

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ, НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійної роботи та виконання РГР №2
з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки"
"Однофазні електричні кола синусоїдного струму" (ІІ модуль)
для студентів спеціальності 141
"Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка"
денної та заочної форм навчання

Методичні вказівки до самостійної роботи та виконання РГР №2 з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки" "Однофазні електричні кола синусоїдного струму" (II модуль) для студентів спеціальності 141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка" денної та заочної форм навчання /Укл.: В.В. Козлов, О.В. Набокова. - Запоріжжя: ЗНТУ, 2019. - 82 с.

Укладачі: В.В. Козлов, доцент, к.т.н.
О.В. Набокова, ст. викладач

Рецензент: С.М. Тиховод, доцент, к.т.н.

Відповідальний за випуск: В.В. Козлов, доцент, к.т.н.

Затверджено
на засіданні кафедри ТЗЕ
Протокол №7 від 07.03.19 р.

Затверджено
на засіданні
науково-методичної комісії
електротехнічного факультету
Протокол №8 від 22.03.19 р.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ	4
1 КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ	5
1.1 Синусоїдний струм й основні величини, які його характеризують	5
1.2 Середнє й діюче значення величин, що змінюються за гармонічним законом	7
1.3 Ідеальні пасивні елементи в колах синусоїдного струму	7
1.3.1 Резистивний елемент у колі синусоїдного струму	7
1.3.2 Індуктивний елемент у колі синусоїдного струму	9
1.3.3 Ємнісний елемент у колі синусоїдного струму	11
1.4 Електричне коло синусоїдного струму з послідовним з'єднанням резистивного, індуктивного і ємнісного елементів	14
1.5 Електричне коло синусоїдного струму з паралельним з'єднанням резистивного, індуктивного і ємнісного елементів	17
1.6 Потужність електричного кола синусоїдного струму	21
1.7 Резонансні явища в колах синусоїдного струму	25
1.8 Послідовний коливальний контур. Резонанс напруг	26
1.9 Паралельний коливальний контур. Резонанс струмів	33
1.10 Підвищення коефіцієнта потужності споживачів електричної енергії	38
1.11 Система рівняння для миттєвих значень струмів і напруг у складних колах синусоїдного струму	39
1.12 Подання електричних величин, які змінюються за синусоїдним законом, комплексними числами	41
1.13 Символічний метод розрахунку кіл синусоїдного струму	42
1.14 Закон Ома в комплексній формі. Комплексний повний опір. Комплексна повна провідність	43
1.15 Закони Кірхгофа в комплексній формі	45
1.16 Потужність електричного кола в комплексній формі запису	47
1.17 Індуктивно-зв'язані елементи електричного кола	47
1.18 Електричне коло з послідовним з'єднанням індуктивно-зв'язаних елементів	51
1.19 Електричне коло з паралельним з'єднанням індуктивно-зв'язаних елементів	53
1.20 Розрахунки складних електричних кіл при наявності індуктивного зв'язку між елементами	54
1.21 Метод розв'язки індуктивних зв'язків	55
1.22 Передача енергії між індуктивно-зв'язаними елементами кола	57
2 ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ	59
3 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ	61
4 ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ Й ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ	71
ЛІТЕРАТУРА	82

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Одним з найбільш важливих етапів самостійної роботи студентів при вивченні ТОЕ є виконання розрахунково-графічних робіт, які допомагають засвоєнню матеріалу курсу.

Перш ніж приступити до виконання даної розрахунково-графічної роботи, необхідно твердо засвоїти основні визначення електричних величин, а також поняття й закони, якими встановлюється зв'язок між ними.

Варто повторити необхідні розділи теоретичного курсу за конспектом лекцій, даними методичним вказівкам і рекомендованою літературою, і пригадати з курсу математики матричну форму запису системи лінійних алгебраїчних рівнянь і прийоми її розрахунку.

При виконанні й оформленні розрахунково-графічної роботи необхідно дотримуватися наступних основних вимог:

- роботу оформляють на стандартних аркушах паперу формату А4, що скріплені між собою;
- обкладинкою служить титульний аркуш, на якому вказують навчальний заклад і кафедра, номер, назву й варіант розрахунково-графічної роботи, номер групи, прізвище студента й прізвище викладача;
- на першій сторінці вказують номер і назву завдання, викреслюється схема електричного кола заданого варіанта, наводять вихідні параметри й перераховують вимоги з розрахунку. Така сторінка передує кожній задачі розрахунково-графічної роботи;
- кожен етап розрахунку повинен мати свій заголовок, обчислення й алгебраїчні перетворення супроводжують короткими поясненнями, біля остаточного результату проставляють розмірність;
- у тексті розрахунково-графічної роботи не допускається скорочення слів, крім загальноприйнятих скорочень, таких як ЕРС, ККД і т.д.;
- графіки виконують з дотриманням загальноприйнятих інженерних вимог. По осях наносять рівномірні масштабні шкали. Наприкінці шкали вказується позначення змінної і її розмірність. Координатні системи для різних функцій, що побудовані від одної змінної, повинні розташовуватися на одній сторінці й бути сполучені по осях абсцис;
- при розв'язанні задач необхідно використовувати міжнародну систему одиниць;
- допускається застосовувати в розрахунках математичні пакети програм і наводити в роботі графіки, що побудовані на комп'ютері з дотриманням відповідних вимог.

1 КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Змінний струм довгий час не знаходив практичного застосування. Це було пов'язане з тим, що перші генератори електричної енергії виробляли постійний струм, що цілком задовольняв технологічним процесам електрохімії, а двигуни постійного струму мають хороші регульовальні характеристики. Однак у міру розвитку виробництва постійний струм усе менше став задовольняти зростаючим вимогам економічного електропостачання.

Основною перевагою синусоїдного струму є можливість легко трансформувати напругу. Це дає можливість здійснити економічну передачу електричної енергії на великі відстані. Виходячи з техніко-економічних міркувань, електричну енергію виробляють, розподіляють й споживають переважно у вигляді енергії синусоїдного струму. Звідси зрозуміла важливість вивчення процесів, що протікають у колах змінного струму, і методики їхнього розрахунку, як для наступних розділів курсу, так і для застосування отриманих знань на практиці. Це і є задачею даного розділу.

Електричні кола змінного струму в порівнянні з колами постійного струму мають ряд особливостей. Змінні струми й напруги викликають змінні електричні й магнітні поля. Зміни цих полів у колах приводять до виникнення явищ самоіндукції й взаємної індукції, які впливають на процеси, що протікають у колах, і ускладнюють їхній аналіз.

1.1 Синусоїдний струм й основні величини, які його характеризують

З періодичних струмів всіх можливих форм найбільше поширення дістав синусоїдний струм. У порівнянні з іншими видами струму синусоїдний струм має ряд переваг, бо його використання дозволяє:

- розв'язати задачі підвищення напруги трансформаторами для забезпечення економічності при передачі електричної енергії на великі відстані й наступне її зниження для розподілу між споживачами;
- зберегти незмінними синусоїдні форми кривих напруг і струмів на всіх ділянках складного лінійного кола, у тому числі при багаторазових трансформаціях;
- відносно просто за допомогою нерухомих обмоток одержати обертаюче магнітне поле, яке використовують в синхронних й асинхронних обертових машинах.

Колами синусоїдного струму називають електричні кола, у яких електричні величини (струм, напруга, ЕРС) змінюються в часі за синусоїдним (гармонійним) законом й математично описуються функціями:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \sin(\omega t + \psi_i); \\ u(t) &= U_m \sin(\omega t + \psi_u); \\ e(t) &= E_m \sin(\omega t + \psi_e) \end{aligned} \quad (1.1)$$

де i, u, e - миттєві значення; I_m, U_m, E_m - амплітудні значення; ψ_i, ψ_u, ψ_e - початкові фази; ω - кутова (кругова, циклічна) частота.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.2)$$

Аргумент синуса ($\omega t + \psi$) називають *фазою*. Фаза характеризує стан коливання в поточний момент часу.

Одиниця вимірювання кутової частоти - *1/секунду* (c^{-1}).

Одиниця вимірювання початкової фази - *радіан (рад)*. На практиці в більшості випадків у якості одиниці вимірювання початкової фази використовують *градус* (інколи кажуть *електричний градус*).

Діапазон частот струмів, які застосовуються в техніці складає від наднизьких частот ($0.01 \dots 10 \dots 10$ Гц - у системах автоматичного регулювання, в аналоговій обчислювальній техніці) до надвисоких ($3000 \dots 300000$ МГц - міліметрові хвилі: радіолокація, радіоастрономія). В Україні, країнах СНД і більшості країн Європи найбільше розповсюдження дістали електроустановки синусоїдного струму зі стандартною частотою 50 Гц. У США і Японії стандартної є частота 60 Гц.

Стандартній промисловій частоті $f = 50$ Гц відповідають кутова частота $\omega = 314$ c^{-1} і період $T = 0,02$ с.

Для порівняння напруги й струму однакової частоти за часом використовують поняття *кут фазового зсуву* між напругою й струмом (*фазовий зсув* напруги щодо струму)

$$\varphi = (\omega t + \psi_u) - (\omega t + \psi_i) = \psi_u - \psi_i. \quad (1.3)$$

Одиниця вимірювання кута фазового зсуву, так само як і початкової фази - *радіан* або *градус*.

1.2 Середнє й діюче значення величин, що змінюються за гармонійним законом

За період середнє значення струму (постійна складова струму), що змінюється за гармонійним законом, дорівнює нулю

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin \omega t = 0. \quad (1.4)$$

Тому на практиці під середнім значенням струму, що змінюється за синусоїдним законом, розуміють середнє за модулем значення (враховуючи симетрію функції середнє за додатний півперіод)

$$I_{av} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m. \quad (1.5)$$

Аналогічно для напруг і ЕРС, що змінюються за синусоїдним законом

$$U_{av} = \frac{2}{\pi} U_m; \quad (1.6)$$

$$E_{av} = \frac{2}{\pi} E_m.$$

Діюче значення струму, що змінюється за синусоїдним законом:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m. \quad (1.7)$$

Аналогічно для напруг і ЕРС, що змінюються за синусоїдним законом..

1.3 Ідеальні пасивні елементи в колах синусоїдного струму

1.3.1 Резистивний елемент у колі синусоїдного струму

Якщо через резистивний елемент протікає синусоїдний струм

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (1.8)$$

то за законом Ома напруга на його затискачах буде дорівнювати

$$u(t) = Ri = RI_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (1.9)$$

Отже, напруга на затискачах резистивного елемента й струм, що проходить через нього, мають однакову початкову фазу (збігаються за фазою)

$$\psi_u = \psi_i = \psi. \quad (1.10)$$

Кут фазового зсуву між напругою й струмом

$$\phi = \psi_u - \psi_i = 0. \quad (1.11)$$

Закон Ома для діючих значень напруги й струму резистивного елемента:

$$U = RI. \quad (1.12)$$

Миттєва потужність, що надходить до резистивного елемента

$$p = ui = U_m I_m \sin^2(\omega t + \psi) = UI(1 - \cos 2(\omega t + \psi)), \quad (1.13)$$

має постійну складову UI і змінну складову $UI \cos 2(\omega t + \psi)$, що змінюється з подвоєною частотою 2ω . У будь-який момент часу значення струму й напруги мають однаковий знак, тому $p \geq 0$.

Середнє значення потужності, що надходить у резистивний елемент за період, називають *активною потужністю*:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI(1 - \cos 2(\omega t + \psi)) dt = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}. \quad (1.14)$$

На рис. 1.1, а представлені графіки залежностей миттєвих значень напруги $u(t)$, струму $i(t)$ і потужності $p(t)$ від часу, а на рис. 1.1, б - суміщена векторна діаграма для резистивного елемента.

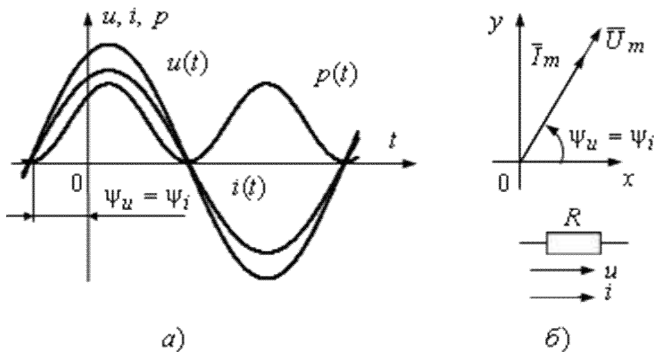


Рисунок 1.1

1.3.2 Індуктивний елемент у колі синусоїдного струму

Якщо через індуктивний елемент протікає синусоїдний струм

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (1.15)$$

то його поточкозчеплення дорівнює

$$\Psi(t) = Li = LI_m \sin(\omega t + \psi_i) = \Psi_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad (1.16)$$

і в індуктивному елементі наводиться ЕРС самоіндукції

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\omega \Psi_m \cos(\omega t + \psi_i) = -\omega LI_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.17)$$

Напруга на затискачах індуктивного елемента

$$u = -e_L = \omega LI_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.18)$$

Отже, напруга на затискачах індуктивного елемента випереджає струм, що проходить через нього, за фазою на кут $\frac{\pi}{2}$:

$$\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}. \quad (1.19)$$

Кут фазового зсуву між напругою й струмом

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}. \quad (1.20)$$

За аналогією з резистивним елементом уводять поняття *індуктивний опір*:

$$X_L = \omega L. \quad (1.21)$$

Індуктивний опір являє собою розрахункову величину, за допомогою якої враховують явище самоіндукції. Він виникає як реакція магнітного поля кола на процес зміни запасу енергії в ньому й не супроводжується тепловими явищами. Значення індуктивного опору пропорційно частоті струму, що протікає через індуктивний елемент. При збільшенні частоти воно прагне до нескінченності, а в колах постійного струму ($\omega = 0$) дорівнює нулю.

Величину, що є зворотною до індуктивного опора, називають *індуктивною провідністю*:

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}. \quad (1.22)$$

Одиниця вимірювання індуктивного опору - *ом* ($Ом$), індуктивної провідності - *сименс* ($Сим$).

Індуктивний опір й індуктивна провідність є параметрами індуктивного елемента.

Закон Ома для діючих значень напруги й струму індуктивного елемента:

$$U = X_L I . \quad (1.23)$$

Миттєва потужність, що характеризує швидкість перетворення енергії джерела в енергію магнітного поля

$$\begin{aligned} p = ui &= U_m I_m \sin(\omega t + \psi_i) \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}) = \\ &= 2UI \sin(\omega t + \psi_i) \cos(\omega t + \psi_i) = UI \sin 2((\omega t + \psi_i)), \end{aligned} \quad (1.24)$$

проходить через нульове значення, коли через нуль проходить або напруга u , або струм i . Якщо знаки струму й напруги збігаються, її значення додатне. У цей час індуктивний елемент споживає енергію джерел на створення енергії магнітного поля. Якщо знаки струму й напруги не збігаються, її значення від'ємне. У цей час енергія магнітного поля віддається зворотно джерелу енергії. Відбувається періодичний обмін енергії між джерелом й індуктивним елементом, причому середня потужність, що надходить до індуктивного елемента за період дорівнює нулю (тобто індуктивний елемент активну потужність не споживає).

Для індуктивного елемента вводять поняття *індуктивна потужність*, що дорівнює амплітудному значенню миттєвої потужності

$$Q = p_m = UI = X_L I^2 = \frac{U^2}{X_L} = \omega L I^2 = \frac{U^2}{\omega L} . \quad (1.25)$$

Одиниця вимірювання індуктивної потужності - *вольт-ампер реактивний* (*вар*).

Енергія магнітного поля індуктивного елемента

$$w_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi_i) = \frac{LI^2}{2} (1 - \cos 2(\omega t + \psi_i)) \quad (1.26)$$

має постійну складову $\frac{LI^2}{2}$ й змінну складову $\frac{LI^2}{2} \cos 2(\omega t + \psi_i)$, що змінюється з подвоєною частотою 2ω . У будь-який момент часу значення енергії магнітного поля невід'ємне $w_L \geq 0$.

Коли значення струму й напруги мають однакові знаки, енергія накопичується в магнітному полі. Коли значення струму й напруги мають різні знаки, енергія, що накопичена в магнітному полі, повертається в зовнішнє коло. Причому в зовнішнє коло повертається в точності та кількість енергії, що була накопичена.

На рис. 1.2, *а* представлені графіки залежностей миттєвих значень напруги $u(t)$, струму $i(t)$ і потужності $p(t)$ від часу, а на рис. 1.2, *б* - суміщена векторна діаграма для індуктивного елемента.

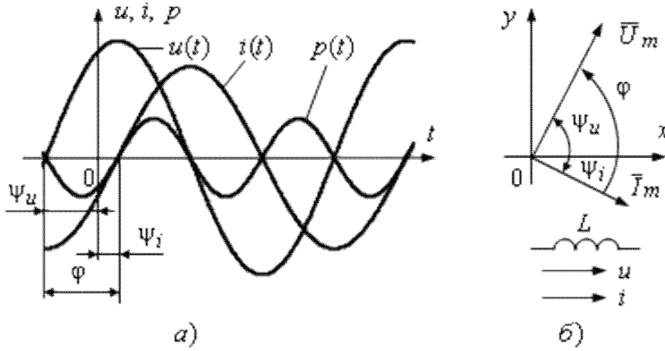


Рисунок 1.2

1.3.3 Ємнісний елемент у колі синусоїдного струму

Якщо напруга на затискачах ємнісного елемента змінюється за синусоїдним законом

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (1.27)$$

то за гармонійним законом буде змінюватися й заряд ємнісного елемента

$$q = Cu = CU_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (1.28)$$

і ємнісний елемент буде періодично перезаряджатися. При цьому в зовнішній частині кола буде протікати електричний струм, миттєве значення якого пропорційно швидкості зміни заряду

$$\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = \omega CU_m \cos(\omega t + \psi_u) = \\ &= \omega CU_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin(\omega t + \psi_i). \end{aligned} \quad (1.29)$$

За аналогією з резистивним елементом уводять поняття *ємнісна провідність*

$$B_C = \omega C . \quad (1.30)$$

Ємнісна провідність являє собою розрахункову величину, за допомогою якої враховують обмеження швидкості перезарядження ємнісного елемента. Воно виникає як реакція електричного поля кола на процес зміни запасу енергії в ньому й не супроводжується тепловими явищами. Значення ємнісної провідності пропорційно частоті напруги, що прикладена до затискачів ємнісного елемента. При збільшенні частоти воно прагне до нескінченності, а в колах постійного струму ($\omega = 0$) дорівнює нулю.

Величину, що є зворотною до ємнісної провідності, називають *ємнісним опором*:

$$X_C = \frac{1}{B_C} = \frac{1}{\omega C} . \quad (1.31)$$

Одиниця вимірювання ємнісного опору - *ом* ($Ом$), ємнісної провідності - *сименс* ($Сим$).

Ємнісний опір й ємнісна провідність є параметрами ємнісного елемента.

Закон Ома для діючих значень напруги й струму ємнісного елемента

$$U = X_C I . \quad (1.32)$$

Миттєва потужність, що характеризує швидкість перетворення енергії джерела в енергію електричного поля

$$\begin{aligned} p = ui &= U_m I_m \sin(\omega t + \psi_u) \sin(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}) = \\ &= 2UI \sin(\omega t + \psi_u) \cos(\omega t + \psi_u) = UI \sin(2(\omega t + \psi_u)) \end{aligned} \quad (1.33)$$

проходить через нульове значення, коли через нуль проходить або напруга u , або струм i . Якщо знаки струму й напруги збігаються, її значення додатне. У цей час ємнісний елемент споживає енергію джерела на створення енергії електричного поля. Якщо знаки струму й напруги не збігаються - від'ємне. У цей час енергія електричного поля віддається зворотно джерелу енергії. Відбувається періодичний обмін енергії між джерелом і ємнісним елементом, причому середня потужність, що надходить у ємнісний елемент дорівнює нулю (тобто ємнісний елемент активну потужність не споживає).

