|, t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

13. $f(t) = \sin |t|, t \in [-\pi; \pi]$.

15. $f(t) = t + 1, t \in [0; 4]$.

17. $f(t) = 4 - |t|, t \in [-1; 1]$.

19. $f(t) = \sin t, t \in [\pi; 2\pi]$.

21. $f(t) = e^t, t \in [0; 1]$.

23. $f(t) = \sin \pi t, t \in [0; 1]$.

25. $f(t) = |t - 2|, t \in [0; 4]$.

27. $f(t) = 4 - t^2, t \in [0; 2]$.

29. $f(t) = 1 - |t|, t \in [0; 1]$.

2. $f(t) = t, t \in [0; 2]$.

4. $f(t) = \sin t, t \in [0; \pi]$.

6. $f(t) = \sin t, t \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

8. $f(t) = \cos t, t \in [0; \pi]$.

10. $f(t) = \cos t, t \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

12. $f(t) = \sqrt{|t|}, t \in [-1; 1]$.

14. $f(t) = \sqrt[3]{t}, t \in [0; 1]$.

16. $f(t) = 2 - t, t \in [-2; 0]$.

18. $f(t) = t^2 + 2t, t \in [0; 1]$.

20. $f(t) = \cos t, t \in [\pi; 2\pi]$.

22. $f(t) = e^{-t}, t \in [-1; 0]$.

24. $f(t) = \cos \pi t, t \in [0; 1]$.

26. $f(t) = |t| - 2, t \in [0; 4]$.

28. $f(t) = 1 - t^2, t \in [0; 1]$.

30. $f(t) = t^2 - 2t, t \in [0; 1]$.

4.2 Завдання 2

За умовою попереднього завдання знайти середньоквадратичне значення заданої функції на заданому інтервалі.

4.3 Завдання 3

Функцію, задану кусочно, розкласти в ряд Фур'є на області її визначення. У відповіді надати вираз для цього ряду, а також *аналітичні* вирази для коефіцієнтів Фур'є. Побудувати графік часткової суми ряду Фур'є з утриманням 30 гармонік.

$$1. f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2; \\ 2, & 2 < t < 4. \end{cases}$$

$$2. f(t) = \begin{cases} 4 - t, & 0 < t < 2; \\ 2, & 2 < t < 4. \end{cases}$$

$$3. f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 < t < 1; \\ 2, & 1 < t < 4. \end{cases}$$

$$4. f(t) = \begin{cases} 4 - 2t, & 0 < t < 1; \\ 2, & 1 < t < 4. \end{cases}$$

$$5. f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1; \\ 2 - t, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

$$6. f(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 < t < 1; \\ t - 1, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

$$7. f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & 0 < t < 2; \\ 1, & 2 < t < 3. \end{cases}$$

$$8. f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}t, & 0 < t < 2; \\ 0, & 2 < t < 3. \end{cases}$$

$$9. f(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t, & 0 < t < 3; \\ 1, & 3 < t < 4. \end{cases}$$

$$10. f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}t, & 0 < t < 3; \\ 0, & 3 < t < 4. \end{cases}$$

$$11. f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1; \\ 1, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

$$12. f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & 0 < t < 1; \\ 0, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

$$13. f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1; \\ 0, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

$$14. f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & 0 < t < 1; \\ 1, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

$$15. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1; \\ 2 - t, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

$$16. f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1; \\ t - 1, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

$$17. f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}; \\ 1, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}$$

$$18. f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}$$

$$19. f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}$$

$$20. f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}; \\ 1, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
 21. f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1; \\ t-1, & 1 < t < 2. \end{cases} & 22. f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & 0 < t < 1; \\ 2-t, & 1 < t < 2. \end{cases} \\
 23. f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}; \\ \cos t, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases} & 24. f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}; \\ \sin t, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases} \\
 25. f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}; \\ \sin 2t, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases} & 26. f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}; \\ \cos 2t, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases} \\
 27. f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}; \\ \cos 2t, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases} & 28. f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}; \\ \sin 2t, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases} \\
 29. f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\pi}, & 0 < t < \frac{\pi}{2}; \\ \sin t, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases} & 30. f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{\pi}{2}; \\ \sin 2t, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}
 \end{array}$$

