УДК 531. 36

Д-р физ.-мат. наук С. А. Агафонов[1], канд. физ.-мат. наук И. А. Костюшко[2], канд. физ.-мат. наук С. П. Швыдкая[2]

[1]Государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва;
[2]Национальный университет, г. Запорожье

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИРКУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

В работе исследуется устойчивость циркулярной системы при действии диссипативных сил (типичный пример диссипативных сил – реактивные силы, используемые в ракетостроении). В критическом случае двух пар чисто мнимых корней найдено в терминах системы условие асимптотической устойчивости. Рассмотрен также резонанс четвертого порядка.

***Ключевые слова**: циркулярная система, устойчивость, диссипативные силы, критический случай, резонанс.*

1 Уравнения движения циркулярной системы при действии диссипативных сил

Уравнения движения циркулярной системы с двумя степенями свободы, находящейся под действием нелинейных диссипативных сил, можно привести к виду:

$$\ddot{x}_1 + \lambda_1 x_1 + \mu x_2 = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1},$$

$$\ddot{x}_2 + \lambda_2 x_2 - \mu x_1 = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2},$$

$$R = 1/2(\beta_1 x_1^2 \dot{x}_1^2 + \beta_2 x_2^2 \dot{x}_2^2) + 1/4(\gamma_1 \dot{x}_1^4 + \gamma_2 \dot{x}_2^4), \beta_i, \gamma_i > 0, \quad (1)$$

где функция Рэлея R – однородная форма четвертого порядка.

Систему (1) приведем к безразмерной форме с помощью безразмерного времени $\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}\, t$. Эта замена корректна, т.к. необходимым условием устойчивости равновесия $x_1 = x_2 = 0$ $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ линейной системы является неравенство $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$.

Система (1) примет вид:

$$x_1'' + kx_1 + \mu x_2 + \beta_1 x_1^2 x_1' + \gamma_1 x_1'^3 = 0,$$
$$x_2'' + (1-k)x_2 - \mu x_1 + \beta_2 x_2^2 x_2' + \gamma_2 x_2'^3 = 0. \quad (2)$$

В (2) штрих обозначает дифференцирование по τ; $k = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$. Обозначения для других параметров сохранены прежними.

Условием устойчивости положения равновесия $x_1 = x_2 = 0$, $x_1' = x_2' = 0$ системы (2) при отсутствии диссипативных сил $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ является неравенство

$$k(1-k) + \mu^2 < 1/4. \quad (3)$$

Заметим, что при $\lambda_1 = \lambda_2$ линейная циркулярная система неустойчива [1]. Поэтому без уменьшения общности будем считать, что $\lambda_1 > \lambda_2$.

При выполнении неравенства (3) характеристическое уравнение имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, где ω_1, ω_2 ($\omega_1 > \omega_2$) удовлетворяют уравнению частот

$$\omega^4 - \omega^2 + k(1-k) + \mu^2 = 0.$$

Таким образом, задача устойчивости положения равновесия $x_1 = x_2 = 0$ $x_1' = x_2' = 0$ системы (2) сводится к анализу критического случая двух пар чисто мнимых корней.

2 Линейная и нелинейная нормализация

Для преобразования системы (2), удобно записать ее в векторном виде

$$x'' + Ax + F(x, x') = 0;$$
$$x = (x_1, x_2)^T, A = \begin{pmatrix} k & k \\ -\mu & 1-\mu \end{pmatrix}, F(x, x') = (F_1, F_2)^T,$$
$$F_1 = \beta_1 x_1^2 x_1' + \gamma_1 x_1'^3, \; F_2 = \beta_2 x_2^2 x_2' + \gamma_2 x_2'^3. \quad (4)$$

В системе (4) сделаем замену переменных

$$x = Ly, \; y = (y_1, y_2)^T, L = \begin{pmatrix} 1 & \mu/(\omega_2^2 - k) \\ \mu/(1-\omega_1^2 - k) & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Поскольку линейная система является неконсервативной (матрица A не является симметрической), то для перехода к нормальным координатам необходимо провести анализ сопряженной системы $x''^4 + A^T x = 0$ и найти сопряженную матрицу L^* собственных форм. Поскольку A^T получается из матрицы A заменой μ на $-\mu$, то и имеет вид матрицы L после замены μ на $-\mu$.

