

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Запорізький національний технічний університет

**ПОЛЯ І ХВИЛІ В ЗАДАЧАХ  
ТЕХНІЧНОГО ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ**

Навчальний посібник  
для студентів вищих навчальних закладів,  
які навчаються за напрямом підготовки «Кібербезпека»

Запоріжжя • ЗНТУ • 2016

УДК 621.391.3(075.8)

ББК 32.88 – 019я73

Р69

*Рекомендовано до друку вченою радою  
Запорізького національного технічного університету  
(протокол № 11 від 25 квітня 2016 року).*

Рецензенти:

*Крижановський В.Г., доктор технічних наук, професор кафедри  
радіофізики і кібербезпеки*

*Донецького національного технічного університету.*

*Цона О.І., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри  
радіотехнологій інформаційно-комунікаційних систем*

*Харківського національного університету радіоелектроніки.*

**Романенко С. М.**

Р69

Поля і хвилі в задачах технічного захисту інформації:  
навчальний посібник для студентів вищих навчальних  
закладів / С. М. Романенко, В. П. Дмитренко, Л. М. Карпуков  
– Запоріжжя: ЗНТУ, 2016. – 282 с.

ISBN 978-617-529-150-4

Розглянуто основні поняття і закони класичної електродинаміки, методи аналізу і синтезу електричних кіл з розподіленими параметрами, базові принципи формування і випромінювання електромагнітних хвиль., наведено приклади випромінювальних структур для формування хвиль з різними видами поляризації. Проведено аналіз властивостей деяких метасередовищ та викладено основні принципи побудови нелінійних локаторів. Посібник містить велику кількість ілюстрацій, прикладів вирішення типових задач, задач для самостійного вирішення та запитання для самоперевірки і контролю засвоєння знань за кожною розглядуваною темою.

Призначено для студентів усіх форм навчання за напрямом підготовки «Кібербезпека», а також студентів, які вивчають споріднені дисципліни за напрямом підготовки «Радіотехніка і телекомунікації».

УДК 621.391.3(075.8)

ББК 32.88 – 019я73

ISBN 978-617-529-150-4

© Романенко С. М.,

© Запорізький національний  
технічний університет (ЗНТУ),  
2016

## Перелік скорочень

- БЕ – базовий елемент
- ВАХ – вольт-амперна характеристика
- ДС – діаграма спрямованості
- ЕМП – електромагнітне поле
- ЕМХ – електромагнітна хвиля
- ЕП – електричне поле
- ІЧ – інфрачервоний
- КЗ – коротке замикання
- ККД – коефіцієнт корисної дії
- КСД – коефіцієнт спрямованої дії
- КСХ – коефіцієнт стоячої хвилі
- МП – магнітне поле
- МСЕ – міжнародний союз електрозв'язку
- НВЧ – надвисока частота
- ПЕМВН – побічні електромагнітні випромінення та наведення
- РЕА – радіоелектронна апаратура
- РМ – рівняння Максвелла
- ХР – хвилеве рівняння
- ХХ – холостий хід

## ВСТУП

З задачами захисту інформації людство впритул зіткнулося з тих пір, як навчилося її створювати, переробляти та передавати. Ці дії, як і переважну більшість явищ оточуючого нас світу, дуже тісно зв'язано з електромагнітними процесами. Людство давно в тій чи іншій мірі мало справу з різними явищами електрики та магнетизму, але лише дослідження останніх 150-180 років дали змогу створити чітку наукову теорію електромагнітних явищ і процесів. В XX сторіччі ця, вже узагальнена теорія електричних і магнітних явищ і процесів, отримала назву «теорія електромагнітного поля». Одним із найбільш важливих аспектів узагальнення стало використання єдиних підходів до опису та дослідження електричних і магнітних процесів у часі та просторі. Дуже цікавим є історичний аспект цього процесу.

В XVIII сторіччі пануючою була теорія «далекодії». Вона базувалась на законі Кулона для електричних зарядів і припускала, що один заряд діє на другий миттєво без участі в цьому процесі будь-якого матеріального середовища. За цих обставин поняття поля грало допоміжну роль і його взагалі можна було не використовувати (при бажанні).