Для ємнісного елемента вводять поняття *ємнісна потужність*, що дорівнює амплітудному значенню миттєвої потужності

$$Q = p_m = UI = X_C I^2 = \frac{U^2}{X_C} = \frac{I^2}{\omega C} = \omega C U^2. \quad (1.34)$$

Одиниця вимірювання ємнісної потужності - *вольт-ампер реактивний (вар)*.

Енергія електричного поля ємнісного елемента

$$w_C = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi_u) = \frac{CU^2}{2} (1 - \cos 2(\omega t + \psi_u)) \quad (1.35)$$

має постійну складову $\frac{CU^2}{2}$ й змінну складову $\frac{CU^2}{2} \cos 2(\omega t + \psi_u)$, що змінюється з подвоєною частотою 2ω . У будь-який момент часу значення енергії електричного поля невід'ємне $w_C \geq 0$.

Коли значення струму й напруги мають однакові знаки, енергія накопичується в електричному полі. Коли значення струму й напруги мають різні знаки, енергія, що накопичена в електричному полі, повертається в зовнішнє коло. Причому в зовнішнє коло повертається в точності та кількість енергії, що була накопичена.

На рис. 1.3, *а* представлені графіки залежностей миттєвих значень напруги $u(t)$, струму $i(t)$ і потужності $p(t)$ від часу, а на рис. 1.3, *б* - суміщена векторна діаграма для ємнісного елемента.

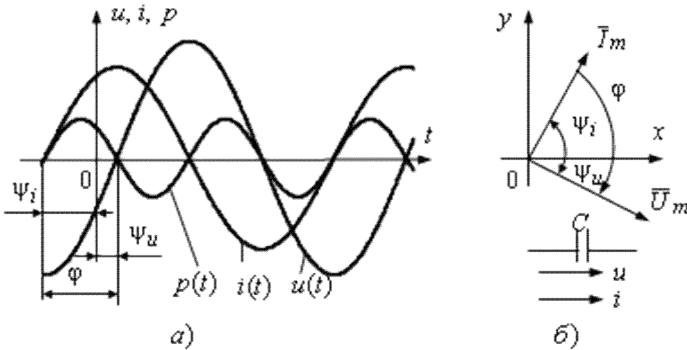


Рисунок 1.3

1.4 Електричне коло синусоїдного струму з послідовним з'єднанням резистивного, індуктивного і ємнісного елементів

При проходженні через ділянку електричного кола (рис. 1.4), що складається з послідовно з'єднаних резистивного, індуктивного і ємнісного елементів, синусоїдного струму

$$i = I_m \sin \omega t, \quad (1.36)$$

на затискачах цієї ділянки кола створюється напруга, миттєве значення якої у відповідності із другим законом Кірхгофа, дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих значень напруг на окремих елементах

$$u = u_R + u_L + u_C, \quad (1.37)$$

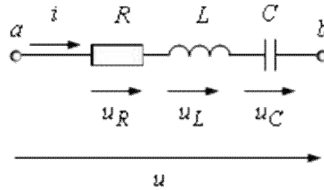


Рисунок 1.4

При цьому напруга на резистивному елементі u_R збігається за фазою зі струмом, на індуктивному u_L - випереджає за фазою струм на кут $\frac{\pi}{2}$, а ємнісному u_C - відстає за фазою від струму на кут $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} u_R &= U_{Rm} \sin \omega t = RI_m \sin \omega t, \\ u_L &= U_{Lm} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = X_L I_m \cos \omega t, \\ u_C &= U_{Cm} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -X_C I_m \cos \omega t. \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} u &= RI_m \sin \omega t + X_L I_m \cos \omega t - X_C I_m \cos \omega t = \\ &= RI_m \sin \omega t + (X_C - X_L) I_m \cos \omega t = I_m (R \sin \omega t + X \cos \omega t) = \\ &= U_m \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Рівняння (4.51) являє собою тригонометричну форму запису другого закону Кірхгофа для миттєвих значень напруг. Величину

$$X = X_L - X_C, \quad (1.40)$$

яка входить до нього, називають *реактивним опором* кола. Залежно від знака реактивний опір може мати індуктивний ($X > 0$) або ємнісної ($X < 0$) характер. Значення активного опору, на відміну від значення реактивного опору, завжди невід'ємне.

Для спрощення рівняння (1.39) використаємо тригонометричні співвідношення:

$$\begin{aligned} m \sin \alpha \pm n \cos \alpha &= \sqrt{m^2 + n^2} \sin(\alpha \pm \beta), \\ \beta &= \arctg \frac{n}{m}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Тоді амплітудне значення напруги на затискачах всієї ділянки кола

$$U_m = \sqrt{R^2 + X^2} I_m. \quad (1.42)$$

З рівняння (1.42) випливає, що амплітудні й діючі значення напруги на затискачах розглянутої ділянки кола й струму, що протікає через цю ділянку коло, зв'язані співвідношеннями, що аналогічні до закону Ома

$$\begin{aligned} U_m &= Z I_m, \\ U &= Z I, \end{aligned} \quad (1.43)$$

де $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ - повний опір розглянутої ділянки кола, Ом.

Фазовий зсув між напругою й струмом

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (1.44)$$

Зміна реактивного опору в межах $-\infty < X < +\infty$ приводить до зміни кута фазового зсуву від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Кут φ додатний при індуктивному характері опору кола, тобто коли $X > 0$. При цьому струм відстає за фазою від напруги, і кут φ відраховують вдовж осі абсцис вліво від струму до напруги. Кут φ від'ємний при ємнісному характері опору кола, тобто коли $X < 0$. При цьому напруга відстає за фазою від струму, і кут φ відраховують вдовж осі абсцис вправо від струму до напруги.

Якщо опори індуктивного і ємнісного елементів чисельно однакові, то вони компенсують один одного й опір ділянки кола є суто активним

$$\begin{aligned} X &= X_L - X_C = 0; \\ Z &= R. \end{aligned} \quad (1.45)$$

У цьому випадку струм і напруга збігаються за фазою.

У випадку відсутності в колі резистивного елемента ($R = 0$), повний опір кола буде суто реактивним, а кут фазового зсуву дорівнює $\varphi = \frac{\pi}{2}$, якщо $X_L > X_C$, або дорівнює $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, якщо $X_L < X_C$.

На рис. 1.5 представлені хвильова й суміщена векторна діаграми напруг і струму для випадку активно-індуктивного характеру опору ділянки електричного кола ($\varphi > 0$), а на рис. 1.6 для випадку активно-ємнісного характеру опору ($\varphi < 0$).

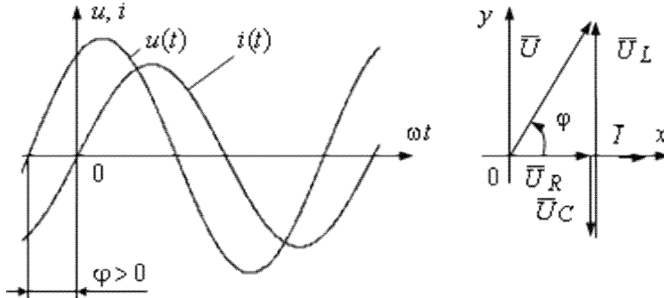


Рис. 1.5

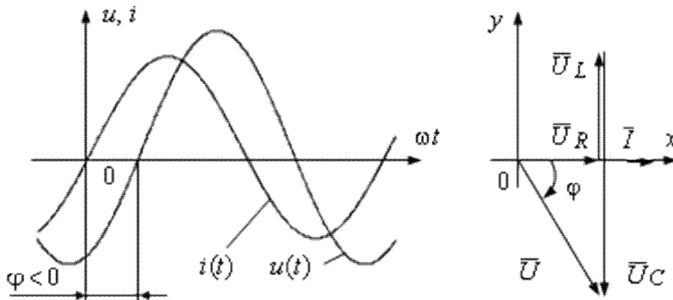


Рисунок 1.6

З отриманих рівнянь випливає, що активний і реактивний опори кола зв'язані з повним опором співвідношеннями

$$\begin{aligned} R &= Z \cos \varphi, \\ X &= Z \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Помноживши праві й ліві частини рівнянь (1.46) на діюче значення струму, одержимо діючі значення напруг на активному й реак-

тивному опорам, які називають відповідно *активною* й *реактивною складовими напруги*:

$$\begin{aligned} U_a &= RI = ZI \cos \varphi = U \cos \varphi, \\ U_p &= XI = ZI \sin \varphi = U \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Тому що миттєві значення напруги на активному й реактивному опорі мають зсув за фазою на кут $\frac{\pi}{2}$, то діюче значення сумарної напруги пов'язане з активною й реактивною складовими співвідношенням:

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}. \quad (1.48)$$

Якщо до затискачів ділянки електричного кола, що складається з послідовно з'єднаних резистивного, індуктивного і ємнісного елементів, прикладена синусоїдна напруга

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (1.49)$$

то струм у колі

$$i = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi). \quad (1.50)$$

1.5 Електричне коло синусоїдного струму з паралельним з'єднанням резистивного, індуктивного і ємнісного елементів

Якщо до затискачів ділянки електричного кола (рис. 1.7), що складається з паралельно з'єднаних резистивного, індуктивного і ємнісного елементів, прикладена синусоїдна напруга

$$u = U_m \sin \omega t, \quad (1.51)$$

те в нерозгалуженій частині цього кола протікає струм, миттєве значення якого відповідно до першого закону Кірхгофа, дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих значень струмів паралельних віток

$$i = i_R + i_L + i_C. \quad (1.52)$$

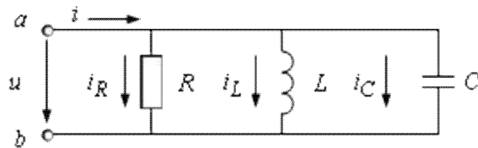


Рисунок 1.7

При цьому струм через резистивний елемент i_R збігається за фазою з напругою, через індуктивний i_L - відстає за фазою від напруги на кут $\frac{\pi}{2}$, а через ємнісної i_C - випереджає за фазою напругу на кут $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} i_R &= I_{Rm} \sin \omega t = \frac{U_m}{R} \sin \omega t, \\ i_L &= I_{Lm} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{U_m}{X_L} \cos \omega t, \\ i_C &= I_{Cm} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{U_m}{X_C} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (1.53)$$

З урахуванням цього струм у нерозгалуженій частині кола

$$\begin{aligned} i &= \frac{U_m}{R} \sin \omega t - \frac{U_m}{X_L} \cos \omega t + \frac{I_m}{X_C} \cos \omega t = \\ &= \frac{U_m}{R} \sin \omega t - \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) U_m \cos \omega t = \\ &= U_m (G \sin \omega t - B \cos \omega t) = I_m \sin(\omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Рівняння (1.54) являє собою тригонометричну форму запису першого закону Кірхгофа для миттєвих значень струмів. Величину

$$B = B_L - B_C, \quad (1.55)$$

яка входить до нього, називають *реактивною провідністю* електричного кола. Залежно від знака реактивна провідність може мати індуктивний ($B > 0$) або ємнісної ($B < 0$) характер. Значення активної провідності, на відміну від значення реактивної провідності, завжди невід'ємне.

Тоді амплітудне значення струму на вході кола

$$I_m = \sqrt{G^2 + B^2} U_m. \quad (1.56)$$

З рівняння (1.56) випливає, що амплітудні й діючі значення напруги на затискачах кола й струму, що протікає через нерозгалужену частину кола, зв'язані співвідношенням, що аналогічно до закону Ома

$$I_m = Y U_m, \quad I = Y U. \quad (1.57)$$

де $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ - повна провідність розглянутого кола, Сим.

Кут фазового зсуву між напругою й струмом

$$\varphi = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{B_L - B_C}{G}. \quad (1.58)$$

Зміна реактивної провідності в межах $-\infty < B < +\infty$ призводить до зміни кута фазового зсуву від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Кут φ додатний при індуктивному характері провідності кола, тобто при $B > 0$. При цьому струм у нерозгалуженій частині кола відстає за фазою від напруги, і кут φ відраховують вдовж осі абсцис вліво від струму до напруги. Кут φ від'ємний при ємнісному характері провідності кола, тобто при $B < 0$. При цьому напруга відстає за фазою від струму, і кут φ відраховують вдовж осі абсцис вправо від струму до напруги.

Якщо індуктивна і ємнісна провідності чисельно однакові, то вони компенсують одна одну й повна провідність кола є суто активною

$$\begin{aligned} B &= B_L - B_C = 0; \\ Y &= G. \end{aligned} \quad (1.59)$$

У цьому випадку струм і напруга збігаються за фазою.

У випадку відсутності в колі резистивного елемента ($G=0$), повна провідність ділянки кола буде суто реактивною, а кут фазового зсуву дорівнює $\varphi = \frac{\pi}{2}$, якщо $B_L > B_C$, або дорівнює $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, якщо $B_L < B_C$.

На рис. 1.8 представлені хвильові й суміщені векторні діаграми напруг і струму для випадку активно-індуктивного характеру провідності ділянки електричного кола ($\varphi > 0$), а на рис. 1.9 для випадку активно-ємнісного характеру провідності ($\varphi < 0$).

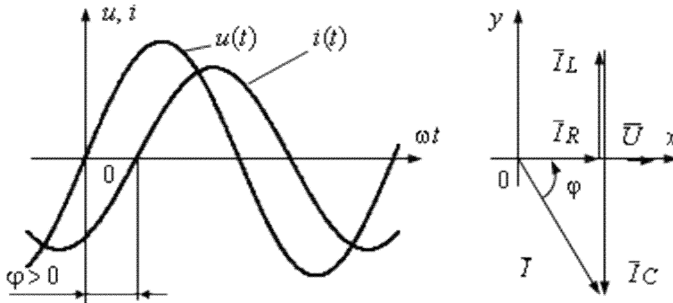


Рисунок 1.8

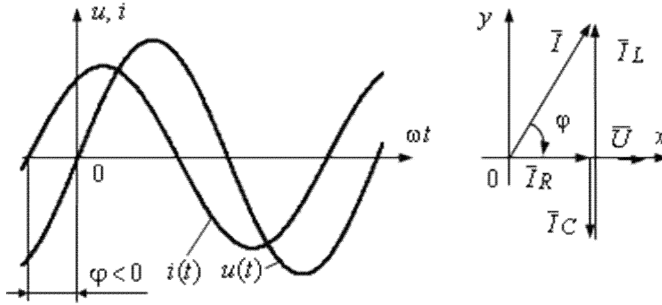


Рисунок 1.9

З отриманих рівнянь витікає, що активна й реактивна провідності кола зв'язані з повною провідністю співвідношеннями

$$\begin{aligned} G &= Y \cos \varphi, \\ B &= Y \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Помноживши праві й ліві частини рівнянь (1.60) на діюче значення напруги, одержимо діючі значення струмів через активну й реактивну провідності, які називають відповідно *активною* й *реактивною складовими струму*

$$\begin{aligned} I_a &= GU = YU \cos \varphi = I \cos \varphi, \\ I_p &= BU = YU \sin \varphi = I \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Тому що миттєві значення струмів через активну й реактивну провідності мають зсув за фазою на кут $\frac{\pi}{2}$, то діюче значення струму пов'язане з активною й реактивною складовими співвідношенням

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}. \quad (1.62)$$

Якщо на вході електричного кола з паралельним з'єднанням резистивного, індуктивного і ємнісного елементів протікає струм

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (1.63)$$

то напруга на затискачах ділянки кола

$$u = YI_m \sin(\omega t + \psi_i + \varphi). \quad (1.64)$$

1.6 Потужність електричного кола синусоїдного струму

Розглянемо деяку довільну ділянку електричного кола, що не містить джерел електричної енергії й з'єднана з іншими ділянками кола у двох вузлах. Як відзначалося раніше, таку ділянку електричного кола називають пасивним двополюсником.

Нехай початкова фаза вхідної напруги на затискачах цього двополюсника дорівнює нулю, а кут фазового зсуву між вхідними напругою й струмом φ . Тоді

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin \omega t, \\ i &= I_m \sin(\omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Миттєва потужність, що характеризує швидкість надходження енергії у двополюсник

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \sin \omega t I_m \sin(\omega t - \varphi) = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} (\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (1.66)$$

складається із двох доданків: постійної складової $UI \cos \varphi$ і змінної гармонійної складової $UI \cos(\omega t - \varphi)$, що змінюється з подвоєною кутовою частотою в порівнянні з кутовою частотою вхідних напруги й струму.

Середнє значення другого доданка за час періоду T , протягом якого вона здійснює два цикли змін, дорівнює нулю

нутий двополюсник

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = UI \cos \varphi. \quad (1.67)$$

Множник $\cos \varphi$ називають *коефіцієнтом потужності*. Чим ближче кут φ до нуля, тим ближче $\cos \varphi$ до одиниці й, отже, тим більша при заданих значеннях напруги й струму, активна потужність передається від джерела двополюснику.

Значення активної потужності, яку споживає пасивний двополюсник, не може бути від'ємним (інакше двополюсник буде генерувати енергію), тому $\cos \varphi \geq 0$, тобто на вході пасивного двополюсника $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Випадок $P = 0$, $|\varphi| = \frac{\pi}{2}$ теоретично можливий для двопо-

люсника, що не має резистивних елементів (двополюсник без втрат), а містить тільки ідеальні індуктивні й ємнісні елементи.

Активна потужність може бути розрахована й за іншими формулами:

$$P = I^2 Z \cos \varphi = U^2 Y \cos \varphi = I^2 R = U^2 G. \quad (1.68)$$

Активна потужність може бути також виражена через активні складові напруги ($U_a = U \cos \varphi$) або струму ($I_a = I \cos \varphi$)

$$P = U_a I = U I_a. \quad (1.69)$$

Співвідношення (1.69) пояснюють фізичний зміст понять активні складові струму й напруги. Вони відповідають тій частині струму або напруги, які витрачається у двополюснику на перетворення електромагнітної енергії в інші види енергії.

Розглянемо докладніше електричне коло у випадку активно-індуктивного характеру навантаження. При цьому

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad (1.70)$$

$$0 < \cos \varphi < 1.$$

Відповідно до рівняння (4.78) миттєва потужність коливається з подвоєною кутовою частотою 2ω щодо лінії, що відстоїть від осі ωt на $P = UI \cos \varphi$ (рис. 1.10).

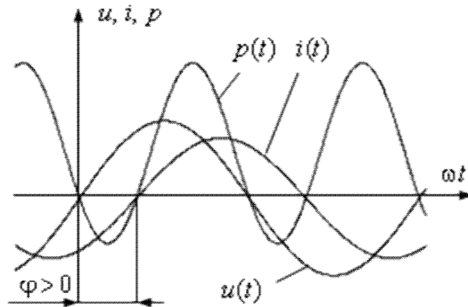


Рисунок 1.10

У проміжки часу, коли вхідні напруга й струм мають однакові знаки, значення миттєвої потужності додатне; енергія надходить із джерела енергії у двополюсник. У двополюснику вона розсіюється у вигляді теплової енергії в резистивних елементах і запасється у ви-

гляді енергії магнітного поля в індуктивних елементах й енергії електричного поля в ємнісних елементах.