4.4 Завдання 4

Задану функцію розкласти в ряд Фур'є на заданому нестандартному інтервалі, початок якого не збігається з початком координат. У відповіді надати вираз для цього ряду, а також *аналітичні* вирази для коефіцієнтів Фур'є. Побудувати графік часткової суми ряду Фур'є з утриманням 30 гармонік.

$$\begin{array}{ll}
 1. f(x) = x^2, x \in [1; 2]. & 2. f(x) = x, x \in [1; 2]. \\
 3. f(x) = \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]. & 4. f(x) = \cos x, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]. \\
 5. f(x) = |x - 2|, x \in [1; 4]. & 6. f(x) = |x - 3|, x \in [1; 4]. \\
 7. f(x) = x^2 - 2x, x \in [1; 3]. & 8. f(x) = x^2 + 2x, x \in [-3; -1]. \\
 9. f(x) = 3 - |x - 3|, x \in [2; 5]. & 10. f(x) = 3 - |x - 3|, x \in [1; 4]. \\
 11. f(x) = 4 - \frac{1}{2}x, x \in [2; 4]. & 12. f(x) = \frac{1}{2}x, x \in [2; 4]. \\
 13. f(x) = x^2 - 2|x|, x \in [-1; 3]. & 14. f(x) = x^2 - 2|x|, x \in [-3; 1]. \\
 15. f(x) = x^2 + 2|x|, x \in [-1; 3]. & 16. f(x) = x^2 + 2|x|, x \in [-3; 1]. \\
 17. f(x) = x(4 - x), x \in [1; 4]. & 18. f(x) = -x^2 - 4x, x \in [-4; -1]. \\
 19. f(x) = 2x - 4, x \in [2; 4]. & 20. f(x) = 2x - 4, x \in [3; 4].
 \end{array}$$

21. $f(x) = |x + 1|, x \in [-2; 1]$.

22. $f(x) = |x + 1|, x \in [-4; 2]$.

23. $f(x) = -x^2 - 2x, x \in [-2; 1]$.

24. $f(x) = -x^2 - 2x, x \in [-3; -1]$.

25. $f(x) = 3 - |x|, x \in [-1; 2]$.

26. $f(x) = 3 - |x|, x \in [-2; 1]$.

27. $f(x) = \sin x, x \in [-\pi; \frac{\pi}{2}]$.

28. $f(x) = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

29. $f(x) = \cos x, x \in [-\pi; \frac{\pi}{2}]$.

30. $f(x) = \cos x, x \in [-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

4.5 Завдання 5

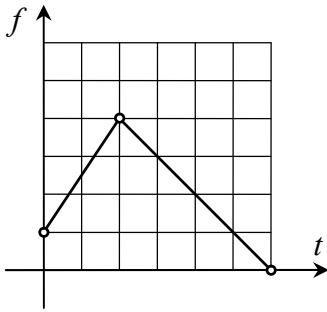
Деяку функцію задано графічно (рис. 4.1-4.5). Вважаючи, що розмір однієї клітинки дорівнює одиниці, потрібно: 1) записати її в аналітичному вигляді на інтервалі $t \in [0, 6]$; 2) розкласти її в ряд Фур'є на цьому інтервалі; 3) до визначити задану функцію до непарної і парної і побудувати розвинення нових функцій на інтервалі $t \in [-6, 6]$; 4) побудувати графіки часткових сум трьох отриманих розвинень, утримуючи 30 гармонік. У відповіді надати вирази для трьох рядів, а також *аналітичні* вирази для усіх коефіцієнтів Фур'є.

4.6 Завдання 6

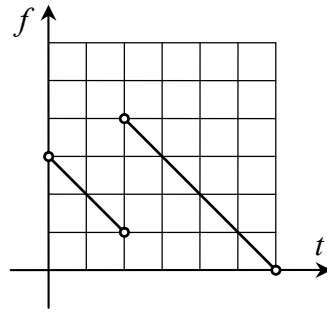
Залежність деякої періодичної імпульсної напруги від часу на головному періоді подано на одному з рисунків 4.1-4.5 згідно Вашого варіанту. Нехай розмір однієї клітинки в горизонтальному напрямку дорівнює 10^{-3} с, а в вертикальному напрямку – V_0 . Очевидно, період цієї послідовності імпульсів дорівнює $T = 6 \cdot 10^{-3}$ с. Нехай цю напругу подано на конденсатор ємністю $C = 1$ мкФ. Якби ця напруга залежала від часу гармонічно, опір конденсатора становив би