На початку XIX сторіччя М. Фарадей запропонував теорію «близькодії». Ідея: всі електромагнітні явища зумовлено змінами (збудженнями) поля, які, виникнувши на даній ділянці, безпосередньо впливають лише на суміжні з ним ділянки. При цьому електромагнітне збудження поступово передається від точки до точки з кінцевою швидкістю. Але сама взаємодія та обмеженість її швидкості пояснювалась особливими властивостями деякого середовища існування поля, зокрема, деформаціями та вихровим рухом всеохоплюючого та всепроникного середовища взаємодії – ефіру. Дослідження М. Фарадея заклали фундамент теорії

електромагнітного поля і закінчилися формулюванням закону електромагнітної індукції. Цей закон експериментально було перевірено Е. Х. Ленцем.

Геніальний англійський вчений Дж. К. Максвелл в другій половині XIX сторіччя надав фізичним ідеям М. Фарадея (і багатьох інших дослідників) математичну форму і узагальнив всі відомі на той час закони електромагнетизму в системі рівнянь – *рівняння Максвелла*. Це дозволило не тільки пояснити відомі на той час електромагнітні явища, але і передбачити ряд нових явищ. Спрощено сутність цієї теорії можна викласти так: будь-які зміни електричного поля можуть збуджувати магнітне поле і навпаки. Теорія Дж. К. Максвелла є фундаментом теорії електромагнітного поля.

Електромагнітне поле – особливий вид матерії, який має хвилеві та корпускулярні властивості і виявляється в електричних і магнітних явищах. Дослідники встановлюють закони електромагнітного поля на основі вивчення та дослідження цих явищ. Це є підставою для того, щоб характеризувати науку, яка вивчає властивості та встановлює закони електромагнітного поля практично в усіх його проявах (окрім квантових), як феноменологічну (на основі феноменів – фізичних фактів) теорію. Ця наука і отримала назву «феноменологічна електродинаміка», або коротше «електродинаміка» (на «квантовому рівні» – квантова електродинаміка). В той же час треба наголосити, що всі процеси, які відбуваються в електромагнітному полі, підлягають основним законам природи: законам збереження та перетворення маси і енергії, закону відповідності та взаємозв'язку маси і енергії.

Електродинаміка, окрім загальнотеоретичного та пізнавального значення, сучасним станом перетворилась в теоретичну основу цілого ряду важливих галузей науки і техніки, які надзвичайно широко використовуються практично в усіх сферах людської діяльності (радіотехнічні,

комп'ютерні, телекомунікаційні і т. і.). Відмітимо також, що справедливість системи рівнянь Дж. К. Максвелла, які є основою більшості теоретичних положень радіотехніки (і других сфер діяльності), не викликають сумнівів. Ця теорія пройшла майже сторічну перевірку практикою.

У будь-якому пристрої для створення, обробки та передачі інформації обов'язково є в наявності з'єднувальні елементи, які можна ототожнити з відрізками електричного проводу (дроту). Якщо по цим елементам протікає змінний у часі струм (або до них прикладено змінну у часі напругу) то вони перетворюються в випромінювачі (антени); ці антени вже здатні випромінювати, тобто створювати ПЕМВН. Таким чином інформація, яку обробляє даний електронний пристрій може перетворитися в ПЕМВН, які вже мають здатність поширюватися (розповсюджуватися) в оточуючому просторі в вигляді електромагнітних хвиль. Те ж саме можна сказати і про будь-який отвір в екранувальному корпусі радіоелектронної апаратури. В свою чергу ці ПЕМВН можуть бути перехоплені зловмисником за допомогою відповідної розвідувальної апаратури. Звідси витікає окрема і дуже важлива задача організації системи захисту від несанкціонованого доступу до інформації – системи захисту інформації.

При організації ефективної системи захисту інформації треба вирішувати велике коло дуже різноманітних задач (від акустики і ПЕМВН до обробки цифрових сигналів і криптографії). Одними з них і досить суттєвими є задачі *технічного* захисту. Серед всього комплексу дуже різноманітних задач технічного захисту інформації виділимо ті, що мають «електродинамічну» природу:

- виявлення побічних електромагнітних випромінень та наведень (ПЕМВН) і боротьба з ними;
- виявлення та знешкодження закладних пристроїв, особливо тих, які або взагалі не використовують

радіоканал для передачі перехопленої інформації, або знаходяться в «пасивному» (невипромінювальному) стані.