У проміжки часу, коли напруга й струм мають різні знаки, значення миттєвої потужності від'ємне; енергія частково повертається із двополюсника в джерело. Відбувається це за рахунок перетворення енергії, що була запасена в магнітних й електричних полях відповідно індуктивних й ємнісних елементів

Як видно з рис. 1.10 протягом більшої частини періоду значення миттєвої потужності додатне й відповідно додатна (розташована над віссю часу) площа кривої переважає над від'ємною площею кривої. У результаті середня потужність за період, тобто активна потужність, $P > 0$.

Аналогічні процеси відбуваються й у випадку активно-ємнісного характеру кола. При цьому

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0; \\ 0 < \cos \varphi < 1. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Величину, що чисельно дорівнює добутку діючих значень вхідних струму й напруги на затискачах кола називають *повною потужністю*

$$S = UI. \quad (1.72)$$

Амплітуда синусоїдної складової миттєвої потужності чисельно дорівнює повній потужності.

Повна потужність є розрахунковою потужністю, тому що ця потужність урахує напругу й струм, за значеннями яких вибираються всі елементи електротехнічних пристроїв й апаратів. Тому в технічних даних електричних машин указують їхню повну потужність.

Коефіцієнт потужності може бути визначений через активну й повну потужність

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}. \quad (1.73)$$

Повна потужність не має фізичного змісту, але її можна визначити як максимально можливу активну потужність при заданих значеннях вхідних струму й напруги, тобто активну потужність при $\cos \varphi = 1$.

Інтенсивність обміну енергії прийнято характеризувати максимальним значенням швидкості надходження енергії в магнітне поле індуктивних елементів й електричне поле ємнісних елементів, яку називають *реактивною потужністю*.

У загальному випадку формула для реактивної потужності має вигляд:

$$Q = UI \sin \varphi. \quad (1.74)$$

Залежно від знака кута φ значення реактивної потужності може бути або додатним, або від'ємним. За знаком реактивної потужності можна судити про характер енергії, що запасається в електричному колі: якщо $Q > 0$ енергія запасається переважно в магнітному полі індуктивних елементів, якщо $Q < 0$ - в електричному полі ємнісних елементів. Якщо $Q = 0$ у колі відсутній обмін енергією між реактивними елементами й джерелом.

Реактивні потужності індуктивних й ємнісних елементів можуть бути представлені у вигляді:

$$\begin{aligned} Q_L &= UI \sin \frac{\pi}{2} = UI = \omega LI^2 = \omega \frac{LI_m^2}{2} = \omega W_{L \max}, \\ Q_C &= UI \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -UI = -\omega CU^2 = -\omega \frac{CU_m^2}{2} = \omega W_{C \max}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

де $W_{L \max}$, $W_{C \max}$ - максимальні значення енергії, які періодично запасують індуктивні і ємнісні елементи.

Реактивна потужність електричного кола, що містить індуктивні і ємнісні елементи, пропорційна різниці максимальних значень енергії, які запасуються в магнітному й електричному полях:

$$Q = \omega(W_{L \max} - W_{C \max}). \quad (1.76)$$

Реактивна потужність може бути обчислена й за іншими формулами:

$$Q = I^2 Z \sin \varphi = U^2 Y \sin \varphi = I^2 X = U^2 Y. \quad (1.77)$$

Реактивна потужність може бути також виражена через реактивні складові напруги ($U_p = U \sin \varphi$) або струму ($I_p = I \sin \varphi$)

$$Q = U_p I = UI_p. \quad (1.78)$$

Співвідношення (1.78) пояснює фізичний зміст понять реактивні складові струму й напруги. Вони відповідають тій частині струму або напруги, що витрачається у двополюснику на формування магнітних або електричних полів і запасання енергії в них.

Активна, реактивна й повна потужності мають однакову розмірність (Дж/с). Для того щоб підкреслити різний фізичний зміст, що вкладається в ці поняття, одиницям даних величин привласнені різні назви. Одиниця вимірювання активної потужності, так само як і миттєвої потужності, є ватах (Вт), повної потужності - вольт-ампер (ВА), реактивної потужності - у вольт-ампер реактивний (вар).

З виразів (4.79, 4.84, 4.86) витікає взаємозв'язок активної, повної й реактивної потужності:

$$\begin{aligned} S^2 &= P^2 + Q^2, \\ \text{tg}\varphi &= \frac{Q}{P}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

1.7 Резонансні явища в колах синусоїдного струму

В електричному колі синусоїдного струму, що містить як індуктивні, так й ємнісні елементи, накладаються два процеси передачі енергії.

Перший виникає між електричним колом і зовнішнім джерелом енергії. Цей процес протікає із частотою *змушених коливань*, що задає джерело енергії.

Другий виникає усередині електричного кола в результаті обміну енергією між індуктивними і ємнісними елементами (накопичувачами енергії). Цей процес відбувається із частотою *власних (вільних) коливань*, що залежить від параметрів елементів розглядуваного кола.

У теорії коливань резонансом називається процес змушених коливань із частотою власних коливань. Інтенсивність коливань при такому режимі за інших рівних умов максимальна. Тому резонанс, що відповідає цьому визначенню, умовно називають *амплітудним*.

В електротехніці *резонансом* називають такий режим пасивного кола, що містить як індуктивні, так й ємнісні елементи, при якому струм на вході кола, якщо він є відмінним від нуля, збігається за фазою з вхідною напругою. Тому резонанс, що відповідає цьому визначенню, умовно називають *фазовим*. При резонансі вхідний реактивний опір (вхідна реактивна провідність) кола дорівнює нулю.

У колах з малими втратами резонансні частоти, що відповідають амплітудному й фазовому резонансам, збігаються.

Найпростіше електричне коло, у якому може виникати коливальний обмін енергією між індуктивним й ємнісним елементами, називають *одиначним коливальним контуром*. Він являє собою замкнуте коло, що містить у собі індуктивний і ємнісний елементи. Розрізняють послідовний й паралельний коливальні контури.

1.8 Послідовний коливальний контур. Резонанс напруг

Послідовний коливальний контур являє собою електричне коло, що містить ємнісний й індуктивний елементи, які з'єднанні послідовно із джерелом енергії (рис. 1.11). Наявність резистивного елемента не обов'язкова, хоча звичайно він є присутнім.

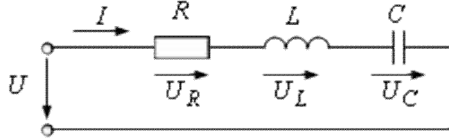


Рисунок 1.11

Фазовий зсув для такого електричного кола

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (1.80)$$

Оскільки за визначенням резонанс виникає у випадку збігу початкових фаз вхідних напруги й струму ($\varphi = 0$), то умова резонансу в послідовному коливальному контурі

$$X = X_L - X_C = 0, \quad (1.81)$$

або, що те ж саме

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0. \quad (1.82)$$

Є два способи досягнення резонансу:

- *параметричний*, тобто шляхом підбора відповідних параметрів L й C при заданій незмінній кутовій частоті ω джерела енергії;
- *частотний*, тобто шляхом підбора кутової частоти ω джерела енергії при заданих незмінних параметрах L й C .

З виразу (1.82) можна визначити кутову частоту, при якій настає режим резонансу в послідовному контурі. Її називають *резонансною частотою*

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (1.83)$$

При резонансі значення повного опору є мінімальним й чисельно дорівнює активному опору контуру

$$Z_o = \sqrt{R^2 + (X_{Lo} - X_{Co})^2} = R. \quad (1.84)$$

Діюче значення струму при незмінних параметрах контуру в цьому випадку досягає максимального значення

$$I_o = \frac{U}{R}. \quad (1.85)$$

Опори реактивних елементів при резонансній частоті дорівнюють один одному

$$\begin{aligned} X_{Lo} &= \omega_o L = \frac{L}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \\ X_{Co} &= \frac{1}{\omega_o C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Величину, що чисельно дорівнює опорі індуктивного або ємнісного елемента при резонансі називають *характеристичним (хвильовим) опором* контуру

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1.87)$$

Одиниця вимірювання хвильового опору *ом (Ом)*.

У режимі резонансу напруги на індуктивному і ємнісному елементі є однаковими й урівноважують одна одну. Тому резонанс у послідовному коливальному контурі називають *резонансом напруг*.

Векторна діаграма для послідовного контуру в режимі резонансу напруг представлена на рис. 1.12. Тут напруги на затискачах реактивних елементів U_L і U_C однакові і компенсують одна одну, бо їхні вектори перебувають у протифазі (кут фазового зсуву між ними дорівнює π). Вся вхідна напруга U припадає на активний опір R .

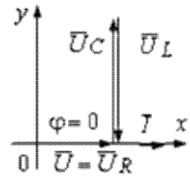


Рисунок 1.12

Відношення діючого значення напруги на затискачах індуктивного або ємнісного елемента до діючого значення вхідної напруги на затискачах кола при резонансі напруг називають *добротністю контуру*

$$D = \frac{U_{Lo}}{U} = \frac{U_{Co}}{U} = \frac{I_o X_{Lo}}{I R} = \frac{I_o X_{Co}}{I R} = \frac{I_o \rho}{I_o R} = \frac{\rho}{R}. \quad (1.88)$$

З отриманого співвідношення видно, що якщо $X_{Lo} = X_{Co} > R$ (або що ж саме $D > 1$), та напруга на затискачах реактивних елементів буде перевищувати напругу, що прикладена до вхідних затисків кола.

Ця властивість дозволяє використовувати послідовний коливальний контур як підсилювач напруги. Обладнання яке працює у режимі резонансу напруг широко застосовують у радіотехніці. Добротність коливальних контурів радіотехнічної апаратури лежить у межах від декількох десятків до декількох сотень, тому в режимі резонансу напруга на реактивних елементах може в багато разів перевищувати прикладене до контуру напруга.

У той же час в силових електричних колах резонанс напруг звичайний явище небажане, тому що виникаючі перенапруги можуть спричинити пробій ізоляції й вивести з ладу електроустаткування. Крім того, таке підвищення напруги необхідно враховувати з погляду техніки безпеки.

Величину, що є зворотною до добротності контуру називають *загасанням контуру*

$$d = \frac{1}{D} = \frac{R}{\rho}. \quad (1.89)$$

Добротність контуру й загасання контуру є безрозмірними величинами.

Розглянемо енергетичні процеси в реактивних елементах контуру при резонансі напруг. У цьому випадку вхідні напруга й струм контуру збігаються за фазою і кутова частота джерела збігається з резонансною частотою $\omega = \omega_0$

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega_0 t + \psi); \\ u &= U_m \sin(\omega_0 t + \psi). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Миттєве значення енергії, що запасається в магнітному полі індуктивного елемента в режимі резонансу

$$\begin{aligned} w_L &= \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \psi) = LI^2 \sin^2(\omega_0 t + \psi) = \\ &= \frac{LI^2}{2} (1 - \cos 2(\omega_0 t + \psi)). \end{aligned} \quad (1.91)$$

Напруга на затискачах ємнісного елемента

$$u_{Co} = I_m \frac{1}{\omega_0 C} \sin\left(\omega_0 t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \rho \sin\left(\omega_0 t + \psi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.92)$$

Миттєве значення енергії, що запасасться в електричному полі ємнісного елемента в режимі резонансу

$$\begin{aligned}
 w_C &= \frac{Cu^2}{2} = \frac{CI_m^2 \rho^2}{2} \sin^2 \left(\omega_o t + \psi - \frac{\pi}{2} \right) = \\
 &= \frac{CI_m^2 \rho^2}{2} \cos^2 (\omega_o t + \psi) = CI^2 \rho^2 \cos^2 (\omega_o t + \psi) = \\
 &= \frac{LI^2}{2} (1 + \cos 2(\omega_o t + \psi)).
 \end{aligned} \tag{1.93}$$

Як видно з отриманих виразів (1.91 і 1.93), енергія, що запасасться в реактивних елементах, має дві складові: постійну й змінну, що змінюється з подвоєною частотою $2\omega_o$. Причому змінні складові енергій індуктивного й ємнісного елементів перебувають у протифазі. Тому сумарна енергія, що запасасться в реактивних елементах, постійна

$$w = w_L + w_C = LI^2 = CU_C^2. \tag{1.94}$$

Припустимо, що в розглянутому електричному колі параметри пасивних елементів R , L , C й амплітуда напруги U на вході контуру лишаються незмінними, а кутова частота джерела змінюється.

Залежності струму, опорів, фазового зсуву між вхідними напругою й струмом, напруг на окремих ділянках кола від частоти називають *частотними характеристиками контуру*.

Розглянемо графіки частотних характеристик індуктивного й реактивного опорів (рис. 1.13, *а*), реактивного й повного опору контуру (рис. 1.13, *б*) і кута фазового зсуву між вхідними напругою й струмом (рис. 1.13, *в*). Вони описуються наступними виразами:

$$\begin{aligned}
 X_L(\omega) &= \omega L; \\
 X_C(\omega) &= \frac{1}{\omega C}; \\
 X(\omega) &= \omega L - \frac{1}{\omega C}; \\
 Z(\omega) &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}; \\
 \varphi(\omega) &= \frac{1}{R} \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).
 \end{aligned} \tag{1.95}$$

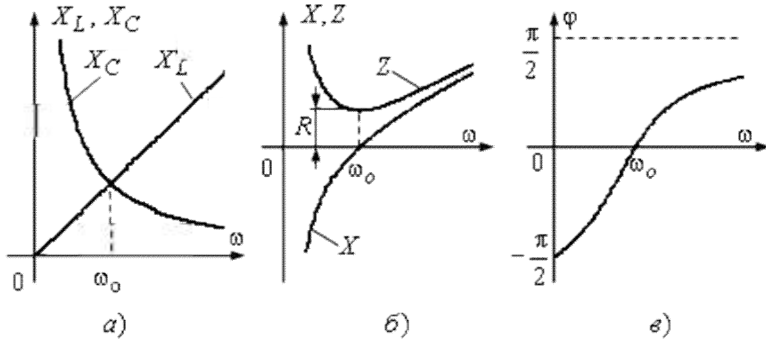


Рисунок 1.13

При частотах нижче резонансної $X_C > X_L$ (рис. 1.13, а) й тому повний опір кола має активно-ємнісний характер, а кут фазового зсуву $\varphi < 0$ (рис. 1.13, в). При частотах вище резонансної $X_C < X_L$ й тому повний опір кола має активно-індуктивний характер, а кут фазового зсуву $\varphi > 0$.

Розглянемо графіки частотних характеристик вхідного струму й напруги на затискачах резистивного елемента (рис. 1.14, а), напруги на затискачах індуктивного і ємнісного елементів (рис. 1.14, б). Такі графіки називають *резонансними кривими*. Вони описуються наступними виразами:

$$\begin{aligned}
 I(\omega) &= \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \\
 U_R(\omega) &= \frac{UR}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \\
 U_L(\omega) &= \frac{U\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \\
 U_C(\omega) &= \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.
 \end{aligned} \tag{1.96}$$

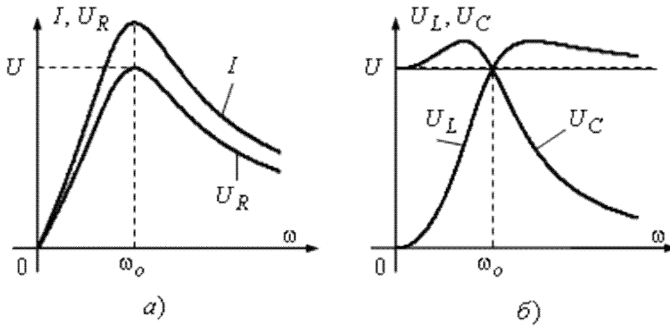


Рисунок 1.14

Графік залежності струму від частоти показує, що розглянуте коло має вибірні властивості. Контур має найменший опір для струмів, кутова частота яких близька до його резонансної частоти.

Графік залежності напруги на резистивному елементі від кутової частоти повторює форму графіка залежності струму від кутової частоти (рис. 1.14, а). З графіків (рис 1.14, б) видно, що напруги на індуктивному і ємнісному елементах мають максимуми однакові за значенням, але зсунені щодо резонансної частоти. Максимум напруги ємнісного елемента зсунений убік менших частот $\omega_{C \max} < \omega_0$, тобто раніш максимуму струму, тому що для одержання значення напруги U_C необхідно помножити значення струму I на убутнє значення ємнісного опору X_C . Максимум індуктивного зсунений убік більших частот $\omega_{L \max} > \omega_0$, тобто пізніше максимуму струму, тому що для одержання значення напруги U_L необхідно помножити значення струму I на зростаюче значення індуктивного опору X_L .

Максимуми напруг на індуктивному і ємнісному елементах мають місце при частотах

$$\begin{aligned}\omega_{L \max} &= \omega_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{R^2 C}{2L}}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{2D}}}; \\ \omega_{C \max} &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{D}}.\end{aligned}\tag{1.97}$$

Значення максимумів напруг на індуктивному і ємнісному елементах й їхній зсув залежать від добротності контуру. Зі збільшенням добротності максимальні значення збільшуються, а їхні частоти прагнуть до резонансної частоти.

Для оцінки впливу значень параметрів на форму резонансній кривій $I(\omega)$ виразимо дані величини у відносних одиницях, використовуючи як базисні значення: для струму - струм у режимі резонансу $I_o = \frac{U}{R}$, для кутових частот - резонансну частоту $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Перетворимо вираз повного опору кола:

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L D R}{D R} - \frac{D R}{\omega C D R}\right)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 + D^2 R^2 \left(\frac{\omega L R}{\sqrt{\frac{L}{C}} R} - \frac{R}{\omega C \sqrt{\frac{L}{C}} R}\right)^2} = \\ &= R \sqrt{1 + D^2 \left(\omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}}\right)^2} = R \sqrt{1 + D^2 \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Відносне значення струму в контурі

$$\frac{I}{I_o} = \frac{U}{Z} \cdot \frac{R}{U} = \frac{1}{\sqrt{1 + D^2 \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}}. \quad (1.99)$$

Чим більше добротність контуру (тобто чим менше активний опір контуру при незмінних інших параметрах кола), тим більш гострою стає форма кривої. Чим гостріше резонансна крива, тим краще вибірні властивості контуру. На рис. 1.15 представлені резонансні криві $\frac{I}{I_o} \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)$ для контурів, добротності яких розрізняються у два рази.

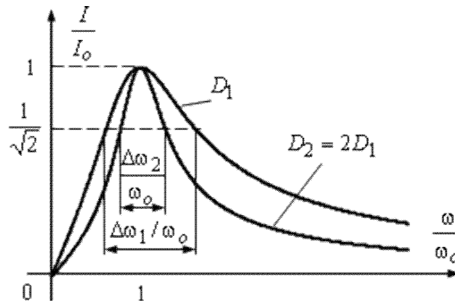


Рисунок 1.15

Для оцінки вибірних властивостей кола вводять умовне поняття *смуга пропускання контуру*, тобто смуга частот, у межах якої активна потужність, яку споживає контур, і вхідний струм контуру, задовольняють умовам

$$\frac{P}{P_o} \geq \frac{1}{2}; \quad \frac{I}{I_o} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (1.100)$$

де P_o - активна потужність, яку споживає контур у резонансному режимі.

Відносна смуга пропускання

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_o} = \frac{\omega_2}{\omega_o} - \frac{\omega_1}{\omega_o} = \frac{1}{D} = d. \quad (1.101)$$

1.9 Паралельний коливальний контур. Резонанс струмів

Паралельний коливальний контур являє собою електричне коло, що містить ємнісний й індуктивний елементи, які з'єднані паралельно з джерелом енергії (рис. 1.16). Наявність резистивних елементів не обов'язкова, хоча звичайно вони присутні.

