

УДК 539.3

А. В. Ревенко

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, м. Львів

ВПЛИВ РЕЛАКСАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ У В'ЯЗКОПРУЖНОМУ ВКЛЮЧЕННІ НА КОНЦЕНТРАЦІЮ НАПРУЖЕНЬ У ПЛАСТИНІ

Розв'язано задачу про встановлення напруженого стану пластини з включенням із в'язкопружного матеріалу. Для тонкого включення еліптичної форми і матеріалу з реологічними властивостями узагальненого матеріалу Кельвіна одержано розв'язок у замкненому аналітичному вигляді. Знайдено напруження у включенні та їх концентрацію в пластині.

Ключові слова: включення, пластина, в'язкопружний матеріал, модель Кельвіна.

Вступ

При відновленні несучої здатності пошкоджених тріщинами конструкцій тривалої експлуатації знаходить все ширше застосування технологія, яка полягає у заповненні дефектних зон рідкими матеріалами, здатними тверднути через певний час. Розрахунки короточасної міцності, підсилених таким способом елементів конструкцій свідчать про ефективність цієї методики [1].

Ін'єкційними матеріалами, як правило, є високомолекулярні сполуки (поліуретани, акрили, епоксидні смоли), несуча здатність яких при заданому навантаженні міняється з часом. Тому важливим є дослідження як короточасної [2], так і довготривалої міцності відновлених елементів конструкцій [3–5].

Встановимо релаксацію напружень у включенні із в'язкопружного матеріалу, реологічні властивості якого

будемо описувати узагальненою моделлю Кельвіна [4]. Зауважимо, що тіло Кельвіна достатньо добре відображає реологічні властивості полімерних матеріалів.

Постановка задачі

Нехай у нескінченній пружній пластині міститься в'язко-пружне включення (рис. 1). Будемо вважати, що включення тонке $\frac{h(x)}{a} \ll 1$, де $2h(x)$ – змінна висота, $2a$ – довжина включення. До пластини на нескінченності прикладені рівномірно розподілені зусилля інтенсивності σ_0 у напрямку осі y . Деформування пластини і включення відбувається в умовах плоского напруженого стану.

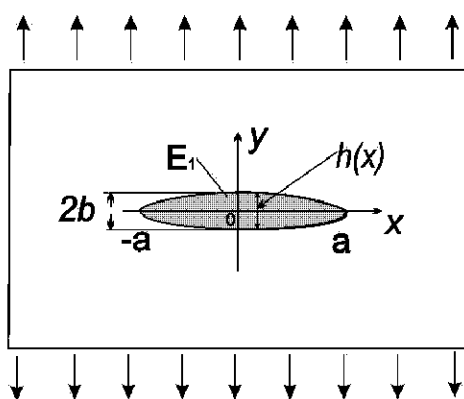


Рис. 1. Розміщення включення в пластині

Для ізотропного матеріалу в'язкопружного включення зв'язок між нормальними напруженнями і деформаціями задамо у вигляді [4]

$$\sigma_y(x, t) = E_1[\varepsilon_y(x, t) + \int_0^t R(t - \tau)\varepsilon_y(x, \tau)d\tau], \quad (1)$$

де $R(t)$ – ядро релаксації в'язко-пружного матеріалу; E_1 – миттєвий модуль Юнга матеріалу включення; t – часовий параметр.

Якщо модуль пружності включення значно менший від модуля Юнга матеріалу пластини, то врахувавши тонкість включення, його дію наближено можна виразити через сукупність вертикальних неперервно розміщених в'язкопружних стрижнів. Із гіпотези Вінклера знайдемо деформацію у включенні:

$$\varepsilon_y(x, t) = u(x, t)/h(x), \quad (2)$$

де $u(x, t)$ – переміщення контуру включення у напрямку осі y .

