МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

І. М. Килимник, Д.С. Яримбаш

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

Запоріжжя • ЗНТУ • 2018

УДК 517.91(075.8)
К 39

Рекомендовано до видання Вченою радою ЗНТУ,
протокол № 10 від 29 травня 2018 р.

Р е ц е н з е н т и :

Корніч Г. В., доктор фізико-математичних наук, професор Запорізького національного технічного університету

Гребенюк С. М., доктор технічних наук, доцент Запорізького національного університету

К 39 Килимник І. М., Яримбаш Д.С.

Диференціальні рівняння: Навчальний посібник / І. М. Килимник, Д.С. Яримбаш. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. – 102 с.

ISBN 978-617-529-197-9

У посібнику «Диференціальні рівняння» стисло викладений теоретичний матеріал: наведено основні типи диференціальних рівнянь, вказані способи їх розв'язування, детально розібрані відповідні приклади, приведено варіанти завдань для самостійної роботи з відповідями.

Посібник призначений для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки заочної (дистанційної) форми навчання та для самостійної роботи студентів денної форми навчання.

УДК 517.91(075.8)

ISBN 978-617-529-197-9

ЗМІСТ

ВСТУП

При вирішенні більшості завдань математики, науки і техніки безпосередньо встановити закон, що зв'язує шукані і дані змінні величини, як правило, не вдається внаслідок його складності або відсутності інформації про поведінку шуканих величин, але зате вдається отримати зв'язок між похідними або диференціалами цих змінних, що виражається рівняннями або системами рівнянь. Звичайні диференціальні рівняння застосовуються для опису багатьох процесів реальної дійсності.

Вивчення звичайних диференціальних рівнянь в межах курсу вищої математики має принципове теоретичне і прикладне значення для підготовки сучасного фахівця.

Стандартний курс вищої математики у вищих навчальних закладах, як правило, охоплює вивчення лише найбільш важливих класів звичайних диференціальних рівнянь. Обсяг всього курсу може сильно варіюватися в залежності від спеціальності і необхідного рівня підготовки фахівців.

Мета цього навчального посібника - допомогти студентам опанувати вузівським курсом звичайних диференціальних рівнянь, навчитися вирішувати (інтегрувати) ряд простих типів таких рівнянь і їх систем Даний посібник охоплює основну частину програми з диференціальних рівнянь для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки.

У ньому стисло викладений теоретичний матеріал: наведено основні типи диференціальних рівнянь, розв’язки для яких можна знайти аналітичним шляхом, вказані способи їх розв’язування, детально розібрані відповідні приклади. Розглянуті розділи: «Звичайні диференціальні рівняння першого порядку», «Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків», «Системи звичайних диференціальних рівнянь».

Для контролю засвоєння студентами усього матеріалу у посібнику в кінці кожного розділу приведено варіанти завдань для самостійної роботи з відповідями.

Посібник призначений для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки заочної (дистанційної) форми навчання та для самостійної роботи студентів денної форми навчання.

1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1 Загальні поняття

***<u>Означення</u>* 1**. Рівняння, яке, крім незалежних змінних і невідомих функцій цих змінних, має в своєму складі і похідні невідомих функцій або їх диференціали, називається диференціальним рівнянням. Наприклад, $xyy'' + x(y')^3 = 3yy'$.

<u>Означення</u>* 2**. Диференціальне рівняння називається ***звичайним, якщо невідомі функції, які входять у нього, залежать від однієї незалежної змінної.

<u>Означення</u>* 3**. ***Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної (чи диференціала) від невідомої функції, яка входить у диференціальне рівняння.

Існують три форми запису диференціального рівняння першого порядку (ДР-1):

- неявна форма

$$F(x, y, y') = 0\,, \tag{1.1}$$

де x – незалежна змінна, $y(x)$ – невідома функція;

- явна форма (ДР-1 розв’язане відносно похідної y')

$$y' = f(x, y)\,, \tag{1.2}$$

де $f(x, y)$ – задана і неперервна функція двох змінних x і y в деякій області на площині;

- диференціальна форма

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0\,, \tag{1.3}$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – функції двох змінних x і y.

<u>Означення</u> **4**. ***Розв'язком*** диференціального рівняння називається будь-яка диференційована функція $y=\varphi(x)$, що задовольняє диференціальне рівняння при будь-якому значенні аргументу x в деякій області.

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням диференціального рівняння. Розв'язати ДР-1 означає знайти його загальний розв'язок або загальний інтеграл.

Диференціальне рівняння має нескінченну кількість різних розв'язків. Кожен з таких розв'язків називається частинним розв'язком. Сукупність усіх частинних розв'язків називають загальним розв`язком ДР-1. Загальний розв'язок ДР-1 містить одну довільну сталу C (в якості довільної сталої для зручності можна писати $\ln C$).

Загальний розв'язок ДР-1 має вигляд:

$$y=\varphi(x,C), \tag{1.4}$$

де C – довільна стала.

Загальний інтеграл ДР-1 має вигляд:

$$\varphi(x,y,C)=0, \tag{1.5}$$

з якого y визначається неявно, як функція аргументу x.

Для будь-якого значення $C=C_0$ функція $y_0=\varphi(x,C_0)$ є розв'язком і будь-який частинний розв'язок можна знайти з загального, підібравши відповідне значення сталої C. Якщо задана початкова умова $y(x_0)=y_0$, то можна, як правило, знайти єдиний частинний розв'язок, який задовольняє їй.

<u>Теорема Коші</u>. Якщо в деякій області D функція $f(x,y)$ і її частинна похідна $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ неперервні і т. $M_0 \in D$, то існує єдина інтегральна крива $y=\varphi(x)$, яка проходить через т. $M_0(x_0,y_0)$.

Диференціальне рівняння з початковою умовою:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \tag{1.6}$$

або

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

називається задачею Коші.

Частинний розв`язок ДР-1 має вигляд:

$$\varphi(x, y, C_0) = 0 \quad \text{або} \qquad y = \varphi(x, C_0), \tag{1.8}$$

де C_0 – дійсне число, визначене з початкової умови.

1.2 ДР-1 з відокремлюваними змінними

Рівняння $y' = f(x, y)$ називається з відокремлюваними змінними, якщо функцію $f(x, y)$ можна зобразити як добуток функцій $P(x)$ та $Q(y)$: $f(x, y) = P(x) \cdot Q(y)$.

Маємо рівняння $y' = P(x) \cdot Q(y)$. Враховуючи що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, при dy збираємо всі вирази зі змінною y, а при dx – зі змінною x. Рівняння матиме вигляд: $\dfrac{dy}{Q(y)} = P(x)dx$.

Візьмемо інтеграл від обох його частин:

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C . \tag{1.9}$$

Після обчислення інтегралів дістанемо загальний розв’язок ДР-1.

Якщо ДР-1 записано в диференціальній формі:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

і $P(x, y) = M(x) \cdot N(y)$, $Q(x, y) = S(x) \cdot T(y)$, то матимемо

$\frac{M(x)}{S(x)}dx+\frac{T(y)}{N(y)}dy=0$. Інтегруючи його, дістанемо загальний розв'язок ДР-1:

$$\int\frac{M(x)}{S(x)}dx+\int\frac{T(y)}{N(y)}dy=C\,. \tag{1.10}$$

Приклад 1. Знайти розв'язок ДР-1

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2-1\right)dx+xy\,dy=0\,.$$

Розв'язання. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Його можна записати у вигляді $\left(x^2+1\right)\left(y^2-1\right)dx=-xy\,dy$. Для відокремлення змінних поділимо обидві частини рівняння на $x\cdot\left(y^2-1\right)$. Тоді

$$\frac{\left(x^2+1\right)}{x}d\,x=-\frac{y}{y^2-1}d\,y\quad\Rightarrow\quad\int\frac{x^2+1}{x}dx+C=-\int\frac{ydy}{y^2-1}\,.$$

Загальним інтегралом заданого рівняння є

$$\frac{x^2}{2}+\ln|x|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|\,.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{2}+\ln|x|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|$.

Приклад 2. Знайти розв'язок задачі Коші

$$2\left(1+e^x\right)yy'=e^x\,,\quad y(0)=0\,.$$

Розв'язання. Рівняння можна записати у вигляді $y'=\frac{e^x}{1+e^x}\cdot\frac{1}{2y}$. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Для відокремлення змінних помножимо обидві частини рівняння на $2y\cdot d\,x$. Тоді матимемо $2ydy=\frac{e^x}{1+e^x}dx\;\Rightarrow$

$$\int 2ydy = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx + C\,.$$

Загальним інтегралом заданого рівняння є $y^2 = \ln\left|1+e^x\right| + C$.

Знайдемо значення сталої C, застосовуючи початкову умову: $0 = \ln\left|1+e^0\right| + C \;\Rightarrow\; C = -\ln 2$. Частинний розв'язок заданого рівняння $y^2 = \ln\left|1+e^x\right| - \ln 2 \;\Rightarrow\; y^2 = \ln\frac{1+e^x}{2}$.

Відповідь: $y^2 = \ln\frac{1+e^x}{2}$.

Приклад 3. Знайти розв'язок ДР-1

$$(xy+y)^2\;dx + (xy - x)^2\,dy = 0$$

Розв'язання. Розкладемо вирази при dx і dy на множники:

$$y^2(x+1)^2\;dx + x^2(y-1)^2\,dy = 0\,.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Для відокремлення змінних поділимо обидві частини рівняння на x^2y^2 . Матимемо $\frac{(x+1)^2}{x^2}\;dx + \frac{(y-1)^2}{y^2}\,dy = 0$ або $\frac{x^2+2x+1}{x^2}\;dx + \frac{y^2-2y+1}{y^2}\,dy = 0$.

Почлено ділимо чисельники на знаменник і інтегруємо рівняння:

$$\int\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx + \int\left(1-\frac{2}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy = C\,.$$

Загальним інтегралом заданого рівняння є

$$x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + y - 2\ln|y| - \frac{1}{y} = C \;\Rightarrow\; x + y + 2\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C\,.$$

Відповідь: $x + y + 2\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C$.

1.3 Однорідні ДР-1 і рівняння, що зводяться до однорідних

<u>Означення</u> **5**. Функція $f(x,y)$ є однорідною k-го виміру (степеню), якщо для будь-яких x, y, t справедлива тотожність:

$$f(tx,ty)=t^k f(x,y). \qquad (1.11)$$

ДР-1 $y'=f(x,y)$ називається однорідним, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною 0-го виміру (степеню), тобто

$$f(tx,ty)=f(x,y). \qquad (1.12)$$

Однорідне диференціальне рівняння зводиться до ДР-1 з відокремлюваними змінними шляхом заміни:

$$y=u(x)\cdot x=u\cdot x,\ y'=u'x+u. \qquad (1.13)$$

Після підстановки заміни в ДР-1 матимемо:

$$u'x+u=f(1,u)\Rightarrow \frac{du}{dx}x=f(1,u)-u.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними: $\dfrac{du}{f(1,u)-u}=\dfrac{dx}{x}$.

Інтегруємо його: $\displaystyle\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\ln|x|+C$. Якщо $F(u)$ – первісна для інтегралу зліва, то $F(u)=\ln|x|+C$. З заміни маємо $u=\dfrac{y}{x}$. Загальний інтеграл однорідного диференціального рівняння

$$F\left(\frac{y}{x}\right)=\ln|x|+C.$$

Якщо диференціальне рівняння подано в диференціальній формі $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, то воно є однорідним, якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ однорідні однакового виміру (степеню). З заміни $y=u(x)\cdot x=u\cdot x$ матимемо $dy=x\cdot du+u\cdot dx$.

Диференціальне рівняння виду $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ зводиться до однорідного у випадку, коли $a_1b_2 \neq a_2b_1$, шляхом заміни $\begin{cases} x = \xi + \alpha \\ y = \eta + \beta \end{cases}$, де сталі α і β добираються так, щоб $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$. Підставивши в рівняння замість x і y їх значення, отримаємо

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + \overbrace{a_1\alpha + b_1\beta + c_1}^{0}}{a_2\xi + b_2\eta + \underbrace{a_2\alpha + b_2\beta + c_2}_{0}}\right) = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right).$$

Маємо однорідне рівняння відносно η та ξ. Знайшовши його загальний інтеграл і змінивши в ньому $\xi = x - \alpha$ і $\eta = y - \beta$, матимемо загальний інтеграл заданого ДР-1.

Приклад 4. Знайти розв’язок ДР-1

$$\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0\,.$$

Розв’язання. Знайдемо, чому дорівнює y'. Для цього обидві частини рівняння поділимо на dx і, враховуючи, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, матимемо рівняння у вигляді:

$$y' = -\frac{x - y\cos\dfrac{y}{x}}{x\cos\dfrac{y}{x}} \;\Rightarrow\; y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos\dfrac{y}{x}}\,.$$

Маємо $f(x,y)=\frac{y}{x}-\frac{1}{\cos\frac{y}{x}}$. Перевіримо однорідність функції $f(x,y)$:

$$f(xt,yt)=\frac{yt}{xt}-\frac{1}{\cos\frac{yt}{xt}}=\frac{y}{x}-\frac{1}{\cos\frac{y}{x}}=f(x,y).$$

Функції $f(x,y)$ є однорідною 0-го виміру, тому задане ДР-1 однорідне. Зробимо заміну: $y=u\cdot x, \quad y'=u'\cdot x+u$. Підставимо її в задане рівняння: $u'\cdot x+u=u-\frac{1}{\cos u} \;\Rightarrow\; u'\cdot x=-\frac{1}{\cos u}$.

Відокремимо змінні: $\cos u\,du=-\frac{dx}{x}$. Інтегруємо рівняння:

$$\int\cos u\,du=-\int\frac{dx}{x}+C \;\Rightarrow\; \sin u=-\ln|x|+C, \text{ де } u=\frac{y}{x}.$$

Загальним інтегралом заданого ДР-1 є $\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C$.

Відповідь: $\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C$.

Приклад 5. Знайти частинний розв’язок ДР-1

$$y'x^2=xy+y^2e^{-\frac{x}{y}}, \qquad y(1)=1.$$

Розв’язання. Записуємо рівняння у вигляді: $y'=\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\cdot e^{-\frac{x}{y}}$, де $f(x,y)=\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\cdot e^{-\frac{x}{y}}$. Перевіримо однорідність функції $f(x,y)$:

$$f(xt,yt)=\frac{yt}{xt}+\left(\frac{yt}{xt}\right)^2\cdot e^{-\frac{xt}{yt}}=\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2 e^{-\frac{x}{y}}=f(x,y).$$

Задане ДР-1 є однорідним. Зробимо заміну: $y=u\cdot x$, $y'=u'\cdot x+u$. Підставимо її в задане рівняння:

$$u'\cdot x+u=u+u^2e^{-\frac{1}{u}} \Rightarrow u'\cdot x=u^2e^{-\frac{1}{u}}.$$

Відокремимо змінні: $\frac{e^{\frac{1}{u}}}{u^2}du=\frac{dx}{x}$. Інтегруємо рівняння:

$$\int\frac{e^{\frac{1}{u}}}{u^2}du=\int\frac{dx}{x}+C \quad\Rightarrow\quad -e^{\frac{1}{u}}=\ln|x|+C, \text{ де } u=\frac{y}{x}.$$

Маємо загальний інтеграл $-e^{-\frac{x}{y}}=\ln|x|+C$. Знайдемо значення C, застосовуючи початкову умову: $-e^{-1}=\ln 1+C \Rightarrow C=-e^{-1}$. Частинний розв'язок заданого рівняння:

$$-e^{-x/y}=\ln|x|-e^{-1}.$$

Відповідь: $e^{-1}-e^{-x/y}=\ln|x|$.

Приклад 6. Знайти розв'язок ДР-1

$$(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0.$$

Розв'язання. Записуємо рівняння у вигляді $y'=\frac{-(x+y-2)}{x-y+4}$

Перевіримо можна чи ні привести його до однорідного. Маємо $a_1=-1$, $b_1=-1$, $c_1=2$, $a_2=1$, $b_2=-1$, $c_2=4$. Умова $a_1b_2\neq a_2b_1$ виконується. Рівняння можна привести до однорідного. Знайдемо сталі α і β з системи рівнянь $\begin{cases}-\alpha-\beta+2=0\\ \alpha-\beta+4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=3\end{cases}$.

Зробимо заміну $\begin{cases}x=\xi-1\\ y=\eta+3\end{cases}$. Підставивши в рівняння замість x і y їх значення, отримаємо рівняння $\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{-\xi-\eta}{\xi-\eta}$. Маємо однорідне диференціальне рівняння. Розв'язуємо його, зробивши заміну: $\eta = u \cdot \xi$, $\eta' = u' \cdot \xi + u$. Матимемо рівняння:

$$u' \cdot \xi + u = \frac{-\xi - u\xi}{\xi - u\xi} \Rightarrow u' \cdot \xi = \frac{-1-u}{1-u} - u \ .$$

Відокремимо змінні: $\dfrac{u-1}{-u^2+2u+1}du = \dfrac{d\xi}{\xi}$. Інтегруємо рівняння:

$$\int \frac{u-1}{-u^2+2u+1}du = \int \frac{d\xi}{\xi} + \ln C \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln\left|u^2-2u-1\right| = \ln|\xi| + \ln C \quad \Rightarrow$$

$\left(u^2-2u-1\right)^{-\frac{1}{2}} = C\xi$, де $u = \dfrac{\eta}{\xi}$.

Загальний розв'язок:

$$\left(\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2 - 2\left(\frac{\eta}{\xi}\right) - 1\right)^{-\frac{1}{2}} = C\xi \quad \Rightarrow \quad \left(\eta^2 - 2\eta\xi - \xi^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \xi = C\xi \quad \Rightarrow$$

$$\eta^2 - 2\eta\xi - \xi^2 = C \ .$$

Так як $\xi = x+1$ і $\eta = y-3$, то загальний інтеграл заданого ДР-1:

$$y^2 - 2xy - x^2 + 4x - 8y + 14 = C \ .$$

Відповідь: $y^2 - 2xy - x^2 + 4x - 8y + 14 = C$.

1.4 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Лінійним рівнянням першого порядку називається рівняння лінійне відносно шуканої функції $y(x)$ та її похідної $y'(x)$:

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1.14}$$

де $p(x)$, $q(x)$ – неперервні функції на деякому проміжку.

Якщо функція $q(x)$ тотожно дорівнює нулю, то рівняння називають *лінійним однорідним*, у противному випадку – *лінійним неоднорідним*.

Існують два способи розв'язування лінійного неоднорідного ДР-1. Розглянемо їх.

<u>Перший спосіб</u> (метод Бернуллі) полягає в застосуванні заміни:

$$y = u(x)\cdot v(x) = u\cdot v\,,\;\; y' = u'\cdot v + u\cdot v'\,. \tag{1.15}$$

Підставимо її в рівняння (1.14). Воно матиме вигляд:

$$u'\cdot v + u\cdot v' + u\cdot v\, p(x) = q(x)\,.$$

Згрупуємо другий і третій доданки в лівій частині:

$$u'\cdot v + u\cdot\left(v' + v\cdot p(x)\right) = q(x)\,.$$

Знайдемо такий розв'язок отриманого рівняння, щоб вираз у дужках дорівнював нулю: $v' + v\cdot p(x) = 0$, тоді $u'\cdot v = q(x)$. Матимемо систему двох диференціальних рівнянь першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' + v\cdot p(x) = 0, \\ u'\cdot v = q(x) \end{cases} \tag{1.16}$$

Тоді $\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = -v\cdot p(x), \\ v(x)\cdot\dfrac{du}{dx} = q(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int\frac{dv}{v} = -\int p(x)dx, \\ v(x)\cdot\dfrac{du}{dx} = q(x) \end{cases}.$

Розв'язок першого рівняння:

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}\,. \tag{1.17}$$

Підставимо $v(x)$ в друге рівняння системи:

$$e^{-\int p(x)dx}\cdot\frac{du}{dx} = q(x)\,.$$

Розв'яжемо його:

$$u = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot dx + C\,. \tag{1.18}$$

Загальний розв'язок лінійного ДР-1 має вигляд:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot dx + C\right). \qquad (1.19)$$

<u>*Другий спосіб*</u> (метод Лагранжа варіації сталої) полягає в тому, що спочатку розв'язують відповідне лінійне однорідне ДР-1:

$$y' + p(x)y = 0 .$$

Відокремимо змінні в цьому рівнянні: $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$.

Інтегруємо отримане рівняння: $\int\frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$.