Кут фазового зсуву для такого електричного кола

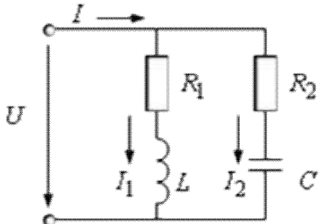


Рисунок 1.16

$$\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G}. \quad (1.102)$$

Оскільки за визначенням резонанс виникає у випадку збігу початкових фаз вхідних напруги й струму ($\varphi = 0$), то умова резонансу в паралельному коливальному контурі

$$B = B_L - B_C = 0. \quad (1.103)$$

Активні й реактивні провідності паралельних віток:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2}; & B_L &= \frac{X_L}{Z_1^2} = \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}; \\ G_2 &= \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{R_2}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}; & B_C &= \frac{X_{C2}}{Z_2^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

За умовою резонансу

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}. \quad (1.105)$$

Розв'язавши рівняння (1.106), одержимо вираз для резонансної кутової частоти:

$$\omega_o' = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}} = \omega_o \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (1.106)$$

Аналіз виразу (1.106) дозволяє відзначити ряд особливостей явища резонансу в паралельному контурі:

- резонансна частота залежить не тільки від параметрів реактивних елементів контуру, але й від активних опорів R_1 й R_2 . Тому резонансу в паралельному контурі можна домогтися зміною п'яти параметрів. Причому, зміною індуктивності або ємності в контурі можна створити два резонансних режими. У цьому можна переконатися проаналізувавши умову резонансу. Вираз (1.105) відносно L або C є квадратним рівнянням, і при певних співвідношеннях інших параметрів може дати два речовинних розв'язання.

- резонанс можливий лише, якщо обидва активні опори не менші або обидва не більші ніж хвильовий опір. Якщо ця умова не виконана, то кутової частоти, при якій мав би місце резонанс, не існує (тому що значення підкореневого виразу в (1.106) у цьому випадку від'ємне).

Векторна діаграма для паралельного контуру в режимі резонансу представлена на рис. 1.17. При її побудові використовуємо активні й реактивні складові струмів

$$\begin{aligned} I_{a1} &= UG_1; & I_{p1} &= UB_L; \\ I_{a2} &= UG_2; & I_{p2} &= UB_C. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Оскільки реактивні складові струмів I_{1p} і I_{2p} дорівнюють одна одній і компенсують одна одну, бо їхні вектори перебувають у протифазі (фазовий зсув між ними дорівнює π), то резонанс у паралельному коливальному контурі одержав назву *резонанс струмів*.

У результаті компенсації реактивних складових струмів вхідний струм у нерозгалуженій частині паралельного коливального контуру є сумою лише активних складових струмів у паралельних вітках.

З векторної діаграми (рис. 1.17) випливає, що при резонансі струмів вхідний струм паралельного коливального контуру може бути значно менше струмів у вітках.

Ця властивість дозволяє використати паралельний коливальний контур як підсилювач струму.

Опір паралельного контуру при резонансі струмів

$$Z_o = R_o = \frac{R_1 R_2 + \rho^2}{R_1 + R_2}. \quad (1.108)$$

Струм у нерозгалуженій частині паралельного контуру при резонансі струмів

$$I_o = \frac{U}{R_o}. \quad (1.109)$$

Добротність паралельного контуру

$$D = \frac{\rho}{R_1 + R_2}. \quad (1.110)$$

Енергетичні процеси в паралельному коливальному контурі в резонансному режимі такі ж як й у послідовному контурі: сумарна енергія, що запасасться в магнітному й електричному полях кола постійна й дорівнює максимальній енергії індуктивного (або ємнісного) елемента. Між індуктивним й ємнісним елементами відбувається коливальний обмін енергією. Джерело енергії в цьому процесі не бере участь, воно тільки віддає енергію активним елементам контуру.

При виконанні умови $R_1 = R_2 \neq \rho$, резонансна частота у паралельному коливальному контурі така сама, як при резонансі в послідовному коливальному контурі

$$\omega_o' = \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.111)$$

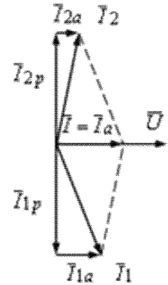


Рисунок 1.17

При виконанні умови $R_1 = R_2 = \rho$, резонанс спостерігається при будь-якій частоті. Дійсно активні й реактивні провідності паралельних віток в цьому випадку

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{L}{C} + \omega^2 L^2} = \frac{\sqrt{LC}}{L + \omega^2 L^2 C}; \\ B_L &= \frac{\omega L}{\frac{L}{C} + \omega^2 L^2} = \frac{\omega C}{1 + \omega^2 LC}; \\ G_2 &= \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{\sqrt{LC} \omega^2 C}{\omega^2 LC + 1}; \\ B_C &= \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{\omega C}{\omega^2 LC + 1}. \end{aligned} \quad (1.112)$$

З виразів (1.112) витікає, що еквівалентна реактивна провідність кола дорівнює нулю, а еквівалентна повна провідність кола дорівнює еквівалентній активній й не залежить від частоти.

$$Y = G = G_1 + G_2 = \frac{\sqrt{LC}}{L + \omega^2 L^2 C} + \frac{\sqrt{LC} \omega^2 C}{L + \omega^2 L^2 C} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \rho. \quad (1.113)$$

Отже, струм збігається за фазою з напругою при будь-якій частоті і його діюче значення

$$I = \frac{U}{\rho}. \quad (1.114)$$

В ідеальному паралельному коливальному контурі активні опори втрати відсутні й $R_1 = R_2 = 0$ (рис. 1.18).

Резонансна частота ідеального паралельного контуру збігається з резонансною частотою послідовного контуру (1.83).

У цьому окремому випадку $I_{a1} = I_{a2} = 0$. Тому при резонансі $I_1 = I_2 = I_{p1} = I_{p2}$, а вхідний струм $I = I_1 + I_2 = I_{p1} - I_{p2} = 0$, як представлено на векторній діаграмі (рис. 1.19).

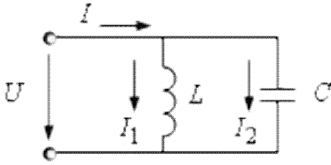


Рисунок 1.18

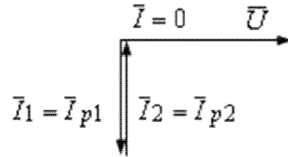


Рисунок 1.19

Посилення струму в цьому випадку прагне в нескінченність.

Розглянемо графіки частотних характеристик реактивних провідностей віток і вхідної провідності для ідеального паралельного контуру (рис. 1.20, а), а також резонансну криву вхідного струму (рис. 1.20, б). Вони задаються наступними виразами:

$$\begin{aligned} B_L(\omega) &= \frac{1}{\omega L}; \\ B_C(\omega) &= \omega C; \\ B(\omega) &= \frac{1}{\omega L} - \omega C; \\ I(\omega) &= \left| \frac{1}{\omega L} - \omega C \right| \cdot U \end{aligned} \quad (1.115)$$

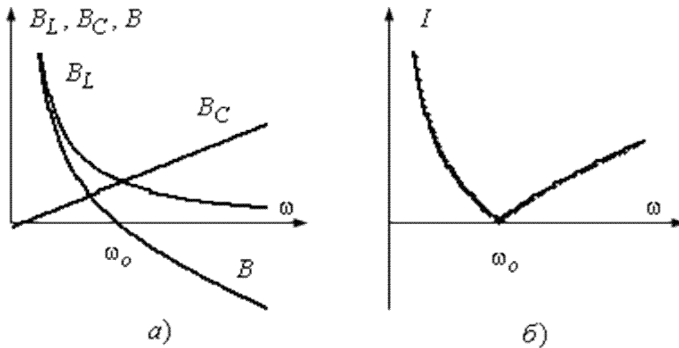


Рисунок 1.20

Резонанс струмів на відміну від резонансу напруг - явище безпечне для електроенергетичних установок. Тому що струми в вітках взаємно незалежні, то їхні значення обумовлюються прикладеною напругою й повними опорами віток (відповідно до закону Ома).

1.10 Підвищення коефіцієнта потужності споживачів електричної енергії

Для кращого використання обладнання повинне працювати з можливо більш високим коефіцієнтом потужності. Розроблювачі електроустановок прагнуть забезпечити його максимальне значення. Наявність в електричних мережах реактивних струмів обумовлює додаткові втрати активної потужності в трансформаторах, генераторах електростанцій, додаткові втрати напруги, вимагає збільшення номінальної потужності трансформаторів. Високий коефіцієнт потужності навантаження потрібний також для зниження втрат при передачі енергії.

Струм у лінії електропередачі (ЛЕП) обумовлюється навантаженням

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi}. \quad (1.116)$$

Втрати енергії в лінії передачі

$$\Delta P = R_L I^2 = R_L \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi}, \quad (1.117)$$

де R_L - активний опір лінії.

Отже, втрати в лінії передачі дуже сильно залежать від $\cos \varphi$, тому що вони обернено пропорційні квадрату його значення. Чим менше коефіцієнт потужності, тим дорожче обходиться електропостачання.

Задача підвищення коефіцієнта потужності особливо істотна для енергоємних споживачів, наприклад металургійних комбінатів.

Вхідний опір більшості споживачів електричної енергії має активно-індуктивний характер ($\varphi > 0$). Основними споживачами реактивної потужності індуктивного характеру на промислових підприємствах є асинхронні двигуни (60-65 % загального її споживання), трансформатори, в тому числі зварювальні (20-25%), вентильні перетворювачі, реактори та інше.

З метою підвищення коефіцієнта потужності здійснюють ряд заходів:

- замінюють асинхронні двигуни, які недовантажені, двигунами меншої потужності (для АД в режимі холостого ходу $\cos \varphi_0 = 0,2...0,3$, а в режимі номінального навантаження $\cos \varphi_n = 0,85...0,9$);

- замінюють трансформатори й інше електроустаткування старих конструкцій на більш досконалі, з меншими втратами на перемагнічування;

- створюють раціональні схеми електропостачання за рахунок зменшення кількості шаблів трансформації;
- застосовують синхронні двигуни замість асинхронних, коли це припустимо за умовами технологічного процесу, (бо у синхронних двигунів у режимі перезбудження $\varphi < 0$);
- додатково підмикають до споживачів застосовуються спеціальні компенсуючі пристрої, що є джерелами реактивної енергії ємнісного характеру: конденсаторні батареї відповідної ємності та вентиляльні статичні джерела реактивної потужності.

Економічно вигідно підмикати конденсатори на можливо більш високу напругу, тому що це дозволяє застосовувати конденсатори меншої ємності. Індивідуальна компенсація за допомогою конденсаторів доцільна лише для потужних споживачів із відносно низьким коефіцієнтом потужності й великою кількістю годин роботи в році.

1.11 Система рівняння для миттєвих значень струмів і напруг у складних колах синусоїдного струму

Припустимо, що є схема складного розгалуженого електричного кола синусоїдного струму з декількома джерелами енергії, закони зміни й додатні напрямки яких задані (рис. 1.21). Також відомі активні опори, індуктивності і ємності пасивних елементів електричного кола. Необхідно визначити струми у всіх вітках електричного кола.

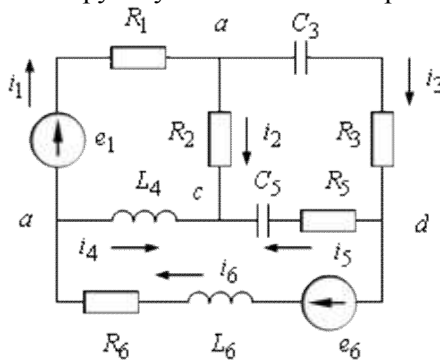


Рисунок 1.21

Як і для кіл постійного струму, розв'язання варто почати з вибору додатних напрямків струмів.

Як видно зі схеми електричного кола кількість невідомих струмів шість (що відповідає кількості віток, які не містять джерел струму), отже, необхідно скласти шість незалежних рівнянь на підставі законів Кірхгофа.

Складаємо три рівняння за першим законом Кірхгофа для вузлів *a, b, c*. Інші три рівняння складаємо за другим законом Кірхгофа для трьох незалежних контурів електричного кола. Напрямок обходу контурів прийнято за годинною стрілкою.

$$\begin{cases} i_1 + i_4 - i_6 = 0; \\ i_2 + i_3 - i_1 = 0; \\ -i_2 - i_4 - i_5 = 0; \\ u_{R_1} + u_{R_2} - u_{L_4} = e_1; \\ u_{C_3} + u_{R_3} + u_{R_5} + u_{C_5} - u_{R_2} = 0; \\ u_{L_4} - u_{C_5} - u_{R_5} + u_{L_6} + u_{R_6} = e_6. \end{cases} \quad (1.118)$$

Напруги й струми для пасивних елементів електричного кола зв'язані наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} u_{R_1} &= R_1 i_1; & u_{R_2} &= R_2 i_2; & u_{R_3} &= R_3 i_3; \\ u_{R_5} &= R_5 i_5; & u_{R_6} &= R_6 i_6; & u_{L_4} &= L_4 \frac{di_4}{dt}; \\ u_{L_6} &= L_6 \frac{di_6}{dt}; & u_{C_3} &= \frac{1}{C_3} \int i_3 dt; & u_{C_5} &= \frac{1}{C_5} \int i_5 dt. \end{aligned} \quad (1.119)$$

З обліком цього система рівнянь (1.118) матиме вигляд:

$$\begin{cases} i_1 + i_4 - i_6 = 0; \\ i_2 + i_3 - i_1 = 0; \\ -i_2 - i_4 - i_5 = 0; \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 - L_4 \frac{di_4}{dt} = e_1; \\ \frac{1}{C_3} \int i_3 dt + R_3 i_3 + R_5 i_5 + \frac{1}{C_5} \int i_5 dt - R_2 i_2 = 0; \\ L_4 \frac{di_4}{dt} - \frac{1}{C_5} \int i_5 dt - R_5 i_5 + L_6 \frac{di_6}{dt} + R_6 i_6 = e_6. \end{cases} \quad (1.120)$$

Отримана система диференціальних рівнянь у загальному випадку дозволяє розрахувати струми електричного кола при довільній їхній зміні, у тому числі й зміні за синусоїдним законом.

На практиці аналіз таких кіл звичайно виконують за допомогою символічного методу (методу комплексних амплітуд).

1.12 Подання електричних величин, які змінюються за синусоїдним законом, комплексними числами

Як було зазначено вище в підрозділі 1.3, електричні величини, які змінюються за синусоїдним законом, можна представити у вигляді векторів. Будь який вектор на площині можна представити сукупністю двох координат: або в прямокутній декартовій системи координат двома проекціями на осі, або в полярній системі координат у вигляді модуля (довжини) і кута з віссю, що прийнята за початок відліку (аргументу).

З курсу математики відомо, що комплексне число $\underline{X}$ може бути записане в показовій або алгебраїчній формі:

$$\underline{X} = Xe^{j\psi} = X(\cos\varphi + j\sin\varphi) = X' + jX'' = \text{Re}(\underline{X}) + j\text{Im}(\underline{X}), \quad (1.121)$$

де X - модуль комплексного числа; e - основа натурального логарифма; j - уявна одиниця ($j = \sqrt{-1}$); φ - аргумент комплексного числа; X' й $\text{Re}(X)$ - дійсна частина комплексного числа; X'' й $\text{Im}(X)$ - уявна частина комплексного числа.

Це дає можливість представити електричні величини комплексними числами.

Наприклад, вектор напруги $\overline{U}_m$ відповідає комплексному числу $\underline{U}_m$, модуль якого дорівнює U_m й аргумент – куту ψ_u . Це комплексне число $\underline{U}_m$ називають *комплексною амплітудою* напруги. Як будь-яке комплексне число комплексну амплітуду можна представити в показовій, тригонометричній й алгебраїчній формах:

$$\begin{aligned} \underline{U}_m &= U_m e^{j\psi_u} = U_m (\cos\psi_u + j\sin\psi_u) = \\ &= U'_m + jU''_m = \text{Re}(\underline{U}_m) + j\text{Im}(\underline{U}_m). \end{aligned} \quad (1.122)$$

На практиці довжини векторів прийнято брати рівними в масштабі діючому значенню відповідної електричної величини. Під *комплексним діючим значенням* напруги розуміють величину:

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{\sqrt{2}} = U e^{j\psi_u}. \quad (1.123)$$

Алгебраїчну й показову форми запису комплексних чисел використовують у розрахунках. Тригонометрична форма є просто розгор-

нутим записом переходу від показової форми до алгебраїчної. Множник виду $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$ називають *оператором повороту*. Він являє собою одиничний вектор, що повернуто щодо дійсної осі на кут φ . Назва оператора пояснюється тим, що множення будь-якого вектора на оператор повороту призводить до розвороту цього вектора на кут φ . Дійсні й уявні числа $+1$; -1 ; $+j$; $-j$ можна розглядати як окремі

випадки оператор повороту: $1 = e^{j0}$; $-1 = e^{j\pi}$; $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$; $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$.

При розрахунках використовують відомі з курсу математики правила дій з комплексними числами.

Якщо комплексне число має вигляд $\underline{X} = X' + jX'' = X e^{j\varphi}$, то комплексне число $\underline{X}^* = X' - jX'' = X e^{-j\varphi}$ називають *спряженим комплексним числом*.

При додаванні або множенні спряжених комплексних чисел результатом є дійсні числа

$$\begin{aligned} (X' + jX'') + (X' - jX'') &= 2X'; \\ (X' + jX'') \cdot (X' - jX'') &= (X')^2 + (X'')^2. \end{aligned} \quad (1.124)$$

1.13 Символічний метод розрахунку кіл синусоїдного струму

Даний метод ґрунтується на ідеї функціонального перетворення, при якому операції над вихідними функціями (оригіналами) замінюють більш простими операціями над деякими новими функціями (зображеннями).

Сутність методу комплексних амплітуд полягає в тім, що при розрахунку лінійних кіл синусоїдного струму переходять від інтегродиференціальних рівнянь, які складені для миттєвих значень, до лінійних алгебраїчних рівнянь, які складені для комплексних амплітуд струмів і напруг. Цей перехід виконують наступним чином:

- миттєве значення струму i замінюють комплексною амплітудою струму $\underline{I}_m$;

- миттєве значення напруги на резистивному елементі, що дорівнює Ri – комплексною амплітудою напруги $R\underline{I}_m$, яка збігається зі струмом за фазою;

- миттєве значення напруги на індуктивному елементі, що дорівнює $L \frac{di}{dt}$ - комплексною амплітудою напруги $j\omega L \underline{I}_m$, яка випереджає струм за фазою на $\frac{\pi}{2}$ (про це свідчить множник j);

- миттєве значення напруги на ємнісному елементі, що дорівнює $\frac{1}{C} \int idt$ - комплексною амплітудою напруги $-\frac{j}{\omega C} \underline{I}_m$, яка відстає від струму за фазою на $\frac{\pi}{2}$ (про це свідчить множник $(-j)$);

- миттєве значення ЕРС e – комплексною амплітудою ЕРС $\underline{E}_m$.

Цей метод є найбільш ефективним для розрахунку складних кіл синусоїдного струму.

1.14 Закон Ома в комплексній формі. Комплексний повний опір. Комплексна повна провідність

Розглянемо електричне коло з послідовним з'єднанням резистивного, індуктивного і ємнісного елементів (рис. 1.22).