На поверхні контакту матеріалу включення і пластини виконуються умови рівності переміщень і напружень. Уявно видалимо із пластини матеріал включення,

замінивши його дію по поверхні утвореної порожнини розподілом напружень

$$\sigma_y(x, t) = \frac{E_1}{h(x)} \left[u(x, t) + \int_0^t R(t - \tau)u(x, \tau)d\tau \right],$$

$$\sigma_{xy} = 0. \quad (3)$$

При одержанні формули (3) використана залежність (2). Враховуючи малу товщину включення, пластину з отвором від включення замінимо пластинною з розрізом вздовж відрізка $[-a, a]$ на контурі, якого діють задані навантаження (3). Вважатимемо, що форма включення задана еліпсом з півосями a і b ($a > b$), де $h(x) = b\sqrt{a^2 - x^2}/a$ – половина висоти включення. У роботі [5] розв'язок рівняння (3), в рамках статичної теорії пружності, знайдено в замкнутому аналітичному вигляді:

$$u^*(x, t) = f(t)\sqrt{a^2 - x^2}, \quad (4)$$

де $u^*(x, t) = u(x, t) - \frac{\sigma_0}{E}h(x)$; E – модуль Юнга матеріалу матриці; $f(t)$ – невідома функція від часу. Для визначення функції $f(t)$ одержано рівняння Вольєрра

$$\chi f(t) + \int_0^t R(t - \tau)f(\tau)d\tau - p_2(t) = 0, \quad (5)$$

де $\chi = 1 + E/c_2$, $c_2 = 2\delta E_1$, $\delta = a/b$, E – модуль Юнга матеріалу пластини;

$$p_2(t) = -\frac{2\sigma_0}{c_2} \left(c_1 \int_0^t R(t - \tau)d\tau + c_1 - 1 \right), \quad c_1 = E_1/E.$$

Якщо функція $f(t)$ знайдена, то напружено-деформований стан у пластині з в'язкопружним включенням знайдемо таким чином. На контурі включення із співвідношень (2), (4) визначимо деформацію

$$\varepsilon_y = \sigma_0/E + \delta f(t). \quad (6)$$

Напруження у включенні обчислюємо на основі співвідношень (1), (6):

$$\sigma_y = E_1 \left\{ \frac{\sigma_0}{E} + \delta f(t) + \int_0^t K(t - \tau) \left[\frac{\sigma_0}{E} + \delta f(\tau) \right] d\tau \right\}. \quad (7)$$

Напруження в матриці у точках $x \pm a$, де напруження досягають свого максимуму знаходимо із умови рівності напружень та сумісності деформацій у включенні та матриці:

$$\sigma_y(t) = \sigma_0 + \delta E f(t).$$

Розв'язання інтегрального рівняння Вольтерра

У рівняння Вольтерра (5) входить ядро релаксації $R(t)$. Як правило, із експериментів визначають явний вигляд ядер повзучості [3, 4]. Отже, важливо встановити залежність між ядрами повзучості та релаксації. Деформація у в'язкопружному середовищі визначається інтегральним оператором

$$\varepsilon_y(x, t) = \frac{1}{E_1} [\sigma_y(x, t) + \int_0^t H(t - \tau) \sigma_y(x, \tau) d\tau]. \quad (8)$$

де $H(t)$ – ядро повзучості. Для знаходження зв'язку між ядрами використаємо перетворення Лапласа [6]

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt. \quad (9)$$

для якого вірна формула згортки оригіналів

$$L \left[\int_0^t R(t - \tau) f(\tau) d\tau \right] = F(s) \cdot \tilde{R}(s), \quad (10)$$

де $s = \alpha + i\omega$ – комплексна змінна, $F(s)$, $\tilde{R}(s)$ – функції зображень, значком \sim позначені трансформанти Лапласа. Застосуємо до інтегральних рівнянь (1), (8) перетворення Лапласа (9) і після використання формули (10) та перетворень одержимо

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_y(s) &= E_1 [1 + \tilde{R}(s)] \tilde{\varepsilon}_y(s), \\ E_1 \tilde{\varepsilon}_y(s) &= [1 + \tilde{H}(s)] \tilde{\sigma}_y(s). \end{aligned} \quad (11)$$

Порівнюючи між собою рівняння (11), одержимо шуканий зв'язок між ядрами

$$\tilde{R}(s) = - \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{H}(s) + 1}. \quad (12)$$

Застосуємо до інтегрального рівняння (5) перетворення Лапласа і після врахування формули (10) одержимо

$$\tilde{f}(s) = \frac{P_2(s)}{\chi_1 + \tilde{R}(s)}, \quad (13)$$

де $P_2(s) = - \frac{2\sigma_0}{c_2} (c_1 \tilde{R}(s) + c_1 - 1) \frac{1}{s}$. Якщо до подання (13) застосувати обернене перетворення Лапласа, то знайдемо шукану функцію $f(t)$.