Подставляя замену (5) в (4) и умножая слева на L^*, получим

$$y'' + \nabla y + \alpha^{-1} L^* F(Ly, Ly') = 0,$$

$$\nabla = \operatorname{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2), \quad \alpha = 1 - \frac{\mu^2}{(\omega_2^2 - k)^2} > 0. \qquad (6)$$

В системе (6) сделаем еще одну замену переменных

$$y_1 = \frac{1}{2}(u_1 + \overline{u}_1), \quad y_1' = \frac{i\omega_1}{2}(u_1 - \overline{u}_1);$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(u_2 + \overline{u}_2), \quad y_2' = \frac{i\omega_2}{2}(u_2 - \overline{u}_2). \qquad (7)$$

В (7) черта означает операцию комплексного сопряжения. Система (6) примет вид:

$$u_1' = i\omega_1 u_1 + \frac{i}{\omega_1}\alpha^{-1}\Phi_1, \; u_2' = i\omega_2 u_2 + \frac{i}{\omega 2}\alpha^{-1}\Phi_2. \; (8)$$

В (8) Φ_1, Φ_2 равны

$$\Phi_1 = \beta_1 x_1^2 x_1' + \gamma_1 x_1'^3 - \frac{\mu}{\omega_2^2 - k}(\beta_2 x_2^2 x_2' + \gamma_2 x_2'^3),$$

$$\Phi_2 = \beta_2 x_2^2 x_2' + \gamma_2 x_2'^3 - \frac{\mu}{\omega_2^2 - k}(\beta_1 x_1^2 x_1' + \gamma_1 x_1'^3). \qquad (9)$$

В выражениях (9) необходимо сделать последовательно замены переменных (5) и (7). Уравнения для сопряженных переменных не выписаны.

Для того чтобы воспользоваться критерием Каменкова в случае двух пар чисто мнимых корней [8], необходимо в системе (8) провести нелинейную нормализацию, после которой в преобразованной системе будут присутствовать только резонансные члены. Предположим сначала, что отсутствует внутренний резонанс четвертого порядка $\omega_1 \neq 3\omega_2$. С помощью полиномиального преобразования

$$u_k = z_k + Z_k(z_1, z_2, \overline{z}_1, \overline{z}_2), \qquad (k = 1{,}2) \qquad (10)$$

систему (8) можно привести к нормальной форме до членов третьего порядка включительно (Z_k - формы третьего порядка)

$$z_1' = i\omega_1 z_1 - A_{11} z_1^2 \overline{z}_1 - A_{12} z_1 z_2 \overline{z}_2;$$

$$z_2' = i\omega_2 z_2 - A_{21} z_2 z_1 \overline{z}_1 - A_{22} z_2^2 \overline{z}_2. \qquad (11)$$

В (11) коэффициенты A_{ij} равны

$$A_{11} = \frac{\alpha^{-1}}{8}\left[\beta_1 + 3\gamma_1\omega_1^2 - \frac{\mu}{(\omega_2^2 - k)^4}(\beta_2 + 3\omega_1^2\gamma_2\right],$$

$$A_{12} = \frac{\alpha^{-1}}{4}\frac{\mu^2}{(\omega_2^2 - k)^2}\left[\beta_1 + 3\gamma_1\omega_2^2 - (\beta_2 + 3\omega_2^2\gamma_2\right],$$

$$A_{21} = \frac{\alpha^{-1}}{4}\frac{\mu^2}{(\omega_2^2 - k)^2}\left[\beta_2 + 3\gamma_2\omega_1^2 - (\beta_1 + 3\omega_1^2\gamma_1\right],$$

$$A_{22} = \frac{\alpha^{-1}}{8}\left[\beta_2 + 3\gamma_2\omega_2^2 - \frac{\mu}{(\omega_2^2 - k)^4}(\beta_1 + 3\omega_2^2\gamma_1\right].$$