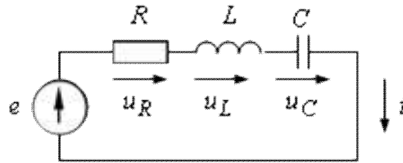


Рисунок 1.22

На підставі другого закону Кірхгофа для миттєвих значень

$$u_R + u_L + u_C = e, \quad (1.125)$$

або з урахуванням співвідношень між напругою й струмом для пасивних елементів електричного кола

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = e. \quad (1.126)$$

Перейдемо до комплексних амплітудних значень

$$R \underline{I}_m + j\omega L \underline{I}_m - j \frac{1}{\omega C} \underline{I}_m = (R + jX_L - jX_C) \underline{I}_m = \underline{E}_m. \quad (1.127)$$

Звідси маємо

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{R + jX_L - jX_C}. \quad (1.128)$$

Якщо поділити ліву й праву частини рівняння (1.128) на $\sqrt{2}$ одержимо рівняння, що дозволяє знайти комплексне діюче значення струму

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + jX_L - jX_C}. \quad (1.129)$$

Закон Ома в символічній формі запису

$$\underline{U} = (R + jX_L - jX_C) = \underline{Z} \underline{I}, \quad (1.130)$$

де - $\underline{Z} = R + jX_L - jX_C$ - комплексний повний опір в алгебраїчній формі, Ом.

Взаємні перетворення для комплексного повного опору з алгебраїчної форми в показову й навпаки:

$$\underline{Z} = R + jX_L - jX_C = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} e^{j\varphi} = Ze^{j\varphi}; \quad (1.131)$$

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Z \cos \varphi + j \sin \varphi = R + jX = R + j(X_L - X_C),$$

де $\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$ - аргумент комплексного повного опору (він же кут фазового зсуву між напругою й струмом).

Величину, що є зворотною до комплексного повного опору, називають комплексною повною провідністю

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G - jB = Ye^{-j\varphi}. \quad (1.132)$$

Виразимо комплексну повну провідність через активний і реактивний опори

$$\begin{aligned} \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{R - j(X_L - X_C)}{(R + j(X_L - X_C))(R - j(X_L - X_C))} = \\ &= \frac{R - j(X_L - X_C)}{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \frac{R - j(X_L - X_C)}{Z^2} = \frac{R}{Z^2} - j \frac{X_L - X_C}{Z^2} = G - jB. \end{aligned} \quad (1.133)$$

Тоді:

$$\begin{aligned} G &= \frac{R}{Z^2}; & B &= \frac{X_L - X_C}{Z^2}; \\ B_L &= \frac{X_L}{Z^2}; & B_C &= \frac{X_C}{Z^2}; \\ Y &= \sqrt{G^2 + B^2}; & \varphi &= \arctg \frac{B}{G}. \end{aligned} \quad (1.134)$$

При використанні комплексної повної провідності закон Ома має вигляд:

$$\underline{I} = \underline{Y}\underline{U}, \quad (1.135)$$

або

$$\underline{I} = \underline{U}\underline{G} - j\underline{U}\underline{B} = \underline{I}_a + j\underline{I}_p, \quad (1.136)$$

де $\underline{I}_a$ - комплексна активна складова струму; $\underline{I}_p$ - комплексна реактивна складова струму.

1.15 Закони Кірхгофа в комплексній формі

Закони Кірхгофа в комплексній формі запису є фактично модифікацією законів Кірхгофа для миттєвих значень.

За першим законом Кірхгофа, алгебраїчна сума миттєвих значень струмів у вітках, які з'єднані з будь-яким вузлом електричного кола, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^K i_k = 0, \quad (1.137)$$

де K - кількість віток, які з'єднані з вузлом.

Підставивши замість миттєвих значень струмів їхні комплексні діючі значення, одержимо *перший закон Кірхгофа в комплексній формі* запису: алгебраїчна сума комплексних діючих значень струмів у вітках, які з'єднані з будь-яким вузлом електричного кола, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^K I_k = 0. \quad (1.138)$$

За другим законом Кірхгофа в будь-якому контурі алгебраїчна сума миттєвих значень спадів напруги на всіх пасивних елементах контуру дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих значень ЕРС, які належать до цього контуру:

$$\sum_{k=1}^K \left(R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C} \int i_k dt \right) = \sum_{k=1}^K e_k, \quad (1.139)$$

де K - кількість елементів, які належать до цього контуру.

Підставивши замість миттєвих значень струмів й ЕРС їхні комплексні діючі значення, одержимо *другий закон Кірхгофа в комплекс-*

ній формі запису: у будь-якому контурі алгебраїчна сума комплексних діючих значень спадів напруги на всіх пасивних елементах контуру дорівнює алгебраїчній сумі комплексних діючих значень ЕРС, які належать до цього контуру

$$\sum_{k=1}^K \underline{I}_k \underline{Z}_k = \sum_{k=1}^K \underline{E}_k . \quad (1.140)$$

Оскільки закон Ома, перший і другий закони Кірхгофа у комплексній формі справедливі для кіл синусоїдного струму, то можна записавши рівняння для миттєвих значень електричних величин, потім перейти до рівнянь у комплексних діючих значеннях.

Це дозволяє в тому випадку, коли окремі вітки кола не зв'язані між собою індуктивно (тобто місце явище взаємодукції не враховується), розрахунок кіл синусоїдного струму виконувати, використовуючи ті ж прийоми й методи, що й розглянуті раніше стосовно до кіл постійного струму. Тільки постійним ЕРС, струмам і напругам у колах постійного струму відповідають комплексні діючі значення цих величин у колах синусоїдного струму, активним опорам і провідностям відповідають комплексні повні опори і провідності.

На відміну від систем рівнянь, які складені для миттєвих значень струмів і напруг, рівняння, які складені для комплексних зображень, є алгебраїчними. Розв'язання таких рівнянь набагато простіше, ніж розв'язання диференціальних рівнянь.

Алгоритм застосування символічного методу складається із трьох етапів:

- зображення всіх електричних величин і параметрів кола комплексними величинами. Тут для полегшення задачі доцільне складання розрахункової схеми заміщення електричного кола, на якій всі дані зазначені в комплексній формі.
- визначення шуканих величин будь-яким методом, відомим з теорії кіл постійного струму.
- перетворення, якщо потрібно, отриманих величин з комплексної форми у форму подання цих величин синусоїдними функціями часу.

Якщо ж окремі вітки електричного кола синусоїдного струму зв'язані одна з одною індуктивно, то застосування символічного методу має свої особливості, про які буде сказано далі.

1.16 Потужність електричного кола в комплексній формі запису

Якщо відомі комплексні діючі значення напруг і струмів, можна обчислити всі види потужності як для окремих елементів так і для всього електричного кола. Нехай комплекс діючого значення напруги на затискачах ділянки кола дорівнює $Ue^{j\psi_u}$, а комплекс діючого значення струму через цю ділянку - $Ie^{j\psi_i}$. Тоді *комплекс повної потужності* визначають шляхом перемноженням комплексу діючого значення напруги й спряженого комплексу діючого значення струму

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = Ue^{j\psi_u} \left(Ie^{j\psi_i} \right)^* = Ue^{j\psi_u} Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = \quad (1.141)$$

$$= UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = S \cos \varphi + jS \sin \varphi = P + jQ,$$

де I^* - *спряжений комплекс діючого значення струму*, що одержують із вихідного зміною знака в показнику (або перед уявною частиною, якщо використовується алгебраїчна форма запису комплексного числа). Так доводиться формально робити для того, щоб у формулі комплексу повної потужності показник комплексного числа відповідав куту фазового зсуву $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

Таким чином, повна потужність може бути визначена як модуль показової форми запису комплексної повної потужності, активна й реактивна потужності - відповідно як дійсна і уявна частини алгебраїчної форми запису комплексної повної потужності.

Для визначення комплексної повної потужності пасивних елементів зручніше скористатися іншою формулою:

$$\underline{S} = \underline{Z} I^2 = (R + jX) I^2 = P + jQ \quad (1.142)$$

1.17 Індуктивно-зв'язані елементи електричного кола

Елементи електричного кола можуть розташовуватися в просторі таким чином, що створювані ними магнітні потоки будуть частково зіплюватися з контурами протікання струму інших елементів. Якщо зміна струму в одному з елементів кола призводить до появи ЕРС в іншому елементі кола, то такі елементи є індуктивно-зв'язаними. ЕРС, що при цьому виникає, називають ЕРС взаємної індукції. Індуктивно-зв'язані елементи можуть зв'язувати, у тому числі й електричні кола, які не мають гальванічного (електричного) з'єднання між собою.

У випадку двох індуктивних елементів (ідеальних котушок індуктивності), якими протікають струми i_1 й i_2 , частина магнітних ліній поля кожної з котушок може бути зчеплена з витками іншої котушки. Тому крім власних потокозчеплень кожної з котушок потрібно при розрахунках таких електричних кіл урахувувати додаткові (взаємні) потокозчеплення витків першої й другої котушок індуктивності

$$\begin{aligned}\Psi_{12} &= \sum_{k=1}^{w_1} \Phi_{k12}; \\ \Psi_{21} &= \sum_{k=1}^{w_2} \Phi_{k21},\end{aligned}\tag{1.143}$$

де Φ_{k12} - потік крізь k -виток першого елемента (котушки) від струму в другому елементі (котушці); Φ_{k21} - потік крізь k -виток другого елемента (котушки) від струму в першому елементі (котушці).

Коефіцієнт пропорційності між додатковим потокозчепленням першої (другої) котушки й струмом другої (першої) котушки називають *взаємною індуктивністю* першої і другої (другої і першої) котушок

$$\begin{aligned}M_{12} &= \frac{\Psi_{12}}{i_2}; \\ M_{21} &= \frac{\Psi_{21}}{i_1}.\end{aligned}\tag{1.144}$$

Експериментальна перевірка показує, що у випадку постійної магнітної проникності середовища $M_{12} = M_{21} = M$. Величину M називають *взаємною індуктивністю (коефіцієнтом взаємної індукції)*.

Одиницею вимірювання взаємної індуктивності елементів кола, так само як й індуктивності, є *генрі (Гн)*.

Взаємна індуктивність пов'язана з індуктивностями елементів наступним співвідношенням

$$M = k \sqrt{L_1 L_2},\tag{1.145}$$

де k – *коефіцієнт індуктивного зв'язку*.

Коефіцієнт індуктивного зв'язку є безрозмірною величиною.

Значення коефіцієнта індуктивного зв'язку завжди менше одиниці

$$0 \leq k < 1.\tag{1.146}$$

Він міг би дорівняти одиниці, якби весь магнітний потік, що створюється струмом однієї котушки, повністю (без розсіювання) зчіплювався б з витками іншої котушки, що можливо лише у випадку суміщення котушок. Практично витки двох котушок, так само як і різні витки однієї й тієї ж котушки, пронизуються різними магнітними потоками (тому що завжди існують потоки розсіювання) і тому завжди $k < 1$.

Взаємна індуктивність у лінійних електричних колах не залежить від напрямку й значень струмів, а обумовлюється тільки конструкцією котушок індуктивності, їхнім взаємним розташуванням і магнітними властивостями навколишнього середовища. Вона є спільним параметром індуктивно-зв'язаних елементів електричного кола.

Переміщенням однієї котушки індуктивності щодо іншої можна змінити коефіцієнт індуктивного зв'язку й взаємну індуктивність індуктивно-зв'язаних елементів.

Повне потокозчеплення кожної із двох розглянутих індуктивно-зв'язаних котушок індуктивності містить дві складові - власне потокозчеплення та взаємне потокозчеплення, які можуть додаватися або відніматися залежно від напрямку струмів у котушках індуктивності й їхнього взаємного розташування

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \psi_{11} \pm \psi_{12}; \\ \psi_2 &= \psi_{22} \pm \psi_{21},\end{aligned}\quad (1.147)$$

де ψ_{11} , ψ_{22} - власні потокозчеплення I й II котушок індуктивності.

Для полегшення розв'язання питання про знак додаткових потокозчеплень удаються до спеціальної розмітки затискачів індуктивно-зв'язаних елементів кола.

Два затискачі, що належать двом різним індуктивно-зв'язаним елементам кола, називають *однойменними* й позначають однаковими значками, керуючись наступним правилом: при однаковому напрямку струмів щодо однойменних затискачів магнітні потоки самоіндукції й взаємної індукції в кожному елементі (і відповідно ЕРС самоіндукції й взаємної індукції) повинні додаватися один до одного.

Застосуємо це правило для розмітки затискачів двох співвісних котушок із загальним феромагнітним осердям, які представлені на рис. 1.23. Напрямок силових ліній магнітних потоків визначаємо за правилом буравчика.

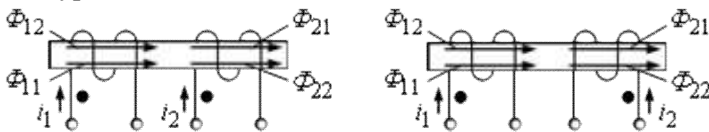


Рисунок 1.23

Щоб не захащувати креслення, осердя котушок на електричних схемах звичайно не зображують, а обмежуються тим, що однойменні затискачі відзначають однаковими значками (наприклад, точками або зірочками) (рис. 1.24).

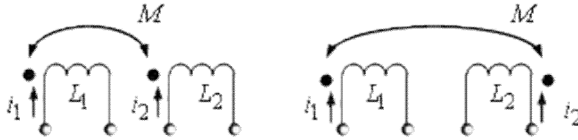


Рисунок 1.24

Якщо на електричній схемі струми двох індуктивно-зв'язаних котушок індуктивності однаково орієнтовані щодо однойменних затисків котушок, то має місце *узгоджене з'єднання*, у протилежному випадку - *зустрічне*. Таким чином, тип з'єднання котушок (узгоджене або зустрічне) визначається спільно способом намотування котушок і напрямками струмів у них.

Визначити розташування однойменних затисків двох котушок можна на підставі простого експерименту, для якого необхідні джерело постійної напруги й амперметр магнітоелектричної системи (рис. 1.25).

Одна з котушок індуктивності з'єднується з амперметром, інша з джерелом напруги. При замиканні ключа $\mathcal{Q}$ короткочасно виникає струм i_2 , що прагне послабити магнітне поле, яке створює струм i_1 . Отже, у момент вмикання джерела напруги струми i_1 й i_2 спрямовані щодо однойменних затисків котушок індуктивності у протилежні боки.

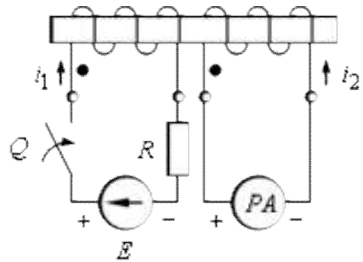


Рисунок 1.25

Напрямок струму i_1 обумовлюється полярністю джерела напруги. Напрямок струму i_2 визначають за короткочасним відхиленням стрілки амперметра. Якщо стрілка відхиляється убік шкали, то струм i_2 спрямований до додатного затискача амперметра. При цьому затискачі котушок, які з'єднані із затискачами амперметра й джерела напруги одного знака, є однойменними.

1.18 Електричне коло з послідовним з'єднанням індуктивно-зв'язаних елементів

Розглянемо задачу аналізу електричного кола з послідовним з'єднанням індуктивно-зв'язаних елементів на прикладі двох котушок індуктивності.

При узгодженому з'єднанні струми в обох котушках індуктивності в будь-який момент часу спрямовані однаково щодо однойменних затискачів (рис. 1.26), тому магнітні потоки самоіндукції й взаємної індукції, які зчеплені з кожною з них, додаються один до одного.

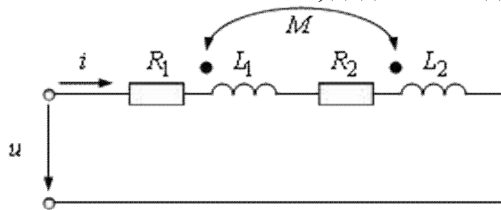


Рисунок 1.26

Складемо рівняння для контуру електричного кола за другим законом Кірхгофа для миттєвих значень із обліком того, що в обох котушках протікає той самий струм

$$R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = u, \quad (1.148)$$

або в символічній формі запису

$$\underline{I}(R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)) = \underline{U}. \quad (1.149)$$

Еквівалентний опір кола при узгодженому вмиканні послідовно з'єднаних індуктивно-зв'язаних котушок індуктивності

$$\underline{Z}_{yz} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M). \quad (1.150)$$

Напруга на котушках індуктивності має три складові

$$\underline{U}_{k1} = \underline{I}(R_1 + j\omega L_1 + j\omega M); \quad (1.151)$$

$$\underline{U}_{k2} = \underline{I}(R_2 + j\omega L_2 + j\omega M).$$

На рис. 1.27 представлена векторна діаграма для випадку узгодженого вмикання послідовно з'єднаних індуктивно-зв'язаних котушок індуктивності.

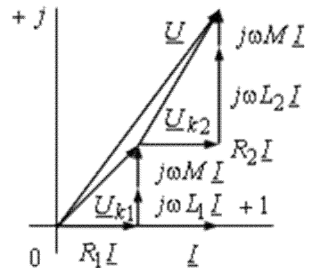


Рисунок 1.27

При зустрічному з'єднанні струми в обох котушках кола в будь-який момент часу спрямовані однаково щодо різнойменних затисків (як показано на рис. 1.28), тому магнітні потоки взаємної індукції, зчеплені з кожної з них, віднімаються від магнітних потоків самоіндукції.

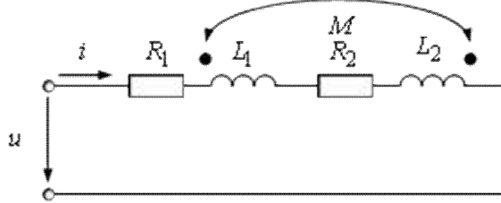


Рисунок 1.28

Складемо рівняння для контуру електричного кола за другим законом Кірхгофа для миттєвих значень із обліком того, що в обох котушках протікає той самий струм

$$R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = u, \quad (1.152)$$

або в символічній формі запису

$$\underline{I}(R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)) = \underline{U}. \quad (1.153)$$

Еквівалентний опір кола при зустрічному вмиканні послідовно з'єднаних індуктивно-зв'язаних котушок

$$\underline{Z}_{звсп} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M). \quad (1.154)$$

Напруги на котушках індуктивності також мають по три складові

$$\begin{aligned} \underline{U}_{k1} &= \underline{I}(R_1 + j\omega L_1 - j\omega M); \\ \underline{U}_{k2} &= \underline{I}(R_2 + j\omega L_2 - j\omega M). \end{aligned} \quad (1.155)$$

Із зіставлення виразів (1.150 й 1.154) видно, що при узгодженому вмиканні еквівалентний опір кола більший ніж при зустрічному за рахунок зміни реактивного опору кола

$$\begin{aligned} X_{yz} &= \omega(L_1 + L_2 + 2M) = X_{L1} + X_{L2} + 2X_M; \\ X_{звсп} &= \omega(L_1 + L_2 - 2M) = X_{L1} + X_{L2} - 2X_M. \end{aligned} \quad (1.156)$$

На рис. 1.29 представлені векторні діаграми при зустрічному вмиканні послідовно з'єднаних індуктивно-зв'язаних котушок. Якщо індуктивність однієї з котушок менше взаємної індуктивності, то при

зустрічному вмиканні в ній спостерігається "ємнісний" ефект (рис. 1.29, б), коли напруга відстає за фазою від струму, що протікає через котушку. Але при всіх умовах реактивний опір кола має індуктивний характер, тому що еквівалентна індуктивність $L = L_1 + L_2 - 2M > 0$ і струм відстає за фазою від напруги.

