УДК 517.982
Онуфрієнко В.М.[1], Слюсарова Т.І.[2]
[1] д-р фіз.-мат. наук, проф. ЗНТУ
[2] асист. ЗНТУ

ДИФРАКЦІЯ ХВИЛЬ НА СТОКО-ДЖЕРЕЛЬНИХ ФРАКТАЛЬНИХ ОБ'ЄКТАХ

Метод виводу інтегральних рівнянь, запропонований Ґрінбергом [1], застосовується для розв'язування задач математичної теорії дифракції електромагнітних хвиль на пласких поверхнях. Спираючись на схему цього методу, розглядається питання про виведення рівнянь у термінах диферінтегралів для непласких фрактально конфігурованих циліндричних поверхонь.

Подальший розгляд проблеми та побудова строгого розв'язку задачі дифракції хвиль на фрактальній поверхні S (зі скейлінгом α_2) базується на рівняннях Максвела та Гельмгольця, записаних в диферінтегральних α-формах [2], та визначенні диферінтегральних α-потенціалів типу $\vec{A}^{(\alpha)} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \int\limits_S \frac{\vec{j}^{(\alpha_1)} e^{-ikL}}{L} d^{(\alpha_2)}S$, що задовольняють однорідному рівнянню Гельмгольця $\nabla^2 \vec{A}^{(\alpha)} + k \cdot \vec{A}^{(\alpha)} = 0$ поза S та враховують фрактальну щільність струмів (зі скейлінгом α_2), наведених на цій поверхні (L - відстань від елемента $d^{(\alpha_2)}S$ до точки спостереження) і пов'язаних умовою калібрування $div\vec{A}^{(\alpha)} + i\omega b \cdot \Psi^{(\alpha)} = 0$.

Коли $div\vec{A}^{(\alpha)} = 0$, то маємо інтегральне рівняння

$$\frac{\omega\mu}{4}\cdot\int\limits_{\alpha}^{\beta} j^{(\alpha_1)}(t)\cdot H_0^{(2)}(k\cdot L_0(\tau,t))\cdot\sqrt{(\xi'(t))^2+(\eta'(t))^2}\,d^{(\alpha_2)}t = E_z^{0(\alpha)}(\tau), \quad (1)$$

де $L_0(\tau,t) = L|_{\Gamma} = \sqrt{(\xi(\tau)-\xi(t))^2+(\eta(\tau)-\eta(t))^2}$, $E_z^{0(\alpha)}(\tau)$ – поздовжня складова напруженості первинного електричного поля. І двовимірна задача дифракції E-поляризованого поля на ідеальній фрактально провідній незамкненій циліндричній поверхні S зводиться до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду

$$\frac{\omega\mu}{4}\cdot\int\limits_{\alpha}^{\beta} j^{(\alpha_1)}(t)\cdot H_0^{(2)}(k\cdot L_0(\tau,t))\cdot\sqrt{(\xi'(t))^2+(\eta'(t))^2}\,d^{(\alpha_2)}t = E_z^{0(\alpha)}(\tau) \quad (2)$$

для довільної форми циліндричної поверхні S з фрактальним розподілом зарядів (струмів).

Вважаємо, що для H-поляризованого первісного поля поверхня S збігається з частиною поверхні $q = q_0$ ортогональної системи координат q,τ,z. На контурі Γ змінна q має стале значення $q = q_0$, $\alpha \le \tau \le \beta$. Коефіцієнти Ламе h_q, h_τ можуть бути функціями $h_q(q,\tau), h_\tau(q,\tau)$, а $h_z \equiv 1$. Під дією H-поляризованого поля на поверхні S наводяться електричні струми, перпендикулярні твірним поверхні S (осі z), густини

$\vec{j}^{(\alpha_1)} = \vec{t}^{\,0}\cdot j^{(\alpha_1)}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, де $\vec{t}^{\,0}$ – орт дотичної до контуру Γ в точці M. Тоді напруженість вторинного електричного поля визначається через векторний $\vec{A}^{(\alpha)}$ і скалярний $\Psi^{(\alpha)}$ потенціали з виконанням умови калібрування. Векторний потенціал $\vec{A}^{(\alpha)}$ визначається через густину струму $j^{(\alpha_1)}(t)$ залежністю $\vec{A}^{(\alpha)} = -\frac{i\mu}{4}\cdot\int\limits_{\alpha}^{\beta}\vec{t}^{\,0}\cdot j^{(\alpha_1)}(t)\cdot g_1(q,\tau,t)\,d^{(\alpha_2)}t$, де

$$g_1(q,\tau,t) = H_0^{(2)}(k\cdot L(q,\tau,t))\cdot h_\tau(q_0,t),\ L(q_0,\tau,t) = L(\tau,t),$$