З вищесказаного витікає, що для ефективного вирішення задач технічного захисту інформації фахівець повинен володіти основами електродинаміки. Тут маються на увазі не тільки класичні основи теорії електромагнітного поля, але і основи схемотехнічного підходу до реалізації кіл з розподіленими параметрами (або, як їх ще зовуть, «кіл НВЧ»). Комплекс цих питань охоплює «технічна електродинаміка», яка і стала предметом викладення в пропонованому до уваги читачів навчальному посібнику.

В перших п'яти розділах посібника в конспективній формі викладено основи класичної електродинаміки. Шостий розділ присвячено розгляду властивостей штучно створюваних середовищ – метасередовищ та особливостей хвильових процесів в них. Сьомий розділ – електромагнітні хвилі в лініях передачі, а восьмий – властивості елементів РЕА з розподіленими параметрами та особливості їх схемотехнічного використання. В дев'ятому розділі коротко викладено основи матричного опису кіл НВЧ. Десятий розділ присвячено класичним питанням теорії випромінення елементів РЕА, розглянуто їх діаграми спрямованості, електричні та поляризаційні властивості. В одинадцятому розділі розглянуто деякі особливості побудови антенно-фідерних трактів нелінійних локаторів.

Але при вирішенні задач технічного захисту інформації фахівець не повинен забувати, що техніка не «стоїть на місці» і те, що було вирішено сьогодні, завтра вже може бути застарілим, бо «ймовірний противник» застосував новий, досі невідомий (або недосить вивчений та досліджений, або просто забутий) фізичний ефект, а можливо вже й готовий прилад, для несанкціонованого отримання інформації з обмеженим

доступом. Прикладами можуть слугувати технології СТЕЛС, «лазерний мікрофон», нелінійний локатор і т. і..

Навчальний посібник призначено для студентів, які навчаються за фаховим напрямком “Кібербезпека”.

# 1 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ

## 1.1 Класифікація хвиль

Хвильовим процесом називають будь яку зміну (збурення) стану суцільного середовища, що поширюється з кінцевою швидкістю і переносить енергію. Існує велике різномайття хвильових процесів (різновидів хвиль): звукові хвилі, сейсмічні, хвилі, що виникають на поверхні води, хвилі механічних коливань в кристалах, радіохвилі, оптичні хвилі. В усіх різновидах хвильових процесів спостерігаються схожі закономірності поведінки у просторі і в часі; вони описуються однаковими математичними моделями і досліджуються загальними методами. Виділяють два основних типи хвиль: пружні і електромагнітні. Пружні (друга назва акустичні, від грецького слова *acustikos* – слуховий) хвилі – це хвилі, які зв'язано з коливаннями частинок при механічній деформації пружного середовища (рідкого, газоподібного, твердого). При цьому має місце перенесення енергії при відсутності переносу речовини. В акустичній хвилі частинки здійснюють коливання навколо точки спокою. Хвиля, у якої частки середовища здійснюють коливання уздовж напрямку поширення, називається поздовжньою хвилею. Якщо частки середовища коливаються перпендикулярно до напрямку поширення хвилі, акустична хвиля називається поперечною або зсувною. Це ті хвилі, які чує людське вухо. Вони займають діапазон частот від 17 Гц до 20 кГц. Більш низькі за частотою (інфразвукові, частоти нижче 17 Гц) та більш високі (ультразвукові, частоти від 20 кГц до 1 МГц) людське вухо не сприймає.

Електромагнітні хвилі – це змінні в часі електромагнітні поля, які мають властивість поширюватися в оточуючому просторі. Електромагнітні хвилі в вільному

просторі завжди мають поперечні до напрямку поширення складові векторів напруженостей електричного і магнітного полів. Поздовжні складові цих векторів можуть існувати лише за певних умов (біля меж розділу різних середовищ, поблизу збуджуючих джерел, в лініях передачі). Чисто поздовжніх електромагнітних хвиль не існує. Часто електромагнітні хвилі звать радіохвилями, підкреслюючи цим їх зв'язок з радіотехнічними процесами. Звичайно до радіохвиль відносять електромагнітні хвилі з частотами від  $3 \cdot 10^3$  Гц до  $3 \cdot 10^{11}$  Гц. Далі за частотою розташовано оптичний діапазон з частотами від  $3 \cdot 10^{11}$  Гц до  $1.5 \cdot 10^{17}$  Гц; до нього відносять інфрачервоне, видиме і ультрафіолетове випромінення. Ще більш високі частоти відповідають рентгенівському і гамма – випроміненню.