Узагальнений матеріал Кельвіна

У цьому випадку ядро повзучості має вигляд

$$H(t) = \mu_1 e^{-\beta_1 t} + \mu_2 e^{-\beta_2 t},$$

де $\beta_1, \beta_2, \mu_1, \mu_2$ – реологічні характеристики матеріалу. Використаємо [6] і знайдемо

$$\tilde{H}(s) = \frac{\mu_1}{\beta_1 + s} + \frac{\mu_2}{\beta_2 + s}.$$

Із формул (12), (13) визначимо зображення:

$$\tilde{R}(s) = - \frac{a_1 s + a_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)},$$

$$P_2(s) = - \frac{2\sigma_0}{c_2} (c_1 \tilde{R}(s) + c_1 - 1) \frac{1}{s}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{де } a_1 &= \mu_1 + \mu_2, \quad a_2 = \mu_1 \beta_2 + \mu_2 \beta_1, \quad \lambda_1 = -\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - b_2}, \\ \lambda_2 &= -\lambda_1 - 2b_3, \quad b_1 = \mu_1 + \mu_2 + \beta_1 + \beta_2, \quad b_2 = \mu_1 \beta_2 + \mu_2 \beta_1 + \beta_2 \beta_1. \end{aligned}$$

Враховувши вирази (14), із рівняння (13) обчислимо

$$\tilde{f}(s) = \frac{A}{s} \left\{ 1 + \frac{a_3 s + a_4}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \right\}, \quad (15)$$

$$\text{де } A = - \frac{\sigma_0 (c_1 - 1)}{c_3} \frac{1}{\chi}, \quad a_3 = \frac{a_1}{\chi} - \frac{a_1 c_1}{c_1 - 1}, \quad a_4 = \frac{a_2}{\chi} - \frac{a_2 c_1}{c_1 - 1},$$

$$b_3 = \frac{b_1}{2} - \frac{a_1}{2\chi}, \quad b_4 = b_2 - \frac{a_2}{\chi}, \quad c_3 = \frac{c_2}{2}.$$

Використавши відомі оригінали [6], із співвідношення (15) знайдемо

$$f(t) = A \{ A_0 + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \},$$

$$\text{де } A_0 = 1 - \lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}, \quad A_1 = \frac{a_4 + \lambda_1 a_3}{\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad A_2 = \frac{a_4 + \lambda_2 a_3}{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)},$$

$$B_1 = \lambda_1 A_1, \quad B_2 = \lambda_2 A_2.$$

Числові результати

На рис. 2 наведені графіки, що показують релаксацію напружень у включеннях, повзучість яких описується узагальненою моделлю Кельвіна. В розрахунках, проведених згідно з формулами (9), (14), (16), взято: $c_1 = 0,4$; $\delta = 15$. Реологічні характеристики матеріалів включень: $\beta_1 = 1,2$; $\mu_2 = 0,6$; $\beta_2 = 1$. Значення параметрів μ_1 наведені на рисунках

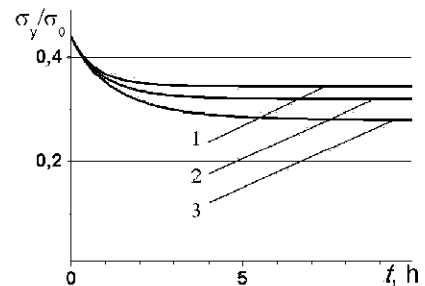


Рис. 2. Релаксація напружень у включенні:

1 – $\mu_1 = 0,4$; 2 – $\mu_1 = 0,5$; 3 – $\mu_1 = 0,7$

На рис. 2 показано, що напруження у включенні зменшуються, але стабілізуються на певному рівні. Це, в свою чергу, призводить до зростання напружень у пластині, особливо в околі точок ($y = 0$; $x = \pm a$). У залежності від часу дії зовнішнього навантаження ця зміна напружень, для розп'янутих матеріалів включення, зображена на рис. 3. Напруження в матриці зростають від значень їх миттєвої концентрації в початковий момент прикладання зовнішніх зусиль до кінцевої концентрації напружень, яка залежить як від форми включення, так і реологічних характеристик.