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{T}{2\pi C} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 10^{-6}} \approx 955 \text{ Ом.}$$

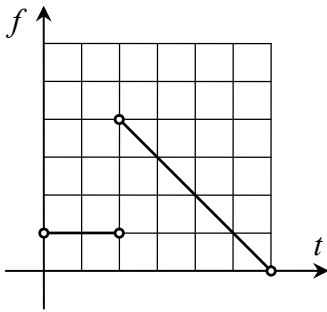
За рахунок відмінності форми напруги від гармонічної цей опір буде іншим. Обчислити цей опір, враховуючи наступне.



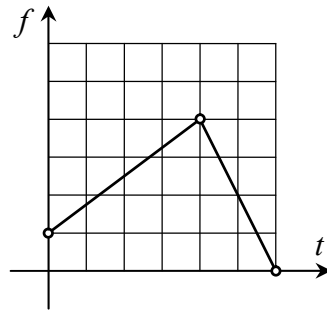
Вар. 1



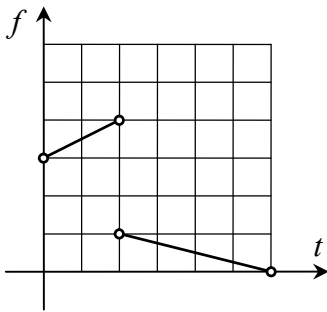
Вар. 2



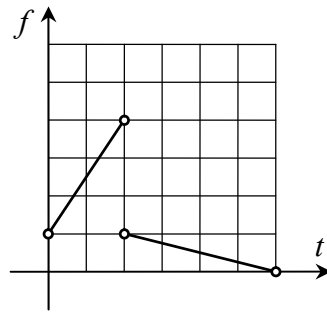
Вар. 3



Вар. 4

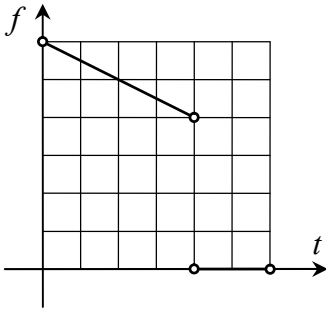


Вар. 5

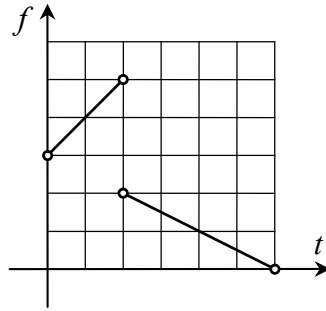


Вар. 6

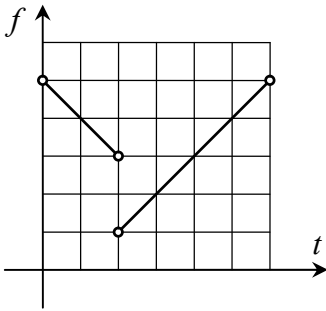
Рис. 4.1. Варіанти 1-6 завдань 5-7



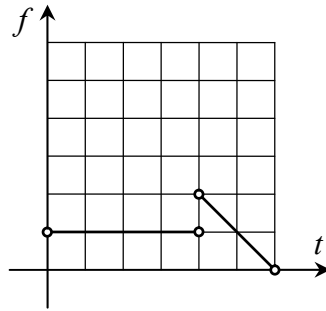
Вар. 7



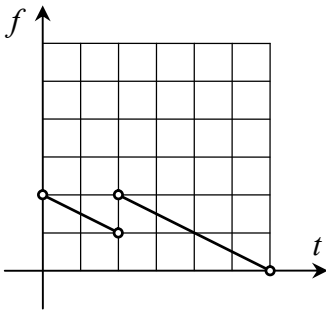
Вар. 8



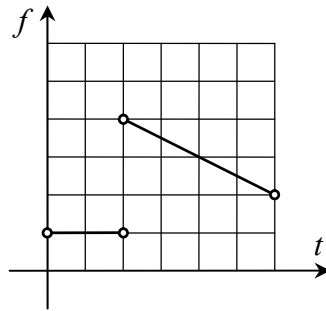
Вар. 9



Вар. 10

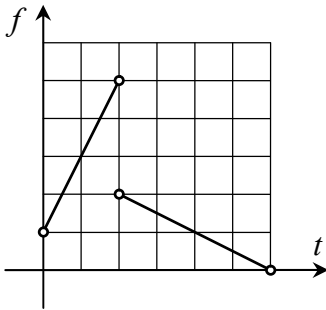


Вар. 11

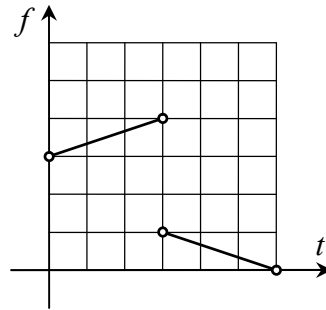


Вар. 12

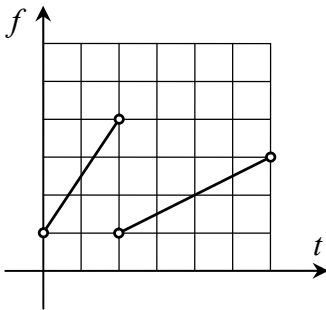
Рис. 4.2. Варіанти 7-12 завдань 5-7



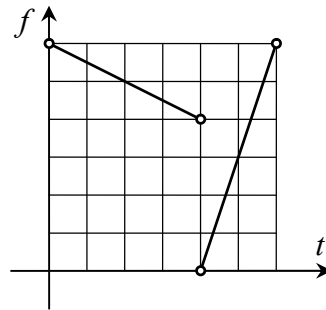
Вар. 13



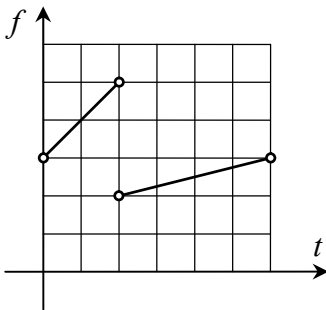
Вар. 14



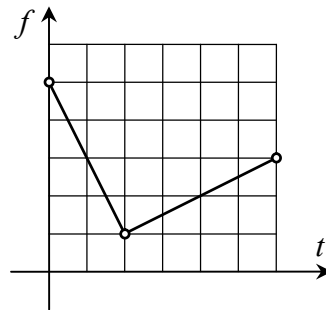
Вар. 15



Вар. 16