Матимемо $\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|$ або $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}, \text{ де } C(x) \text{ – невідома функція.}$$

Для знаходження $C(x)$ підставимо розв'язок y і похідну $y' = C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot p(x)$ в лінійне неоднорідне диференціальне рівняння. Матимемо $C'(x) = q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$. Звідси $C(x) = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C$. Знайдене значення $C(x)$ підставимо у розв'язок $y = C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння матиме вигляд:

$$y = \left(\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}. \qquad (1.20)$$

Приклад 7. Знайти розв'язок ДР-1

$$\left(1 + x^2\right)y' - 2xy = \left(1 + x^2\right)^2 .$$

Розв'язання. Це рівняння є лінійним відносно y і y'. Перепишемо його у вигляді:

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \text{ де } p(x) = -\frac{2x}{1+x^2} \text{ і } q(x) = 1 + x^2 .$$

Зробимо заміну: $y = u \cdot v,\ y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ і підставимо її в рівняння. Маємо

$$u'v + uv' - \frac{2xuv}{1+x^2} = 1 + x^2 \Rightarrow u'v + u\left(v' - \frac{2xv}{1+x^2}\right) = 1 + x^2 .$$

Отримаємо систему двох ДР-1 із відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{2xv}{1+x^2} = 0, & (1) \\ u'v = 1 + x^2 & (2) \end{cases}.$$

Розв`язуємо рівняння (1): $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2xv}{1+x^2} \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = \dfrac{2x}{1+x^2}dx$.

Інтегруємо отримане рівняння: $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2x}{1+x^2}dx$; $\ln|v| = \ln\left|1+x^2\right|$

або $v = 1 + x^2$. Підставимо в рівняння (2) знайдене значення v, матимемо $u'\left(1+x^2\right) = 1 + x^2 \Rightarrow u' = 1$. Інтегруємо отримане рівняння

$$\int du = \int dx \quad \text{або } u = x + C.$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$y = u \cdot v = \left(1+x^2\right)(x + C).$$

Відповідь: $y = \left(1+x^2\right)(x+C)$.

Приклад 8. Знайти частинний розв'язок ДР-1

$$2ydx - \left(y^2 - 6x\right)dy = 0,\ x(1) = 0 .$$

Розв'язання. Це рівняння є лінійним відносно x та x'. Перепишемо його у вигляді:

$$x' + \frac{3}{y}x = \frac{y}{2}, \text{ де } p(y) = \frac{3}{y} \text{ і } q(y) = \frac{y}{2}.$$

Зробимо заміну: $x = u \cdot v$, $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Підставимо її в рівняння. Маємо

$$u'v + uv' + \frac{3}{y}uv = \frac{y}{2} \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{3}{y}v\right) = \frac{y}{2}.$$

Отримаємо систему двох ДР-1 із відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' + v\dfrac{3}{y} = 0, & (1) \\ u'v = \dfrac{y}{2} & (2) \end{cases}.$$

Розв`язком рівняння (1) є $v = e^{-\int \frac{3}{y}dy} = e^{-3\ln|y|} = y^{-3}$. Підставимо в рівняння (2) знайдене значення v, матимемо: $u' \cdot \dfrac{1}{y^3} = \dfrac{y}{2} \Rightarrow du = \dfrac{y^4}{2}dy$. Інтегруємо отримане рівняння:

$$\int du = \int \frac{y^4}{2}dy + C \Rightarrow u = 0{,}1y^5 + C.$$

Загальний розв'язок має вигляд: $x = u \cdot v = y^{-3}\left(0{,}1y^5 + C\right)$.

Знайдемо значення C, застосовуючи початкову умову:

$$0 = 1^{-3}\left(0{,}1 \cdot 1^5 + C\right), \quad C = -0{,}1.$$

Частинний розв'язок заданого рівняння:

$$x = y^{-3}\left(0{,}1y^5 - 0{,}1\right) = 0{,}1y^2 - 0{,}1y^{-3}.$$

Відповідь: $x = 0{,}1y^2 - 0{,}1y^{-3}$.

1.5 ДР-1 Бернуллі.

Рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \tag{1.21}$$

де $p(x), q(x)$ – неперервні функції на деякому проміжку, n – дійсне число, відмінне від нуля і одиниці, називається рівнянням Бернуллі.

Зведемо це рівняння до лінійного. Ділимо рівняння на y^n: $\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = q(x)$. Заміна $z = y^{-n+1}$ зводить рівняння до лінійного відносно z і z'. Підставимо z і $z' = (-n+1)y^{-n} \cdot y'$ у рівняння. Тоді

$$\frac{z'}{-n+1} + p(x)z = q(x) \Big| \cdot (-n+1) \;\Rightarrow\; z' + p(x)(-n+1)z = q(x)\cdot(-n+1).$$

Маємо лінійне ДР-1: $z' + p_1(x)\,z = q_1(x)$, де $p_1(x) = p(x)\cdot(-n+1)$, $q_1(x) = q(x)\cdot(-n+1)$. Зробимо заміну $z = u \cdot v$, $z' = u'v + uv'$. Знайдемо v і u за формулами (1.17) і (1.18):

$$v = e^{-\int p_1(x)dx}, \quad u = \int q_1(x) e^{\int p_1(x)dx} \cdot dx + C.$$

Загальний розв'язок відносно z:

$$z = e^{-\int p_1(x)dx}\left(\int q_1(x) e^{\int p_1(x)\,dx} \cdot dx\right) + C. \tag{1.22}$$

Для знаходження загального розв'язку заданого ДР-1 Бернуллі в отриманий розв'язок для z підставимо $z = y^{-n+1}$ і піднесемо обидві частини рівняння до степеня $\frac{1}{1-n}$.

<u>Зауваження</u> **1**. ДР-1 Бернуллі може бути розв'язано за допомогою підстановки $y = u \cdot v;\; y' = u' \cdot v + u \cdot v'$, аналогічно розв'язуванню лінійного ДР-1.

Приклад 9. Знайти розв'язок ДР-1

$$xy' = 3y - 4x^4y^2.$$

Розв'язання. Це ДР-1 Бернуллі. Записуємо його у вигляді:

$$y' - \frac{3}{x}y = -4x^3y^2, \text{ де } p(x) = -\frac{3}{x},\; q(x) = -4x^3,\; n = 2.$$

Ділимо рівняння на y^2 і перейдемо до лінійного ДР-1 шляхом підстановки: $z = y^{-2+1} = y^{-1}, z' = -y^{-2} \cdot y'$. Отримаємо рівняння:

$$\frac{z'}{-1} - \frac{3}{x} z = -4x^3 \ | \cdot (-1).$$

Маємо лінійне ДР-1

$$z' + \frac{3}{x} z = 4x^3 \text{, де } p_1(x) = \frac{3}{x},\ q_1(x) = 4x^3.$$

Зробимо заміну: $z = u \cdot v, \quad z' = u'v + uv'$. Знайдемо v і u:

$$v = e^{-\int \frac{3}{x} dx} = e^{-3\ln|x|} = x^{-3},\ u = \int 4x^3 e^{\int \frac{3}{x} dx} \cdot dx + C =$$

$$= 4\int x^3 e^{3\ln|x|} \cdot dx + C = 4\int x^3 \cdot x^3 dx + C = 4\int x^6 dx + C = \frac{4}{7} x^7 + C.$$

Тоді $z = u \cdot v = x^{-3}\left(\frac{4}{7} x^7 + C\right)$. Так як $z = y^{-1}$, матимемо загальний розв'язок заданого рівняння Бернуллі

$$y = \left(x^{-3}\left(\frac{4}{7} x^7 + C\right)\right)^{-1} = \frac{x^3}{\frac{4}{7} x^7 + C}.$$

Відповідь: $y = \dfrac{x^3}{\frac{4}{7} x^7 + C}$.

Приклад 10. Знайти частинний розв'язок ДР-1

$$xdx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right) dy,\ \ y(0) = 1.$$

Розв'язання. Це ДР-1 Бернуллі відносно функції $x(y)$. Перепишемо його у вигляді

$$x' - \frac{1}{y} x = -y^3 \cdot x^{-1},\ \text{де}\ \ p(y) = -\frac{1}{y},\ q(y) = -y^3,\ n = -1.$$

Поділимо рівняння на x^{-1} і перейдемо до лінійного ДР-1 шляхом підстановки: $z = x^{1+1} = x^2$, $z' = 2x \cdot x'$. Маємо рівняння:

$$\frac{z'}{2} - \frac{1}{y} z = -y^3 \quad \Big| \cdot 2$$

$$z' - \frac{2}{y} z = -2y^3, \text{ де } p_1(y) = -\frac{2}{y}, \; q_1(y) = -2y^3.$$

Зробимо заміну: $z = u \cdot v,\; z' = u'v + uv'$. Знайдемо v і u:

$$v = e^{-\int\left(-\frac{2}{y}\right)dy} = e^{2\ln|y|} = y^2, \; u = \int\left(-2y^3\right)\cdot e^{\int\left(-\frac{2}{y}\right)dy} \cdot dy + C =$$

$$= -2\int y^3 e^{-2\ln|y|} dy + C = -2\int y^3 \cdot y^{-2} dy + C = -2\int y dy + C = -y^2 + C.$$

Загальний розв'язок лінійного рівняння $z = u \cdot v = y^2\left(-y^2 + C\right)$. Так як $z = x^2$, то загальний розв'язок заданого рівняння Бернуллі $x = \left(y^2\left(-y^2 + C\right)\right)^{\frac{1}{2}} = y\sqrt{C - y^2}$. Знайдемо C, застосовуючи початкову умову: $0 = 1 \cdot \sqrt{C - 1};\; C = 1$. Частинний розв'язок заданого рівняння Бернуллі $x = y\sqrt{1 - y^2}$.

Відповідь: $x = y\sqrt{1 - y^2}$.

1.6 ДР-1 у повних диференціалах

Диференціальне рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ називається ДР-1 у повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u = u(x, y)$, тобто рівняння може бути записане $du(x, y) = 0$. Загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах: $u(x, y) = C$.

Теорема 1 Нехай функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $P'_y(x, y)$, $Q'_x(x, y)$ неперервні в однозв'язній області D. Для того, щоб у цій області вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ був повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, необхідно і достатньо, щоб у всіх точках цієї області справджувалась рівність: $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

Рівняння може бути розв'язане двома способами.

Перший спосіб. Так як ліва частина рівняння є повним диференціалом функції $u(x,y)$, то

$$P(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\ Q(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.$$

Знайдемо $u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y)$, де $\varphi(y)$ – невизначена функція, яка залежить від y. Знаходимо її з умови, що $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$. Матимемо: $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx + \varphi(y)\right) = Q(x,y)$. Звідси випливає, що $\varphi'(y) = Q(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx$. Знайдемо $\varphi(y) = \int\left(Q(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx\right)dy$ і підставимо у вираз для $u(x,y)$. Загальний інтеграл ДР-1 у повних диференціалах має вигляд:

$$\int P(x,y)\,dx + \int\left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx\right) = C.$$

Другий спосіб. Якщо ліва частина рівняння є повним диференціалом, то криволінійний інтеграл

$$\int_{(x_o,y_0)}^{(x,y)} P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy$$

не залежить від шляху інтегрування і загальний інтеграл ДР-1 у повних диференціалах можна знайти за однією із двох формул:

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy = C \qquad (1.23)$$

або

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy = C\,, \qquad (1.24)$$

де т. $M_0(x_0, y_0)$ належить області визначення функцій $P(x, y)$ та $Q(x, y)$. Зручно в якості т. $M_0(x_0, y_0)$ вибирати одну з точок: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ за змістом.

Приклад 11. Знайти розв'язок ДР-1

$$(2x\sin y - \sin x \cdot y^2)dx + \left(x^2\cos y + 2y\cos x + 1\right)dy = 0\,.$$

Розв'язання. Перевіримо, що вираз в лівій частині рівняння є повним диференціалом функції. Позначимо

$$P(x, y) = 2x\sin y - y^2\sin x\,,\ Q(x, y) = x^2\cos y + 2y\cos x + 1\,.$$

Знайдемо $P'_y = 2x\cos y - 2y\sin x$, $Q'_x = 2x\cos y - 2y\sin x$. Маємо $P'_y = Q'_x$. Це рівняння у повних диференціалах. Знайдемо

$$u(x, y) = \int P(x, y)\,dx + \varphi(y) = \int (2x\sin y - y^2\sin x)dx + \varphi(y) =$$

$$= x^2\sin y + y^2\cos x + \varphi(y)\,.$$

Диференціюємо знайдений вираз функції $u(x, y)$ по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2\cos y + 2y\cos x + \varphi'(y)\,.$$

З рівняння $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$ матимемо:

$$x^2\cos y + 2y\cos x + \varphi'(y) = x^2\cos y - 2y\cos x + 1 \ \Rightarrow\ \varphi'(y) = 1\,.$$

Тоді $(y) = \int \ '(y)\,dy = \int dy = y + C$. Загальний інтеграл заданого рівняння у повних диференціалах має вигляд:

$$x^2 \sin y + y^2 \cos x + y = C .$$

Відповідь: $x^2 \sin y + y^2 \cos x + y = C$.

Приклад 12. Знайти розв'язок ДР-1

$$(x+y)dx + (x+2y)dy = 0 .$$

Розв'язання. Перевіримо, що вираз в лівій частині рівняння є повним диференціалом функції. Позначимо

$$P(x,y) = u'_x = x + y , \quad Q(x,y) = u'_y = x + 2y .$$

Тоді $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ і $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Умова $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ виконується. Задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Розв'яжемо його застосувавши формулу $\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C$.

В якості точки $M_0(x_0, y_0)$ візьмемо точку $O(0,0)$. Тоді $P(x, y_0) = P(x,0) = x + 0 = x$. Маємо

$$\int\limits_0^x x\,dx + \int\limits_0^y (x+2y)dy = C \;\Rightarrow\; \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x + \left.\left(x\,y + y^2\right)\right|_0^y = C .$$

Підставимо межі інтегрування. Загальний інтеграл заданого рівняння у повних диференціалах має вигляд: $\frac{x^2}{2} + yx + y^2 = C$.

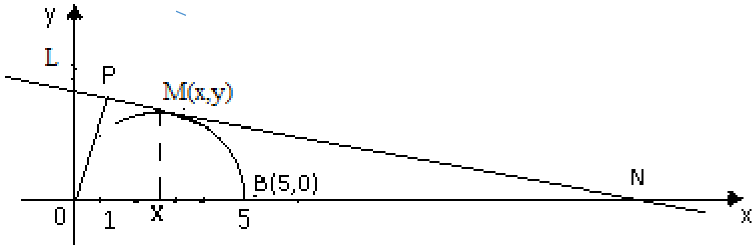
Відповідь: $\frac{x^2}{2} + yx + y^2 = C$.

1.7 Задачі, які зводяться до диференціальних рівнянь

Приклад 13. Крива проходить через точку $B(5,0)$. Довжина перпендикуляра, який опущений із початку координат на будь-яку дотичну до кривої, дорівнює абсцисі точки дотику. Знайти рівняння кривої.

Розв'язання. Нехай $y = f(x)$ – шукане рівняння кривої.

Проведемо дотичну LN в довільній точці $M(x,y)$ до кривої. OP – перпендикуляр, який опущений із початку координат на дотичну LN. За умовою задачі $|OP| = x$.



Рівняння дотичної в довільній точці $M(x,y)$:

$$Y - y = y'(X - x) \text{ або } y'X - Y - xy' + y = 0.$$

Знайдемо $|OP|$, як відстань від точки $O(0,0)$ до дотичної:

$$|OP| = \frac{|y' \cdot 0 - 0 - xy' + y|}{\sqrt{(y')^2 + 1}} = \frac{|-xy' + y|}{\sqrt{(y')^2 + 1}}.$$

Маємо диференціальне рівняння

$$\left.\frac{|-xy' + y|}{\sqrt{(y')^2 + 1}} = x \right| \uparrow 2 \ .$$

$$\frac{x^2(y')^2 - 2xyy' + y^2}{(y')^2 + 1} = x^2 \text{ або } x^2(y')^2 - 2xyy' + y^2 = x^2(y')^2 + x^2$$

Звідси $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$. Це ДР-1 однорідне. Зробимо заміну: $y = u \cdot x,\ y' = u'x + u$. Тоді

$$u'x + u = \frac{u^2x^2 - x^2}{2x^2u} \quad \Rightarrow \quad u'x + u = \frac{u^2 - 1}{2u}.$$

$$u'x = -\frac{u^2 + 1}{2u} \quad \Rightarrow \quad \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x}.$$

Візьмемо від обох частин рівняння інтеграл:

$$\int \frac{2udu}{u^2+1} = -\int \frac{dx}{x} + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln\left|u^2+1\right| = -\ln|x| + \ln C .$$

$$u^2+1 = \frac{C}{x} \text{ , де } u = \frac{y}{x} .$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{C}{x} \quad \Rightarrow \quad y^2 + x^2 = Cx .$$

Крива проходить через точку $B(5,0)$. Маємо $y(5)=0$. Знайдемо значення C.

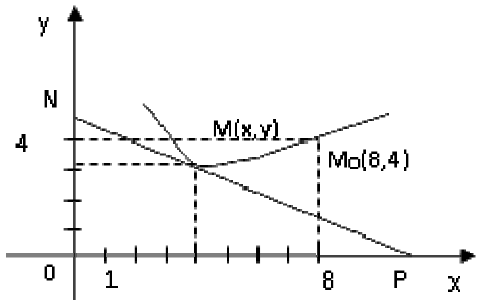
$$0 + 25 = 5C \quad \Rightarrow \quad C = 5 .$$

Рівняння шуканої кривої $x^2 + y^2 = 5x$. Виділимо повний квадрат по x. Матимемо $(x-2{,}5)^2 + y^2 = 6{,}25$. Це коло радіуса $R = 2{,}5$ з центром в точці $O_1(2{,}5;\, 0)$.

Відповідь: $(x-2{,}5)^2 + y^2 = 6{,}25$.

Приклад 14. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(8{,}4)$, якщо відрізок будь-якої її дотичної, що знаходиться між координатними осями, ділиться точкою дотику у відношенні 2:3, рахуючи від осі Oy.

Розв'язання. Нехай $y = f(x)$ – шукане рівняння кривої.



Проведемо дотичну NP в довільній точці $M(x,y)$ до кривої. Рівняння дотичної

$$Y - y = y'(X - x) \text{ або } y'X - Y - xy' + y = 0 .$$

З цього рівняння знайдемо координати точки N – точки перетину дотичної з віссю Oy: $X=0 \Rightarrow Y=y-xy'$. Для точки P – точки перетину дотичної з віссю Ox: $Y=0 \Rightarrow X=x-y/y'$. Знайдемо довжину відрізків NM і MP:

$$NM^2=(x-X)^2+(y-Y)^2=x^2+x^2(y')^2,\ MP^2=(y/y')^2+y^2.$$

Згідно з умовою задачі маємо $NM:MP=2:3$ або $NM^2:MP^2=4:9$. Тоді

$$\left(x^2+x^2(y')^2\right):\left((y/y')^2+y^2\right)=4:9 \Rightarrow$$

$$9\left(x^2+x^2(y')^2\right)=4\left((y/y')^2+y^2\right) \Rightarrow 9x^2+9x^2(y')^2=4y^2/(y')^2+4y^2.$$

Розв'язуємо рівняння: $9x^2\left(1+(y')^2\right)=4y^2\left(1+(y')^2\right)/(y')^2 \Rightarrow$ $9x^2(y')^2=4y^2$ або $y'=\pm\dfrac{2y}{3x} \Rightarrow \dfrac{dy}{y}=\pm\dfrac{2dx}{3x}$. Інтегруємо рівняння.

$$\int\frac{dy}{y}=\pm\int\frac{2dx}{3x}+\ln C \Rightarrow \ln|y|=\pm\frac{2}{3}\ln|x|+\ln C \Rightarrow y=Cx^{\pm 2/3}.$$

Знайдемо значення C. Враховуємо, що для $x>0\ i\ y>0 \Rightarrow y'<0$, тому $y'=-\dfrac{2y}{3x} \Rightarrow y=Cx^{-2/3}$. З координат точки $M_0(8,4)$ маємо $x=8\ i\ y=4 \Rightarrow 4=C\cdot 8^{-2/3} \Rightarrow C=16$.

Рівняння шуканої кривої $y=16x^{-2/3}$.

Відповідь: $y=16x^{-2/3}$.

Приклад 15. Швидкість розпаду радію пропорційна його наявній кількості x. Знайти залежність x від часу t, якщо відомо, що після закінчення 1600 років залишається половина початкової кількості радію. Прийняти початкову кількість радію $x_0=2$.

Розв'язання. Швидкість розпаду радію $x'(t)$. З умови задачі випливає, що швидкість розпаду радію $x'(t)$ пропорційна його кількості $x(t)$. Позначимо коефіцієнт пропорційності $k, k>0$.