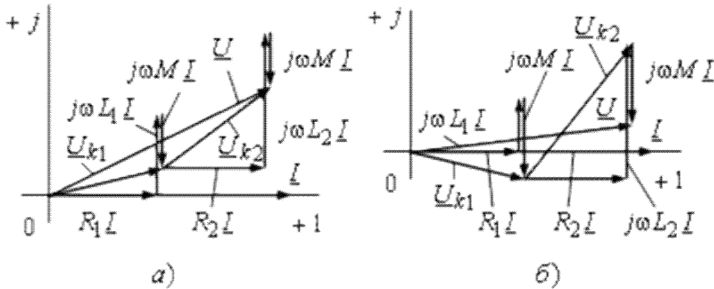


Рисунок 1.29

1.19 Електричне коло з паралельним з'єднанням індуктивно-зв'язаних елементів

Розглянемо задачу аналізу електричного кола з паралельним з'єднанням індуктивно-зв'язаних елементів на прикладі двох котушок індуктивності. Схема електричного кола з паралельним з'єднанням двох індуктивно-зв'язаних котушок представлена на рис. 1.30.

Складемо систему рівнянь на підставі законів Кірхгофа для миттєвих значень із урахуванням обраних напрямків струмів

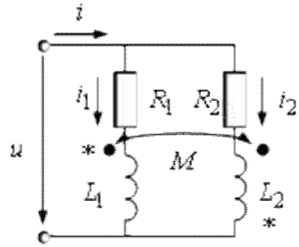


Рисунок 1.30

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2; \\ u = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; \\ u = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}. \end{cases} \quad (1.157)$$

У рівняннях (1.157) і наступних у цьому підрозділі формулах верхній знак відповідає узгодженому вмиканню (однойменні затискачі на рис. 1.30 позначені символами •), а нижній знак – зустрічному (однойменні затискачі на рис. 1.30 позначені символами *).

У символічній формі запису

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2; \\ \underline{U} &= (\underline{R}_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2; \\ \underline{U} &= (\underline{R}_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 \pm j\omega M \underline{I}_1.\end{aligned}\tag{1.158}$$

Розв'язавши систему рівнянь щодо невідомих струмів, одержимо

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \frac{\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \underline{U}; \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \underline{U}; \\ \underline{I} &= \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \underline{U}.\end{aligned}\tag{1.159}$$

де $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$; $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$ - комплекси повних опорів віток без врахування явища взаємоіндукції; $\underline{Z}_M = jX_M = j\omega M$ - комплекс опору взаємної індуктивності.

Вхідний комплексний повний опір розглянутого кола

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M}.\tag{1.160}$$

1.20 Розрахунки складних електричних кіл при наявності індуктивного зв'язку між елементами

Розрахувати складні електричні кола при наявності явища взаємної індукції можна використовуючи метод безпосереднього складання рівнянь за першим й другим законами Кірхгофа, тому що вони справедливі для будь-яких кіл. У рівняння за другим законом Кірхгофа у вирази для напруг індуктивно-зв'язаних елементів повинні бути додані напруги, які виникають за рахунок явища взаємної індукції.

Для розрахунку таких кіл також можна використовувати метод контурних струмів, тому що він базується на другому законі Кірхгофа, який враховує ЕРС взаємної індукції. При складанні рівнянь за методом контурних струмів варто мати на увазі, що при наявності індукти-

вного зв'язку між елементами контурів, їхній взаємний опір не дорівнює нулю навіть при відсутності в них спільних віток.

Метод накладення, який ґрунтується на лінійності рівнянь, що складені за законами Кірхгофа, також можна використовувати, оскільки при наявності взаємної індукції рівняння лишаються лінійними.

Це ж стосується й до методу еквівалентного джерела енергії за умови, що струм визначають для вітки, що елементи якої не зв'язані індуктивно з елементами інших віток кола.

Метод вузлових потенціалів для розрахунку кіл з індуктивно-зв'язаними елементами застосувати неможливо, тому що він ґрунтується на першому законі Кірхгофа. Але струм у будь-якій вітках в таких колах залежить не тільки від потенціалів вузлів, з якими вітка з'єднана, та параметрів елементів, що містяться в ній, але й від струмів інших віток, які наводять ЕРС взаємної індукції. Тому не можна безпосередньо виразити струми віток через потенціали вузлів й параметрів елементів, як у колах без індуктивно-зв'язаних елементів.

З цієї ж причини неможливо застосування, за винятком послідовного з'єднання індуктивно-зв'язаних елементів, і методу еквівалентних перетворень.

1.21 Метод розв'язки індуктивних зв'язків

Наявність індуктивно-зв'язаних елементів обмежує розрахунок лінійних кіл трьома методами: методом безпосереднього застосування законів Кірхгофа, методом контурних струмів і методом накладення. Усунення індуктивних зв'язків і заміна їх електричними дозволяє перейти до еквівалентної схеми заміщення й провести розрахунок струмів будь-яким методом, що можна застосувати для розрахунку лінійних кіл.

У загальному випадку розв'язку будь-яких двох індуктивно-зв'язаних елементів, які з'єднані в одному вузлі (рис. 1.31, *а*), можна здійснити за допомогою переходу до еквівалентної схеми, що представлена на рис. 1.31, *б*. При цьому одночасно врахуємо два можливих випадки: коли в спільному вузлі індуктивно-зв'язані елементи з'єднані однойменними затискачами (однойменні затискачі на рис. 1.31, *а* позначені *) й коли різнойменними (однойменні затискачі на рис. 1.31, *а* позначені •).

Для доказу еквівалентності цих схем досить скласти рівняння за законами Кірхгофа для кожної зі схем і довести їхню ідентичність.

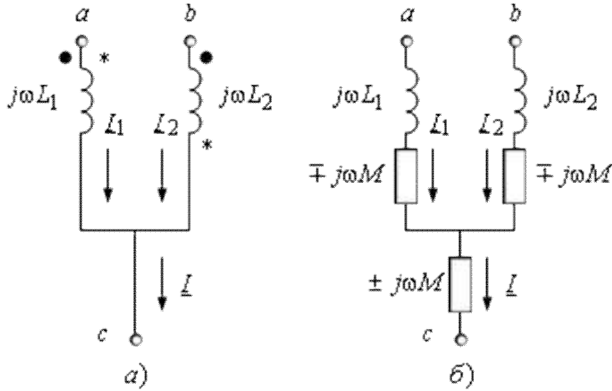


Рисунок 1.31

Для схеми з індуктивно-зв'язаними елементами (рис. 1.131, а) маємо

$$\begin{cases} \underline{U}_{ac} = j\omega L_1 \underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2; \\ \underline{U}_{bc} = j\omega L_2 \underline{I}_2 \pm j\omega M \underline{I}_1. \end{cases} \quad (1.161)$$

Для схеми без індуктивно-зв'язаних елементів маємо

$$\begin{cases} \underline{U}_{ac} = j\omega(L_1 \mp M) \underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}; \\ \underline{U}_{bc} = j\omega(L_2 \mp M) \underline{I}_2 \pm j\omega M \underline{I}. \end{cases} \quad (1.162)$$

В системах (1.161 і 1.162) верхні знаки відповідають випадку, коли в спільному вузлі індуктивно-зв'язані елементи з'єднані однойменними затискачами й нижні - коли різнойменними.

З огляду на, що за першим законом Кірхгофа $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$, після підстановки $\underline{I}$ в останню систему рівнянь, одержимо систему, що аналогічна системі (1.161).

Знаки додаткових опорів обумовлюються тільки способом з'єднання індуктивно-зв'язаних елементів і не залежать від обраних напрямків струмів.

Дві будь-які індуктивно-зв'язані вітки, що не з'єднані зі спільним вузлом, також можна замінити еквівалентною схемою без індуктивного зв'язку, однак ця схема досить складна й користуватися нею недоцільно.

1.22 Передача енергії між індуктивно-зв'язаними елементами кола

Розглянемо, як передається енергія між двома індуктивно-зв'язаними елементами кола.

Нехай для двох індуктивно-зв'язаних елементів кола відомі струми $\underline{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1}$ й $\underline{I}_2 = I_2 e^{j\psi_2}$.

Складемо вирази для комплексів повних потужностей першого й другого елементів, які обумовлені взаємною індукцією у випадку їхнього узгодженого вмикання

$$\begin{aligned}
 \underline{S}_{M1} &= \underline{U}_{M1} \underline{I}_1^* = j\omega M \underline{I}_1 \underline{I}_1^* = e^{j\frac{\pi}{2}} \omega M I_1 e^{j\psi_1} I_2 e^{-j\psi_2} = \\
 &= \omega M I_1 I_2 e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \psi_1 - \psi_2\right)} = \\
 &= \omega M I_1 I_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi_1 - \psi_2\right) + j\omega M I_1 I_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi_1 - \psi_2\right) = \\
 &= \omega M I_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) + j\omega M I_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) = \\
 &= P_{1M} + jQ_{1M}; \\
 \underline{S}_{M2} &= \underline{U}_{M2} \underline{I}_2^* = j\omega M \underline{I}_2 \underline{I}_2^* = e^{j\frac{\pi}{2}} \omega M I_2 e^{j\psi_2} I_1 e^{-j\psi_1} = \\
 &= \omega M I_1 I_2 e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \psi_2 - \psi_1\right)} = \\
 &= \omega M I_1 I_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi_2 - \psi_1\right) + j\omega M I_1 I_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi_2 - \psi_1\right) = \\
 &= -\omega M I_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) + j\omega M I_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) = \\
 &= P_{2M} + jQ_{2M}.
 \end{aligned} \tag{1.163}$$

Звідси випливає

$$\begin{aligned}
 P_{1M} &= -P_{2M} = \omega M I_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2); \\
 Q_{1M} &= Q_{2M} = \omega M I_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2).
 \end{aligned} \tag{1.164}$$

При цьому сумарна активна потужність, що обумовлена взаємною індукцією, дорівнює нулю, тому що $P_M = P_{1M} + P_{2M} = 0$. Це

означає, що на загальний баланс активної потужності кола індуктивно-зв'язані елементи не впливають.

Якщо $0 < \psi_1 - \psi_2 < \pi$, то $0 < \psi_1 - \psi_2 < \pi$, $P_{2M} < 0$. За такої умові енергія передається з кола в магнітне поле через перший елемент і повертається зворотно в коло через другий елемент. Якщо $-\pi < \psi_1 - \psi_2 < 0$, то $P_{1M} < 0$, $P_{2M} > 0$, а енергія передається з кола в магнітне поле через другий елемент і повертається в коло через перший.

Сумарна реактивна потужність, що обумовлена взаємодукцією, дорівнює

$$Q_M = 2\omega MI_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2). \quad (1.165)$$

Енергія, що запасена двома індуктивними елементами за рахунок взаємної індукції

$$W_M = Mi_1 i_2. \quad (1.166)$$

Отримані результати, справедливі й у тому випадку, якщо індуктивно-зв'язані елементи гальванічно (електрично) не з'єднані.

2 ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Які електричні кола називають колами синусоїдного струму?
2. Які характеристики синусоїдних електричних величин Ви знаєте?
3. У чому полягає розрахунок однофазного електричного кола синусоїдного струму методом комплексних амплітуд?
4. Як виконується перехід від комплексного амплітудного (діючого) значення струму до його миттєвого значення?
5. Запишіть рівняння резистивного елемента. Який фазовий зсув вносить резистивний елемент між напругою й струмом?
6. Запишіть рівняння індуктивного елемента. Який фазовий зсув вносить індуктивний елемент між напругою й струмом?
7. Запишіть рівняння ємнісного елемента. Який фазовий зсув вносить ємнісний елемент між напругою й струмом?
8. Дайте визначення комплексного повного опору електричного кола?
9. Дайте визначення комплексної повної провідності електричного кола?
10. Сформулюйте закони Кірхгофа для електричного кола синусоїдного струму.
11. При яких умовах в електричному колі виникає резонанс напруг?
12. При яких умовах в електричному колі виникає резонанс струмів?
13. Дайте визначення повної комплексної потужності електричного кола синусоїдного струму.
14. Дайте визначення повної, активної й реактивної потужності кола синусоїдного струму. Укажіть їхні одиниці вимірювання.
15. Дайте визначення коефіцієнта потужності електричного кола?
16. Для електричного кола, схема якого представлена на рис. 4.9, задані параметри пасивних елементів: $R = 10 \text{ Ом}$, $L = 63,7 \text{ мГн}$, $C = 106,2 \text{ мкФ}$. Напруга джерела живлення $u = 200 \sin 314t \text{ В}$. Визначити діюче значення струму.
Відповідь: 10 А.
17. Для електричного кола, схема якого представлена на рис. 4.13, задані параметри пасивних елементів: $R = 20 \text{ Ом}$, $L = 63,7 \text{ мГн}$, $C = 79,6 \text{ мкФ}$. Напруга джерела живлення $u = 200 \sin 314t \text{ В}$. Визначити діюче значення струму у нерозгалуженій частині електричного кола.
Відповідь: 10 А.

18. Для електричного кола, схема якого представлена на рис. 4.20, задані параметри пасивних елементів: $R = 20 \text{ Ом}$, $L = 10 \text{ мГн}$, $C = 100 \text{ мкФ}$. Визначити кутову резонансну частоту та добротність послідовного коливального контуру.

Відповідь: $\omega_0 = 1000 \text{ с}^{-1}$, $Q = 0,5$.

19. Для електричного кола, схема якого представлена на рис. 4.25, задані параметри пасивних елементів: $R_1 = 80 \text{ Ом}$, $L = 10 \text{ мГн}$, $R_2 = 60 \text{ Ом}$, $C = 100 \text{ мкФ}$. Визначити кутову резонансну частоту паралельного коливального контуру.

Відповідь: $\omega_0 = 750 \text{ с}^{-1}$.

20. Для електричного кола, схема якого представлена на рис. 4.35, задані опори пасивних елементів: $R_1 = 25 \text{ Ом}$; $R_2 = 15 \text{ Ом}$; $X_L = 15 \text{ Ом}$; $X_C = 45 \text{ Ом}$. Діюче значення напруги на вході електричного кола $U = 100 \text{ В}$. Визначити діюче значення струму в електричному колі.

Відповідь: $I = 2 \text{ А}$.

21. Для електричного кола, що було розглянуто в прикладах 4.6 і 4.7, внаслідок помилки затискачі одного з індуктивних елементів поміняли місцями. Визначити комплексні діючі значення струмів в усіх вітках електричного кола.

Відповідь: $I_1 = 8,85e^{j32^\circ} \text{ А}$; $I_1 = 4,12e^{j32^\circ} \text{ А}$; $I_1 = 4,73e^{j32^\circ} \text{ А}$.

22. Для електричного кола, схема якого представлена на рис. 4.13, задані покази вимірювальних приладів: $I = 10 \text{ А}$, $U = 200 \text{ В}$, $P = 1000 \text{ Вт}$. Визначити комплексний повний опір навантаження, вважаючи, що його характер активно-індуктивний.

Відповідь: $Z_l = 20e^{j60^\circ} = (10 + j17,3) \text{ Ом}$.

3 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Номер варіанту для студентів денного відділення задає викладач, для студентів заочного відділення він співпадає з номером, який утворюють дві останні цифри номера залікової книжки.

Аналіз однофазного електричного кола синусоїдного струму при відсутності індуктивно-зв'язаних елементів

На підставі узагальненої схеми електричному кола, що зображена на рис.3.1, накреслити схему заданого варіанта, яка містить тільки ненульові елементи, зазначені в табл. 3.1.

Для отриманого електричного кола синусоїдного струму із частотою 50 Гц і заданими в табл. 3.2 параметрами потрібно:

- розрахувати комплексні діючі струми і спади напруги у всіх вітках кола методом згортки кола;
- зробити перевірку правильності розв'язання за законами Кірхгофа;
- скласти баланс потужностей;
- побудувати сполучену векторну діаграму струмів і напруг.

Аналіз однофазного електричного кола синусоїдного струму при наявності індуктивно-зв'язаних елементів

На підставі узагальненої схеми електричному кола, що зображена на рис. 3.1, накреслити схему заданого варіанта з урахуванням наявності індуктивно-зв'язаних елементів, яка містить тільки ненульові елементи, зазначені в табл. 3.1.

Для отриманого електричного кола синусоїдного струму із частотою 50 Гц і заданими в табл. 3.2 параметрами потрібно:

- розрахувати комплексні діючі струм і спади напруги у всіх вітках кола за вказівкою викладача;
- методом згортки, попередньо виконавши магнітну розв'язку кола;
- методом контурних струмів, без попередньої магнітної розв'язки кола;
- зробити перевірку правильності розв'язання за законами Кірхгофа;
- скласти баланс потужностей, окремо розраховувати потужність, споживану кола за рахунок явища взаємної індукції;
- побудувати сполучену векторну діаграму струмів і напруг, у якій спади напруги на елементах кола, за рахунок явища взаємної індукції, указати окремо.

Примітка: останні три пункти необхідно виконати для кола до магнітної розв'язки.