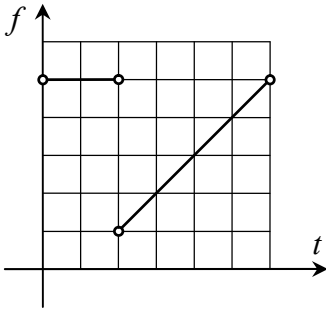


Вар. 17

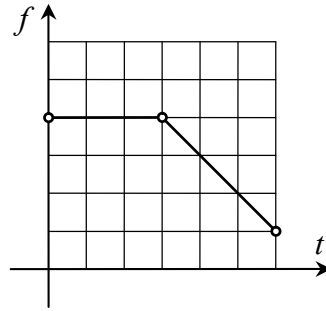


Вар. 18

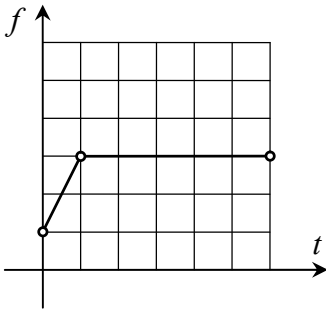
Рис. 4.3. Варіанти 13-18 завдань 5-7



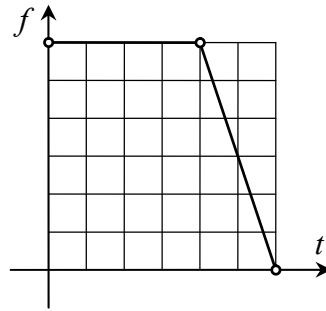
Вар. 19



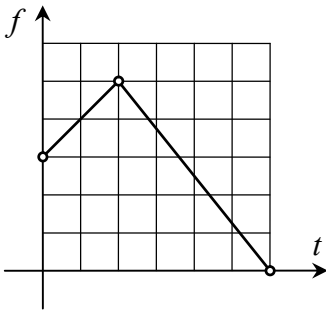
Вар. 20



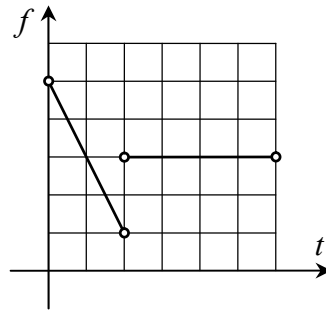
Вар. 21



Вар. 22

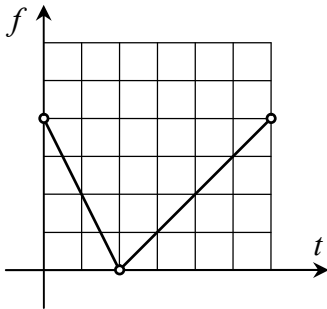


Вар. 23

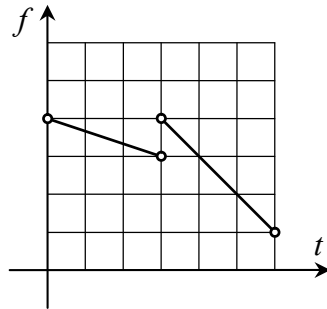


Вар. 24

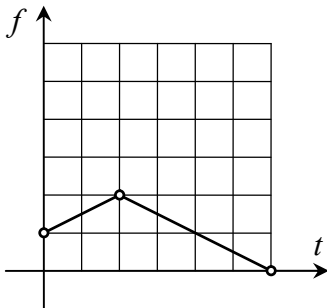
Рис. 4.4. Варіанти 19-24 завдань 5-7



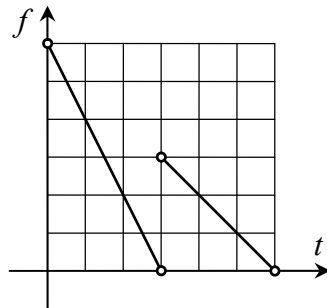
Вар. 25



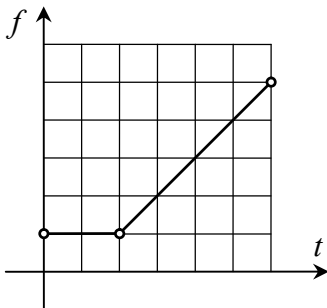
Вар. 26



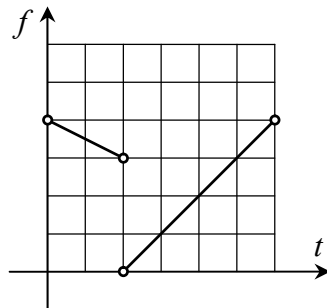
Вар. 27



Вар. 28



Вар. 29



Вар. 30

Рис. 4.5. Варіанти 25-30 завдань 5-7

Нехай на конденсатор подано напругу

$$U(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t). \quad (4.1)$$

За законом Ома кожна гармоніка¹ напруги народжує гармоніку струму, від якої відстає за фазою на $\frac{\pi}{2}$. При цьому амплітуди k -х гармонік напруги і струму пов'язані з «опором» $X_C(k) = \frac{1}{(k\omega)C}$ відомим співвідношенням $I_k = \frac{U_k}{X_C(k)}$. Тоді згідно з принципом суперпозиції струм конденсатора²

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot k\omega C \cos \left(k\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + b_k \cdot k\omega C \sin \left(k\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Тоді з використанням середньоквадратичних значень маємо

$$X_C = \frac{\tilde{U}}{\tilde{i}} = \frac{1}{\omega C} \cdot \left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)}{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2)} \right)^{1/2},$$

причому коефіцієнти a_k , b_k отримано Вами при розв'язуванні попереднього завдання. Остання формула і є відповіддю цього завдання.

При обчисленнях за цією формулою пропонується побудувати графік залежності опору від кількості утримуваних гармонік. Доцільно обчислювати безрозмірний опір $\xi_C = \omega C \cdot X_C$.

¹Окрім нульової гармоніки U_0 , оскільки постійний струм через конденсатор не тече. Тому будемо вважати, що з сигналу $U(t)$ постійну складову U_0 виключено, як це робилось при обчисленні опору котушки. Технічно це можна зробити, приєднуючи послідовно додаткове джерело відповідної постійної ЕРС у зворотній полярності для вольт-компенсації.