Отримаємо рівняння радіоактивного розпаду: $x'(t)=-k\cdot x(t)$. Розв'яжемо його.

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t}=-k\cdot x(t)\ \Rightarrow\ \frac{d\,x(t)}{x(t)}=-k\cdot d\,t\,.$$

Інтегруємо отримане рівняння. Маємо

$$ln\left|x(t)\right|=-k\cdot t+lnC\ \Rightarrow\ x(t)=C\,e^{-k\cdot t}\ .$$

Знайдемо значення сталої C, враховуючи задану початкову умову: $x(1600)=x_0\,/\,2=1$. Тоді $1=C\,e^{-k\cdot 1600}$ $\Rightarrow$ $C=e^{\,1600\cdot k}$. Залежність x від часу t має вигляд: $x(t)=\,e^{-k\cdot(t-1600)}$.

Відповідь: $x(t)=\,e^{-k\cdot(t-1600)}$.

Приклад 16. Тіло охолоджується за 10 хвилин від 100° до 60°. Температура навколишнього повітря підтримується постійною і рівною 20°. З'ясувати, через скільки хвилин температура тіла дорівнюватиме 25°.

Розв'язання. Позначимо температуру тіла в деякій момент часу t через $T(t)$. Тоді швидкість зміни температури за часом дорівнює похідній $\frac{d\,T}{d\,t}$. Так як швидкість охолодження пропорційна різниці між температурою нагріву тіла і температурою навколишнього середовища, то матимемо рівняння: $\frac{d\,T}{d\,t}=k\left(T-T_0\right)$. Тут k – коефіцієнт пропорційності, який треба визначити, T_0 – температура навколишнього середовища. Шукана функція $T(t)$ повинна задовольняти вимогам: в початковий момент часу $t=0$ температура тіла $T=100^o$, а при $t=10$ температура тіла $T=60^o$. Розв'яжемо рівняння $\frac{d\,T}{d\,t}=k\left(T-20\right)$ відносно $T(t)$:

$$\frac{d\,T}{T-20}=k\cdot d\,t\ \ \Rightarrow\ \ ln\left|\,T-20\right|=\,k\cdot t+ln\,C\ \ \Rightarrow\ \ T-20=C\,e^{\,k\cdot t}\ .$$

Знайдемо значення сталої C і коефіцієнта пропорційності k, враховуючи задані початкові умови:

$100-20=Ce^{k\cdot 0} \Rightarrow C=80$ і $60-20=80e^{k\cdot 10} \Rightarrow k=0{,}1ln\frac{1}{2}$ і $k=-0{,}1ln2$. Тоді $T=80e^{-0{,}1tln2}+20=80\cdot 2^{-0{,}1t}+20$. Знайдемо значення t, коли температура тіла стане рівною 25°:

$$25=80\cdot 2^{-0{,}1t}+20 \Rightarrow t=40\,(\text{хв}).$$

Відповідь: Через 40 хвилин.

Приклад 17. Таблетка масою 0,5 г кинута в стакан з водою. Швидкість розчинення таблетки пропорційна її масі. Через який час розчиниться 99% речовини, якщо відомо, що через 10 хвилин розчинилося 80%?

Розв'язання. Нехай функція $m(t)$ – зміна маси таблетки. У відповідності до умови: $\frac{dm}{dt}=k\cdot m$, де k – коефіцієнт пропорційності, який невідомий. Розв'яжемо рівняння:

$$\frac{dm}{m}=k\cdot dt \Rightarrow ln|m|=k\cdot t+lnC \Rightarrow m(t)=Ce^{k\cdot t}.$$

Відомо, що при $t=0$ маса таблетки 0,5г. Матимемо $0{,}5=Ce^{k\cdot 0} \Rightarrow C=0{,}5$. Тоді $m(t)=0{,}5e^{k\cdot t}$. За умовою: через 10 хвилин розчинилося 80% таблетки, тобто залишилося $0{,}5\cdot 0{,}2=0{,}1$ (г) твердої речовини, знайдемо значення k:

$$m(10)=0{,}5e^{10k}=0{,}1 \Rightarrow e^{10k}=0{,}2 \Rightarrow 10k=ln\,0{,}2 \Rightarrow k=0{,}1\cdot ln\,0{,}2.$$

Закон зміни маси (розчину) таблетки $m(t)=0{,}5e^{(0{,}1\cdot ln\,0{,}2)\cdot t}$. Знайдемо через який час розчиніться 99% таблетки. В цьому випадку залишиться твердої речовини $0{,}5\cdot 0{,}01=0{,}005$ (г):

$$m(t)=0{,}5e^{(0{,}1\cdot ln\,0{,}2)\cdot t}=0{,}005 \Rightarrow e^{(0{,}1\cdot ln\,0{,}2)\cdot t}=0{,}01 \Rightarrow$$

$$t=\frac{10ln\,0{,}01}{ln\,0{,}2}\approx 28{,}6\,(\text{хв}).$$

Відповідь: Приблизно через 28,6 хвилин.

Приклад 18. Знайти закон руху матеріальної точки масою m під дією сили тяжіння.

Розв'язання. В даному випадку рух матеріальної точки підпорядковується 2-му закону Ньютона. Таким чином, закон руху знайдемо, розв'язуючи рівняння: $m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg$, де $\frac{d^2x}{dt^2}$ – прискорення, m – маса, g – прискорення сили тяжіння. Двічі інтегруємо рівняння $d^2x=-g\,dt^2$ по t. Отримаємо закон руху матеріальної точки: $x(t)=-g\frac{t^2}{2}+C_1t+C_2$.

Відповідь: $x(t)=-g\frac{t^2}{2}+C_1t+C_2$.

Приклад 19. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням пропорційним добутку швидкості руху v і часу t. Скласти залежність між швидкістю і часом, якщо при $t=0$ швидкість $v=v_0$.

Розв'язання. Прискорення це – похідна від швидкості. Тоді за умовою задачі матимемо рівняння: $\frac{dv}{dt}=k\cdot v\cdot t$. Розв'яжемо рівняння відносно $v(t)$:

$$\frac{dv}{v}=k\cdot t\cdot dt \;\Rightarrow\; ln|v|=k\cdot\frac{t^2}{2}+ln\,C \Rightarrow v(t)=Ce^{k\cdot\frac{t^2}{2}}.$$

Знайдемо значення сталої C, враховуючи задану початкову умову: $v_0=Ce^{k\cdot 0} \;\Rightarrow\; C=v_0$.

Залежність між швидкістю і часом: $v(t)=v_0e^{k\cdot\frac{t^2}{2}}$.

Відповідь: $v(t)=v_0e^{k\cdot\frac{t^2}{2}}$.

1.8 Завдання для самостійної роботи

Знайти розв’язки заданих диференціальних рівнянь першого порядку:

Завдання	Відповідь
1. $\left(y^2-3x^2\right)dy+2xy\,dx=0$, $y(0)=1$	$y^2-x^2=y^3$
2. $y'-3\cdot\dfrac{y}{x}+x^3y^2=0$	$y=7x^3/\left(x^7+7C\right)$
3. $xy'+2y=\sqrt{y}$	$y=\left(\dfrac{x+C}{2x}\right)^2$
4. $xy'=y\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right)$	$y=xe^{Cx}$
5. $y'+2xy=xe^{-x^2}$	$y=e^{-x^2}\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)$
6. $\left(xy'-y\right)arctg\dfrac{y}{x}=x,\ y\left(1\right)=0$	$\dfrac{y}{x}arctg\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}ln\left(x^2+y^2\right)$
7. $xy'-y=y^2e^{2x}$	$y=x/\left(C-0{,}5e^{2x}\right)$
8. $y'\cos^2x+y=tgx$	$y=tg\,x-1+C\,e^{-tg\,x}$
9. $ln\,x\,dx+xtg\,y\,dy=0$	$0{,}5\,ln^2x=ln\left\|C\cdot\cos y\right\|$
10. $xy+y^2=\left(2x^2+xy\right)y'$	$Cx=y^2e^{y/x}$
11. $y\sin x+y'\cos x=1$	$y=sin\,x+C\cdot\cos x$
12. $xy'+y=y^2$	$y=1/\left(1-Cx\right)$
13. $xy'+y=y^2\ln x$	$y=1/\left(ln\,x+Cx+1\right)$
14. $y'-ytg\,x=\sec x,\ y\left(0\right)=0$	$y=x/\cos x$
15. $\left(x^2-y^2\right)y'=2xy$	$C\left(x^2+y^2\right)=y$
16. $xy'+xe^{\frac{y}{x}}-y=0$	$y=-xln\left\|ln\left\|Cx\right\|\right\|$

Завдання	Відповідь
17. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$	$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$
18. $y'(x + y) = 2y,\ y(1) = 2$	$y = 2\,(x - y)^2$
19. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$	$Cy = \sqrt{1+x^2}\ /\left(\ x + \sqrt{1+x^2}\right)$
20. $y' + \sin\dfrac{x + y}{2} = \sin\dfrac{x - y}{2}$	$ln\left\lvert tg\dfrac{y}{4}\right\rvert = -2\sin\dfrac{x}{2} + C$
21. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$	$y = (1 + x^2)\cdot(x + C)$
22. $y' - \dfrac{xy}{1 - x^2} = \dfrac{1}{1 - x^2}$	$y = \dfrac{arc\sin x + C}{\sqrt{1 - x^2}}$
23. $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$	$x = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{4} + Ce^{2y}$
24. $dy + (y + x^2)dx = 0$	$y = Ce^{-x} - x^2 + 2x - 2$
25. $y' + \dfrac{y}{x + 1} + y^2 = 0$	$y = \dfrac{1}{(x+1)\cdot(C + ln\lvert x+1\rvert)}$
26. $y' = 3x^2 y + x^5 + x^2,\ y(0) = 1$	$y = \dfrac{5}{3}e^{x^3} - \dfrac{1}{3}(x^3 + 2)$
27. $y' - \dfrac{y}{1 - x^2} = 1 + x,\ y(0) = 1$	$y = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}\ (arc\sin x +$ $+ x\sqrt{1 - x^2} + 2)$
28. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$	$y = x^4\left(ln\lvert x\rvert + C\right)^2 / 4$
29. $\dfrac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$	$C\sqrt{y(y - 2x)^3} = y - x$
30. $y' - y\,tg\,x + y^2\cos x = 0$	$y = 1/(\cos x\cdot(x + C))$
31. $\dfrac{xy' - y}{x} = tg\dfrac{y}{x}$	$\sin\dfrac{y}{x} = xC$
32. $\dfrac{y - xy'}{x + yy'} = 2,\ y(1) = 1$	$ln(x^2 + y^2) + arctg\dfrac{y}{x} = 2C$

Розв'язати задані задачі:

1) Матеріальна точка маси m уповільнює свій рух під дією сили опору середовища, пропорційної квадрату швидкості V. Знайти залежність швидкості від часу. Знайти швидкість точки через 3с після початку уповільнення, якщо $V(0)=100 м/c$, а $V(1)=50 м/c$.

Відповідь: $V(3)=25 м/c$.

2) Знайти криву, що проходить через точку $M_0(2,3)$ і володіє властивістю, що відрізок довільної її дотичної, кінці якого лежать на осях координат, ділиться точкою дотику навпіл.

Відповідь: $y=6/x$.

3) Через 12 годин після початку досліду чисельність деякої популяції бактерій зросла в 3 рази. У скільки разів збільшиться число бактерій через три доби? Швидкість розмноження бактерій пропорційна їх кількості.

Відповідь: Збільшиться в 729 раз.

4) Куля, рухаючись зі швидкістю $V_0=400 м/c$, пробиває стіну товщиною $h=0{,}2\,м$ і вилітає з неї зі швидкістю $V_1=100 м/c$. Вважаючи силу опору стіни пропорційною квадрату швидкості руху кулі, знайти час T руху кулі в стіні.

Відповідь: $T=3/(2000\,ln\,4)$.

5) Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю V, пропорційній квадрату часу. Встановити залежність між пройденим шляхом S і часом t, якщо відомо, що при $t=0$, $S=S_0$.

Відповідь: $S=S_0+kt^3/3$.

6) Посудина об'ємом в 20 л містить повітря (80% азоту і 20% кисню). У посудину втікає 0,1 л азоту в секунду, який

безперервно перемішується, і витікає така ж кількість суміші. Через скільки часу в посудині буде 99% азоту?

Відповідь: $T \approx 10\ хвилин$.

7) У повітрі кімнати об'ємом 200 м^3 міститься 0,15% вуглекислого газу (CO_2). Вентилятор подає в хвилину 20 м^3 повітря, що містить 0,04% CO_2. Через який час кількість вуглекислого газу в повітрі кімнати зменшиться втричі?

Відповідь: $T \approx 24\ хвилини$.

8) Знайти криві, у яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу абсциси точки дотику.

Відповідь: $y = Cx^2$.

9) Крива проходить через точку $M_0(1, 2)$ і володіє властивістю, що відношення ординати будь-якої її точки до абсциси пропорційне кутовому коефіцієнту дотичної до цієї кривої, проведеної в тій же точці, з коефіцієнтом пропорційності $k=3$. Знайти рівняння кривої.

Відповідь: $y^3 = 8x$.

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

2.1 Загальні поняття

Диференціальне рівняння n-го порядку (ДР-n) у неявній формі можна записати:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 . \qquad (2.1)$$

Явною формою ДР-n є рівняння, розв’язане відносно n-ої похідної:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right). \qquad (2.2)$$

Розв’язок ДР-n можна подати у явному вигляді: $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right)$ – **загальний розв’язок**, або неявному вигляді: $\varphi\left(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)=0$ – **загальний інтеграл**, C_i – довільні сталі $\left(i=\overline{1, n}\right)$, кількість яких відповідає порядку диференціального рівняння.

Кожна функція, яку дістанемо з загального розв'язку при окремих значеннях довільних сталих, називається частинним розв'язком або частинним інтегралом диференціального рівняння. Для визначення довільних сталих необхідно задати стільки умов, скільки є сталих:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_{10},\ y''(x_0)=y_{20},\ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1,0} \qquad (2.3)$$

Числа $x_0, y_{10}, y_{20},\ldots, y_{n-1,0}$ називають початковими значеннями, а рівності (2.3) – початковими умовами.

Задача розв'язування диференціального рівняння з заданими початковими умовами називається задачею Коші. Загальний розв'язок ДР – це множина інтегральних ліній. Частинний розв'язок ДР – це одна інтегральна лінія, яка проходить через точку $\left(x_{0,} y_0\right)$.

2.2 Диференціальні рівняння другого порядку. Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку

Диференціальне рівняння 2-го порядку (ДР-2) у неявній формі можна записати у вигляді:

$$F\left(x, y, y', y''\right)=0\,. \qquad (2.4)$$

Явною формою ДР-2 є рівняння, розв'язане відносно другої похідної:

$$y''=f\left(x, y, y'\right). \qquad (2.5)$$

Загальний розв'язок ДР-2 має вигляд

$$y=\varphi\left(x,C_1,C_2\right), \tag{2.6}$$

а загальний інтеграл ДР-2 :

$$\varphi\left(x,y,C_1,C_2\right)=0\,, \tag{2.7}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

<u>Теорема</u> **1**. Якщо в області D функція $f\left(x,y,y'\right)$ та її частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}$ неперервні, то в будь-якій точці $M_0\left(x_0,y_0,y_0'\right)\in D$ існує єдиний розв'язок $y=y(x)$, який задовольняє початковим умовам: $y\left(x_0\right)=y_0$, $y'\left(x_0\right)=y_{10}$.

<u>Задача Коші для ДР-2</u>: Знайти розв'язок $y=y(x)$ рівняння (2.5), який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} y\left(x_0\right)=y_0 \\ y'\left(x_0\right)=y_{10} \end{cases}. \tag{2.8}$$

<u>Зауваження</u> **1**. Загальних правил розв'язування ДР-2 немає. Тому на практиці їх можна розв'язати наближеними методами (метод Рунге-Кутта, метод Адамса та інші).

Існують деякі класи ДР-2, які можна звести до рівнянь першого порядку. Розглянемо їх.

1) ***Диференціальне рівняння виду*** $F\left(x,y',y''\right)=0$**.**

Воно не містить шукану функцію y. Знизимо порядок диференціального рівняння шляхом заміни:

$$y'=z(x)=z, \quad y''=z' \tag{2.9}$$

Отримаємо ДР-1: $F(x,z,z')=0$. Розв'яжемо його відносно функції z. Розв'язок його $z=\varphi(x,C_1)$. Підставимо $z=y'$. Матимемо ДР-1 $y'=\varphi(x,C_1)$ або $d\,y=\varphi(x,C_1)\cdot d\,x$. Інтегруємо обидві частини цього рівняння:

$$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2\ .$$

Це загальний розв'язок заданого ДР-2.

Приклад 20. Знайти частинний розв'язок ДР-2.

$$y''\left(x^2+1\right)=2xy',\quad y(0)=2,\ y'(0)=3\,.$$

Розв'язання. Диференціальне рівняння не містить функцію y. Знизимо порядок ДР-2 шляхом заміни: $y'=z,\quad y''=z'$.

Маємо $z'\left(x^2+1\right)=2xz$. Це ДР-1 з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dz}{dx}\cdot\left(x^2+1\right)=2xz\quad\Rightarrow\quad\frac{dz}{z}=\frac{2xdx}{x^2+1}\,.$$

$$\int\frac{dz}{z}=\int\frac{2xdx}{x^2+1}+\ln C_1\quad\Rightarrow\quad\ln|z|=\ln\left|x^2+1\right|+\ln C_1\ .$$

$$z=\left(x^2+1\right)C_1\quad\Rightarrow\quad y'=\left(x^2+1\right)C_1\,.$$

Знайдемо значення сталої C_1, застосовуючи початкові умови:

$$3=(0+1)C_1\quad\Rightarrow\quad C_1=3\,.$$

Тоді ДР-1 матиме вигляд: $y'=3\left(x^2+1\right)$. Це ДР-1 з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його

$$y=3\int\left(x^2+1\right)dx+C_2=3\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x\right)+C_2\ .$$

Знайдемо значення сталої C_2, застосовуючи початкові умови:

$$2=3\cdot(0+0)+C_2\ \Rightarrow\ C_2=2\,.$$

Частинний розв'язок заданого ДР-2

$$y=x^3+3x+2\,.$$

Відповідь: $y = x^3 + 3x + 2$.

Приклад 21. Знайти загальний розв'язок ДР-2

$$y''x\ln x = 2y' .$$

Розв'язання. Диференціальне рівняння не містить функцію y . Знизимо порядок ДР-2 шляхом заміни: $y' = z, \quad y'' = z'$.

Маємо $z'x\ln x = 2z$. Це ДР-1 з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x\ln x} \Rightarrow \int\frac{dz}{z} = 2\int\frac{dx}{x\ln x} + \ln C_1 .$$

$$\ln|z| = 2\ln|\ln x| + \ln C_1 \Rightarrow z = C_1\ln^2 x .$$

Так як $z = y'$, матимемо $y' = C_1\ln^2 x$. Це ДР-1 з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$y = C_1\int\ln^2 x dx + C_2 = \begin{bmatrix} u = \ln^2 x; dv = dx \\ du = \dfrac{2\ln x}{x}dx; v = x \end{bmatrix} =$$

$$= C_1\left(x\cdot\ln^2 x - \int x\cdot\frac{2\ln x dx}{x}\right) + C_2 = \begin{bmatrix} u = \ln x; dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}; v = x \end{bmatrix} =$$

$$= C_1\left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int x\cdot\frac{dx}{x}\right) + C_2 = C_1\left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right) + C_2$$

.

Загальний розв'язок заданого ДР-2 має вигляд:

$$y = C_1\left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right) + C_2 .$$

Відповідь: $y = C_1\left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right) + C_2$.

2) *Диференціальне рівняння виду* $F(y, y', y'') = 0$.

Воно не містить змінну x . Знизимо порядок диференціального рівняння шляхом заміни:

$$y' = p(y) = p, \quad y'' = p'(y)\cdot y' = p'\cdot p . \tag{2.10}$$

Отримаємо ДР-1: $F\left(y, p, p' p\right) = 0$. Розв'яжемо його відносно функції p. Розв'язок його $p = \varphi(y, C_1)$. Підставимо $p = y'$. Матимемо $y' = \varphi(y, C_1)$ або $\dfrac{d\,y}{(y, C_1)} = d\,x$. Інтегруємо обидві частини цього рівняння:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2 \,.$$

Це загальний розв'язок заданого ДР-2.