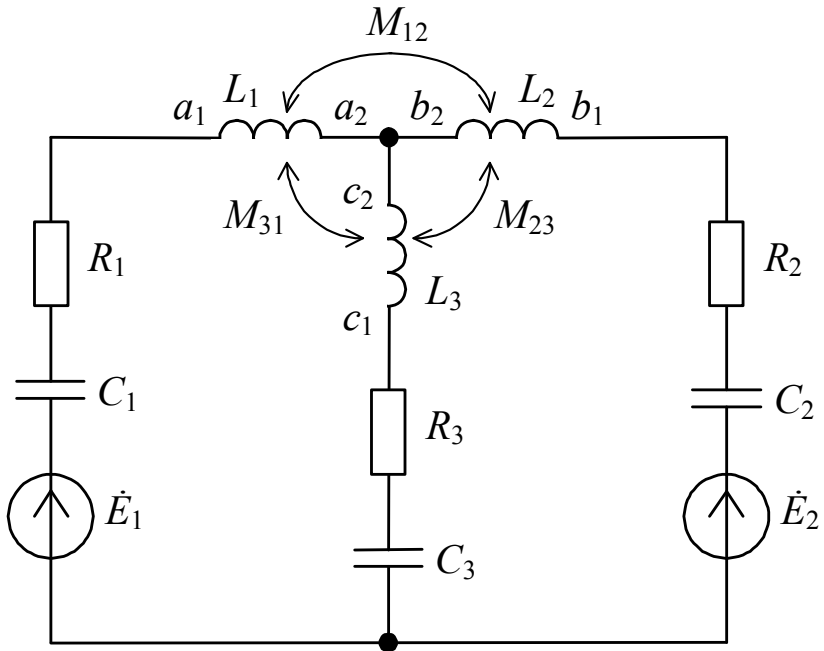


Рис. 3.1

Таблиця 3.1 - Елементи електричного кола

№ варіанту	E_1	C_1	R_1	L_1	E_2	C_2	R_2	L_2	C_3	R_3	L_3	M_{12}	M_{23}	M_{31}
1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	$c_1 a_1$
2	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	$a_1 b_1$	0	0
3	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	$a_1 b_1$	0	0
4	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	$b_1 c_1$	0
5	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	$c_1 a_2$
6	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	$a_2 b_1$	0	0
7	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	$b_2 c_1$	0
8	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	$c_1 a_1$
9	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	$a_1 b_2$	0	0
10	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	$b_1 c_2$	0

№ варіанту	E_1	C_1	R_1	L_1	E_2	C_2	R_2	L_2	C_3	R_3	L_3	M_{12}	M_{23}	M_{31}
11	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	c_2a_1
12	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	a_1b_1	0	0
13	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	b_1c_1	0
14	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	c_1a_1
15	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	b_1c_1	0
16	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	c_1a_2
17	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	a_2b_1	0	0
18	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	b_1c_1	0
19	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	b_2c_1	0
20	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	a_1b_2	0	0
21	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	b_2c_1	0
22	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	c_2a_1
23	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	a_1b_1	0	0
24	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	b_1c_2	0
25	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	b_1c_1	0
26	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	a_1b_1	0	0
27	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	b_1c_1	0
28	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	b_1c_1	0
29	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	c_1a_2
30	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	a_2b_1	0	0
31	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	b_2c_1	0
32	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	c_1a_1
33	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	a_1b_2	0	0
34	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	c_2a_1
35	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	a_1b_1	0	0
36	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	b_1c_2	0
37	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	c_1a_1
38	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a_1b_1	0	0
39	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	b_1c_1	0
40	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	b_1c_1	0

№ варіанту	E_1	C_1	R_1	L_1	E_2	C_2	R_2	L_2	C_3	R_3	L_3	M_{12}	M_{23}	M_{31}
41	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	c_1a_2
42	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	a_2b_1	0	0
43	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	b_2c_1	0
44	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	c_1a_1
45	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	a_1b_2	0	0
46	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	c_2a_1
47	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	a_1b_1	0	0
48	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	b_1c_2	0
49	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	b_1c_1	0
50	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	c_1a_1
51	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	b_1c_1	0
52	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	b_1c_1	0
53	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	a_2b_1	0	0
54	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	b_1c_1	0
55	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	b_2c_1	0
56	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	c_1a_1
57	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	a_1b_2	0	0
58	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	b_1c_2	0
59	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	c_2a_1
60	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	b_1c_2	0
61	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	b_1c_1	0
62	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	c_1a_1
63	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	a_1b_1	0	0
64	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	b_1c_1	0
65	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	c_1a_2
66	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	a_2b_1	0	0
67	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	b_1c_1	0
68	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	c_1a_1
69	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	a_1b_1	0	0
70	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	b_1c_1	0

№ варіанту	E_1	C_1	R_1	L_1	E_2	C_2	R_2	L_2	C_3	R_3	L_3	M_{12}	M_{23}	M_{31}
71	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	c_1a_2
72	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	b_1c_1	0
73	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	c_1a_1
74	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a_1b_2	0	0
75	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	b_2c_1	0
76	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	c_2a_1
77	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	a_1b_1	0	0
78	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	b_1c_2	0
79	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	c_1a_1
80	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a_1b_1	0	0
81	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0 ₁	b_1c_1	0
82	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	b_1c_1	c_1a_2
83	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	a_2b_1	0	0
84	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	b_1c_1	0
85	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	c_1a_1
86	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a_1b_2	0	0
87	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	a_1b_2	0	0
88	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	c_2a_1
89	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	a_1b_1	0	0
90	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	a_1b_1	0	0
91	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	b_1c_1	0
92	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	c_1a_1
93	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	a_1b_1	0	0
94	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	b_1c_1	0
95	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	c_1a_2
96	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	a_2b_1	0	0
97	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	b_1c_1	0
98	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	b_1c_1	0
99	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	a_2b_1	0	0
00	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	b_1c_1	0

Таблица 3.2 - Параметры электричного кола

№ варіанту	$E_1,$ <i>В</i>	$\Psi_1,$ <i>град</i>	$C_1,$ <i>мкФ</i>	$R_1,$ <i>Ом</i>	$L_1,$ <i>мГн</i>	$E_2,$ <i>В</i>	$\Psi_2,$ <i>град</i>	$C_2,$ <i>мкФ</i>	$R_2,$ <i>Ом</i>	$L_2,$ <i>мГн</i>	$C_3,$ <i>мкФ</i>	$R_3,$ <i>Ом</i>	$L_3,$ <i>мГн</i>	$k_{12},$ —	$k_{23},$ —	$k_{31},$ —
1	24	30	300	10	20	48	90	160	22	70	270	16	50	0.5	0.6	0.7
2	24	45	300	10	20	48	60	160	22	70	270	16	50	0.7	0.5	0.6
3	24	60	300	10	20	48	45	160	22	70	270	16	50	0.6	0.7	0.5
4	24	90	300	10	20	48	30	160	22	70	270	16	50	0.5	0.6	0.7
5	24	30	300	10	20	48	90	160	22	70	270	16	50	0.7	0.5	0.6
6	24	45	300	10	20	48	60	160	22	70	270	16	50	0.6	0.7	0.5
7	24	60	300	10	20	48	45	160	22	70	270	16	50	0.5	0.6	0.7
8	24	90	300	10	20	48	30	160	22	70	270	16	50	0.7	0.5	0.6
9	24	30	300	10	20	48	90	160	22	70	270	16	50	0.6	0.7	0.5
10	24	45	300	10	20	48	60	160	22	70	270	16	50	0.5	0.6	0.7
11	24	60	300	10	20	48	45	160	22	70	270	16	50	0.7	0.5	0.6
12	24	90	300	10	20	48	30	160	22	70	270	16	50	0.6	0.7	0.5
13	36	30	220	15	40	36	90	240	16	50	270	16	50	0.5	0.6	0.7
14	36	45	220	15	40	36	60	240	16	50	270	16	50	0.7	0.5	0.6
15	36	60	220	15	40	36	45	240	16	50	270	16	50	0.6	0.7	0.5
16	36	90	220	15	40	36	30	240	16	50	270	16	50	0.5	0.6	0.7
17	36	30	220	15	40	36	90	240	16	50	270	16	50	0.7	0.5	0.6
18	36	45	220	15	40	36	60	240	16	50	270	16	50	0.6	0.7	0.5
19	36	60	220	15	40	36	45	240	16	50	270	16	50	0.5	0.6	0.7
20	36	90	220	15	40	36	30	240	16	50	270	16	50	0.7	0.5	0.6

№ варіанту	$E_1,$ B	$\Psi_1,$ $град$	$C_1,$ $мкФ$	$R_1,$ $Ом$	$L_1,$ $мГн$	$E_2,$ B	$\Psi_2,$ $град$	$C_2,$ $мкФ$	$R_2,$ $Ом$	$L_2,$ $мГн$	$C_3,$ $мкФ$	$R_3,$ $Ом$	$L_3,$ $мГн$	$k_{12},$ —	$k_{23},$ —	$k_{31},$ —
21	36	30	220	15	40	36	90	240	16	50	270	16	50	0.6	0.7	0.5
22	36	45	220	15	40	36	60	240	16	50	270	16	50	0.5	0.6	0.7
23	36	60	220	15	40	36	45	240	16	50	270	16	50	0.7	0.5	0.6
24	36	90	220	15	40	36	30	240	16	50	270	16	50	0.6	0.7	0.5
25	48	30	150	20	60	24	90	330	11	30	270	16	50	0.5	0.6	0.7
26	48	45	150	20	60	24	60	330	11	30	270	16	50	0.7	0.5	0.6
27	48	60	150	20	60	24	45	330	11	30	270	16	50	0.6	0.7	0.5
28	48	90	150	20	60	24	30	330	11	30	270	16	50	0.5	0.6	0.7
29	48	30	150	20	60	24	90	330	11	30	270	16	50	0.7	0.5	0.6
30	48	45	150	20	60	24	60	330	11	30	270	16	50	0.6	0.7	0.5
31	48	60	150	20	60	24	45	330	11	30	270	16	50	0.5	0.6	0.7
32	48	90	150	20	60	24	30	330	11	30	270	16	50	0.7	0.5	0.6
33	48	30	150	20	60	24	90	330	11	30	270	16	50	0.6	0.7	0.5
34	48	45	150	20	60	24	60	330	11	30	270	16	50	0.5	0.6	0.7
35	48	60	150	20	60	24	45	330	11	30	270	16	50	0.7	0.5	0.6
36	48	90	150	20	60	24	30	330	11	30	270	16	50	0.6	0.7	0.5
37	24	90	300	10	20	48	30	160	22	70	270	16	50	0.7	0.5	0.6
38	24	30	300	10	20	48	90	160	22	70	270	16	50	0.6	0.7	0.5
39	24	45	300	10	20	48	60	160	22	70	270	16	50	0.5	0.6	0.7
40	24	60	300	10	20	48	45	160	22	70	270	16	50	0.7	0.5	0.6

№ варіанту	$E_1,$ B	$\Psi_1,$ $град$	$C_1,$ $мкФ$	$R_1,$ $Ом$	$L_1,$ $мГн$	$E_2,$ B	$\Psi_2,$ $град$	$C_2,$ $мкФ$	$R_2,$ $Ом$	$L_2,$ $мГн$	$C_3,$ $мкФ$	$R_3,$ $Ом$	$L_3,$ $мГн$	$k_{12},$ —	$k_{23},$ —	$k_{31},$ —
41	24	90	300	10	20	48	30	160	22	70	270	16	50	0.6	0.7	0.5
42	36	30	220	15	40	36	90	240	16	50	270	16	50	0.5	0.6	0.7
43	36	45	220	15	40	36	60	240	16	50	270	16	50	0.7	0.5	0.6
44	36	60	220	15	40	36	45	240	16	50	270	16	50	0.6	0.7	0.5
45	36	90	220	15	40	36	30	240	16	50	270	16	50	0.5	0.6	0.7
46	36	30	220	15	40	36	90	240	16	50	270	16	50	0.7	0.5	0.6
47	36	45	220	15	40	36	60	240	16	50	270	16	50	0.6	0.7	0.5
48	36	60	220	15	40	36	45	240	16	50	270	16	50	0.5	0.6	0.7
49	36	90	220	15	40	36	30	240	16	50	270	16	50	0.7	0.5	0.6
50	36	30	220	15	40	36	90	240	16	50	270	16	50	0.6	0.7	0.5
51	36	45	220	15	40	36	60	240	16	50	270	16	50	0.5	0.6	0.7
52	36	60	220	15	40	36	45	240	16	50	270	16	50	0.7	0.5	0.6
53	36	90	220	15	40	36	30	240	16	50	270	16	50	0.6	0.7	0.5
54	48	30	150	20	60	24	90	330	11	30	270	16	50	0.5	0.6	0.7
55	48	45	150	20	60	24	60	330	11	30	270	16	50	0.7	0.5	0.6
56	48	60	150	20	60	24	45	330	11	30	270	16	50	0.6	0.7	0.5
57	48	90	150	20	60	24	30	330	11	30	270	16	50	0.5	0.6	0.7
58	48	30	150	20	60	24	90	330	11	30	270	16	50	0.7	0.5	0.6
59	48	45	150	20	60	24	60	330	11	30	270	16	50	0.6	0.7	0.5
60	48	60	150	20	60	24	45	330	11	30	270	16	50	0.5	0.6	0.7

№ варіанту	$E_1,$ B	$\Psi_1,$ $град$	$C_1,$ $мкФ$	$R_1,$ $Ом$	$L_1,$ $мГн$	$E_2,$ B	$\Psi_2,$ $град$	$C_2,$ $мкФ$	$R_2,$ $Ом$	$L_2,$ $мГн$	$C_3,$ $мкФ$	$R_3,$ $Ом$	$L_3,$ $мГн$	$k_{12},$ —	$k_{23},$ —	$k_{31},$ —
61	48	90	150	20	60	24	30	330	11	30	270	16	50	0.7	0.5	0.6
62	48	30	150	20	60	24	90	330	11	30	270	16	50	0.6	0.7	0.5
63	48	45	150	20	60	24	60	330	11	30	270	16	50	0.5	0.6	0.7
64	48	60	150	20	60	24	45	330	11	30	270	16	50	0.7	0.5	0.6
65	48	90	150	20	60	24	30	330	11	30	270	16	50	0.6	0.7	0.5
66	24	90	300	10	20	48	30	160	22	70	270	16	50	0.7	0.5	0.6
67	24	30	300	10	20	48	90	160	22	70	270	16	50	0.6	0.7	0.5
68	24	45	300	10	20	48	60	160	22	70	270	16	50	0.5	0.6	0.7
69	24	60	300	10	20	48	45	160	22	70	270	16	50	0.7	0.5	0.6
70	24	90	300	10	20	48	30	160	22	70	270	16	50	0.6	0.7	0.5
71	36	30	220	15	40	36	90	240	16	50	270	16	50	0.5	0.6	0.7
72	36	45	220	15	40	36	60	240	16	50	270	16	50	0.7	0.5	0.6
73	36	60	220	15	40	36	45	240	16	50	270	16	50	0.6	0.7	0.5
74	36	90	220	15	40	36	30	240	16	50	270	16	50	0.5	0.6	0.7
75	36	30	220	15	40	36	90	240	16	50	270	16	50	0.7	0.5	0.6
76	36	45	220	15	40	36	60	240	16	50	270	16	50	0.6	0.7	0.5
77	36	60	220	15	40	36	45	240	16	50	270	16	50	0.5	0.6	0.7
78	36	90	220	15	40	36	30	240	16	50	270	16	50	0.7	0.5	0.6
79	36	30	220	15	40	36	90	240	16	50	270	16	50	0.6	0.7	0.5
80	36	45	220	15	40	36	60	240	16	50	270	16	50	0.5	0.6	0.7

№ варіанту	$E_1,$ B	$\Psi_1,$ $град$	$C_1,$ $мкФ$	$R_1,$ $Ом$	$L_1,$ $мГн$	$E_2,$ B	$\Psi_2,$ $град$	$C_2,$ $мкФ$	$R_2,$ $Ом$	$L_2,$ $мГн$	$C_3,$ $мкФ$	$R_3,$ $Ом$	$L_3,$ $мГн$	$k_{12},$ —	$k_{23},$ —	$k_{31},$ —
81	36	60	220	15	40	36	45	240	16	50	270	16	50	0.7	0.5	0.6
82	36	90	220	15	40	36	30	240	16	50	270	16	50	0.6	0.7	0.5
83	48	30	150	20	60	24	90	330	11	30	270	16	50	0.5	0.6	0.7
84	48	45	150	20	60	24	60	330	11	30	270	16	50	0.7	0.5	0.6
85	48	60	150	20	60	24	45	330	11	30	270	16	50	0.6	0.7	0.5
86	48	90	150	20	60	24	30	330	11	30	270	16	50	0.5	0.6	0.7
87	48	30	150	20	60	24	90	330	11	30	270	16	50	0.7	0.5	0.6
88	48	45	150	20	60	24	60	330	11	30	270	16	50	0.6	0.7	0.5
89	48	60	150	20	60	24	45	330	11	30	270	16	50	0.5	0.6	0.7
90	48	90	150	20	60	24	30	330	11	30	270	16	50	0.7	0.5	0.6
91	48	30	150	20	60	24	90	330	11	30	270	16	50	0.6	0.7	0.5
92	48	45	150	20	60	24	60	330	11	30	270	16	50	0.5	0.6	0.7
93	48	60	150	20	60	24	45	330	11	30	270	16	50	0.7	0.5	0.6
94	48	90	150	20	60	24	30	330	11	30	270	16	50	0.6	0.7	0.5
95	24	30	300	10	20	48	90	160	22	70	270	16	50	0.5	0.6	0.7
96	24	45	300	10	20	48	60	160	22	70	270	16	50	0.7	0.5	0.6
97	24	60	300	10	20	48	45	160	22	70	270	16	50	0.6	0.7	0.5
98	24	90	300	10	20	48	30	160	22	70	270	16	50	0.5	0.6	0.7
99	24	30	300	10	20	48	90	160	22	70	270	16	50	0.7	0.5	0.6
00	24	45	300	10	20	48	60	160	22	70	270	16	50	0.6	0.7	0.5

4 ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ Й ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Запорізький національний технічний університет

Кафедра теоретичної та
загальної електротехніки

Розрахунково-графічна робота №1
Електричні кола постійного струму

Варіант №00

Виконав

ст. гр. Е-118 Бережна А.М.

Прийняв

доцент Козлов В.В.

м. Запоріжжя, 2019 р.

Частина 1. Аналіз однофазного електричного кола синусоїдного струму при відсутності індуктивно-зв'язаних елементів

Вихідні дані. Задано електричне коло синусоїдного струму, схема заміщення якого представлена на рис. 4.1 і для якого задано: діюче значення ЕРС джерела живлення $E = 100 \text{ В}$, частота $f = 50 \text{ Гц}$; опори резистивних елементів $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 40 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$; індуктивності і ємності реактивних елементів $L_1 = 15,9 \text{ мГн}$, $L_2 = 95,5 \text{ мГн}$, $C_1 = 212 \text{ мкФ}$, $C_3 = 79,6 \text{ мкФ}$.

Потрібно:

- розрахувати комплексні діючі струми і спади напруги у всіх вітках кола методом згортки кола;
- зробити перевірку правильності розв'язання за законами Кірхгофа;
- скласти баланс потужностей;
- побудувати сполучену векторну діаграму струмів і напруг.

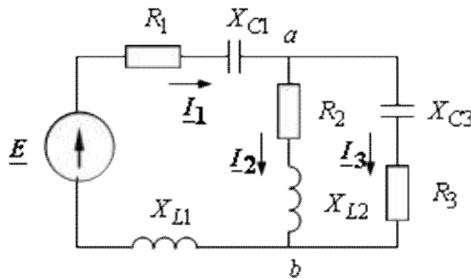


Рис. 4.1

Розв'язання. Кутова частота джерела живлення

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314 \text{ Гц}.$$

Опори реактивних елементів:

$$X_{L1} = \omega L_1 = 314 \cdot 15,9 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ Ом};$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 314 \cdot 95,5 \cdot 10^{-3} = 30 \text{ Ом};$$

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{314 \cdot 212 \cdot 10^{-6}} = 15 \text{ Ом};$$

$$X_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{314 \cdot 79,6 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ Ом}.$$

Розрахунок виконуємо символічним методом. Всі комплексні числа, які використовуємо в розрахунку, записуємо як в алгебраїчній, так й у показовій формі.

Комплексні повні опори віток

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j(X_{L1} - X_{C1}) = 10 + j(5 - 15) = 10 - j10 = 14,1e^{-j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 40 + j30 = 50,0e^{j37^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_{C3} = 20 - j40 = 44,7e^{-j63^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексна діюча ЕРС джерела живлення

$$\underline{E} = Ee^{j\psi_e} = 100e^{j0^\circ} = (100 + j0) \text{ В}.$$

Від вихідної схеми заміщення кола перейдемо до схеми заміщення кола з комплексними повними опорами (рис. 4.2). Щоб підкреслити аналогію між розрахунками електричних кіл синусоїдного струму та електричних кіл постійного струму на схемі заміщення комплексні повні опори позначені так само як резистивні елементи.

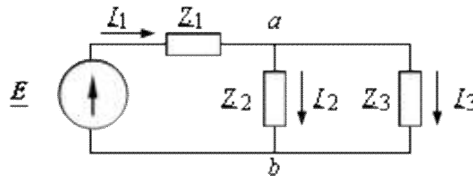


Рис. 4.2

Для розрахунку отриманого кола використовуємо метод еквівалентних перетворень (метод згортки).