$$L(q,\tau,t) = \sqrt{(x(q,\tau)-x(q_0,t))^2+(y(q,\tau)-y(q_0,t))^2}\ .$$

Коли $div\vec{A}^{(\alpha)} \neq 0$, то безпосереднім застосуванням умов $\left[\vec{n}_0, \vec{E}^{(\alpha)}(M)\right] = -\left[\vec{n}_0, E^{0(\alpha)}(M)\right]$, $M \in S$ та зв'язку між векторами поля і потенціалами, одержуємо не диферінтегральне, а інтегро-диферінтегральне рівняння для функції $j^{(\alpha_1)}(t)$.

З урахуванням умови калібрування $div\vec{A}^{(\alpha)} + i\omega b \cdot \Psi^{(\alpha)} = 0$ граничні умови записуються у вигляді

$$\widehat{A}_\tau^{(\alpha)}(\tau) = -\frac{i}{\omega} \cdot E_\tau^{0(\alpha)}(\tau) + \frac{i}{\omega \cdot \widehat{h}_\tau(\tau)} \cdot \frac{d\psi^{(\alpha)}(\tau)}{d\tau}, \widehat{A}_\tau^{(\alpha)}(\tau) = A_\tau^{(\alpha)}(q_0, \tau), \qquad (3)$$

$\widehat{h}_\tau(\tau) = h_\tau(q_0, \tau)$. Це означає, що функція обчислюється в точці $M_0 \in \Gamma$, де $\alpha \le \tau \le \beta$.

Отже, векторний потенціал має вигляд

$$\widehat{A}_\tau^{(\alpha)}(\tau) = -\frac{i \cdot \mu}{4} \cdot \int_\alpha^\beta j^{(\alpha_1)}(t) \cdot g_1(q_0, \tau, t) \cdot \left(\vec{\tau}^{\,0}, \vec{t}^{\,0}\right) d^{(\alpha_2)}t,$$

де $\vec{\tau}^{\,0}$ – орт дотичної до контуру Γ в точці $M_0 = M_0(q_0, \tau)$, а скалярний добуток $\left(\vec{\tau}^{\,0}, \vec{t}^{\,0}\right)$ є функцією від τ, t.

Тоді двовимірна задача дифракції H-поляризованої електромагнітної хвилі на ідеально провідній незамкнутій циліндричній поверхні S буде зведена до диферінтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду.

Таким чином, правильно підібрана фізико-математична модель [3-5] будови фрактального об'єкта (коли можна вважати фрактальним об'єктом або саме середовище розповсюдження хвиль, або межу розділу середовищ) дозволяє отримати результати взаємодії контурів, поверхонь, тіл з електромагнітним полем, що узгоджуються з відомими даними класичної теорії дифракції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Захаров Е.В. Численный анализ дифракции радиоволн / Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.

2. Онуфрієнко В.М. Модель фрактальних стоко-джерел в математичній теорії дифракції хвиль / В.М. Онуфрієнко, Л.М. Онуфрієнко, Т.І. Слюсарова // Тиждень науки: щоріч. наук. – практ. конф., 18-21 квітня 2017 р.: тези доп. / Редкол.: В.В. Наумик (відпов. ред.) Електрон. дані. –

Запоріжжя: ЗНТУ, 2017. – С. 251–252 – 1 електрон. опт. диск (DVD-ROM). – назва з тит. екрана.

3. Онуфрієнко В.М. Метод диферінтегрування граничних умов фрактального типу в задачах дифракції / В.М. Онуфрієнко, Т.І. Слюсарова, Л.М. Онуфрієнко // 18-ої міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука, 7-10 жовтня 2017 р.: тези доп. – Київ: НТУ України «КПІ ім. Ігоря Сікорського», – 2017. – Т. 1. – С. 120–123.

4. Onufrienko V.M. Planar Fractally-Shaped Terahertz Waveguide: on the Goos-Hänchen Effect. / V.M. Onufrienko, T.I. Slyusarova, L.M. Onufrienko // Proceedings 14-th International Conf. on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer, 20-24 February 2018. – Lviv: Lviv Polytechnic National University, – 2018. – P. 1237–1240.

5. Онуфрієнко В.М. Граничні умови стоко-джерельного типу у фрактальних задачах дифракції / В.М. Онуфрієнко, Т.І. Слюсарова // Тиждень науки: щоріч. наук.-практ. конф., 16-20 квітня 2018 р.: тези доп. / Редкол.: В.В. Наумик (відпов. ред.) Електрон. дані. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018. – С. 276–278 – 1 електрон. опт. диск (DVD-ROM). – назва з тит. екрана.