Приклад 22. Знайти частинний розв'язок ДР-2

$$y^3 y'' = y^4 - 16, \qquad y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}\,.$$

Розв'язання. Диференціальне рівняння не містить змінну x. Знизимо порядок ДР-2 шляхом заміни: $y' = p,\ y'' = pp'$. Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними: $y^3 p \cdot p' = y^4 - 16$. Розв'яжемо його:

$$pdp = \frac{y^4 - 16}{y^3} dy \Rightarrow \int pdp = \int \left(y - \frac{16}{y^3} \right) dy + C_1 \,.$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{8}{y^2} + C_1 \,\Big|\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = y^2 + \frac{16}{y^2} + 2C_1 \,.$$

$$p = \sqrt{y^2 + \frac{16}{y^2} + 2C_1} \quad \Rightarrow \quad y' = \sqrt{y^2 + \frac{16}{y^2} + 2C_1} \,.$$

Знайдемо значення сталої C_1, застосовуючи початкові умови:

$$\sqrt{2} = \sqrt{8 + \frac{16}{8} + 2C_1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5 + C_1} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -4 \,.$$

Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними $y' = \sqrt{y^2 + \dfrac{16}{y^2} - 8} = \dfrac{y^2 - 4}{y}$. Розв'яжемо його:

$$\frac{ydy}{y^2-4}=dx;\ \int\frac{ydy}{y^2-4}=\int dx+C_2\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\ln\left|y^2-4\right|=x+C_2.$$

Знайдемо значення сталої C_2, застосовуючи початкові умови:

$$\frac{1}{2}\ln|8-4|=0+C_2\Rightarrow C_2=\ln 2.$$

Частинний розв’язок заданого ДР-2 має вигляд

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2-4\right|=x+\ln 2\Rightarrow y^2-4=4e^{2x}.$$

Відповідь: $y^2-4=4e^{2x}$.

Приклад 23. Знайти загальний розв’язок ДР-2

$$(y-1)y''=(y')^2.$$

Розв’язання. Диференціальне рівняння не містить змінну x. Знизимо порядок ДР-2 шляхом заміни $y'=p,\ y''=pp'$. Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними: $(y-1)p\cdot p'=p^2$.

Розв’яжемо його:

$$p\,\big((y-1)p'-p\big)=0\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{ll} p=0, & (1)\\ (y-1)p'-p=0 & (2)\end{array}\right..$$

З рівняння (1) маємо $y'=0\Rightarrow y=C$ – загальний розв’язок ДР-2. Рівняння (2) є ДР-1 з відокремлюваними змінними. Знайдемо його розв`язок:

$$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y-1}\ \Rightarrow\ \int\frac{dp}{p}=\int\frac{dy}{y-1}+\ln C_1.$$

$$\ln|\,p\,|=\ln|\,y-1\,|+\ln C_1\ \Rightarrow\ p=C_1(y-1).$$

Так як $p=y'$, то $y'=C_1(y-1)\ \Rightarrow\ \int\frac{dy}{y-1}=C_1\int dx+\ln C_2$.

$$\ln|y-1|=C_1x+\ln C_2\ \Rightarrow\ y-1=C_2e^{C_1x}.$$

Загальний розв’язок ДР-2 $y=C_2e^{C_1x}+1$.

Відповідь: $y=\left[\begin{array}{l} C,\\ C_2e^{C_1x}+1\end{array}\right.$.

3) ***Диференціальне рівняння виду*** $F(x,\ y'')=0$**.**

Воно не містить шукану функцію y та її похідну y'. Якщо воно може бути розв'язане відносно y'': $y''=f(x)$, то розв'язок $y=y(x)$ цього рівняння отримаємо після двократного інтегрування функції $f(x)$:

$$y'=\int f(x)dx+C_1 \Rightarrow y=\int\left(\int f(x)dx+C_1\right)dx+C_2 .$$

Якщо воно не може бути розв'язане відносно y'', то можна знизити порядок його, як у випадку **1)**.

Приклад 24. Знайти загальний розв'язок ДР-2

$$y''=x-\ln x .$$

Розв'язання. Рівняння розв'язане відносно y''. Тому

$$y'=\int(x-\ln x)dx+C_1=\begin{bmatrix} u=\ln x;\, dv=dx \\ du=\dfrac{dx}{x};\ v=x \end{bmatrix}=\int xdx-x\ln x+$$

$$+\int x\cdot\frac{dx}{x}+C_1=\frac{x^2}{2}-x\ln x+x+C_1 .$$

$$y=\int\left(\frac{x^2}{2}-x\ln x+x+C_1\right)dx+C_2=\begin{bmatrix} u=\ln x;\, dv=xdx \\ du=\dfrac{dx}{x};\, v=\dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\int x^2dx-\frac{x^2}{2}\ln x+\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}+\int xdx+C_1\int dx+C_2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2 .$$

Загальний розв'язок заданого ДР-2

$$y=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{3}{4}x^2+C_1x+C_2 .$$

Відповідь: $y=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{3}{4}x^2+C_1x+C_2$.

4) *Диференціальне рівняння виду* $F(y',y'')=0$**.**

Воно не містить шукану функцію y та змінну x. Враховуючи, що $y''=(y')'$, можна знизити порядок ДР шляхом заміни: $y'=z,\quad y''=z'$. Матимемо ДР-1: $F(z,z')=0$. Розв'яжемо його відносно z: $z=f(x)+C_1 \quad\Rightarrow\quad y'=f(x)+C_1$. Інтегруючи рівняння, отримаємо загальний розв'язок:

$$y=\int\left(f(x)+C_1\right)dx+C_2 \ .$$

Приклад 25. Знайти загальний розв'язок ДР-2

$$y'+2=y''.$$

Розв'язання. Враховуючи, що $y''=(y')'=\frac{d}{dx}(y')$ зробимо заміну: $y'=z,\quad y''=z'$. Маємо $z+2=z'\Rightarrow\frac{dz}{z+2}=dx$.

Інтегруємо це рівняння:

$$\int\frac{dz}{z+2}=\int dx+\ln C_1\Rightarrow\ln|z+2|=x+\ln C_1 \ .$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно функції z:

$$z+2=C_1e^x;\, z=C_1e^x-2 \ \Rightarrow\ y'=C_1e^x-2 \ .$$

Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$y=\int\left(C_1e^x-2\right)dx+C_2 = C_1e^x-2x+C_2 \ .$$

Загальний розв'язок заданого ДР-2 $y=C_1e^x-2x+C_2$.

Відповідь: $y=C_1e^x-2x+C_2$.

5) *Диференціальне рівняння виду* $F(y,y'')=0$**.**

Воно не містить змінну x та похідну y' шуканої функції y. Знизимо порядок диференціального рівняння шляхом заміни:

$$y' = p(y) = p, \quad y'' = p'(y)\cdot y' = p'\cdot p.$$

Приклад 26. Знайти частинний розв'язок ДР-2

$$y'' = \frac{4}{\sqrt{y}}, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Розв'язання. Знизимо порядок диференціального рівняння шляхом заміни: $y' = p(y) = p, \quad y'' = p'\cdot p$. Тоді $p'p = \frac{4}{\sqrt{y}}$. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні. Інтегруємо отримане рівняння:

$$p\,dp = \frac{4}{\sqrt{y}}dy \Rightarrow \int p\,dp = \int \frac{4}{\sqrt{y}}dy + C_1 \Rightarrow \frac{p^2}{2} = 8\sqrt{y} + C_1.$$

Підставимо $p = y'$ і знайдемо значення сталої C_1, застосувавши початкові умови: $(y')^2 = 16\sqrt{y} + C_1 \Rightarrow (0)^2 = 16\sqrt{0} + C_1$, $C_1 = 0$. Маємо рівняння $(y')^2 = 16\sqrt{y} \Rightarrow y' = 4\sqrt[4]{y}$. Це рівняння з відокремлюваними змінним. Відокремимо їх. Інтегруючи отримане рівняння, матимемо загальний розв'язок його:

$$\frac{dy}{\sqrt[4]{y}} = 4\,dx \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{4}}dy = \int 4\,dx + C_2 \Rightarrow \frac{4y^{\frac{3}{4}}}{3} = 4\,x + C_2.$$

Враховуючи початкові умови, знайдемо значення $C_2 = 0$. Тоді частинний розв'язок заданого ДР-2: $y^{\frac{3}{4}} = 3x$ або $x = \frac{1}{3}y^{\frac{3}{4}}$.

Відповідь: $x = \frac{1}{3}y^{\frac{3}{4}}$.

6) ***Для диференціального рівняння виду*** $F(x, y, y', y'')=0$ необхідно підібрати відповідну заміну, яка дозволить знизити порядок диференціального рівняння та розв'язати його, наприклад, $y\,y' = p$; $(y')^{2}= p$; $x\,y' = p$; $y' = y\,p$ та інші. Якщо заміну підібрати складно, то для розв'язування ДР-2 застосовують наближені методи.

Приклад 27. Знайти загальний розв'язок ДР-2

$$yy'' + (y')^2 = x .$$

Розв'язання. Для зниження порядку диференціального рівняння застосуємо заміну: $y\,y' = p$. Тоді $p' = (y')^2 + y \cdot y''$. Підставимо заміну в рівняння. Маємо ДР-1 $p' = x$. Розв'язком його є $p = \dfrac{x^2}{2} + C_1$. Замість p підставимо вираз з заміни: $y\,y' = \dfrac{x^2}{2} + C_1 \;\Rightarrow\; \int y\,d\,y = \int\left(\dfrac{x^2}{2} + C_1\right)d\,x$. Загальний інтеграл заданого ДР-2: $\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$.

Відповідь: $\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$

7) ***Диференціальне рівняння*** $F(x, y, y', y'')=0$ ***є однорідне відносно*** y, y', y''**,** якщо при заміні y на ty, y' на $t\,y'$, y'' на ty'', це рівняння змінюється на еквівалентне йому.

В цьому випадку функція $F(x, y, y', y'')$ є однорідною відносно y, y', y'' виміру k. Порядок рівняння можна знизити, застосувавши заміну $y' = zy$, де $z = z(x)$ нова невідома функція. Тоді $y'' = z'y + zy' = \left(z' + z^2\right)y$. Після підстановки заміни в ДР-2 і скорочення на y^k, матимемо ДР-1: $F\left(x, z, z'\right) = 0$, розв'язком якого є $z = \varphi\left(x, C_1\right)$. Підставимо значення z із заміни: $\frac{y'}{y} = \varphi\left(x, C_1\right)$. Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його відокремивши змінні та інтегруючи:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \varphi\left(x, C_1\right)dx \Rightarrow \ln|y| = \int \varphi\left(x, C_1\right)dx + \ln C_2 .$$

Загальний розв'язок заданого ДР-2 $y = C_2 \cdot e^{\int \varphi\left(x, C_1\right)dx}$.

Зауваження **2**. Якщо $k > 0$, то розв'язком ДР-2 може бути $y = 0$.

Приклад 28. Знайти загальний розв'язок ДР-2

$$x^2 yy'' - \left(y - xy'\right)^2 = 0 .$$

Розв'язання. Функція $F\left(x, y, y', y''\right) = x^2 yy'' - \left(y - xy'\right)^2$ є однорідною відносно y, y', y'' виміру $k = 2$. Перевіримо це. Замінимо в ній y на ty, y' на ty', y'' на ty'':

$$x^2 ty ty'' - \left(ty - xty'\right)^2 = \left(x^2 yy'' - \left(y - xy'\right)^2\right) \cdot t^2 .$$

Порядок рівняння знизимо, застосувавши заміну $y' = zy$ і $y'' = \left(z' + z^2\right)y$. Матимемо рівняння:

$$x^2 y^2 \left(z' + z^2\right) - y^2 \left(1 - xz\right)^2 = 0 .$$

Винесемо y^2 за дужки:

$$y^2 \left(x^2 \left(z' + z^2\right) - \left(1 - xz\right)^2\right) = 0 .$$

Розв'язком заданого ДР-2 є функція $y = 0$. Інший розв'язок отримаємо прирівнявши вираз у дужках до нуля, а також приведемо подібні:

$$x^2 z' + x^2 z^2 - 1 + 2xz - x^2 z^2 = 0 .$$

$$x^2 z' - 1 + 2xz = 0 \;\Rightarrow\; z' + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x^2} .$$

Маємо лінійне ДР-1, де $p(x) = \frac{2}{x},\ q(x) = \frac{1}{x^2}$. Зробимо заміну: $z = u \cdot v$. Скористаємось виведеними вище формулами:

$$v = e^{-\int p(x)dx} \text{ і } u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx + C .$$

Матимемо

$$v = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2} ,$$

$$u = \int \frac{1}{x^2} \cdot x^2 dx + C_1 = \int dx + C_1 = x + C_1 .$$

Загальний розв'язок ДР-1 $z = x^{-2} \cdot \left(x + C_1\right) = x^{-1} + C_1 x^{-2}$. Підставимо значення z з заміни: $z = \frac{y'}{y} \Rightarrow \frac{y'}{y} = x^{-1} + C_1 x^{-2}$. Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1 \frac{x^{-1}}{-1} + \ln C_2 .$$

Загальний розв'язок заданого ДР-2 $y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}$.

Відповідь: $y = \left[\begin{array}{l} 0, \\ C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}} \end{array}\right.$.

2.3 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Лінійне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд:

$$p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = g(x) . \tag{2.11}$$

Воно лінійне відносно функції y та її похідних y' і y''. Функції $p_i(x)$ і $g(x)$ – неперервні функції. Поділимо рівняння (2.11) на $p_1(x) \neq 0$. Матимемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку (ЛНДР-2):

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{2.12}$$

де $a_1(x) = \dfrac{p_2(x)}{p_1(x)}$, $a_2(x) = \dfrac{p_3(x)}{p_1(x)}$, $f(x) = \dfrac{g(x)}{p_1(x)}$.

Якщо $f(x) = 0$, матимемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку (ЛОДР-2):

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{2.13}$$

Позначимо вираз лівої частини рівняння (2.13)

$$L(y) = y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y\ . \tag{2.14}$$

Тоді диференціальне рівняння (2.13) матиме вигляд: $L(y) = 0$. Вираз (2.14) називається лінійним диференціальним оператором другого порядку. Для нього справедлива властивість:

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_1L(y_2),$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, y_1, y_2 – довільні двічі диференційовані функції змінної x.

<u>Теорема</u> **2**. Якщо функції $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ на деякому проміжку (a, b) є розв’язком диференціального рівняння $L(y) = 0$, то розв’язком цього рівняння є також функція $y = C_1y_1 + C_1y_2$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

***Означення* 1**. Функції $f_1(x), f_2(x)$ на проміжку (a, b) називаються лінійно незалежними, якщо тотожність $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \equiv 0$, де α_1, α_2 – дійсні числа, виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Якщо α_1 або α_2 одночасно не дорівнюють нулю і справджується тотожність $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \equiv 0$, то функції $f_1(x), f_2(x)$ називаються лінійно залежними на проміжку (a, b).

***Теорема* 3**. Якщо функції $f_1(x), f_2(x)$ диференційовані і лінійно залежні на проміжку (a, b), то детермінант $W(x)$ на цьому проміжку дорівнює нулю:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0. \tag{2.15}$$

Цей детермінант називається детермінантом Вронського або вронскіан.

***Теорема* 4**. Якщо функції $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ є розв'язком диференціального рівняння (2.13) на проміжку (a, b) і лінійно незалежні на цьому проміжку, то визначник Вронського, побудований для цих функцій, в жодній точці проміжку (a, b) не дорівнює нулю.

***Теорема* 5**. Для того, щоб розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ диференційного рівняння (2.13) були лінійно незалежними на заданому проміжку (a, b), необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського не дорівнював нулю хоча б в одній точці цього проміжку.

Теорема **6**. Якщо розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ диференційного рівняння (2.13) є лінійно незалежними на розглядуваному проміжку (a, b), то функція

$$y_{\text{одн}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{2.16}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, є загальним розв'язком цього рівняння.

Означення **2**. Система лінійно незалежних розв'язків ЛОДР-2 на базі якої будуємо загальний розв'язок цього рівняння називається фундаментальною системою розв'язків.

Зауваження **3**. Для ЛОДР-2 не існує загальних методів розв'язку. Але, якщо один розв'язок $y_1(x)$ якимось чином знайдено, то можна знайти загальний розв'язок за формулою Абеля:

$$y = y_1\left(\int \frac{C_1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x)dx} \, dx + C_2\right), \tag{2.17}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Якщо треба знайти частинний розв'язок $y_2(x)$, що буде складати разом з $y_1(x)$ фундаментальну систему, то можна покласти $C_1 = 1, C_2 = 0$, оскільки треба знайти частинний розв'язок. За формулою (2.17) матимемо

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x)dx} dx\,. \tag{2.18}$$

Тоді загальний розв'язок ЛОДР-2 може бути записаний за формулою (2.16).

Теорема **7**. Якщо $\overline{y}(x)$ – частинний розв'язок ЛНДР-2, то загальний розв'язок y цього рівняння є сумою загального розв'язку $y_{одн}$ відповідного ЛОДР-2 і частинного розв'язку $\overline{y}(x)$ ЛНДР-2:

$$y = y_{\text{одн}} + \overline{y}(x). \qquad (2.19)$$

ЛНДР-2 може бути розв'язане методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа). Суть метода полягає в тому, що розв'язок ЛНДР-2 шукаємо у вигляді (2.16), що і загальний розв'язок відповідного ЛОДР-2, але сталі C_1, C_2 вважаємо невідомими функціями: $C_i = C_i(x),\ i = 1, 2$. Матимемо

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \qquad (2.20)$$

Підберемо функції $C_1(x), C_2(x)$ так, щоб функція (2.20) була розв'язком рівняння (2.12). Знайдемо похідну:

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Поставимо вимогу, щоб $C_1(x)$ і $C_2(x)$ задовольняли рівність

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0. \qquad (2.21)$$

При виконанні цієї умови $y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$. Знайдемо другу похідну:

$$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Підставимо значення y, y', y'' в рівняння (2.12) і згрупуємо доданки:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)L(y_1) + C_2(x)L(y_2) = f(x).$$

Враховуючи, що $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – розв'язки ЛОДР-2, $L(y_1)=0$ і $L(y_2)=0$, матимемо

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x) \qquad (2.22)$$

Отже, рівняння (2.21) і (2.22) складають систему, в якій невідомими є похідні $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases} \qquad (2.23)$$

Визначник системи: $W=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$. Випливає, що система має єдиний розв'язок відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, а саме $C_1'(x)=\varphi(x)$ і $C_2'(x)=\psi(x)$. Інтегруючи отримані рівняння, знайдемо шукані функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1(x)=\int \varphi(x)dx+\overline{C_1} \\ C_2(x)=\int \psi(x)dx+\overline{C_2} \end{cases}, \qquad (2.24)$$

де $\overline{C}_1, \overline{C}_2$ – довільні сталі. Знайдені $C_1(x)$ і $C_2(x)$ підставимо в рівняння (2.20). Матимемо загальний розв'язок y рівняння (2.12):

$$y=\left(\int \varphi(x)dx+\overline{C_1}\right)y_1(x)+\left(\int \psi(x)dx+\overline{C_2}\right)y_2(x), \qquad (2.25)$$

де $\varphi(x)=-\dfrac{f(x)y_2(x)}{W(x)}$ і $\psi(x)=\dfrac{f(x)y_1(x)}{W(x)}$.

2.4 Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР-2, ЛОДР-3, ЛОДР-4 та інші)

Диференціальне рівняння виду:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0\,, \qquad (2.26)$$

де a_1, a_2 – дійсні числа, називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами).

Загальним розв’язком рівняння (2.26) є

$$y_{\text{одн}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (2.27)$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – частинні розв`язки рівняння (2.26), які лінійно незалежні, C_1, C_2 – довільні сталі.

Знайдемо розв’язок диференціального рівняння (2.26) методом Ейлера, а саме, у вигляді:

$$y = e^{kx}\,, \qquad (2.28)$$

де k – деяке невизначене число (дійсне чи комплексне)· Знайдемо похідні: $y' = k\,e^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Підставимо y, y', y'' у рівняння (2.26), винесемо e^{kx} за дужки. У лівій частині рівняння матимемо лінійний диференціальний оператор відносно функції e^{kx}:

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y \Rightarrow L\left(e^{kx}\right) = e^{kx}\left(k^2 + a_1 k + a_2\right).$$

Функція (2.28) є розв’язком диференціального рівняння (2.26) тоді і тільки тоді, коли многочлен $P(k) = k^2 + a_1 k + a_2$ дорівнює нулю, тобто

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0\,. \qquad (2.29)$$

Многочлен $P(k)$ називають *характеристичним многочленом* диференціального рівняння (2.26), а рівняння $P(k) = 0$ –

характеристичним рівнянням диференціального рівняння (2.26). Корні рівняння (2.29) називають *характеристичними числами*.