Наука, яка займається вивченням випромінення, поширення і поглинання електромагнітних хвиль, називається електродинамікою. До діапазону інфрачервоних хвиль всі середовища можна розглядати як суцільні, без урахування їх внутрішньої мікроструктури; хвильові електромагнітні процеси в таких середовищах вивчає класична електродинаміка. На більш високих частотах слід враховувати мікроструктуру середовища і дискретність електромагнітного випромінювання (потік фотонів). У цьому випадку електромагнітне випромінення описується методами квантової електродинаміки.

Міжнародним союзом електрозв'язку (МСЕ) прийнято класифікацію діапазонів частот і довжин хвиль, яку наведено в таблиці 1.1.

Дві основних властивості всіх хвильових процесів є очевидними з самого визначення цих процесів. Це насамперед – перенесення енергії. Величина енергії, яку переносить хвиля, оцінюється густиною потоку енергії в одиницю часу; ця характеристика хвиль для реальних хвилевих процесів

може змінюватися в широких межах. Наприклад, густина потоку енергії електромагнітного випромінення Сонця біля земної поверхні досягає  $1 \frac{\kappa B\Gamma}{\text{м}^2}$ , а густина потоку енергії мовних радіостанцій складає всього  $(10^{-3} \dots 10^{-6}) \text{ Вт/м}^2$ .

Таблиця 1.1 – Класифікація діапазонів частот

Діапазони частот			Діапазони довжин хвиль		
Назва частот	Значення частот	Назва діапазону частот	Назва діапазону довжин хвиль	Значення довжин хвиль	Літерне. позначення
Дуже низькі	3...30 КГц	ДНЧ (VLF)	Міріаметрові	100...10 Км	
Низькі	30...300 КГц	НЧ (LF)	Кілометрові	10...1 Км	Р
Середні	300...3000КГц	СЧ (MF)	Гектометрові	1000...100 м	L
Високі	3...30 МГц	ВЧ (HF)	Декаметрові	100...10 м	S
Дуже високі	30...3000 МГц	ДВЧ (VHF)	Метрові	10...1 м	С
Ультра-високі	0,3...3 ГГц	УВЧ (UHF)	Дециметрові	10...1 дм	X
Над-високі	3...30 ГГц	НВЧ (SHF)	Сантиметрові	10...1 см	Ku
Край-високі	30...300 ГГц	КВЧ (EHF)	Міліметрові	10...1 мм	K
Гіпер-високі	0,3...3 ТГц	ГВЧ (HHF)	Субміліметрові	1...0,1 мм	Ka

Інтенсивність звукових хвиль людського мовного апарату дуже незначна. Так, інтенсивність звукових хвиль (на порозі чутності їх людиною) на частоті  $f = 1\text{кГц}$  складає всього  $10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ .

Другу загальну властивість хвильових процесів також закладено у визначенні – кінцева швидкість поширення хвиль

в середовищі. Різні хвилі мають різні швидкості. З найбільшою швидкістю ( $3 \cdot 10^8$  м/с) поширюються електромагнітні хвилі у вакуумі. Швидкість акустичних хвиль за значеннями їх величин на декілька порядків менше. Наприклад, звукові хвилі поширюються в повітрі при температурі  $t = 0^\circ\text{C}$  із швидкістю  $331$  м/с.

Хвильові процеси можуть бути лінійними і нелінійними. Хвиля називається *лінійною*, якщо властивості середовища для цієї хвилі не залежать від інтенсивності хвилі. Лінійні хвилі поширюються незалежно одна від одної без взаємних спотворень. Необмежений простір може бути заповнено різними типами лінійних хвиль, які можуть мати різні частоти і напрямки поширення. Для лінійних хвиль виконується принцип суперпозиції (накладення) хвиль без взаємного впливу одна на одну. Для лінійних хвиль, незалежно від їх природи, для дослідження властивостей використовують єдиний теоретичний підхід. *Нелінійна хвиля* – це хвиля, під дією якої змінюються властивості середовища і відповідно змінюються властивості самої хвилі. Це зазвичай відбувається при великій інтенсивності хвилі. Але треба відзначити, що властивості середовища можуть змінюватися і під впливом інших факторів, наприклад, підмагнічування.

## 1.2 Гармонійна хвиля і її параметри

Гармонійна хвиля – це хвиля, яка змінюється в часі (аргумент  $t$ ) і в просторі (аргумент  $r$ ) за гармонійним (косинусоїдальним) законом. Для цієї хвилі також вживається термін монохроматична (одноколірна) хвиля, який запозичено з оптики. Будь який хвильовий процес можна представити за допомогою перетворень Фур'є через сукупність гармонійних хвиль.