Ділянку ab з паралельним з'єднанням опорів $\underline{Z}_2$ і $\underline{Z}_3$ замінюємо еквівалентним комплексним повним опором

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ab} &= \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(40 + j30)(20 - j40)}{40 + j30 + 20 - j40} = \frac{(40 + j30)(20 - j40)}{60 - j10} = \\ &= 35,1 - j10,8 = 36,8e^{-j17^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Опори $\underline{Z}_1$ й $\underline{Z}_{ab}$, які з'єднані послідовно, замінюємо еквівалентним комплексним повним опором:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{екв} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{ab} = 10 - j10 + 35,1 - j10,8 = \\ &= 45,1 - j20,8 = 49,7e^{-j25^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Комплексний діючий струм у нерозгалуженій частині електричного кола за законом Ома:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{екв}} = \frac{100 + j0}{45,1 - j20,8} = 1,83 + j0,84 = 2,01e^{j25^\circ} \text{ A.}$$

Комплексні діючі спади напруг на ділянках кола:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = (10 - j10)(1,83 + j0,84) = 26,7 - j9,9 = 28,5e^{-j20^\circ} \text{ B;}$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{Z}_{ab} \underline{I}_1 = (35,1 - j10,8)(1,83 + j0,84) = 73,3 + j9,7 = 73,9e^{j8^\circ} \text{ B.}$$

Комплексні діючі струми в паралельних вітках за законом Ома:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2} = \frac{73,3 + j9,7}{40 + j30} = 1,29 - j0,72 = 1,48e^{-j29^\circ} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{73,3 + j9,7}{20 - j40} = 0,54 + j1,56 = 1,65e^{j71^\circ} \text{ A.}$$

Правильність розв'язання перевіряємо, використовуючи перший і другий закони Кірхгофа:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 1,29 - j0,72 + 0,54 + j1,56 = 1,83 + j0,84 = 2,01e^{j25^\circ} \text{ A;}$$

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_{ab} = 26,7 - j9,9 + 73,3 + j9,7 = 100,0 - j0,2 = 100,2e^{j0^\circ} \text{ B.}$$

Відносна похибка не перевищує 1%, тобто отриманні при перевірці значення практично збігаються з вихідними.

Діючі струми і напруги дорівнюють модулям відповідних комплексних діючих значень цих величин

$$U_1 = 28,5 \text{ B; } U_{ab} = 73,9 \text{ A; } I_1 = 2,01 \text{ A; } I_2 = 1,48 \text{ A; } I_3 = 1,65 \text{ A.}$$

Початкові фази струмів і напруг дорівнюють аргументам відповідних комплексних діючих значень цих величин

$$\psi_{U_1} = -20^\circ; \psi_{U_{ab}} = 8^\circ; \psi_{I_1} = 25^\circ; \psi_{I_2} = -29^\circ; \psi_{I_3} = 71^\circ.$$

Перейдемо від комплексних діючих струмів і напруг до миттєвих значень цих величин:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{2} U_1 \sin(\omega t + \psi_{U_1}) = \sqrt{2} \cdot 28,5 \sin(314t - 20^\circ) = \\ &= 40,3 \sin(314t - 20^\circ) \text{ B;} \end{aligned}$$

$$u_{ab} = \sqrt{2}U_{ab} \sin(\omega t + \psi_{U_{ab}}) = \sqrt{2} \cdot 73,9 \sin(314t + 8^\circ) = \\ = 104,5 \sin(314t + 8^\circ) \text{ В};$$

$$i_1 = \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \psi_{I_1}) = \sqrt{2} \cdot 2,01 \sin(314t + 25^\circ) = \\ = 2,84 \sin(314t + 25^\circ) \text{ А};$$

$$i_2 = \sqrt{2}I_2 \sin(\omega t + \psi_{I_2}) = \sqrt{2} \cdot 1,48 \sin(314t - 29^\circ) = \\ = 2,09 \sin(314t - 29^\circ) \text{ А};$$

$$i_3 = \sqrt{2}I_3 \sin(\omega t + \psi_{I_3}) = \sqrt{2} \cdot 1,65 \sin(314t + 71^\circ) = \\ = 2,33 \sin(314t + 71^\circ) \text{ А}.$$

Використовуючи комплексні діючі напруги і струми, побудуємо у відповідно вибраних масштабах суміщену діаграму (рис. 4.3).

На діаграмі виконана перевірка за першим і другим законами Кірхгофа у векторній формі. Виконана перевірка підтверджує, що розрахунки виконані правильно.

Комплексна повна потужність джерела живлення:

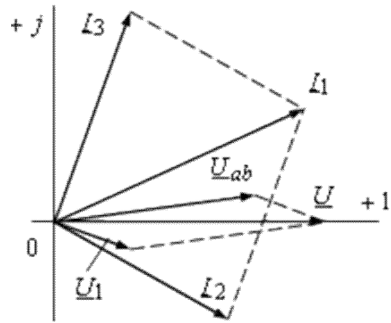


Рис. 4.3

$$\underline{S}_{\text{дж}} = \underline{U} \cdot \underline{I}_1^* = 100 \cdot (1,83 - j0,84) = 183 - j84 = 201e^{-j25^\circ} \text{ ВА}.$$

Комплексна повна потужність споживачів:

$$\underline{S}_{\text{cn}} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = I_1^2 \underline{Z}_1 + I_2^2 \underline{Z}_2 + I_3^2 \underline{Z}_1 = 2,01^2 \cdot (10 - j10) + \\ + 1,48^2 \cdot (40 + j30) + 1,65^2 \cdot (20 - j40) = 40,4 - j40,4 + \\ + 87,6 + j65,7 + 54,5 - j108,9 = 182,5 - j83,6 = 200,7e^{-j25^\circ} \text{ ВА}.$$

Відносна похибка між цими величинами модулем не перевищують 3%, а за кут 1° , тому вважаємо, що розрахунок виконано правильно.

Частина 2. Аналіз однофазного електричного кола синусоїдного струму при наявності індуктивно-зв'язаних елементів

Вихідні дані. Задано електричне коло синусоїдного струму, схема заміщення якого представлена на рис. 4.2 і для якого задано: діюче значення ЕРС джерела живлення $E = 100 \text{ В}$, частота $f = 50 \text{ Гц}$; опори резистивних елементів $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 40 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$; індуктивності і ємності реактивних елементів $L_1 = 15,9 \text{ мГн}$, $L_2 = 95,5 \text{ мГн}$, $C_1 = 212 \text{ мкФ}$, $C_3 = 79,6 \text{ мкФ}$, коефіцієнт магнітного зв'язку $k = 0,8$.

Потрібно:

- обчислити комплексні діючі струми у всіх вітках кола за вказівкою викладача;
- методом контурних струмів, без попередньої магнітної розв'язки кола;
- методом згортки, попередньо виконавши магнітну розв'язку кола;
- зробити перевірку правильності розв'язання за законами Кірхгофа;
- скласти баланс потужностей, окремо розрахувавши потужність, споживану кола за рахунок явища взаємної індукції;
- побудувати сполучену векторну діаграму струмів і напруг, на якій спади напруги на елементах кола, за рахунок явища взаємної індукції, указати окремо.

Розв'язання. Комплексні повні опори віток и комплексна діюча ЕРС джерела живлення залишаються незмінними у порівнянні з першою частиною Кірхгоф

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j(X_{L1} - X_{C1}) = 10 + j(5 - 15) = 10 - j10 = 14,1e^{-j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 40 + j30 = 50,0e^{j37^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_{C3} = 20 - j40 = 44,7e^{-j63^\circ} \text{ Ом}.$$

$$\underline{E} = Ee^{j\psi_e} = 100e^{j0^\circ} = (100 + j0) \text{ В}.$$

Взаємна індуктивність

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0,8\sqrt{15,9 \cdot 95,5} = 31,2 \text{ мГн}.$$

Опір взаємної індуктивності, який враховує наявність індуктивного зв'язку

$$X_M = \omega M = 314 \cdot 31,2 \cdot 10^{-3} = 9,8 \text{ Ом}.$$

Напрямки струмів у всіх вітках вибираємо так, як це показано на рис. 4.4. Розрахунок виконуємо символічним методом.

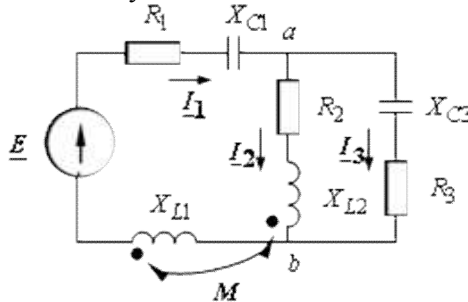


Рис. 4.4

Обчислимо комплексні діючі струми у всіх вітках кола методом контурних струмів. Для цього складаємо систему рівнянь. Перший незалежний контур складається з першої та другої віток, а другий – з другої та третьої. Напрямок контурних струмів вибираємо за годинниковою стрілкою.

При обчисленні власних ($\underline{Z}_{11}$; $\underline{Z}_{22}$) і взаємних ($\underline{Z}_{12}$; $\underline{Z}_{21}$) опорів незалежних контурів електричного кола необхідно враховувати наявність індуктивних зв'язків між котушками.

При знаходженні власних опорів $\underline{Z}_{11}$; $\underline{Z}_{22}$ незалежних контурів кола враховуємо тільки ті індуктивні зв'язки, які є усередині даного незалежного контуру у вигляді подвоєних опорів взаємної індуктивності. Це необхідно робити тому, що контурний струм у кожній із двох індуктивно-зв'язаних котушок індуктивності наводить у іншій котушці ЕРС взаємної індукції виду $\pm j\omega M$, які додаються один до одного (за аналогією з послідовним з'єднанням двох індуктивно-зв'язаних котушок).

У випадку, що розглядається, ЕРС взаємної індукції враховується зі знаком "+", оскільки власний контурний струм однаково орієнтований щодо однойменних затисків котушок. Тоді власні опори контурів кола мають вигляд

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{11} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2 \cdot jX_M = 10 - j10 + 40 + j30 + 2 \cdot j9,8 = 50 + j39,6 = \\ &= 63,8e^{j38^\circ} \text{ Ом};\end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 40 + j30 + 20 - j40 = 60 - j10 = 60,8e^{-9^\circ} \text{ Ом}.$$

При знаходженні взаємних опорів $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ необхідно враховувати опори, спільні для I й II контурів. До них належать:

- опір вітки, яка є спільною для цих контурів $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2}$;

- опір взаємної індуктивності між котушкою першої вітки, яка належить першому контуру і котушкою другої вітки, яка належить другому контуру.

Тоді взаємні опори контурів кола мають вигляд

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} &= -\underline{Z}_2 - jX_M = -40 - j30 - j9,8 = \\ &= -40 - j39,8 = 56,4e^{-j135^\circ} \text{ Ом}\end{aligned}$$

В цьому виразі знак "-" перед комплексним опором $\underline{Z}_2$ другої вітки прийнято за загальним правилом для взаємних опорів контурів, тому що в даній вітці контурні струми спрямовані назустріч один одному; знак "-" перед опором jX_M узятий тому, що контурний струм $\underline{I}_{11}$ у котушці індуктивності L_1 й контурний струм $\underline{I}_{22}$ у котушці індуктивності L_2 орієнтовані щодо однойменних затисків котушок у протилежні боки.

Тоді система рівнянь для визначення контурних струмів має вигляд

$$\begin{cases} (50 + j39,6)\underline{I}_{11} + (-40 - j39,8)\underline{I}_{22} = 100 + j0; \\ (-40 - j39,8)\underline{I}_{11} + (60 - j10)\underline{I}_{22} = 0 + j0. \end{cases}$$

Отриману систему розв'язуємо методом Крамера.

Визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 50 + j39,6 & -40 - j39,8 \\ -40 - j39,8 & 60 - j10 \end{vmatrix} = 3364 - j1292 \text{ Ом}^2.$$

Допоміжні визначники

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 100 + j0 & -40 - j39,8 \\ 0 + j0 & 60 - j10 \end{vmatrix} = 6000 - j1000 \text{ В} \cdot \text{Ом};$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 50 + j39,6 & 100 + j0 \\ -40 - j39,8 & 0 + j0 \end{vmatrix} = -4000 - j3980 \text{ В} \cdot \text{Ом}.$$

Розв'язавши дану систему, визначимо контурні струми у незалежних контурах електричного кола

$$\underline{I}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{6000 - j1000}{3364 - j1292} = 1,65 + j0,34 = 1,69e^{j12^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \frac{-4000 - j3980}{3364 - j1292} = 0,64 + j1,42 = 1,56e^{j66^\circ} \text{ А}.$$

Струми у вітках електричного кола

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} = 1,65 + j0,34 = 1,69e^{j12^\circ} \text{ A};$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 = \underline{I}_{11} - \underline{I}_{22} &= 1,65 + j0,34 - 0,64 - j1,42 = 1,01 - j1,08 = 1,48e^{-j47^\circ} \text{ A}; \\ &= 1,01 - j1,08 = 1,48e^{-j47^\circ} \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{22} = 0,64 + j1,42 = 1,56e^{j66^\circ} \text{ A}.$$

Обчислимо комплексні діючі струми у всіх вітках кола методом магнітної розв'язки. Для цього перейдемо до еквівалентної схеми заміщення без магнітного зв'язку (рис. 4.5).

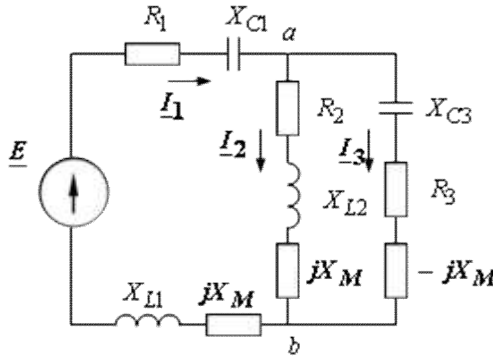


Рис. 4.5

Для розрахунку отриманого кола використовуємо метод еквівалентних перетворень (метод згортки).

Ділянку ab з паралельним з'єднанням віток замінюємо еквівалентним комплексним повним опором

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ab} &= \frac{(\underline{Z}_2 + jX_M)(\underline{Z}_3 - jX_M)}{\underline{Z}_2 + jX_M + \underline{Z}_3 - jX_M} = \frac{(40 + j30 + j9,8)(20 - j40 - j9,8)}{40 + j30 + j9,8 + 20 - j40 - j9,8} = \\ &= 48,3 - j11,9 = 49,8e^{-j14^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Еквівалентний комплексний повний опір всього кола

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{екв} &= \underline{Z}_1 + jX_M + \underline{Z}_{ab} = 10 - j10 + j9,8 + 48,3 - j11,9 = \\ &= 58,3 - j12,1 = 59,6e^{-j12^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Комплексний діючий струм у нерозгалуженій частині електричного кола за законом Ома:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{екв}} = \frac{100 + j0}{58,3 - j12,1} = 1,64 + j0,34 = 1,68e^{j12^\circ} \text{ A.}$$

Комплексна діюча напруга на ділянці паралельних віток

$$\underline{U}_{ab} = \underline{Z}_{ab} \underline{I}_1 = (48,3 - j11,9)(1,64 + j0,34) = 83,5 - j3,1 = 83,6e^{-j2^\circ} \text{ B.}$$

Комплексні діючі струми в паралельних вітках за законом Ома:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2 + jX_M} = \frac{83,5 - j3,1}{40 + j30 + j9,8} = 1,01 - j1,08 = 1,48e^{-j47^\circ} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3 - jX_M} = \frac{83,5 - j3,1}{20 - j40 - j9,8} = 0,63 + j1,42 = 1,56e^{j66^\circ} \text{ A.}$$

Відносна похибка між токами обчисленими двома методами не перевищує 1%, тобто розрахунки виконані правильно.

Складаємо баланс потужностей.

Потужність джерела

$$\underline{S}_{дж} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = (100 + j0)(1,64 - j0,34) = 164 - j34 = 168e^{-j12^\circ} \text{ ВА.}$$

При розрахунку потужності споживача потужність за рахунок магнітного зв'язку обчислюємо окремо:

$$\underline{S}_e = I_1^2 \underline{Z} + I_2^2 \underline{Z} + I_3^2 \underline{Z} = 1,68^2(10 - j10) + 1,48^2(40 + j30) +$$

$$+ 1,56^2(20 - j40) = 164,5 - j59,9 = 175,1e^{-j20^\circ} \text{ ВА.}$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_M &= jX_M \underline{I}_1 \cdot \underline{I}_2^* + jX_M \underline{I}_2 \cdot \underline{I}_1^* = j9,8 \cdot (1,64 + j0,34)(1,01 + j1,08) + \\ &+ j9,8 \cdot (1,01 - j1,08)(1,64 - j0,34) = -20,8 + j12,7 + 20,8 + j12,7 = \\ &= j25,7 = 25,4e^{j90^\circ} \text{ ВА.} \end{aligned}$$

$$\underline{S}_{cn} = \underline{S}_e + \underline{S}_M = 164,5 - j59,9 + j25,7 =$$

$$= 164,5 - j34,2 = 168,0e^{-j12^\circ} \text{ ВА.}$$

Таким чином комплексні повні потужності джерела та споживача збігаються.

Визначимо спади напруг на окремих ділянках кола. Спади напруг за рахунок магнітного зв'язку обчислюємо окремо:

$$\underline{U}_{1M} = jX_M \underline{I}_2 = j9,8 \cdot (1,01 - j1,08) = 10,6 + j9,9 = 14,5e^{j43^\circ} \text{ B;}$$

$$\underline{U}_{2M} = jX_M \underline{I}_1 = j9,8 \cdot (1,64 + j0,34) = -3,3 + j16,1 = 16,4e^{j102^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{1e} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = (10 - j10)(1,64 + j0,34) = 19,8 - j13,0 = 23,7e^{-j33^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{2e} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = (40 + j30)(1,01 - j1,08) = 72,8 - j12,9 = 73,9e^{-j10^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{3e} = \underline{Z}_3 \underline{I}_3 = (20 - j40)(0,63 + j1,42) = 69,4 + j3,2 = 69,5e^{j3^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{1e} + \underline{U}_{1M} = 10,6 + j9,9 + 19,8 - j13,0 = 30,5 - j3,1 = 30,7e^{-j6^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{2e} + \underline{U}_{2M} = 72,8 - j12,9 - 3,3 + j16,1 = 69,5 + j3,2 = 69,6e^{j3^\circ} \text{ В}.$$

Побудуємо суміщену векторну діаграму струмів і напруг (рис. 4.6).

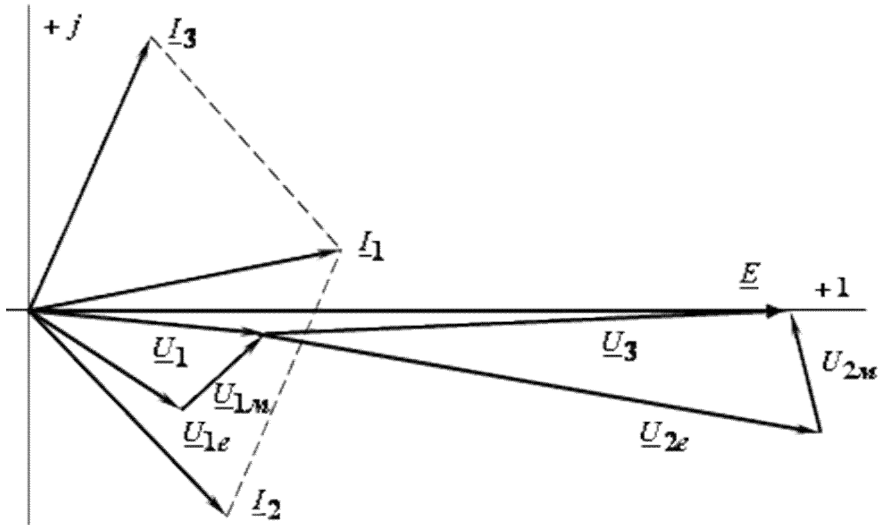


Рис. 4.5

ЛІТЕРАТУРА

1. Качан Ю.Г. Лінійна електротехніка (теоретичні основи).
2. Паначевский Б.І., Свєргун Ю.Ф. Загальна електротехніка: Теорія і практикум.
3. Мілих В.І. Електротехніка та електромеханіка.
4. Козлов В.В., Набокова О.В. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл.
5. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи.
6. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники.
7. Зевеке Г.В. и др. Основы теории цепей.
7. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории электрических цепей.