Розв'язком рівняння (2.29) є $k_{1,2} = \dfrac{a_1 \pm \sqrt{D}}{2}$, де дискримінант $D = {a_1}^2 - 4a_2$. Розв'язок представимо у вигляді: $k_{1,2} = \dfrac{a_1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{a_1^2}{4} - a_2}$, де $D = \dfrac{a_1^2}{4} - a_2$. Маємо три випадки відносно дискримінанта.

а) $D > 0 \Rightarrow k_1, k_2$ – дійсні різні корені. Диференціальне рівняння (2.26) при цьому має два різні розв'язки: $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$. Побудуємо детермінант Вронського для цих розв'язків:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = (k_2 - k_1) e^{(k_2 + k_1)x} \neq 0 .$$

Отже розв'язки y_1 і y_2 є лінійно незалежні в інтервалі $(-\infty;\infty)$. Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд:

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x} . \tag{2.30}$$

Приклад 29. Знайти загальний розв'язок ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + 4y' - 5y = 0 .$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 + 4k - 5 = 0$ і знайдемо його корені: $D = 16 + 4 \cdot 5 = 36; \sqrt{D} = 6$.

$$k_1 = \frac{-4+6}{2} = 1, \quad k_2 = \frac{-4-6}{2} = -5 .$$

Загальний розв'язок ЛОДР-2 $y_{\text{одн}} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-5x}$.

Відповідь: $y_{\text{одн}} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-5x}$

б) $D = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k$ – дійсні рівні корені. Дістанемо одне характеристичне число $k = -\dfrac{a_1}{2}$. Отже, диференціальне рівняння (2.26) має розв'язок $y = e^{kx} = e^{-\frac{a_1}{2}x}$. Доведемо, що розв'язком диференціального рівняння (2.26) є також функція $y_2 = x e^{-\frac{a_1}{2}x}$. Знайдемо похідні:

$$y_2' = e^{-\frac{a_1}{2}x}\left(1 - x \cdot \frac{a_1}{2}\right), \quad y_2'' = -a_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} + x \cdot \frac{a_1^2}{4} \cdot e^{-\frac{a_1}{2}x}.$$

Підставимо y_2, y_2', y_2'' у рівняння (2.26):

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y = -a_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} + x \cdot \frac{a_1^2}{4} \cdot e^{-\frac{a_1}{2}x} + a_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} \cdot$$

$$\cdot \left(1 - x \cdot \frac{a_1}{2}\right) + a_2 \cdot x \cdot e^{-\frac{a_1}{2}x} = e^{-\frac{a_1}{2}x}\left(-a_1 + \frac{a_1^2}{4}x + a_1 - x \cdot \frac{a_1^2}{2} + a_2 x\right) =$$

$$= e^{-\frac{a_1}{2}x}\left(a_2 x - x\frac{a_1^2}{4}\right).$$

Так як $\dfrac{a_1^2}{4} - a_2 = 0 \;\Rightarrow\; a_2 = \dfrac{a_1^2}{4}$, то

$$L(y_2) = e^{-\frac{a_1}{2}x}\left(a_2 x - x\frac{a_1^2}{4}\right) = 0.$$

Доведемо, що розв'язки y_1 і y_2 лінійно незалежні в інтервалі $(-\infty;\infty)$. Побудуємо детермінант Вронського:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx}+xke^{\mathrm{kx}} \end{vmatrix}=e^{2kx}\neq 0\,.$$

Отже загальний розв’язок рівняння (2.26) при $k_1=k_2=-\frac{a_1}{2}$ записується у вигляді:

$$y_{\text{одн}}=e^{-\frac{a_1}{2}x}\left(C_1+C_2x\right). \qquad (2.31)$$

Приклад 30. Знайти частинний розв’язок ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами

$$y''-8y'+16y=0, \quad y(0)=2;\ y'(0)=6\,.$$

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння: $k^2-8k+16=0$. Знайдемо його корені: $D=64-4\cdot 16=0$, $k_1=k_2=4$. Загальний розв’язок ЛОДР-2 $y_{\text{одн}}=\left(C_1+C_2x\right)\cdot e^{4x}$.

Для знаходження частинного розв’язку визначимо сталі C_1 і C_2, застосовуючи початкові умови.

$$y(0)=2\ \Rightarrow\ 2=\left(C_1+C_2\cdot 0\right)\cdot e^{4\cdot 0}\Rightarrow\ C_1=2\,,$$

$$y'_{\text{одн}}=C_2\cdot e^{4x}+\left(C_1+C_2x\right)\cdot 4e^{4x}\,,$$

$$y'(0)=6\ \Rightarrow\ 6=C_2e^{4\cdot 0}+\left(2+C_2\cdot 0\right)\cdot 4\cdot e^{4\cdot 0}\Rightarrow C_2=-2\,.$$

Частинний розв’язок ЛОДР-2 $y_{\text{одн,част}}=\left(2-2x\right)e^{4x}$.

Відповідь: $y_{\text{одн,част}}=\left(2-2x\right)e^{4x}$.

в) $D<0\ \Rightarrow\frac{a_1^2}{4}-a_2<0$. Враховуючи, що $\sqrt{-1}=i$ – уявна одиниця, матимемо $\sqrt{D}=\sqrt{-\left(a_2-\frac{a_1^2}{4}\right)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}$ і

$k_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm i\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}$. Позначимо $\alpha = -\frac{a_1}{2}$ і $\beta = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}$. Тоді $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ – корні комплексні спряжені. Цим кореням відповідають дві функції y_1 і y_2. Запишемо їх, застосовуючи формули Ейлера:

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right).$$

Матимемо $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Вони є розв'язками рівняння (2.26). Це можна перевірити, підставляючи їх по черзі в рівняння (2.26). Вони є лінійно незалежними. Побудуємо для них визначник Вронського:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}\left(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x\right) & e^{\alpha x}\left(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (2.26) записується у вигляді:

$$y_{\text{одн}} = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right) \qquad (2.32)$$

Приклад 31. Знайти загальний розв'язок ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 4k + 5 = 0$. Знайдемо його корені: $D = 16 - 4\cdot 5 = -4$, $\sqrt{D} = 2i$, $k_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$. Звідки $\alpha = -2$, $\beta = 1$. Загальний розв`язок ЛОДР-2:

$$y_{\text{одн}} = e^{-2x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right).$$

Відповідь: $y_{\text{одн}} = e^{-2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$.

Приклад 32. Знайти загальний розв'язок ЛОДР-5 зі сталими коефіцієнтами

$$y^{V} + 8y'' = 0 .$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^5 + 8k^2 = 0$. Знайдемо його корені:

$$k^2 \cdot \left(k^3 + 8\right) = 0 \;\Rightarrow\; k^2 \cdot (k+2) \cdot \left(k^2 - 2k + 4\right) = 0 .$$

Матимемо $\left[\begin{array}{c} k^2 = 0, \\ k+2 = 0, \\ k^2 - 2k + 4 = 0 \end{array}\right.$. З першого рівняння отримаємо $k_{1,2} = 0$, з другого $-$ $k_3 = -2$ і для третього рівняння $k^2 - 2k + 4 = 0$: $D = 4 - 4 \cdot 4 = -12$, $\sqrt{D} = 2\sqrt{3}\, i \;\Rightarrow\; k_{4,5} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}\, i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}\, i$, де $\alpha = 1,\ \beta = \sqrt{3}$. Загальний розв`язок ЛОДР-5

$$y_{\text{одн}} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x} + e^{x}\left(C_4 \cos\sqrt{3}\, x + C_5 \sin\sqrt{3}\, x\right).$$

Відповідь:

$$y_{\text{одн}} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x} + e^{x}\left(C_4 \cos\sqrt{3}\, x + C_5 \sin\sqrt{3}\, x\right).$$

Приклад 33. Знайти загальний розв'язок ЛОДР-4 зі сталими коефіцієнтами

$$y^{IV} - 16y = 0 .$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^4 - 16 = 0$. Знайдемо його корені: $k^4 = 16 \;\Rightarrow\; k^2 = 4,\ k^2 = -4$ і $k_{1,2} = \pm 2,\ k_{3,4} = \pm 2i$. Загальний розв`язок ЛОДР-4

$$y_{\text{одн}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x \,.$$

Відповідь: $y_{\text{одн}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

2.5 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛНДР-2).

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{2.33}$$

де a_1, a_2 – дійсні числа, $f(x)$ – неперервна на деякому проміжку (a, b) функція змінної x .

Загальний розв'язок цього рівняння згідно з <u>*Теоремою* 7</u> складається із суми загального розв'язку відповідного ЛОДР-2 та частинного розв'язку ЛНДР-2: $y = y_{\text{одн}} + \overline{y}$, де $y_{\text{одн}}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР-2, $\overline{y}$ – частинний розв'язок ЛНДР-2 Знаходження загального розв'язку ЛОДР-2 розглянуто вище. Якщо функція $f(x)$ має спеціальний вигляд, то частинний розв'язок можна знайти методом невизначених коефіцієнтів. Розглянемо окремі випадки вигляду функції $f(x)$ для застосування цього методу.

1) Функція $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$, де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен n-го степеню.

Частинний розв'язок $\overline{y}$ шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x) \cdot x^s \,, \tag{2.34}$$

де α – відповідає значенню α з функції $f(x)$; $Q_n(x)$ – многочлен такого ж степеню що і $P_n(x)$, але записаний в загальному вигляді:

$$Q_n(x) = \mathrm{b}_n\, x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

де $b_i\,(i = 0,1,\ldots,n)$ – невідомі коефіцієнти; s – дорівнює числу збігів α з коренями k_i характеристичного рівняння для ЛОДР-2.

Знаходимо $\bar{y}', \bar{y}''$ і підставляємо $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в задане ЛНДР-2. Скорочуємо отримане рівняння на $e^{\alpha x}$ при наявності. В лівій частині рівняння матимемо многочлен степеню n з невідомими коефіцієнтами, а в правій частині – многочлен степеню n з відомими коефіцієнтами. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях змінної x, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів b_i.

Приклад 34. Знайти загальний розв'язок ЛНДР -2 зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - y' - 6y = e^{-2x}(x+4).$$

Розв'язання. Загальний розв\`язок має вигляд: $y = y_{одн} + \bar{y}$. Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y'' - y' - 6y = 0$. Характеристичне рівняння для нього $k^2 - k - 6 = 0$, $k_1 = -2,\ k_2 = 3$. Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд:

$$y_{\text{одн}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.$$

В правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x) = e^{-2x}(x+4)$, де $\alpha = -2$ і $n = 1$. Тому $Q_1(x) = Ax + B,\ \mathrm{s} = 1$, так як $k_1 = \alpha$. Частинний розв'язок $\bar{y}$ ЛНДР-2 шукатимемо у вигляді:

$$\bar{y} = e^{-2x}\cdot(Ax+B)\cdot x = e^{-2x}\cdot\left(Ax^2 + Bx\right).$$

Знайдемо $\bar{y}', \bar{y}''$:

$$\begin{aligned}\bar{y}' &= e^{-2x}\cdot(-2)\cdot\left(Ax^2 + Bx\right) + e^{-2x}\cdot(2Ax + B) = \\ &= e^{-2x}\cdot\left(-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B\right),\end{aligned}$$

$$\overline{y}'' = e^{-2x}(-2)\left(-2Ax^2-2Bx+2Ax+B\right)+e^{-2x}\left(-4Ax-2B+2A\right)=$$
$$=e^{-2x}\left(4Ax^2+4Bx-8Ax-4B+2A\right).$$

Підставимо $\overline{y}, \overline{y}', \overline{y}''$ в задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$e^{-2x}\cdot\left(4Ax^2+4Bx-8Ax-4B+2A\right)-e^{-2x}\cdot\left(-2Ax^2-2Bx+2Ax+B\right)-$$
$$-6e^{-2x}\left(Ax^2+Bx\right)=e^{-2x}(x+4).$$

Поділивши його на e^{-2x}, матимемо рівняння:

$$4Ax^2+4Bx-8Ax-4B+2A+2Ax^2+2Bx-2Ax-B-6Ax^2-$$
$$-6Bx=x+4$$

Приведемо подібні: $-10Ax-5B+2A=x+4$.

Маємо рівність двох многочленів. Можемо прирівняти коефіцієнти при однакових степенях змінної x зліва і справа:

$$\begin{array}{c|l} x & -10A=1 \\ x^0 & -5B+2A=4 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A=-0{,}1 \\ B=-0{,}84 \end{cases}.$$

Частинний розв'язок ЛНДР-2 $\overline{y}=e^{-2x}\left(-0{,}1x^2-0{,}84x\right)$.

Загальний розв'язок ЛНДР-2

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}+e^{-2x}\left(-0{,}1x^2-0{,}84x\right).$$

Відповідь: $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}+e^{-2x}\left(-0{,}1x^2-0{,}84x\right)$.

Приклад 35. Знайти частинний розв'язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами

$$y''-3y'+2y=36e^{-x}, \qquad y(0)=8,\ y'(0)=2.$$

Розв'язання. Загальний розв`язок має вигляд: $y=y_{\text{одн}}+\overline{y}$.

Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y''-3y'+2y=0$. Характеристичне рівняння для нього $k^2-3k+2=0 \Rightarrow k_1=1,\ k_2=2$. Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд:

$$y_{\text{одн}}=C_1e^{x}+C_2e^{2x}.$$

В правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x)=36e^{-x}$, де $\alpha=-1,\ n=0$. Тому $Q_0(x)=A$, $s=0$ $(\alpha \neq k_1; \alpha \neq k_2)$. Частинний розв'язок $\bar{y}$ ЛНДР-2 шукатимемо у вигляді: $\bar{y}=Ae^{-x}$. Знайдемо $\bar{y}', \bar{y}''$: $\bar{y}'=-Ae^{-x}$, $\bar{y}''=Ae^{-x}$. Підставимо $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$Ae^{-x}+3Ae^{-x}+2Ae^{-x}=36e^{-x}$$

Поділивши його на e^{-x}, матимемо рівняння:

$$6A=36 \quad \Rightarrow \quad A=6\ .$$

Частинний розв'язок ЛНДР-2 $\bar{y}=6e^{-x}$.

Загальний розв'язок ЛНДР-2 має вигляд:

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+6e^{-x}\ .$$

Знайдемо частинний розв'язок ЛНДР-2. Застосовуючи початкові умови визначимо значення C_1 і C_2:

$$y'=C_1e^{x}+2C_2e^{2x}-6e^{-x}$$

$$\begin{cases} 8=C_1e^0+C_2e^0+6e^0 \Rightarrow C_1+C_2=2 \\ 2=C_1e^0+2C_2e^0-6e^0 \Rightarrow C_1+2C_2=8 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1=-4 \\ C_2=6 \end{cases}.$$

Частинний розв'язок заданого ЛНДР-2 $y_{\text{част}}=-4e^{x}+6e^{2x}+6e^{-x}$.

Відповідь: $y_{\text{част}}=-4e^{x}+6e^{2x}+6e^{-x}$

Приклад 36. Знайти загальний розв'язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами

$$y''+2y'=6x^2+2x+1\ .$$

Розв'язання. Загальний розв`язок має вигляд $y=y_{\text{одн}}+\bar{y}$. Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y''+2y'=0$. Характеристичне рівняння для нього: $k^2+2k=0 \quad \Rightarrow$ $k_1=-2,\ k_2=0$. Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд:

$$y_{\text{одн}} = C_1 e^{-2x} + C_2 .$$

В правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x) = 6x^2 + 2x + 1$, де $\alpha = 0$ і $n = 2$. Тому $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, $s = 1$, так як $k_2 = \alpha$. Частинний розв'язок $\overline{y}$ ЛНДР-2 шукатимемо у вигляді:

$$\overline{y} = \left(Ax^2 + Bx + C\right) \cdot x = Ax^3 + Bx^2 + Cx .$$

Знайдемо $\overline{y}', \overline{y}''$:

$$\overline{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad \overline{y}'' = 6Ax + 2B .$$

Підставимо $\overline{y}, \overline{y}', \overline{y}''$ в задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$6Ax + 2B + 2 \cdot \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = 6x^2 + 2x + 1 .$$

Приведемо подібні: $6Ax^2 + x \cdot (6A + 4B) + 2B + 2C = 6x^2 + 2x + 1$. Маємо рівність двох многочленів. Можемо прирівняти коефіцієнти при однакових степенях змінної x:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 6A = 6 \\ x & 6A + 4B = 2 \\ x^0 & 2B + 2C = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1{,}5 \end{cases} .$$

Частинний розв'язок ЛНДР-2: $\overline{y} = x^3 - x^2 + 1{,}5x$.

Загальний розв'язок ЛНДР-2: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 + x^3 - x^2 + 1{,}5x$.

Відповідь: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 + x^3 - x^2 + 1{,}5x$.

2) Функція $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$, де α, β – дійсні числа; $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени, вони можуть бути і сталими числами, а один із них може тотожно дорівнювати нулю.

Частинний розв'язок $\overline{y}$ ЛНДР-2 шукатимемо у вигляді:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}\left(S_k(x)\cos\beta x + T_k(x)\sin\beta x\right) \cdot x^s , \tag{2.35}$$

де α і β – відповідають значенням α і β з функції $f(x)$; $S_k(x)$ і $T_k(x)$ – многочлени степеню k, де $k=\max\{n,m\}$, записані в загальному вигляді; s – дорівнює числу збігів $\alpha\pm\beta i$ з коренями k_i характеристичного рівняння для ЛОДР-2 (збіг може бути, якщо k_i комплексні числа і при цьому їх дійсні і уявні частини рівні).

***<u>Зауваження</u>* 4**. Вигляд $\bar{y}$ зберігається незалежно від того, дорівнює нулю чи ні один з многочленів функції $f(x)$.

Знаходимо $\bar{y}', \bar{y}''$ і підставляємо $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в задане ЛНДР-2. Прирівнявши коефіцієнти при $\sin\beta x$ і $\cos\beta x$ в лівій і правій частинах отриманого рівняння, матимемо систему рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів многочленів $S_k(x)$ та $T_k(x)$.

Приклад 37. Знайти загальний розв'язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами

$$y''-4y'+53y=200\cos 7x .$$

Розв'язання. Загальний розв`язок має вигляд: $y=y_{\text{одн}}+\bar{y}$. Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y''-4y'+53y=0$. Характеристичне рівняння для нього

$$k^2-4k+53=0 \;\Rightarrow\; D=16-4\cdot 53=16-212=-196 ,$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{-196}=14i \;\Rightarrow\; k_{1,2}=\frac{4\pm 14i}{2}=2\pm 7i .$$

Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд:

$$y_{\text{одн}}=e^{2x}\left(C_1\cos 7x+C_2\sin 7x\right).$$

В правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x)=200\cos 7x$, де $\alpha=0,\ \beta=7$, $P_0(x)=200$, $Q_0(x)=0$. Тому $k=0$, $s=0$ $\left(\alpha\pm\beta i\neq k_{1,2}\right.$, так як $\alpha\pm\beta i=\pm 7i$, а $\left.k_{1,2}=2\pm 7i\right)$.

Частинний розв'язок $\overline{y}$ заданого ЛНДР-2 шукатимемо у вигляді: $\overline{y} = A\cos 7x + B\sin 7x$. Знайдемо $\overline{y}', \overline{y}''$:

$$\overline{y}' = -7A\sin 7x + 7B\cos 7x, \quad \overline{y}'' = -49A\cos 7x - 49B\sin 7x.$$

Підставимо $\overline{y}, \overline{y}', \overline{y}''$ в задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$-49A\cos 7x - 49B\sin 7x - 4(-7A\sin 7x + 7B\cos 7x) +$$
$$+53(A\cos 7x + B\sin 7x) = 200\cos 7x.$$

Розкриємо дужки і прирівняємо коефіцієнти при $\cos 7x$ і $\sin 7x$ у лівій і правій частинах отриманого рівняння:

$$-49A\cos 7x - 49B\sin 7x + 28A\sin 7x - 28B\cos 7x +$$
$$+53A\cos 7x + 53B\sin 7x = 200\cos 7x.$$

$$\begin{array}{c|l} \cos 7x & 4A - 28B = 200 \\ \sin 7x & 4B + 28A = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -7 \end{cases}.$$

Частинний розв'язок ЛНДР-2 $\overline{y} = \cos 7x - 7\sin 7x$.

Загальний розв'язок заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y = e^{2x}(C_1\cos 7x + C_2\sin 7x) + \cos 7x - 7\sin 7x.$$

Відповідь: $y = e^{2x}(C_1\cos 7x + C_2\sin 7x) + \cos 7x - 7\sin 7x$.