3 Анализ устойчивости

Рассмотрим ряд частных случаев. Пусть $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ Тогда $A_{12} = A_{21} = 0$. Система (11) имеет вид:

$$z_1' = i\omega_1 z_1 - \frac{1}{8}(\beta + 3\gamma\omega_1^2)\left(1 + \frac{\mu^2}{(\omega_2^2 - k)^2}\right) z_1^2 \overline{z}_1;$$

$$z_2' = i\omega_2 z_2 - \frac{1}{8}(\beta + 3\gamma\omega_2^2)\left(1 + \frac{\mu^2}{(\omega_2^2 - k)^2}\right) z_2^2 \overline{z}_2. \qquad (12)$$

Коэффициенты при $z_1^2\overline{z}_1$ и $z_2^2\overline{z}_2$ отрицательны и, на основании критерия Каменкова [8], равновесие $x_1 = x_2 = 0$, $x_1' = x_2' = 0$ асимптотически устойчиво.

Интересно отметить следующее обстоятельство. Если на устойчивую циркулярную систему с произвольным числом степеней свободы действуют линейные диссипативные силы с равными коэффициентами диссипации, то равновесие $x_1 = x_2 = 0$, $x_1' = x_2' = 0$ циркулярной системы становится асимптотически устойчивым [1]. Здесь аналогичный результат для систем с двумя степенями свободы имеет место и в случае нелинейных диссипативных сил.

Рассмотрим случай $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Система (11) примет вид:

$$z_1{}' = i\omega_1 z_1 - \frac{\alpha^{-1}}{8}\beta_2(\beta - a) z_1^2 \overline{z_1} - \frac{\alpha^{-1}}{4}\beta_2 \frac{\mu^2}{\left(\omega_2^2 - k\right)^2}(\beta - 1) z_1 z_2 \overline{z_2};$$

$$z_2{}' = i\omega_2 z_2 + \frac{\alpha^{-1}}{4}\beta_2 \frac{\mu^2}{\left(\omega_2^2 - k\right)^2}(\beta - 1) z_1 z_2 \overline{z_1} - \frac{\alpha^{-1}}{8}\beta_2(1 - a\beta) z_2^2 \overline{z_2};$$

$$a = \frac{\mu^4}{\left(\omega_2^2 - k\right)^4} < 1, \quad \beta = \frac{\beta_1}{\beta_2} \neq 1. \qquad (13)$$

Поскольку коэффициенты при $z_1 z_2 \overline{z_2}$ и $z_1 z_2 \overline{z_1}$ имеют разные знаки, то условием асимптотической устойчивости равновесия системы (13) является положительность коэффициентов при $z_1^2\overline{z_1}$ и $z_2^2\overline{z_2}$ [8], т.е. неравенства

$$a < \beta < 1/a. \qquad (14)$$

При выполнении неравенств

$$a < \beta < a \text{ или } \beta > 1/a \tag{15}$$

равновесие системы (13) неустойчиво. Это следует из существования неограниченно растущего решения по ρ_1 $(\rho_2 \equiv 0)$ или по ρ_2 $(\rho_1 \equiv 0)$. Переменные ρ_1, ρ_2 связаны с z_1, z_2 соотношениями $z_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\varphi_1}$, $z_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\varphi_2}$.

Случай $\beta_1 = \beta_2 = 0$ рассматривается аналогично. Условие асимптотической устойчивости и условия неустойчивости равновесия совпадают с неравенствами (14) и (15) заменой β на $\gamma = \gamma_1/\gamma_2$.

Заметим, что выводы об устойчивости равновесия сохраняются и для полной нелинейной системы [9].