Рівняння (миттєве значення) плоскої гармонійної хвилі, що поширюється, наприклад, вздовж вісі  $z$  в середовищі без втрат, записується в наступному вигляді:

$$A(z, t) = A_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_0). \quad (1.1)$$

Під величиною  $A$  розуміється та фізична величина, яка визначає природу хвильового процесу. Максимальне значення цієї величини називається амплітудою, яку позначено в (1.1) через  $A_0$ . Розмірність величини  $A_0$  визначається природою хвильового процесу. Наприклад, у звукових хвилях амплітуда вимірюється в одиницях тиску – паскалях (Па), в електромагнітних хвилях амплітуда напруженості електричного поля вимірюється в вольтах на метр (В/м), а магнітного поля – в амперах на метр (А/м).

Вираз, який стоїть в дужках (1.1), називається фазою коливання; фазу визначають через значення фізичної величини в даний момент часу і в даній точці простору. Константа  $\varphi_0$  називається початковою фазою; її використання має сенс при порівнянні двох і більше хвиль однієї частоти в даній точці простору і в фіксований момент часу. Кругову частоту  $\omega$  зв'язано з частотою  $f$  (число коливань в одиницю часу) співвідношенням:

$$\omega = 2\pi \cdot f. \quad (1.2)$$

Частота  $\omega$  вимірюється в радіанах в секунду, частота  $f$  в герцах (1 Гц – одне коливання в секунду). При відомій частоті  $f$  період коливання  $T$  знаходиться за співвідношенням:

$$T = \frac{1}{f}. \quad (1.3)$$

З періодичності хвильового процесу в просторі визначається довжина хвилі

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (1.4)$$

Таким чином, довжина хвилі – це просторовий інтервал (просторовий період), при проходженні якого фаза хвилі змінюється на  $2\pi$  вздовж напрямку поширення. Та кількість довжин хвиль, що укладаються на відстані  $2\pi$  метрів, називається хвильовим числом і позначається  $k$ .

Поверхня, на якій хвильовий процес має однакову фазу коливання, зветься поверхнею однакових фаз або фронтом хвилі. За формою фронту хвилі можна розділити на плоскі, циліндричні та сферичні. Слід зазначити, що це зручні математичні моделі, тому що в реальних умовах поширення фронт хвилі найчастіше має досить складну структуру. Поверхня, на якій амплітуда хвильового процесу є сталою величиною, зветься поверхнею рівних амплітуд. Хвиля називається *однорідною*, якщо у неї поверхні рівних амплітуд і рівних фаз співпадають, тобто на поверхні фронту не змінюється амплітуда хвильового процесу. В неоднорідній хвилі амплітуда на поверхні фронту змінюється.

Густина (або щільність) течії енергії (або інтенсивність) хвилі – це енергія, що переноситься хвилею через одиницю площі перпендикулярно орієнтованої (до напрямку поширення хвилі) поверхні за одиницю часу. Густина течії енергії пропорційна квадрату амплітуди хвилі

$$\vec{J} = \vec{e}_0 p A_0^2 \text{ Вт/м}^2, \quad (1.5)$$

де  $p$  – коефіцієнт пропорційності, що залежить від властивостей середовища і типу хвилі;

$\vec{e}_0$  – одиничний вектор, що показує напрям передавання енергії хвилею.

Вектор густини течії енергії в одиницю часу (густина течії потужності) прийнято називати вектором Умова – Пойнтінга.

Поширення хвилі відбувається в напрямку, який є перпендикулярним до поверхні фронту хвилі. Плоска хвиля рухається в напрямку нормалі до площини фронту. Циліндрична хвиля розходитьься по радіусу в площині, яка перпендикулярна вісі циліндра. Площа елементу поверхні циліндричного фронту зростає прямо пропорційно відстані, при цьому густина течії потужності убуває зворотно пропорційно відстані, а амплітуда циліндричної хвилі убуває зворотно пропорційно кореню квадратному з відстані. Сферична хвиля розходитьься по радіусу перпендикулярно сферичному фронту. Площа елементу поверхні сферичного фронту зростає пропорційно квадрату відстані, щільність течії потужності зменшується зворотно пропорційно квадрату відстані, а амплітуда сферичної хвилі убуває зворотно пропорційно відстані.