Приклад 38. Знайти частинний розв'язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x, \quad y(0) = -2,\ y'(0) = 0.$$

Розв'язання. Загальний розв`язок має вигляд: $y = y_{\text{одн}} + \overline{y}$. Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y'' - 2y' + y = 0$. Характеристичне рівняння для нього $k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 1$. Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд: $y_{\text{одн}} = (C_1 + C_2x)e^x$.

В правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x) = -12\cos 2x - 9\sin 2x$, де $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $P_0(x) = -12$, $Q_0(x) = -9$. Тому $k = 0$, $s = 0$ ($\alpha \pm \beta i \neq k_{1,2}$, так як $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$, а $k_{1,2} = 1$). Частинний розв'язок $\overline{y}$ ЛНДР-2 шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = A\cos 2x + B\sin 2x .$$

Знайдемо $\overline{y}', \overline{y}''$:

$$\overline{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x , \quad \overline{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x .$$

Підставимо $\overline{y}, \overline{y}', \overline{y}''$ в задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$
$$+ A\cos 2x + B\sin 2x = -12\cos 2x - 9\sin 2x .$$

Розкриємо дужки і прирівняємо коефіцієнти при $\cos 2x$ і $\sin 2x$ у лівій і правій частинах:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4A\sin 2x - 4B\cos 2x + A\cos 2x + B\sin 2x =$$
$$= -12\cos 2x - 9\sin 2x .$$

$$\begin{array}{c|l} \cos 2x & -3A - 4B = -12 \\ \sin 2x & -3B + 4A = -9 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = 3 \end{cases}.$$

Частинний розв’язок ЛНДР-2 $\overline{y} = 3\sin 2x$.

Загальний розв’язок заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + 3\sin 2x .$$

Знайдемо частинний розв’язок заданого ЛНДР-2. Застосовуючи початкові умови визначимо значення C_1 і C_2:

$$y' = C_2 e^x + (C_1 + C_2 x)e^x + 6\cos 2x$$

$$\begin{cases} -2 = (C_1 + C_2 \cdot 0)\, e^0 + 3\sin(2\cdot 0), \\ \;\;0 = C_2 \cdot e^0 + (-2 + C_2 \cdot 0)e^0 + 6\cdot\cos(2\cdot 0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = -4 \end{cases}.$$

Частинний розв’язок заданого ЛНДР-2

$$y_{\text{част}} = (-2 - 4x)\, e^x + 3\sin 2x .$$

Відповідь: $y_{\text{част}} = (-2 - 4x)\, e^x + 3\sin 2x$.

Приклад 39. Знайти загальний розв’язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + 2y' = (8x + 10)\cos 2x - 2\sin 2x .$$

Розв’язання. Загальний розв`язок має вигляд: $y = y_{\text{одн}} + \overline{y}$.

Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y'' + 2y' = 0$. Характеристичне рівняння для нього: $k^2 + 2k = 0 \Rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = -2$. Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд:

$$y_{\text{одн}} = C_1 + C_2\, e^{-2x}.$$

В правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x) = (8x+10)\cos 2x - 2\sin 2x$, де $\alpha = 0,\ \beta = 2,\ P_1(x) = 8x+10$, $Q_0(x) = -2$. Тому $k = 1$, $S = 0$ ($\alpha \pm \beta i \neq k_{1,2}$, так як $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$, а $k_1 = 0,\ k_2 = -2$). Частинний розв'язок $\overline{y}$ ЛНДР-2 шукаємо у вигляді: $\overline{y} = (Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x$. Знайдемо $\overline{y}',\overline{y}''$:

$$\overline{y}' = A\cos 2x - 2(Ax+B)\sin 2x + C\sin 2x + 2(Cx+D)\cos 2x =$$
$$= (A + 2Cx + 2D)\cos 2x + (C - 2Ax - 2B)\sin 2x,$$

$$\overline{y}'' = 2C\cos 2x - 2(A + 2Cx + 2D)\sin 2x - 2A\sin 2x + 2(C - 2Ax -$$
$$- 2B)\cos 2x = (4C - 4Ax - 4B)\cos 2x - (4A + 4Cx + 4D)\sin 2x$$

Підставимо $\overline{y}, \overline{y}', \overline{y}''$ в задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$(4C - 4Ax - 4B)\cos 2x - (4A + 4Cx + 4D)\sin 2x + (2A + 4Cx +$$
$$+ 4D)\cos 2x + (2C - 4Ax - 4B)\sin 2x = (8x+10)\cos 2x - 2\sin 2x.$$

Розкриємо дужки і прирівняємо коефіцієнти при $x\sin 2x$, $x\cos 2x$, $\sin 2x$ і $\cos 2x$ у лівій і правій частинах:

$$\begin{array}{r|l} x\sin 2x & -4A - 4C = 0, \\ x\cos 2x & -4A + 4C = 8, \\ \sin 2x & 2C - 4B - 4A - 4D = -2, \\ \cos 2x & 4C - 4B + 2A + 4D = 10. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} A + C = 0, \\ -A + C = 2. \end{cases} \\ \begin{cases} 2 - 4B + 4 - 4D = -2, \\ 4 - 4B - 2 + 4D = 10. \end{cases} \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} A = -1, \\ C = 1. \end{cases} \\ \begin{cases} B + D = -2, \\ -B + D = 2. \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = -1, \\ C = 1. \end{cases} \text{ і } \begin{cases} B = -2, \\ D = 0. \end{cases}$$

Частинний розв'язок ЛНДР-2 $\overline{y} = (-x-2)\cos 2x + x\sin 2x$.

Загальний розв'язок заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} - (x+2)\cos 2x + x\sin 2x.$$

Відповідь: $y=C_1+C_2e^{-2x}-(x+2)\cos 2x+x\sin 2x$

3) Метод суперпозиції розв'язків.

***<u>Теорема</u>* 8**. Якщо права частина рівняння (2.33) є сумою декількох функцій, наприклад $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ і функція $\overline{y}_i$, $(i=1,2)$ є частинним розв'язком рівняння $L(y)=f_i(x)$, $(i=1,2)$, то функція $\overline{y}=\overline{y}_1+\overline{y}_2$ є частинним розв'язком рівняння (2.33).

Приклад 40. Знайти загальний розв'язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами

$$y''+4y'=12x^2-2x+75\sin 3x.$$

Розв'язання. В правій частині рівняння $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, де $f_1(x)=12x^2-2x$ і $f_2(x)=75\sin 3x$, які відповідають випадкам: **1)** – функція $f_1(x)$ і **2)** – функція $f_2(x)$. Загальний розв'язок ЛНДР-2 $y=y_{\text{одн}}+\overline{y}$, де $\overline{y}=\overline{y}_1+\overline{y}_2$. Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y''+4y'=0$. Характеристичне рівняння для нього $k^2+4k=0 \Rightarrow k_1=0$, $k_2=-4$. Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд: $y_{\text{одн}}=C_1+C_2e^{-4x}$.

Знайдемо частинні розв'язки $\overline{y}_1$ і $\overline{y}_2$, розв'язуючи рівняння:

а) $y''+4y'=12x^2-2x$. Для функції $f_1(x)=12x^2-2x$ маємо $\alpha=0,\ n=2$. Тому $Q_2(x)=Ax^2+Bx+C,\ s=1$, так як $\alpha=k_1$. Частинний розв'язок $\overline{y}_1$ рівняння шукаємо у вигляді:

$$\overline{y}_1=\left(Ax^2+Bx+C\right)x=Ax^3+Bx^2+Cx.$$

Знайдемо $\overline{y}_1{}'$, $\overline{y}_1{}''$:

$$\overline{y}_1{}'=3Ax^2+2Bx+C,\quad \overline{y}_1{}''=6Ax+2B.$$

Підставимо $\overline{y}_1$, $\overline{y}_1{}'$, $\overline{y}_1{}''$ в розв'язуване рівняння. Маємо

$$6Ax+2B+4\left(3Ax^2+2Bx+C\right)=12x^2-2x.$$

Приведемо подібні: $6Ax+2B+12Ax^2+8Bx+4C=12x^2-2x$. Отримали рівність двох многочленів. Можемо прирівняти коефіцієнти при однакових степенях змінної x:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 12A=12 \\ x & 6A+8B=-2 \\ x^0 & 2B+4C=0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0{,}5 \end{cases}.$$

Частинний розв'язок рівняння: $\overline{y}_1=x^3-x^2+0{,}5x$.

б) $y''+4y'=75\sin 3x$. Для функції $f_2(x)=75\sin 3x$ маємо $\alpha=0,\ \beta=3$, $P_0(x)=0,\ Q_0(x)=75$. Тому $k=0, s=0$ ($\alpha\pm\beta i\neq k_{1,2}$, так як $\alpha\pm\beta i=\pm 3i$, а $k_1=0,\ k_2=-4$). Частинний розв'язок $\overline{y}_2$ рівняння шукаємо у вигляді:

$$\overline{y}_2=A\cos 3x+B\sin 3x.$$

Знайдемо $\overline{y}_2{}'$, $\overline{y}_2{}''$:

$$\overline{y}_2{}'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x,\ \overline{y}_2{}''=-9A\cos 3x-9B\sin 3x.$$

Підставимо $\overline{y}_2$, $\overline{y}_2{}'$, $\overline{y}_2{}''$ в розв'язуване рівняння. Маємо

$$-9A\cos 3x-9B\sin 3x+4\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)=75\sin 3x.$$

Розкриємо дужки і прирівняємо коефіцієнти при $\cos 7x$ і $\sin 7x$ у лівій і правій частинах:

$$-9A\cos 3x-9B\sin 3x-12A\sin 3x+12B\cos 3x=75\sin 3x.$$

$$\begin{array}{c|l} \cos 7x & -9A+12B=0 \\ \sin 7x & -12A-9B=75 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=-4 \\ B=-3 \end{cases}.$$

Частинний розв'язок рівняння $\overline{y}_2=-4\cos 3x-3\sin 3x$.

Частинний розв'язок заданого ЛНДР-2

$$\overline{y}=\overline{y}_1+\overline{y}_2=x^3-x^2+0{,}5x-4\cos 3x-3\sin 3x.$$

Загальний розв'язок заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y=C_1+C_2e^{-4x}+x^3-x^2+0{,}5x-4\cos 3x-3\sin 3x.$$

Відповідь: $y=C_1+C_2e^{-4x}+x^3-x^2+0{,}5x-4\cos 3x-3\sin 3x$.

4) Якщо функція $f(x)$ в правій частині рівняння (2.33) не відповідає випадкам 1) – 3), то для знаходження загального розв'язку рівняння застосовують метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).

Нагадаємо його для ЛНДР-2: $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$.

а) знаходимо загальний розв'язок відповідного ЛОДР-2: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Маємо

$$y_{\text{одн}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, $y_1(x), y_2(x)$ – частинні розв'язки ЛОДР-2.

Загальний розв'язок ЛНДР-2 шукаємо у вигляді:

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x), \tag{2.36}$$

де $C_1(x), C_2(x)$ – невідомі функції.

б) Складаємо систему рівнянь відносно похідних $C_1'(x), C_2'(x)$ невідомих функцій:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases} \tag{2.37}$$

Визначник системи

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Це визначник Вронського для фундаментальної системи частинних розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ ЛОДР-2. Система рівнянь (2.37) має єдиний розв'язок:

$$C_1'(x)=\varphi_1(x),\qquad C_2'(x)=\varphi_2(x), \tag{2.38}$$

де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – деякі функції від змінної x. Інтегруючи отримані розв`язки (2.38), матимемо:

$$C_1(x)=\int\varphi_1(x)dx+\overline{C}_1 \text{ і } C_2(x)=\int\varphi_2(x)dx+\overline{C}_2\ . \tag{2.38}$$

Знайдені значення $C_1(x), C_2(x)$ підставимо в (2.36). Загальний розв’язок ЛНДР-2 матиме вигляд:

$$y(x)=\left(\int\varphi_1(x)\,d\,x+\overline{C_1}\right)\cdot y_1(x)+\left(\int\varphi_2(x)\,d\,x+\overline{C_2}\right)\cdot y_2(x).$$

<u>Зауваження</u> **5**. Метод Лагранжа можна використовувати і у випадках 1) – 3).

Приклад 41. Знайти загальний розв’язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами

$$y''-10y'+25y=\frac{e^{5x}}{\sqrt{x^2-4}}\ .$$

Розв’язання. Функція $f(x)=\dfrac{e^{5x}}{\sqrt{x^2-4}}$ в правій частині не належить до розглянутих випадків 1) – 3). Розв’яжемо це рівняння методом Лагранжа. Знайдемо загальний розв’язок ЛОДР-2:

$$y''-10y'+25y=0\ .$$

Характеристичне рівняння для нього

$$k^2-10k+25=0,\ k_{1,2}=5\ .$$

Загальний розв’язок ЛОДР-2 має вигляд:

$$y_{\text{одн}}=(C_1+C_2x)\,e^{5x}=C_1e^{5x}+C_2\,x\,e^{5x}\ .$$

Загальний розв’язок ЛНДР-2 шукаємо у вигляді:

$$y=C_1(x)\cdot e^{5x}+C_2(x)\cdot x\cdot e^{5x}\ .$$

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ складемо систему двох рівнянь відносно похідних цих функцій:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot e^{5x}+C_2'(x)\cdot x\cdot e^{5x}=0 \\ C_1'(x)\cdot 5\cdot e^{5x}+C_2'(x)\cdot\left(e^{5x}+x\cdot 5\cdot e^{5x}\right)=\dfrac{e^{5x}}{\sqrt{x^2-4}} \end{cases}.$$

Скоротимо обидва рівняння на e^{5x}. Матимемо:

$$\begin{cases} C_1'(x)+C_2'(x)\cdot x=0 \\ 5C_1'(x)+C_2'(x)\cdot(1+5x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}} \end{cases}$$

Розв'яжемо систему відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$C_1'(x)=-\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}, \qquad C_2'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}.$$

Інтегруємо отримані розв'язки $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$C_1(x)=-\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}=-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2xdx}{\sqrt{x^2-4}}=-\sqrt{x^2-4}+\overline{C}_1,$$

$$C_2(x)=-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+\overline{C}_2 .$$

Загальний розв'язок заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y=\left(-\sqrt{x^2-4}+\overline{C}_1\right)\cdot e^{5x}+\left(\ln|x+\sqrt{x^2-4}|+\overline{C}_2\right)\cdot x\cdot e^{5x}.$$

Відповідь:

$$y=\left(-\sqrt{x^2-4}+\overline{C}_1\right)\cdot e^{5x}+\left(\ln|x+\sqrt{x^2-4}|+\overline{C}_2\right)\cdot x\cdot e^{5x}.$$

Зауваження **6**. Методи розв'язування, розглянуті в п. **2.3**, **2.4**, **2.5** можна застосовувати для ЛОДР і ЛНДР зі сталими коефіцієнтами порядку вище другого.

2.6 Завдання для самостійної роботи

Знайти розв’язки заданих диференціальних рівнянь другого порядку:

Завдання	Відповідь
1. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$	$y = e^{C_1 x+1}\left(\frac{x}{C_1} - C_1^{-2}\right) + C_2$
2. $yy'' + (y')^2 = 1$	$(x + C_2)^2 = y^2 + C_1^2$
3. $y'' - \frac{y'}{x} = x$	$y = \frac{x^3}{3} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$
4. $(1 - x^2)y'' = xy'$	$y = C_1 \cdot arc\sin x + C_2$
5. $y''(1 + y) = 5(y')^2$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ -0{,}25\,(y+1)^{-4} = C_1\, x + C_2 \end{array}\right.$
6. $1 + (y')^2 + yy'' = 0$	$-\sqrt{C_1^2 - y^2} = x + C_2$
7. $y'' tgy = 2y'^2$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ y = -arcctg\,(C_1 x + C_2) \end{array}\right.$
8. $(1 + x^2) \cdot y'' + y'^2 + 1 = 0$	$y = \left(\ln\lvert C_1 + x\rvert (1 + C_1^2) - C_1 x\right) / C_1^2 + C_2$
9. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$	$y = 2\sqrt{2\,(x + C_1)^3}\,\frac{3x - 2C_1}{15} + C_2$
10. $y'' - 2ctgx \cdot y' = \sin^3 x$	$y = \frac{C_1 x}{2} - \frac{C_1 \sin 2x}{4} - \frac{\sin^3 x}{3} + C_2$
11. $yy'' - (y')^2 = y^2 \cdot y'$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ \frac{1}{C_1}\ln\left\lvert\frac{y}{y + C_1}\right\rvert = x + C_2 \end{array}\right.$
12. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$	$arctg\,\frac{\sqrt{C_1 y - 4}}{2} = x + C_2$
13. $yy'' - yy' \cdot \ln y = (y')^2$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ x + C_2 = \frac{\sqrt{2C_1}}{C_1} arctg\,\frac{\ln y}{\sqrt{2C_1}} \end{array}\right.$

Завдання	Відповідь
14. $y \cdot y''(1-\ln y)+(1+\ln y)(y')^2=0$	$\left[\begin{array}{l} y=C \\ 1=(1-\ln y)(C_1\,x+C_2) \end{array}\right.$
15. $y''-4y'+4y=3\cdot e^{2x}$	$y=(C_1+C_2\,x)e^{2x}+1{,}5x^2\,e^{2x}$
16. $y''+y=2\cos x$	$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x$
17. $y''-3y'+2y=e^x(3-4x)$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$	$y_{\text{част}}=(2x^2+x)e^x+3e^x-2e^{2x}$
18. $y''-4y'+4y=e^{-x}$	$y=(C_1+C_2\,x)e^{2x}+\frac{1}{9}e^{-x}$
19. $y''+2y'+2y=16\,e^{x}\sin x$	$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+$ $+e^x(-2\cos x+2\sin x)$
20. $5y''-6y'+5y=e^{\frac{3}{5}x}\cdot\cos x$	$y=e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\sin\frac{4}{5}x\right)-$ $-\frac{5}{9}e^{\frac{3}{5}x}\cos x$
21. $y''+4y=e^{-2x}$, $y(0)=0,\ y'(0)=0$	$y_{\text{част}}=\frac{1}{8}\left(\sin 2x-\cos 2x+e^{-2x}\right)$
22. $y''-4y'+5y=2x^2e^x$, $y(0)=2,\ y'(0)=3$	$y_{\text{част}}=e^{2x}(\cos x-2\sin x)+e^x(x+1)^2$
23. $y''+4y'=3e^{-4x}$, $y(0)=2;\ y'(0)=0$	$y_{\text{част}}=\frac{35}{16}-\frac{3}{16}e^{-4x}-\frac{3}{4}xe^{-4x}$
24. $y''-4y'+5y=13\sin 2x$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$	$y_{\text{част}}=e^{2x}(-0{,}6\cos x+0{,}8\sin x)+$ $+1{,}6\cos 2x+0{,}2\sin 2x$
25. $y''-10y'+25y=5x-27$ $y(0)=0,\ y'(0)=-1$	$y_{\text{част}}=(1-6{,}2\,x)e^{5x}+0{,}2x-1$
26. $y''-y=2x\sin x$	$y=C_1e^{x}+C_2\,e^{-x}-\cos x-x\sin x$
27. $y''-2y'=x^2-1$	$y=C_1+C_2\,e^{2x}-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x$

Завдання	Відповідь
28. $y'' + 4y = \cos^2 x$	$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} x \sin 2x$
29. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$	$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + xe^{-x}$
30. $y'' + y = tgx$	$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - {}$ $- \cos x \cdot \ln\left\| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\|$
31. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$	$y_{\text{част}} = \frac{1}{2}\cos x + \sin x + \frac{1}{2\cos x}$
32. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$	$y = \left(-\frac{1}{2}\ln\left\|x^2 + 1\right\| + C_1 + x \cdot arctg\, x + C_2 x\right) e^x$
33. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{\sqrt{4 - x^2}}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$	$y_{\text{част}} = \left(\sqrt{4 - x^2} - 2\right) e^{-x} + {}$ $+ arc\sin\frac{x}{2} \cdot xe^{-x}$

3 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

3.1 Загальні поняття

***<u>Означення</u>* 1**. Сукупність співвідношень

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

де x – незалежна змінна; $y_1, y_2, \dots, y_n$ – невідомі функції від змінної x, а $F_1, F_2, \dots, F_n$ – відомі функції, називається системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

<u>Означення</u>* 2**. Систему (3.1) називають ***нормальною (НСДР), якщо її можна розв'язати відносно похідних усіх функцій:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, ..., y_n), \end{cases} \tag{3.2}$$

<u>Означення</u>* 3**. ***Розв'язком системи на деякому інтервалі називають сукупність функції $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ неперервно диференційованих на цьому інтервалі, які задовольняють кожному з рівнянь системи для будь-якого x з цього інтервалу, тобто перетворюють їх у тотожність.