Из полученных результатов следует, что влияние нелинейных диссипативных сил на циркулярную систему также неоднозначно: они могут как стабилизировать до асимптотической устойчивости равновесие циркулярной системы, так и дестабилизировать ее равновесие. Например, при $\mu^4 < (k - 1/2)^4$ равновесие линейной циркулярной системы устойчиво, а, например, при $\beta < a$ оно становится неустойчивым.

4 Резонанс $\omega_1 = 3\omega_2$

При резонансе $\omega_1 = 3\omega_2$ частоты ω_1 и ω_2 равны $\omega_1^2 = 0{,}9$, $\omega_2^2 = 0{,}1$, а параметры k, μ связаны соотношением $\mu^2 = (k - 1/2)^2 - 4/25$.

Нормальная форма до членов третьего порядка имеет вид

$$\begin{aligned} z_1' &= i\omega_1 z_1 - A_{11} z_1^2 \overline{z_1} - A_{12} z_1 z_2 \overline{z_2} + B_1 z_2^3; \\ z_2' &= i\omega_2 z_2 - A_{21} z_1 z_2 \overline{z_1} - A_{22} z_2^2 \overline{z_2} + B_2 z_1 z_2^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. При этом $A_{12} = A_{21} = 0$, а коэффициенты B_1, B_2 равны

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{25}{48}\mu\frac{2k-1}{10k-1}\left(\beta - \frac{1}{10}\gamma\right); \\ B_2 &= -\frac{25}{16}\mu\frac{2k-1}{10k-1}\left(\beta - \frac{9}{10}\gamma\right), \quad k > \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{17}$$

В системе (16) сделаем замену переменных

$$z_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\varphi_2}, \tag{18}$$

после которой система (16) примет вид

$$\begin{aligned} \rho_1' &= -2A_{11}\rho_1^2 + 2B_1\rho_1^{1/2}\rho_2^{3/2}\cos\psi; \\ \rho_2' &= -2A_{22}\rho_2^2 + 2B_2\rho_1^{1/2}\rho_2^{3/2}\cos\psi; \\ \rho_1^{1/2}\psi' &= -\left(3B_2\rho_2^{1/2}\rho_1 + B_1\rho_2^{3/2}\right)\sin\psi, \quad \psi = 3\varphi_2 - \varphi_1. \end{aligned} \tag{19}$$

Для анализа устойчивости равновесия $\rho_1 = \rho_2 = 0$ системы (19) рассмотрим определенно положительную функцию

$$V = \rho_1 + \rho_2. \tag{20}$$

Производная по τ в силу системы (19) равна

$$\begin{aligned} V' &= -2A_{11}\rho_1^2 - 2A_{22}\rho_2^2 + 2(B_1 + B_2)\rho_1^{1/2}\rho_2^{3/2}\cos\psi; \\ B_1 + B_2 &= \frac{5}{24}\mu\frac{2k-1}{10k-1}(7\gamma - 10\beta). \end{aligned} \tag{21}$$

Рассмотрим три случая:

$$\gamma = \frac{10}{7}\beta, \quad \gamma > \frac{10}{7}\beta, \quad \gamma < \frac{10}{7}\beta.$$

При $\gamma = \frac{10}{7}\beta$ $B_1 + B_2 = 0$ и V' является определенно отрицательной, следовательно, равновесие $\rho_1 = \rho_2 = 0$ системы (19) асимптотически устойчиво.