²Такий самий вираз ми отримаємо з наступних міркувань. За визначенням електричної ємності заряд конденсатора в момент часу t дорівнює $Q(t) = CU(t)$. За визначенням миттєвої сили струму маємо $i(t) = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dU}{dt}$. Отже, достатньо продиференціювати (4.1) і домножити результат на C . Залишається врахувати очевидні тотожності:

$$(\sin x)' = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right), \quad (\cos x)' = -\sin x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right).$$

Тоді розрахункова формула набуває вигляду

$$\xi_C(n) = \left(\frac{\sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)}{\sum_{k=1}^n k^2 (a_k^2 + b_k^2)} \right)^{1/2}.$$

Діапазон зміни параметру n треба обрати так, щоб подальше збільшення n вже не впливало на суттєві зміни результату.

Зробимо ще одне зауваження. Опір конденсатора імпульсному струмові даної форми залежить саме від цієї форми, але не від амплітуди напруги. Легко бачити, що коефіцієнти a_k , b_k прямо пропорціональні масштабній одиниці V_0 . Остаточну розрахункову формулу може бути скорочено на V_0^2 , і таким чином остаточний результат ξ_C справді не залежить від амплітуди імпульсної напруги. Тому при практичних розрахунках можна покласти, наприклад, $V_0 = 1$ без обмеження загальності міркувань.

4.7 Завдання 7

Залежність деякої періодичної імпульсної напруги від часу на головному періоді подано на одному з рисунків 4.1-4.5 згідно Вашого варіанту. Нехай розмір однієї клітинки в горизонтальному напрямку дорівнює 10^{-3} с, а в вертикальному напрямку – V_0 . Потрібно:

1) побудувати сигнал $U(t)$, виключивши з умови постійну складову. Надати вирази для коефіцієнтів Фур'є (a_k , b_k) побудованого сигналу.

2) Дослідити диференціюючу властивість схеми (2.6) а). Для цього обчислити коефіцієнти Фур'є вихідного сигналу за формулами (2.17'). Вважаючи, що вхідний сигнал має низьку частоту, покласти $x = \omega\tau = 0,1$. Побудувати графіки вхідного і вихідного сигналів, використовуючи такий фрагмент коду:

```
...
subplot(2,1,1);
plot(...);%графік вхідного сигналу
grid on;
```

```
subplot(2,1,2);  
plot (...);%графік вихідного сигналу  
grid on;
```

3) Дослідити інтегруючу властивість схеми (2.6) б). Для цього обчислити коефіцієнти Фур'є вихідного сигналу за формулами (2.18'). Вважаючи, що вхідний сигнал має високу частоту, покласти $x = \omega\tau = 10$. Побудувати графіки вхідного і вихідного сигналів, використовуючи процедуру `subplot`.

Бібліографічний список

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. – М. : Наука, 1966. – 656 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М. : ГИФМЛ, 1963. – 856 с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. – М. : Высш. шк., 1996. – 638 с.
4. Анпилогов Д.И., Снижко Н.В. Введение в теорию колебаний. – Пальмариум, 2014. – 172 с.

Для нотаток

Навчальне видання

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**Дмитро Ігорович АНПІЛОГОВ
Наталія Вікторівна СНІЖКО**

РЯДИ ФУР'Є. ВИБРАНІ ПИТАННЯ

Навчальний посібник

Технічний редактор Д. І. Анпілогов
Комп'ютерне верстання Д. І. Анпілогов
Коректор Н. В. Сніжко
Графіка Н. В. Сніжко

Видавець ТОВ «Акцент Інвест-трейд»

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції серія ДК №3977 від 14.02.2011 р.

Здано в набір 08.11.2014. Підписано до друку 09.11.2014.
Формат 60×84 1/16. Папір офсетний №1. Друк принтерний.
Ум. друк. арк. 5,35. Друк. арк. відбиток 1604,3.
Наклад 300 прим. Замовлення № 7617/10.2014-А.

Макет розроблений та віддрукований у друкарні «Акцент»
(Фізична особа-підприємець В.М.Систеров)
Україна, 69035, м. Запоріжжя, пр. Леніна, 158, оф.248/249.
Тел.: (061) 270-78-76, моб. (068) 448-11-28
accent.zp@ukr.net

Свідоцтво про державну реєстрацію
серія В03 № 761072, видане 21.01.2010 р.

ISBN 978-966-2602-75-III