

УДК 539.3

Левицька Т.І.¹, Пожуєва І.С.¹

¹ канд. техн. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

АЛГОРИТМ РОЗРАХУНКУ МІНІМАЛЬНОЇ МАСИ КОЛОН, ЯКІ ПІДПИРАЮТЬ ОБОЛОНКУ

Розглядувана задача являє собою частинний клас задач нелінійного програмування. Поведінка оболонки, яка підперта колонами може бути описана системою рівнянь стану оболонки під дією реакцій у місцях стику колон та оболонки. Тому для побудови схеми оптимального розрахунку маси колон можна виділити змінні стану та змінні проектування. Змінні стану, при заданих проектувальником змінних проектування, можна визначити з сумісного розглядання взаємодії оболонки та колон.

При розгляданні задачі оптимального проектування будемо вважати, що відомі функція Гріна $w = G(x, \xi)$ прогину оболонки під дією зосередженого навантаження та прогин оболонки $w = w_0(x)$ під дією розподіленого навантаження, де $x = (x_1, x_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ - координати точок.

Тоді з умов рівності переміщень точок контакту оболонки та колон будемо мати систему рівнянь

$$\frac{R_i}{E_i S_i} l_i + \sum_{j=1}^n R_j G(x^{(i)}, x^{(j)}) = w_0(x^{(i)}) \quad , (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

де n – кількість колон, $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ – координати основ колон, R_i – реакція колони у верхній точці дотику, E_i – модуль Юнга, S_i – площа поперечного перерізу, l_i – довжина колони.

Накладемо обмеження на реакції, напруги та стійкість колон

$$\begin{aligned} R_i &\geq 0 \\ \frac{R_i}{S_i} - \sigma_{i\max} &\leq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \\ R_i - \frac{\pi^2 E_i I_i}{l_i^2} &\leq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Розглянемо випадок коли колони являють собою трубчасті стержні радіуса r_i і товщиною h_i , яка припускається малою величиною. Для такого перерізу I_i можна обчислити за формулою $I_i = \pi r_i^3 h_i$. Функцією цілі, яку треба мінімізувати є маса всіх колон

$$\phi_0 = \sum_{i=1}^n \rho_i S_i l_i \quad (3)$$

де ρ_i - густина матеріалу колон.

Введемо позначення $z_i = \frac{R_i}{S_i}$; $b_i = S_i$. Тоді вирази (1), (2), (3) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} h(z, b) &= 0 \\ \phi(z, b) &\leq 0 \quad , \\ \phi_0 &= \sum_{i=1}^n \rho_i l_i b_i \end{aligned} \quad (4)$$

де $z^T = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ - змінні стану, $b^T = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ - змінні проектування.

Функції $h(z, b)$, $\phi(z, b)$ та ϕ_0 мають вигляд

$$h(z, b) = \begin{cases} z_1(\frac{l_1}{E_1} + b_1 G_{11}) + z_2 b_2 G_{12} + \dots + z_n b_n G_{1n} - w_{01} \\ z_1 b_1 G_{21} + z_2(\frac{l_2}{E_2} + b_2 G_{22}) + \dots + z_n b_n G_{2n} - w_{02} \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ z_1 b_1 G_{n1} + z_2 b_2 G_{n2} + \dots + z_n(\frac{l_n}{E_n} + b_n G_{nn}) - w_{0n} \end{cases}, \quad \phi(z, b) = \begin{cases} -z_1 \\ \vdots \\ -z_n \\ z_1 - \sigma_{1\max} \\ \vdots \\ z_n - \sigma_{n\max} \\ z_1 - \beta_1 b_1^2 \\ \vdots \\ z_n - \beta_n b_n^2 \end{cases},$$

$$\phi_0 = \sum_{i=1}^n c_i b_i, \quad (5)$$

де $\beta_i = \frac{E_i}{8h_i^2 l_i^2}$, $c_i = \rho_i l_i$.

Використання методу проекції градієнта дає можливість в ітеративному режимі будувати наближення до оптимального проекту. Для розглядуваної схеми обчислень слід знайти матрицю $J = \frac{\partial h}{\partial z}$, яка з урахуванням (5) буде мати вигляд

$$J = \begin{pmatrix} \frac{l_1}{E_1} + b_1 G_{11} & b_2 G_{12} & \dots & b_n G_{1n} \\ b_1 G_{21} & \frac{l_2}{E_2} + b_2 G_{22} & \dots & b_n G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 G_{n1} & b_2 G_{n2} & \dots & \frac{l_n}{E_n} + b_n G_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Далі треба скласти вектор з функцій набору $\phi(z, b)$ які задовольняють так званим ε - активним обмеженням

$$\tilde{\phi} = [\phi_i], (\phi_i \geq -\varepsilon).$$

Для подальшого формування алгоритму знаходимо l^0, l^i .

$$l^{0T} = \left[\frac{\partial \phi_0}{\partial b} \right]^T = (c_1, c_2, \dots, c_n) ; \quad l^i = \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial b} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial b} \right]^T = \frac{\partial \phi_i^T}{\partial b} - \frac{\partial h^T}{\partial b} \cdot J^{-1} \cdot \frac{\partial \phi_i^T}{\partial z} .$$

При цьому вважається, що система векторів l^i , які є стовпцями матриці $\tilde{l}$, лінійно незалежні.

Важливу роль відіграють матриці $M_{\phi\phi}$ та $M_{\phi\phi_0}$, які обчислюються за формулами

$$M_{\phi\phi} = \tilde{l}^T \cdot \tilde{l} ; \quad M_{\phi\phi_0} = \tilde{l}^T \cdot l^0 .$$

З їх допомогою знаходяться вектори μ_1, μ_2 , компоненти яких є розв'язками двох систем лінійних рівнянь

$$M_{\phi\phi} \cdot \mu_1 = -M_{\phi\phi_0} , \quad M_{\phi\phi} \cdot \mu_2 = -\Delta\tilde{\phi} .$$

Векторні величини μ_1, μ_2 використовуються для знаходження $\delta b^1, \delta b^2$.

$$\delta b_1 = l^0 + \tilde{l} \cdot \mu_1 , \quad \delta b^2 = -\tilde{l} \cdot \mu_2 .$$

Величину γ , яка входить в формулу для обчислення вектора μ

$$\mu = \mu_1 + 2\gamma\mu_2 ,$$

визначимо із співвідношення

$$\gamma = -l^{0T} \cdot \delta b^1 / (2 \cdot \Delta\phi_0) ,$$

де $\Delta\phi_0$ - від'ємна величина, яка задає зменшення величини ϕ_0 на 3-20 % тобто її можна обчислювати за формулою

$$\Delta\phi_0 = -k \cdot \phi_0 / 100 ,$$

де k потрібний процент зменшення величини ϕ_0 .

Далі треба перевірити компоненти вектора μ . Якщо якась компонента є від'ємною, то відповідне обмеження ϕ_i виключається із розглядання і обчислення починається з початку з тим же самим вектором змінних проектування b^0 . По знайдених $\delta b^1, \delta b^2$ підраховується вектор

$$\delta b = -\frac{1}{2\gamma} \delta b^1 + \delta b^2 .$$

Поліпшене наближення для змінних проектування визначається таким чином

$$b^1 = b^0 + \delta b .$$

Якщо всі обмеження виконуються і величина $\left(\sum_{i=1}^n (\delta b_i^1)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ досить мала то робота алгоритму закінчується.