При $\gamma > \frac{10}{7}\beta$ $B_1 + B_2 > 0$. Из (21) с использованием неравенства $2\rho_1^{1/2}\rho_2^{3/2} < \rho_2^2 + \rho_1\rho_2$ получим оценку

$$\begin{aligned} -V' &\geq \left(2A_{11} - \frac{B_1 + B_2}{2}\right)\rho_1^2 + \left[2A_{22} - \frac{3}{2}(B_1 + B_2)\right]\rho_2^2; \\ A_{11} &= \frac{5}{4}\left(\beta + \frac{27}{10}\gamma\right)\frac{2k-1}{10k-1}, \quad A_{22} = \frac{5}{4}\left(\beta + \frac{3}{10}\gamma\right)\frac{2k-1}{10k-1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Условием определенной отрицательности производной V' являются неравенства

$$2A_{11} - \frac{1}{2}(B_1 + B_2) > 0, \quad 2A_{22} - \frac{3}{2}(B_1 + B_2) > 0,$$

которые сводятся к одному

$$\mu < \frac{4(10\beta + 3\gamma)}{5(7\gamma - 10\beta)}. \tag{23}$$

Случай $\gamma < \frac{10}{7}\beta$ $(B_1 + B_2 < 0)$ рассматривается аналогично: при этом в неравенстве (22) знак при $B_1 + B_2$ должен быть заменен на противоположный, а условием определенной отрицательности V' служит неравенство

$$\mu < -\frac{4(10\beta + 3\gamma)}{5(7\gamma - 10\beta)}. \qquad (24)$$

Таким образом, при $\gamma = \frac{10}{7}\beta$ равновесие $\rho_1 = \rho_2 = 0$ системы (19) асимптотически устойчиво, а при $\gamma > \frac{10}{7}\beta$ $\left(\gamma < \frac{10}{7}\beta\right)$ оно асимптотически устойчиво при выполнении неравенства (23) (или (24)).

Перечень ссылок

1. Агафонов С. А. К вопросу устойчивости неконсервативных систем / С. А. Агафонов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1986. – №1. – С. 47–51.
2. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин. – М. : Наука, 1971. – 312 с.
3. Kirillov O. N. Stabilization and destabilization of a circulatory system by small velocity-dependent forces / Kirillov O. N., Seyranian A. P. // J. of Sound and Vibration. – 2005. – Vol. 283. – № 3–5. – P. 781–800.
4. Kirillov O. N. A theory of the destabilization paradox in non-conservative systems / Kirillov O. N. // Acta Mechanika. – 2005. – Vol. 174. – № 3–4.– P. 145–166.
5. Сейранян А. П. Парадокс дестабилизации в неконсервативных системах / А. П. Сейранян // Успехи математики. – 1990. – Т. 13. – № 2. – С. 89–124.
6. Hagedorn P. On the destabilizing effect of non-linear damping in nonconservative systems with follower forces / Hagedorn P. // Intern. J. Non – Linear Mech. – 1970. – Vol. 5. – № 2. – P. 341–358.
7. Агафонов С. А. Динамическая устойчивость стержня с нелинейной внутренней вязкостью под действием следящей силы / С. А. Агафонов, Д. В. Георгиевский // Докл. РАН. 2004. – Т. 396. – № 3. – С. 339–342.
8. Каменков Г. В. Избранные труды. Т.1. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика / Г. В. Каменков – М. : Наука, 1971. – 256 с.
9. Хазин Л. Г. Устойчивость критических положений равновесия / Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. – Пущино : Центр биол. иссл. АН СССР, 1985. – 216 с.

Одержано 29.09.2010

Агафонов С.О., Костюшко И.А., Швидка С.П. До питання про стійкість циркулярної системи під дією дисипативних сил

В роботі досл‌уджується стійкість циркулярної системи під дією дисипативних сил. У критичному випадку двох пар чисто уявних коренів знайдено в термінах системи умову асимптотичної стійкості. Розглянуто також резонанс четвертого порядку.

***Ключові слова**: циркулярна система, стійкість, дисипативні сили, критичний випадок, резонанс.*

Agafonov S., Kostyushko I., Shvidkaya S. To the problem of circulatory system stability under the dissipative forces action

Stability of the circulatory system under the dissipative forces action is analyses. At the critical case two pair of the pure imaginary roots in the terms of the asymptotic stability system terms the asymptotic stability condition is found. The resonance of the fourth order is expertized as well.

***Key words**: circulatory system, stability, dissipative forces, critical case, resonance.*