У середовищі з втратами хвилі, що поширюються, втрачають частину своєї енергії за рахунок перетворення її в теплову енергію (закон Джоуля) а тому їх амплітуди зменшуються за експоненціальним законом вздовж напрямку поширення. Відмітимо, що процес перетворення енергії хвилі в теплову енергію є незворотнім процесом і його треба однозначно зв'язувати з втратами за рахунок властивостей середовища поширення хвилі. *Особливо треба наголосити на відмінності процесів зменшення амплітуди хвилі за рахунок втрат в середовищі (перетворення в тепло) і за рахунок того, що хвиля розходитьься (поширюється) від свого джерела.*

### Контрольні запитання

1. Що таке хвильовий процес і які його головні властивості?

2. Які існують різновиди хвильових процесів?
3. Які складові може мати електромагнітна хвиля?
4. За яких умов у електромагнітної хвилі можуть утворюватись поздовжні складові?
5. Як класифікуються діапазони частот?
6. Що таке лінійні і нелінійні електромагнітні хвилі?
7. Що таке гармонійна (монохроматична) електромагнітна хвиля?
8. Якими величинами характеризується гармонійна хвиля?
9. Що таке довжина хвилі і хвильове число?
10. За якими ознаками визначається фазовий і амплітудний фронти електромагнітної хвилі? Чим відрізняється однорідна хвиля від неоднорідної?
11. Як визначається густина потоку енергії хвилі?
12. Що таке вектор Умова-Пойнтінга?
13. Що таке плоска, циліндрична та сферична хвилі, які їх ознаки?
14. Якими процесами зумовлюється зменшення амплітуди електромагнітної хвилі при її поширенні в деякому середовищі?

### Приклади вирішення задач

**Задача 1.1** Вектор напруженості електричного поля гармонійної електромагнітної хвилі, яка поширюється в повітрі в напрямку вісі  $z$ , має дві складові  $E_x$  та  $E_y$  з однаковими амплітудами 10 В/м. Частота  $f=100$  МГц. Початкову фазу обох складових для простоти візьмемо нульовими. Треба:

1. Записати вирази для миттєвих значень векторів цих складових.
2. Знайти величину та напрямок сумарного вектору напруженості електричного поля.

## Вирішення

За п.1:

1. За виразом (1.2) знайдемо кругову частоту  
 $\omega = 2 \cdot 3.14 \cdot 10^8 = 6.28 \cdot 10^8$  рад/сек.
2. З фізики відомо, що електромагнітні хвилі поширюються в повітрі зі швидкістю  $c = 3 \cdot 10^8$  м/сек, а тоді довжина хвилі  
 $\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 10^8 = 3$  м.
3. За виразом (1.4) знайдемо хвильове число  
 $k = 2 \cdot \pi / \lambda = 2 \cdot 3.14 / 3 = 2.09$  рад/м.
4. За аналогією з виразом (1.1) запишемо вирази для миттєвих значень векторів заданих складових з врахуванням того, що напрями цих векторів будуть визначати орти  $\vec{x}_0$  та  $\vec{y}_0$  декартової системи координат.

$$\vec{E}_x(z, t) = \vec{x}_0 10 \cos(6.28 \cdot 10^8 \cdot t - 2.09 \cdot z)$$

$$\vec{E}_y(z, t) = \vec{y}_0 10 \cos(6.28 \cdot 10^8 \cdot t - 2.09 \cdot z)$$

За п.2:

1. Величину та напрямок сумарного вектору  $\vec{E}$  визначимо з векторної суми

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = E_x \vec{x}_0 + E_y \vec{y}_0 = |\vec{E}| \cdot (\vec{x}_0 \cos \varphi + \vec{y}_0 \sin \varphi)$$

де  $|\vec{E}|$  – довжина (модуль) вектору  $\vec{E}$  (визначається за теоремою Піфагора), а  $(\vec{x}_0 \cos \varphi + \vec{y}_0 \sin \varphi)$  – його напрямок.

$$\text{Тоді } |\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 14.15 \text{ В/м.}$$

## 2 ВЕКТОРИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ. ПАРАМЕТРИ СЕРЕДОВИЩ І ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

### 2.1 Вектори електромагнітного поля

Електромагнітне поле являє собою сукупність змінних в часі і взаємозалежних електричного і магнітного полів, що впливають один на одного і в той же час зумовлюють один одного. Електромагнітне поле проявляється у вигляді сили, що діє на електричні заряди. Будь-який силовий вплив характеризується величиною і напрямком, тому для опису електромагнітних полів необхідно використовувати векторні величини та функції.