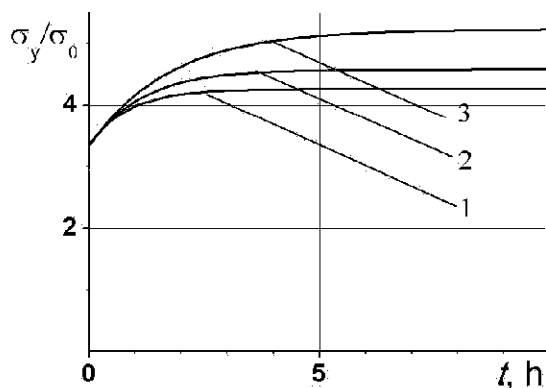


Рис. 3. Залежність концентрації напружень у пластині в околі включення:

$$1 - \mu_1 = 0,4; 2 - \mu_1 = 0,5; 3 - \mu_1 = 0,7$$

Висновки

Повзучість в'язкопружного матеріалу включення приводить до релаксації напружень у ньому і суттєво впливає на напружено-деформований стан у пластині,

яка перебуває під дією довготривалих статичних навантажень. Зокрема, для розп'янутих матеріалів, як це випливає із рис. 2, 3, напруження у включеннях зменшуються у 1,2–1,5 рази, що веде до зростання напружень в пластині в у 1,3–1,6 рази. Концентрація напружень біля включень (заповнених тріщин) зростає, але з часом стабілізується на певному рівні. Це дозволяє прогнозувати довготривалу міцність в технології ін'єкційного зміцнення, пошкоджених тріщинами, будівельних споруд тривалої експлуатації.

Список літератури

1. Маруха В. І., Механіка руйнування та міцність матеріалів: довідниковий посібник / В. І. Маруха, В. В. Панасюк, В. П. Силованюк / Під ред. В. В. Панасюка. Том 12 : Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. – Львів : Споллом, 2009. – 260 с.
2. Панасюк В. В. Концентрація напружень в трьохмерних телах с тонкими включеннями / В. В. Панасюк, М. М. Стадник, В. П. Силованюк. – К. : Наук. думка, 1986. – 215 с.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1966. – 752 с.
4. Каминський А. А. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами / А. А. Каминський. – К. : Наук. думка, 1990. – 312 с.
5. Силованюк В. П. Вплив повзучості матеріалу включення на концентрацію напруження в тілі / В. П. Силованюк, А. В. Ревенко // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – № 4. – С. 76–80.
6. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1974. – 831 с.

Одержано 16.12.2012

Ревенко А.В. Влияние релаксации напряжений в вязкоупругом включении на концентрацию напряжений в пластине

Решена задача о напряженном состоянии пластины с включением, которое заполнено вязкоупругим материалом. Для тонкого включения эллиптической формы и материала с реологическими свойствами обобщенного материала Кельвина получено решение в замкнутом аналитическом виде. Найдены напряжения во включении и их концентрацию в пластине.

Ключевые слова: включения, пластина, вязкоупругий материал, модель Кельвина.

Revenko A. Influence of stress relaxation in viscoelastic inclusion on concentration of stresses in the plate

The problem of stress state of a plate with inclusion which is filled by a viscoelastic material is solved. For thin inclusion of the elliptic form and material with rheological properties of the generalized Kelvin material solution is obtained in a closed analytical form. The stresses in the inclusion and their concentration in the plate are found. Stresses in inclusion and their concentration in the plate were discovered.

Keywords: inclusions, plate, viscoelastic material, Kelvins model.