<u>Означення</u>* 4**. ***Загальним розв'язком системи називають сукупність функцій

$$\begin{cases} y_1 = \;{}_1(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \;{}_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases}, \tag{3.3}$$

які залежать від n довільних сталих C_i, $\left(i = \overline{1, n}\right)$.

Кожна функція, яку дістанемо з загального розв'язку при окремих значеннях довільних сталих, називається ***частинним розв'язком*** або ***частинним інтегралом*** системи. Для визначення довільних сталих необхідно задати стільки умов, скільки є сталих:

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ y_3(x_0) = y_{30}, ..., y_n(x_0) = y_{n0} \tag{3.4}$$

Числа $x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$ називають початковими значеннями, а рівності (3.4) – початковими умовами.

Задача Коші. Знайти розв'язок системи (3.2), який задовольняє умови (3.4).

Тобто треба серед усіх інтегральних кривих системи (3.2) знайти криву, яка проходить через задану точку $(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$.

***<u>Теорема</u>* 1**. Одне диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right), \tag{3.5}$$

завжди можна звести до нормальної системи диференціальних рівнянь.

Позначивши

$$y = y_1, \ y' = y_2, \ y'' = y_3, \ ..., \ y^{(n-1)} = y_n \tag{3.6}$$

матимемо

$$y_1' = y' = y_2, \ y_2' = y'' = y_3, , \ ..., \ y_{(n-1)}' = y^{(n-1)} = y_n,$$
$$y_n' = y^{(n)} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Функції $y_1, y_2, ..., y_n$ задовольняють нормальну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \ \cdots\cdots\cdots \\ y_{(n-1)}' = y_n, \\ y_n' = f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases} \tag{3.7}$$

Зведення диференціального рівняння n-го порядку (3.5) до рівносильної нормальної системи (3.7) у багатьох випадках значно спрощує знаходження його загального розв'язку або розв'язку задачі Коші для нього.

Існує два основних типи систем диференціальних рівнянь:
- *лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь*,
- *лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь*.

Існує два основних способи розв'язування системи диференціальних рівнянь:

- *метод виключення* ,
- *метод Ейлера.*

Теорема **2**. Нормальну систему диференціальних рівнянь *методом виключення* можна привести до одного рівняння, порядок якого менше або дорівнює числу рівнянь цієї системи.

Розглянемо суть методу.

Диференціюємо перше рівняння НСДР (3.2) по змінній x :

$$y_1'' = \left(f_1\right)'_x + \left(f_1\right)'_{y_1} \cdot y_1' + \left(f_1\right)'_{y_2} \cdot y_2' + \ldots + \left(f_1\right)'_{y_n} \cdot y_n' . \qquad (3.8)$$

Похідні $y_1', y_2', ..., y_n'$ в правій частині (3.8) замінюємо їх виразами з НСДР (3.2). Матимемо

$$y_1'' = F_2\left(y_1, y_2, ..., y_n\right). \qquad (3.9)$$

Диференціюємо рівняння (3.9) по змінній x і похідні $y_1', y_2', ..., y_n'$ в правій частині замінюємо їх виразами з НСДР (3.2). Матимемо:

$$y_1''' = F_3\left(y_1, y_2, ..., y_n\right). \qquad (3.10)$$

І так далі…. Отримаємо $y_1^{(n)} = F_n\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$. Об’єднаємо отримані рівняння в систему:

$$\begin{cases} y_1' = f_1\left(x, y_1, ..., y_n\right), \\ y_1'' = F_2\left(y_1, y_2, ..., y_n\right), \\ y_1''' = F_3\left(y_1, y_2, ..., y_n\right), \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n\left(x, y_1, ..., y_n\right). \end{cases} \qquad (3.11)$$

Перші $n-1$ рівняння розв’язуємо відносно змінних $y_1, y_2, ..., y_n$, виразивши їх через змінні $x, y_1, y_1', y_1'', ..., y_1^{(n-1)}$. Підставляючи отримані вирази в останнє рівняння системи, матимемо рівняння n -го порядку відносно невідомої y_1.

3.2 Способи розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

***Означення* 5**. Лінійною системою диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами називається система:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{3.12}$$

де $a_{ij}, (i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n})$ – дійсні числа, $y_i(x)$ – шукані функції, функції $f_i(x)$ – неперервні на деякому проміжку (a, b).

Систему (3.12) можна записати матричним рівнянням:

$$Y' = A \cdot Y + F \tag{3.13}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \ Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \ldots \\ y_n' \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix},$$

$a_{ij}, (i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n})$ – дійсні числа, $y_i(x)$ – шукані функції від x.

Систему (3.12) називають однорідною, коли всі функції $f_i(x) \equiv 0, i = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases} \tag{3.14}$$

Розглянемо розв'язування однорідної системи (3.14) ***методом виключення*** на прикладі системи з двома рівняннями:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}\,x + a_{12}\,y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}\,y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = a_{11}\,x + a_{12}\,y \qquad (1) \\ y' = a_{21}x + a_{22}\,y \qquad (2) \end{cases} \tag{3.15}$$

Треба знайти функції $x(t)$ і $y(t)$, які задовольняють перше і друге рівняння системи (3.15).

Зведемо систему двох лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами до лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно шуканої функції, наприклад, $x(t)$. Метод розглянутий вище:

а) диференціюємо рівняння (1) системи (3.15) по змінній t:

$$x'' = a_{11}\,x' + a_{12}\,y' \tag{3.16}$$

б) значення y' з рівняння (2) системи (3.15) підставляємо в отримане рівняння (3.16) і приводимо подібні:

$$x'' = a_{11}\,x' + a_{12}\cdot\left(a_{21}x + a_{22}y\right),$$

$$x'' = a_{11}\,x' + a_{12}\cdot a_{21}x + a_{12}.a_{22}\;y\,. \tag{3.17}$$

в) з рівняння (1) системи (3.15) знаходимо y:

$$y = \frac{1}{a_{12}}\left(x' - a_{11}\,x\right). \tag{3.18}$$

і підставляємо в рівняння (3.17):

$$x'' = a_{11}\,x' + a_{12}\cdot a_{21}x + a_{12}.a_{22}\,\frac{1}{a_{12}}\left(x' - a_{11}\,x\right).$$

Розкриємо дужки і приведемо подібні:

$$x'' - \left(a_{11} + a_{22}\right)x' - \left(a_{12}\cdot a_{21} - a_{11}\cdot a_{22}\right)x = 0 \tag{3.19}$$

Маємо ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами. Знаходимо його загальний розв'язок $x(t)$ (дивись вище). Загальний розв'язок $y(t)$ знаходимо з (3.18), підставивши в нього знайдений розв'язок $x(t)$ і $x'(t)$.

Якщо задані початкові умови $\begin{cases} x(t_0)=x_0 \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$, то маємо задачу Коші. Знаходимо частинний розв'язок системи (3.15), який задовольняє заданим початковим умовам.

Аналогічно розв'язується система двох лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. За цим методом вона зводиться до лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно однієї з шуканих функцій.

Методом виключення розв'язуються і системи з більшою кількістю рівнянь.

Матричне рівняння системи (3.14) має вигляд:

$$Y' = A \cdot Y \tag{3.20}$$

Треба знайти n лінійно незалежних частинних розв'язків $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, щоб отримати загальний розв'язок Y системи (3.20). Матриця

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

складається з координат $y_{ij}, (i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n})$ лінійно незалежних частинних розв'язків матричного рівняння (3.20).

Визначник, складений з частинних розв'язків $y_{ij}(x)$ системи (3.14),

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

називається ***визначником Вронського***.

<u>Теорема</u> **3**. Для того, щоб матриця (3.21) була фундаментальною, необхідно і достатньо, щоб $W(x) \neq 0$ для $x \in (a, b)$.

Тоді загальний розв'язок системи (3.20) можна подати у вигляді:

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \ldots + C_n Y_n, \tag{3.22}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

1) Розглянемо розв'язування системи (3.14) ***методом Ейлера***. Частинні розв'язки Y_i шукаємо у вигляді:

$$Y_i = e^{\lambda x} U,$$

де $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$, λ – власне число матриці A, а U – власний вектор, відповідний λ.

Підставимо Y_i в систему (3.20):

$$\lambda e^{\lambda x} \cdot U = A e^{\lambda x} \cdot U \;\Rightarrow\; (A - \lambda E) U = 0, \tag{3.23}$$

де E – одинична матриця.

Щоб отримана однорідна система лінійних рівнянь мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю:

$$|A - \lambda E| = 0, \tag{3.24}$$

Рівняння (3.24) називають характеристичним рівнянням. Сукупності його розв’язків $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ відповідають n лінійно незалежних частинних розв’язків системи (3.20). Послідовно підставляємо знайдені λ_i в систему (3.23) і знаходимо відповідний вектор U_{λ_i} . Вид частинного розв’язку залежить від значення λ_i (дійсне чи комплексне). Також треба враховувати кратність λ_i .

Розглянемо різні випадки:

а) У випадку, коли λ_i дійсний однократний корінь, то маємо один розв’язок: $Y_i = e^{\lambda_i x} U_i$, де U_i – дійсний вектор.

б) Комплексному значенню $\lambda_k = \alpha + i\beta$ відповідає розв’язок $Y_k = e^{\lambda_k x} U_k$. Елементи U_k можуть бути комплексними числами. Для $e^{\lambda_k x}$ можна застосувати формулу: $e^{u+iv} = e^u (\cos v + i \sin v)$.

в) Якщо рівняння (3.23) має кратні корні, то цей випадок складний і для кожного прикладу розглядається окремо.

Наприклад, при розв’язуванні системи трьох лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, якщо корінь λ_1 кратності два, то можна частинні розв’язки системи

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 , \\ y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 , \\ y_3' = a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 \end{cases}$$

шукати у вигляді:

$$y_1 = \left(u_1 x + \overline{u_1}\right) e^{\lambda_1 x}, \ y_2 = \left(u_2 x + \overline{u_2}\right) e^{\lambda_1 x}, \ y_3 = \left(u_3 x + \overline{u_3}\right) e^{\lambda_1 x} .$$

2) Розглянемо розв’язування системи з трьома лінійними однорідними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами *методом Ейлера* :

$$\begin{cases} x' = a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z \\ y' = a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z \\ z' = a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z \end{cases} \tag{3.25}$$

де $a_{ij}, (i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3})$ – дійсні числа. Ненульові частинні розв'язки системи за методом Ейлера шукаємо у вигляді:

$$x=\alpha e^{\lambda t},\ \ y=\beta e^{\lambda t},\ z=\gamma e^{\lambda t}, \tag{3.26}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ – невідомі сталі. Підставимо ці вирази в (3.25), скоротимо на $e^{\lambda t}$ і приведемо подібні:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-\lambda)\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33}-\lambda)\gamma = 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Для того, щоб система мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.28}$$

Це характеристичне рівняння для системи (3.25). Знаходимо всі можливі значення λ. Рівняння (3.28) має три корні $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Для кожного з них, якщо вони прості, знаходимо ненульові значення α, β, γ і застосувавши (3.26) матимемо відповідні розв'язки $x(t), y(t), z(t)$. Тоді загальний розв'язок системи (3.25) матиме вигляд:

$$\begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_3 e^{\lambda_3 t} \\ y = C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\beta_3 e^{\lambda_3 t} \\ z = C_1\gamma_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\gamma_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\gamma_3 e^{\lambda_3 t} \end{cases} \tag{3.29}$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Якщо рівняння (3.28) має уявні корні, то розв'язок можна записати у вигляді (3.29) або застосувати формулу: $e^{u+iv} = e^u(\cos v + i\ \sin v)$. Якщо рівняння (3.28) має кратні корні, то цей випадок складний і для кожного прикладу розглядається окремо.

Наприклад, для кореня p_1 кратності два можна частинні розв'язки системи (3.25) шукати у вигляді:

$$x = \left(\alpha t + \overline{\alpha}\right) e^{\lambda_1 t},\ \ y = \left(\beta t + \overline{\beta}\right) e^{\lambda_1 t},\ \ z = \left(\gamma t + \overline{\gamma}\right) e^{\lambda_1 t}.$$

Розглянемо розв'язування системи трьох лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами на прикладі в загальному вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + cz, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ \dfrac{dz}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2 z. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язок цієї системи шукаємо у вигляді:

$$x = \alpha e^{\lambda t}, y = \beta e^{\lambda t}, z = \gamma e^{\lambda t}.$$

Підставимо його в задану систему і знайдемо α, β, γ.

$$\begin{cases} (a-\lambda)\,\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \\ a_1\alpha + (b_1 - \lambda)\beta + c_1\gamma = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + (c_2 - \lambda)\,\gamma = 0. \end{cases}$$

Система має ненульовий розв'язок, коли визначник системи дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ a_1 & b_1 - \lambda & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Маємо характеристичне рівняння. Знаходимо його корні.

Розглянемо випадок, коли корні $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристичного рівняння дійсні і різні. По черзі підставимо їх в систему і отримаємо для λ_1 значення $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, для λ_2 значення $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ і для λ_3 значення $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Відповідно матимемо три частинних розв'язка:

$$x_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t},\ y_1 = \beta_1 e^{\lambda_1 t},\ z_1 = \gamma_1 e^{\lambda_1 t},$$
$$x_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 t},\ y_2 = \beta_2 e^{\lambda_2 t},\ z_2 = \gamma_2 e^{\lambda_2 t},$$
$$x_3 = \alpha_3 e^{\lambda_3 t},\ y_3 = \beta_3 e^{\lambda_3 t},\ z_3 = \gamma_3 e^{\lambda_3 t}.$$

Загальний розв'язок заданої системи має вигляд:

$$\begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_3 e^{\lambda_3 t}, \\ y = C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\beta_3 e^{\lambda_3 t}, \\ z = C_1\gamma_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\gamma_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\gamma_3 e^{\lambda_3 t}. \end{cases}$$

Приклад 42. Розв'язати систему двох ЛОДР зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} x' = x - 5y & (1) \\ y' = -x - 3y & (2) \end{cases},\ \text{де}\ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Розв'язання. Застосуємо *метод виключення*:

а) диференціюємо рівняння (1) по змінній t:

$$x'' = x' - 5y'$$

б) значення y' з рівняння (2) системи підставляємо в отримане рівняння і приводимо подібні:

$$x'' = x' - 5(-x - 3y)$$

$$x'' = x' + 5x + 15y \qquad (3)$$

в) з рівняння (1) системи знаходимо y:

$$y = \frac{1}{5}(x - x') \qquad (4)$$

і підставляємо в рівняння (3):

$$x'' = x' + 5x + 15\cdot\frac{1}{5}(x - x'),$$
$$x'' = x' + 5x + 3x - 3x',$$

$$x'' + 2x' - 8x = 0. \qquad (5)$$

Рівняння (5) є ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$. Складемо для нього характеристичне рівняння і знайдемо його розв'язок:

$$k^2 + 2k - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -4,\ k_2 = 2 .$$

Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд:

$$x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t} .$$

Для знаходження функції y застосуємо рівняння (4):

$$x' = -4C_1 e^{-4t} + 2C_2 e^{2t} ,$$

$$y = \frac{1}{5}\left(C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t} + 4C_1 e^{-4t} - 2C_2 e^{2t}\right) = \frac{1}{5}\left(5C_1 e^{-4t} - C_2 e^{2t}\right) =$$

$$= C_1 e^{-4t} - \frac{1}{5} C_2 e^{2t} .$$

Відповідь: Розв'язок системи: $\begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t} \\ y = C_1 e^{-4t} - 0{,}2C_2 e^{2t} \end{cases}$.

Приклад 43. Розв'язати систему двох ЛНДР зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} x' = -3x - 4y + 2t & (1) \\ y' = x + y + t & (2) \end{cases} \quad \text{, де } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Розв'язання. Застосуємо *метод виключення*:

а) диференціюємо рівняння (1) по змінній t:

$$x'' = -3x' - 4y' + 2 .$$

б) значення y' з рівняння (2) системи підставляємо в отримане рівняння і приводимо подібні:

$$x'' = -3x' - 4(x + y + t) + 2 ,$$

$$x'' = -3x' - 4x - 4y - 4t + 2. \quad (3)$$

в) з рівняння (1) системи знаходимо y:

$$y = \frac{1}{4}(2t - 3x - x') \quad (4)$$

і підставляємо в рівняння (3):

$$x'' = -3x' - 4x - 4 \cdot \frac{1}{4}(2t - 3x - x') - 4t + 2,$$

$$x'' = -3x' - 4x - 2t + 3x + x' - 4t + 2,$$

$$x'' + 2x' + x = -6t + 2. \quad (5)$$

Рівняння (5) є ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтними відносно функції $x(t)$. Загальний розв'язок його $x = x_{\text{одн}} + \overline{x}$.

Знаходимо розв'язок відповідного ЛОДР-2: $x'' + 2x' + x = 0$. Характеристичне рівняння для нього $k^2 + 2k + 1 = 0, \quad k_{1,2} = -1$. Тоді загальний розв'язок ЛОДР-2

$$x_{\text{одн}} = (C_1 + C_2 t)e^{-t}.$$

Функція в правій частині рівняння (5)

$$f(t) = -6t + 2 \quad \Rightarrow \alpha = 0, n = 1, S = 0.$$

Тому частинний розв'язок $\overline{x}$ шукаємо у вигляді: $\overline{x} = At + B$. Знайдемо $\overline{x}$, $\overline{x}'$, $\overline{x}''$ а саме: $\overline{x}' = A$; $\overline{x}'' = 0$ і $\overline{x}$, $\overline{x}'$, $\overline{x}''$ підставляємо в рівняння (5):

$$2A + At + B = -6t + 2.$$

Маємо рівність многочленів. Прирівнюємо коефіцієнти при степенях t:

$$\begin{array}{c|l} t & A = -6 \\ t^0 & 2A + B = 2, \quad B = 14 \end{array}$$

Тоді $\overline{x} = -6t + 14$. Загальний розв'язок рівняння (5) має вигляд:

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-t} - 6t + 14.$$

Для знаходження функції y застосуємо рівняння (4):

$$x' = C_2 e^{-t} - (C_1 + C_2 t)e^{-t} - 6,$$

$$y = \frac{1}{4}(2t - 3 \cdot (C_1 + C_2 t)e^{-t} + 18t - 42 - C_2 e^{-t} + (C_1 + C_2 t)e^{-t} + 6) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(20t - 36 - 2(C_1 + C_2 t)e^{-t} - C_2 e^{-t}\right) = 0{,}5(C_1 + C_2 t)e^{-t} -$$

$$- 0{,}25 C_2 e^{-t} + 5t - 9.$$

Відповідь: Розв'язок системи:

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^{-t} - 6t + 14, \\ y = 0{,}5(C_1 + C_2 t)e^{-t} - 0{,}25 C_2\, e^{-t} + 5t - 9 \end{cases}.$$

Приклад 44. Розв'язати задачу Коші для системи двох ЛОДР зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} x' = -2x + 4y & (1) \\ y' = -x + 3y & (2) \end{cases} \quad \text{з початковими умовами} \quad \begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання. Застосуємо *метод виключення*:

а) диференціюємо рівняння (1) по змінній t:

$$x'' = -2x' + 4y'$$

б) значення y' з рівняння (2) системи підставляємо в отримане рівняння і приводимо подібні:

$$x'' = -2x' + 4(-x + 3y), \; x'' = -2x' - 4x + 12y \qquad (3)$$

в) з рівняння (1) системи знаходимо y:

$$y = \frac{1}{4}(x' + 2x) \qquad (4)$$

і підставляємо в рівняння (3):

$$x'' = -2x' - 4x + 12 \cdot \frac{1}{4}(x' + 2x),$$

$$x'' = -2x' - 4x + 3x' + 6x,$$

$$x'' - x' - 2x = 0. \qquad (5)$$

Рівняння (5) є ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$. Складемо для нього характеристичне рівняння і знайдемо його розв'язок:

$$k^2 - k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -1,\ k_2 = 2\ .$$

Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд:

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}\ .$$

Для знаходження функції y застосуємо рівняння (4):

$$x' = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}\ ,$$

$$y = \frac{1}{4}\left(-C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + 2C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}\right) = \frac{1}{4}\left(C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{2t}\right)$$

Загальний розв'язок системи: $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} \\ y = \frac{1}{4}\left(C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{2t}\right) \end{cases}.$

Знайдемо частинний розв'язок, застосовуючи початкові умови:

$$\begin{cases} 3 = C_1 e^{-0} + C_2 e^{2\cdot 0} \\ 0 = \frac{1}{4}\left(C_1 e^{-0} + 4C_2 e^{2\cdot 0}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = C_1 + C_2 \\ 0 = \frac{1}{4}\left(C_1 + 4C_2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = -1 \end{cases}.$$

Частинний розв'язок заданої системи: $\begin{cases} x_{\text{част}} = 4e^{-t} - e^{2t} \\ y_{\text{част}} = \frac{1}{4}\left(4e^{-t} - 4e^{2t}\right) \end{cases}.$

Відповідь: $\begin{cases} x_{\text{част}} = 4e^{-t} - e^{2t} \\ y_{\text{част}} = \frac{1}{4}\left(4e^{-t} - 4e^{2t}\right) \end{cases}.$

Приклад 45. Розв'язати систему двох ЛОДР зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y \end{cases}.$$

Розв'язання. Застосуємо *метод Ейлера.* Матричне рівняння системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ де } A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння $|A - \lambda E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ -7 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Розкриємо визначник і знайдемо власні числа λ_i матриці A:

$$(1+\lambda)(3+\lambda) - 35 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 32 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -8,\ \lambda_2 = 4.$$

Так як λ_i дійсні, тому частинні розв'язки шукатимемо у вигляді:

$$x_i = u_{1,i} e^{\lambda_i t},\ y_i = u_{2,i} e^{\lambda_i t}$$

Знайдемо власні вектори для кожного λ_i з системи:

$$\begin{cases} (-1-\lambda_i) u_{1,\lambda_i} - 5u_{2,\lambda_i} = 0, \\ -7u_{1,\lambda_i} - (3+\lambda_i) u_{2,\lambda_i} = 0 \end{cases}$$

Підставимо $\lambda_1 = -8$ в систему і знайдемо для нього координати власного вектору:

$$\begin{cases} (-1+8) u_1 - 5u_2 = 0, \\ -7u_1 - (3-8) u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7u_1 - 5u_2 = 0, \\ -7u_1 + 5u_2 = 0 \end{cases}$$

Рівняння в системі однакові, тому $u_1 = \frac{5}{7} u_2$. Підберемо найменше значення u_2, щоб значення u_1 було ціле. Матимемо $u_2 = 7,\ u_1 = 5$. Тоді $x_1 = 5e^{-8t}$ і $y_1 = 7e^{-8t}$.

Аналогічно, підставляємо $\lambda_2 = 4$ в систему і знайдемо для нього координати власного вектору:

$$\begin{cases} (-1-4)u_1 - 5u_2 = 0, \\ -7u_1 - (3+4)u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5u_1 - 5u_2 = 0, \\ -7u_1 - 7u_2 = 0 \end{cases}.$$

Рівняння в системі однакові, тому $u_1 = -u_2$. Підберемо найменше значення u_2, щоб значення u_1 було ціле. Матимемо $u_2 = -1,\ u_1 = 1$. Тоді $x_2 = e^{4t}$ і $y_2 = -e^{4t}$.

Загальний розв'язок заданої системи:

$$\begin{cases} x = 5C_1 e^{-8t} + C_2 e^{4t}, \\ y = 7C_1 e^{-8t} - C_2 e^{4t} \end{cases}.$$

Відповідь: $\begin{cases} x = 5C_1 e^{-8t} + C_2 e^{4t}, \\ y = 7C_1 e^{-8t} - C_2 e^{4t} \end{cases}$

Приклад 46. Розв'язати систему двох ЛОДР зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}.$$

Розв'язання. Застосуємо *метод Ейлера.* Матричне рівняння системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння $|A - \lambda E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Розкриємо визначник і знайдемо власні числа λ_i матриці A:

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) + 10 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i.$$

Так як λ_i комплексні, то частинні розв'язки шукатимемо у вигляді:

$$x_i = u_{1,i} e^{\lambda_i t}, \ y_i = u_{2,i} e^{\lambda_i t}$$

Знайдемо власні вектори для кожного λ_i з системи:

$$\begin{cases} (1-\lambda_i) u_{1,\lambda_i} - 5u_{2,\lambda_i} = 0, \\ 2u_{1,\lambda_i} - (1+\lambda_i) u_{2,\lambda_i} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Підставимо $\lambda_1 = 3i$ в (1) і знайдемо для нього координати власного вектору з системи:

$$\begin{cases} (1-3i) u_1 - 5u_2 = 0, \\ 2u_1 - (1+3i) u_2 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Одне з рівнянь системи (2) є наслідком іншого, так як визначник системи дорівнює нулю. Можемо покласти $u_1 = 5, \ u_2 = 1-3i$. Тоді перший частинний розв'язок записуємо у вигляді:

$$x_1 = 5e^{3it}, \quad y_1 = (1-3i)e^{3it}. \qquad (3)$$

Аналогічно, підставивши $\lambda_2 = -3i$ в (1), знайдемо для нього координати власного вектору з системи:

$$\begin{cases} (1+3i) u_1 - 5u_2 = 0, \\ 2u_1 - (1-3i) u_2 = 0 \end{cases}.$$

Тоді другий частинний розв'язок записуємо у вигляді:

$$x_2 = 5e^{-3it}, y_2 = (1+3i)e^{3it}.$$

Перейдемо до нової фундаментальної системи розв'язків:

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \tilde{x}_2 = \frac{x_1 - x_2}{2i},$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \tilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i}.$$

Застосовуючи формулу Ейлера $e^{\pm\alpha i t} = \cos\alpha t \pm i \sin\alpha t$, матимемо:

$$\widetilde{x}_1 = 5\cos 3t, \quad \widetilde{x}_2 = 5\sin 3t,$$
$$\widetilde{y}_1 = \cos 3t + 3\sin 3t, \quad \widetilde{y}_2 = \sin 3t - 3\cos 3t$$

Загальний розв'язок заданої системи:

$$\begin{cases} x = C_1\widetilde{x}_1 + C_2\widetilde{x}_2 = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t \\ y = C_1\widetilde{y}_1 + C_2\widetilde{y}_2 = C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3\cos 3t) \end{cases}.$$

***Зауваження* 1**. Знайшовши перший частинний розв'язок (3) системи можемо записати загальний розв'язок заданої системи, застосувавши формули:

$$x = C_1 \operatorname{Re} x_1 + C_2 \operatorname{Im} x_1, \quad y = C_1 \operatorname{Re} y_1 + C_2 \operatorname{Im} y_1,$$

де $\operatorname{Re} z = a$ – дійсна частина, $\operatorname{Im} z = b$ – уявна частина комплексного числа $z = a + bi$.

Відповідь: $\begin{cases} x = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t \\ y = C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3\cos 3t) \end{cases}.$

Приклад 47. Розв'язати систему двох ЛОДР зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y. \end{cases} \qquad (4)$$

Розв'язання. Застосуємо *метод Ейлера*. Матричне рівняння системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Складемо характеристичне рівняння $|A - \lambda E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Розкриємо визначник і знайдемо власні числа λ_i матриці A:

$$(2-\lambda)(4-\lambda)+1=0\,,\ \lambda^2-6\lambda+9=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=3\,.$$

Корні λ_i рівні, тому розв'язок шукаємо у вигляді:

$$x=(u_1+\overline{u_1}\,t)e^{3t}\,,\ y=(u_2+\overline{u_2}\,t)e^{3t}\,. \qquad (5)$$

Підставимо його в перше рівняння системи (4), матимемо

$$3(u_1+\overline{u_1}\,t)+\overline{u_1}=2(u_1+\overline{u_1}\,t)+u_2+\overline{u_2}\,t$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях t в лівій і правій частинах:

$$\begin{array}{c|l} t & 3\overline{u_1}=2\overline{u_1}+\overline{u_2} \\ t^0 & 3u_1+\overline{u_1}=2u_1+u_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{u_2}=\overline{u_1} \\ u_2=u_1+\overline{u_1} \end{cases},$$

де $u_1, \overline{u_1}$ – довільні значення. Позначимо їх відповідно через C_1 і C_2. Матимемо загальний розв'язок заданої системи:

$$\begin{cases} x=(C_1+C_2t)e^{3t} \\ y=(C_1+C_2+C_2t)e^{3t} \end{cases}$$

Зауваження **2**. Легко перевірити, що підставивши (5) в друге рівняння системи (4), матимемо той же результат.

Відповідь: $\begin{cases} x=(C_1+C_2t)e^{3t} \\ y=(C_1+C_2+C_2t)e^{3t} \end{cases}.$

Приклад 48. Розв'язати задачу Коші для системи трьох ЛОДР зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z \end{cases}$$ з початковими умовами: $$\begin{cases} x(0) = -4, \\ y(0) = 0, \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Розв’язання. Характеристичне рівняння системи:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 8 & 0 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 2 & 8 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Розкриємо визначник і знайдемо корні λ_i:

$$\lambda^2(-2-\lambda) - 32 - 16\lambda = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 16)(2+\lambda) = 0 .$$

Корні рівняння: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4i$, $\lambda_3 = -4i$.

Для дійсного кореня $\lambda_1 = -2$ розв’язок шукаємо у вигляді:

$$x_1 = \alpha_1 e^{-2t}, y_1 = \beta_1 e^{-2t}, z_1 = \gamma_1 e^{-2t} .$$

Підставивши його в задану систему і скоротивши на e^{-2t}, знайдемо $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$:

$$\begin{cases} -2\alpha_1 = 8\beta_1, \\ -2\beta_1 = -2\gamma_1, \\ -2\gamma_1 = 2\alpha_1 + 8\beta_1 - 2\gamma_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -4\beta_1, \ \gamma_1 = \beta_1 .$$

Покладемо, наприклад, $\beta_1 = 1$, тоді $\alpha_1 = -4$, $\gamma_1 = 1$. Частинний розв’язок матиме вигляд:

$$x_1 = -4e^{-2t}, y_1 = e^{-2t}, z_1 = e^{-2t} .$$

Для комплексного кореня $\lambda_2 = 4i$ розв’язок шукаємо у вигляді:

$$x_2 = \alpha_2 e^{4it}, y_2 = \beta_2 e^{4it}, z_2 = \gamma_2 e^{4it}.$$

Підставивши його в задану систему і скоротивши на e^{4it}, знайдемо $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$:

$$\begin{cases} 4i\alpha_2 = 8\beta_2, \\ 4i\beta_2 = -2\gamma_2, \\ 4i\gamma_2 = 2\alpha_2 + 8\beta_2 - 2\gamma_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = -2i\beta_2, \ \gamma_2 = -2i\beta_2.$$

Покладемо, наприклад, $\beta_2 = i$, тоді $\alpha_2 = 2$, $\gamma_2 = 2$. Частинний розв'язок матиме вигляд:

$$x_2 = 2e^{4it}, y_2 = i\,e^{4it}, z_2 = 2e^{4it}.$$

Комплексному кореню $\lambda_3 = -4i$ відповідає розв'язок, комплексно спряжений розв'язку для $\lambda_2 = 4i$:

$$x_3 = 2e^{-4it}, y_3 = -i\,e^{-4it}, z_3 = 2e^{-4it}.$$

Загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} x = -4C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{4it} + 2C_3 e^{-4it}, \\ y = C_1 e^{-2t} + i\,C_2 e^{4it} - i\,C_3 e^{-4it}, \\ z = C_1 e^{-2t} + 2\,C_2 e^{4it} + 2\,C_3 e^{-4it} \end{cases}$$

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє заданим початковим умовам: $x(0) = -4, y(0) = 0, z(0) = 1$. При $t = 0$ матимемо

$$\begin{cases} -4 = -4C_1 + 2C_2 + 2C_3, \\ 0 = C_1 + i\,C_2 - i\,C_3, \\ 1 = C_1 + 2\,C_2 + 2\,C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = i/2, \\ C_3 = -i/2 \end{cases}$$

Частинний розв'язок заданої системи:

$$\begin{cases} x = -4\ e^{-2t} + i\ e^{4it} - i\,e^{-4it}, \\ y = \ e^{-2t} - 0{,}5\ e^{4it} - 0{,}5\ e^{-4it} \\ z = e^{-2t} + i\ e^{4it} - i\,e^{-4it} \end{cases}.$$

Враховуючи формули Ейлера: $e^{\pm i\alpha t} = \cos(\alpha t) \pm i\sin(\alpha t)$, матимемо

$$\begin{cases} x = -4\ e^{-2t} - 2\sin 4t, \\ y = \ e^{-2t} - \cos 4t, \\ z = e^{-2t} - 2\sin 4t \end{cases}.$$

Відповідь: $\begin{cases} x = -4\ e^{-2t} - 2\sin 4t, \\ y = \ e^{-2t} - \cos 4t, \\ z = e^{-2t} - 2\sin 4t \end{cases}.$

Приклад 49. Розв'язати систему трьох ЛОДР зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z, \\ y' = -2x - z, \\ z' = 2x + y + 2z \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник і знайдемо корні λ_i:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

Корні рівняння: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 1$.

Для дійсного кореня $\lambda_1 = 2$ розв'язок шукаємо у вигляді:

$$x_1=\alpha_1 e^{2t}, y_1=\beta_1 e^{2t}, z_1=\gamma_1 e^{2t}.$$

Підставивши його в задану систему і скоротивши на e^{2t}, знайдемо $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = 2\alpha_1+\beta_1+\gamma_1, \\ 2\beta_1 = -2\alpha_1-\gamma_1, \\ 2\gamma_1 = 2\alpha_1+\beta_1+2\gamma_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1=-\beta_1/2,\ \gamma_1=-\beta_1.$$

Покладемо, наприклад, $\beta_1=-2$, тоді $\alpha_1=1$, $\gamma_1=2$. Частинний розв'язок матиме вигляд:

$$x_1=e^{2t}, y_1=-2e^{2t}, z_1=2e^{2t}.$$

Для дійсного кореня $\lambda_{2,3}=1$ кратності два, розв'язок шукаємо у вигляді:

$$x_2=\left(\alpha_2 t+\overline{\alpha_2}\right)e^t,\ y_2=\left(\beta_2 t+\overline{\beta_2}\right)e^t,\ z_2=\left(\gamma_2 t+\overline{\gamma_2}\right)e^t.$$

Підставимо його в задану систему і, скоротивши на e^t, прирівняємо коефіцієнти при степенях t. Знайдемо $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\overline{\alpha_2},\overline{\beta_2},\overline{\gamma_2}$:

$$\begin{cases} \alpha_2+\beta_2+\gamma_2=0, \\ -2\alpha_2-\beta_2-\gamma_2=0, \\ 2\alpha_2+\beta_2+\gamma_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2=\overline{\alpha_2}+\overline{\beta_2}+\overline{\gamma_2}, \\ \beta_2=-2\overline{\alpha_2}-\overline{\beta_2}-\overline{\gamma_2},. \\ \gamma_2=2\overline{\alpha_2}+\overline{\beta_2}+\overline{\gamma_2} \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є:

$$\alpha_2=0,\ \overline{\alpha_2}=-\beta_2,\ \gamma_2=-\beta_2,\ \overline{\gamma_2}=\beta_2-\overline{\beta_2}.$$

Покладемо $\beta_2=C_1$, $\overline{\beta_2}=C_2$. Матимемо $\alpha_2=0$, $\overline{\alpha_2}=-C_1$, $\gamma_2=-C_1$, $\overline{\gamma_2}=C_1-C_2$. Частинний розв'язок матиме вигляд:

$$x_2=-C_1 e^t,\ y_2=\left(C_1 t+C_2\right)e^t,\ z_2=\left(-C_1 t+C_1-C_2\right)e^t.$$

Загальний розв’язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} x = -C_1 e^{t} + C_3 e^{2t}, \\ y = \left(C_1 t + C_2\right)e^{t} - 2C_3 e^{2t}, \\ z = \left(-C_1 t + C_1 - C_2\right)e^{t} + 2C_3 e^{2t} \end{cases}.$$

Відповідь: $\begin{cases} x = -C_1 e^{t} + C_3 e^{2t}, \\ y = \left(C_1 t + C_2\right)e^{t} - 2C_3 e^{2t}, \\ z = \left(-C_1 t + C_1 - C_2\right)e^{t} + 2C_3 e^{2t} \end{cases}.$

3.3 Завдання для самостійної роботи

Знайти розв’язки заданих систем лінійних диференціальних рівнянь:

Завдання	Відповідь
1. $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$	$\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{7t} \\ y = C_1 e^{t} + 0{,}5 C_2 e^{7t} \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$	$\begin{cases} x = e^{2t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) \\ y = e^{2t}\left(\left(C_1 + C_2\right)\cos t + \left(C_2 - C_1\right)\sin t\right) \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = 6x + y \\ y' = -16x - 2y \end{cases}$	$\begin{cases} x = \left(C_1 t + C_2\right)e^{2t} \\ y = \left(C_1 - 4C_1 t - 4C_2\right)e^{2t} \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = 2x - 5y + 3 \\ y' = 5x - 6y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 6,\ y(0) = 5$	$\begin{cases} x_{\text{част}} = 5e^{-2t}\cos 3t + 1 \\ y_{\text{част}} = e^{-2t}\left(4\cos 3t + 3\sin 3t\right) + 1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = x - y - z \\ y' = x + y \\ z' = 3x + z \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2e^{t}\left(C_3 \cos 2t - C_2 \sin 2t\right) \\ y = e^{t}\left(C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t\right) \\ z = e^{t}\left(-C_1 + 3C_2 \cos 2t + 3C_3 \sin 2t\right) \end{cases}$

Завдання	Відповідь
6. $\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = 4x - y + 4z \end{cases}$	$\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t} \\ y = C_1 e^{t} - 2C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t} \\ z = -C_1 e^{t} - 3C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{5t} \end{cases}$
7. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 3y - z \\ z' = -x + 2y + 3z \end{cases}$	$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + e^{3t}\left(C_2 \cos t + C_3 \sin t\right) \\ y = e^{3t}\left(\left(C_2 + C_3\right)\cos t + \left(C_3 - C_2\right)\sin t\right) \\ z = C_1 e^{2t} + e^{3t}\left(\left(2C_2 - C_3\right)\cos t + \right. \\ \quad \left. + \left(2C_3 + C_2\right)\sin t\right) \end{cases}$
8. $\begin{cases} x' = -x + y - 2z \\ y' = 4x + y \\ z' = 2x + y - z \end{cases}$	$\begin{cases} x = \left(C_2 + C_3 t\right)e^{-t} \\ y = 2C_1 e^{t} - \left(2C_2 + C_3 + 2C_3 t\right)e^{-t} \\ z = C_1 e^{t} - \left(C_2 + C_3 + C_3 t\right)e^{-t} \end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Агафонов С.А. Дифференциальные уравнения /С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 352 с.
2. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В.В. Амелькин. – изд. 2-е, дополненное. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 208 с.
3. Босс В. Лекции по математике: дифференциальные уравнения / В. Босс. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 208 с.
4. Боярчук А.К. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах /А.К.Боярчук, Г.П. Головач. – М.: Едиториал УРСС, 2001. – 384 с.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Дрофа, , 2003. – 512 с.
6. Гой Т. П. Диференціальні та інтегральні рівняння /Т.П.Гой, О.В. Махней – Івано-Франківськ: Сімик, 2012. – 356 с.
7. Головатий Ю.Д. Диференціальні рівняння /Ю.Д.Головатий, В.М. Кирилич, С.П. Лавренюк. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 470 с.
8. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.2: Учеб. Пособие для вузов/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я.Кожевникова.– 6-е изд. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2003. – 416 с.
9. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями /А.И. Егоров. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
10. Журавлев С.Г. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи экономики, экологии и других социальных наук /С.Г.Журавлев, В.В. Аниковский. – М.: Экзамен, 2005. – 128 с.
11. Краснов М.Л., Кисельов А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями.: Учебное пособие. Изд. 4-е, испр. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 256 с.

12. Кривошея С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння /С.А. Кривошея, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. – К.: Либідь, 2004. – 408 с.

13. Овчинников П.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи; За заг ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.

14. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т. 2. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 544 с.

15. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике в 3-х частях. Часть 3. // Под ред. А.П. Рябушко. – Минск: «Вышэйшая школа», 1991. – 288 с.

16. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння /А.М.Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.

17. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння у задачах /А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. – К. : Либідь, 2003. – 504 с.

18. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. –Ижевск: Изд. «РХД», 2000. – 176 с.

19. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: Учебник. Изд. 2-е, испр. – М.: КомКнига, 2007. –240с.

20. Шкіль М. І. Диференціальні рівняння / М.І. Шкіль, В.М.Лейфура, П.Ф. Самусенко. – К.: Техніка, 2003. – 368 с.