Електричне поле здійснює силовий вплив як на нерухомі, так і на рухомі заряди. Математичною моделлю електричного поля у вакуумі служить вектор  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля, що визначається за силою  $\vec{F}$ , яка діє на пробний заряд  $q$ , який внесено у розглядувану точку поля. Цю точку задано радіус-вектором  $\vec{r}$ .

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}). \quad (2.1)$$

У системі СІ напруженість електричного поля вимірюється у вольтах на метр – В/м. Для опису електричного поля в матеріальному середовищі потрібно ввести ще вектор електричної індукції  $\vec{D}$ , який у вакуумі зв'язано з вектором  $\vec{E}$  співвідношенням

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.2)$$

де  $\varepsilon_0$  – електрична стала вакууму. Фізична сутність цієї величини - абсолютна діелектрична проникність для вакууму.

Вектор електричної індукції  $\vec{D}$  вимірюється в кулонах на квадратний метр – Кл/м<sup>2</sup>, а діелектрична проникність – у фарадах на метр – Ф/м. Величина  $\epsilon_0$  визначена експериментально і дорівнює

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\Phi}{\text{м}} = 8.842 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

Магнітне поле взаємодіє лише з рухомими зарядами. У вакуумі магнітне поле описується вектором магнітної індукції  $\vec{B}$ , який визначається за силою Лоренця  $\vec{F}_L$ , що діє на заряд  $q$ , який рухається зі швидкістю  $\vec{V}$

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{V}, \vec{B}]. \quad (2.3)$$

Вектор магнітної індукції  $\vec{B}$  вимірюється в веберах на квадратний метр – Вб/м<sup>2</sup>, тобто у вольт-секундах на квадратний метр, або в теслах [Тл]. Для опису магнітного поля в матеріальному середовищі додатково вводиться вектор  $\vec{H}$ , який називається напруженістю магнітного поля. В вакуумі вектори  $\vec{B}$  та  $\vec{H}$  зв'язано співвідношенням

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (2.4)$$

де  $\mu_0$  – магнітна стала вакууму. Фізична сутність цієї величини – абсолютна магнітна проникність вакууму.

Вектор  $\vec{H}$  має розмірність ампера на метр – А/м, а величина  $\mu_0$  – генрі на метр Гн/м. Чисельне значення  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

## 2.2 Матеріальні рівняння електромагнітного поля

Взаємодія електромагнітного поля з середовищем враховується в матеріальних рівняннях, які є співвідношеннями, що зв'язують попарно вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$ . Виведення цих рівнянь зв'язано з описом процесів, які відбуваються в середовищі під дією сил електромагнітного поля.

Є багато прикладів речовин-діелектриків, які не проводять електричний струм, але електричне поле усередині них залежить від напруженості зовнішнього електричного поля. Діелектрики, які поміщено в електричне поле (стале або змінне в часі), специфічним чином міняють свій стан – вони *поляризуються*. В результаті цього з'являється додаткове електричне поле, яке накладається на первинне. При цьому сумарне електричне поле буде відрізнитися від того, яким би воно було у вакуумі і залежить від властивостей діелектричного середовища.

Поляризація – складний фізичний процес, який зв'язано з атомною структурою конкретної речовини. Тому обмежимося лише коротким і спрощеним розглядом процесу поляризації. Молекули і атоми речовини є об'єднанням (сукупністю) електрично заряджених часток (зв'язані заряди), причому сумарний заряд молекули (атома) дорівнює нулю. Для діелектриків характерними є міцні зв'язки заряджених часток, тому при дії зовнішнього електричного поля не відбувається руху носіїв заряду в товщі матеріалу (принаймні в не дуже сильних полях). Під дією поля молекула діелектрика деформується так, що її можна представити у вигляді малого електричного диполя – системи двох різноіменних зарядів (+q і -q), що зміщені в просторі на малу відстань  $l$ . Диполі характеризуються дипольним моментом  $\vec{p} = \vec{l}_0 q l$  ( $\vec{l}_0$  – орт вектору  $\vec{p}$ , який направлено вздовж вісі

диполя від від'ємного заряду до додатнього). Спрощено цей процес можна показати на моделі атома водню, що складається з протона і електрона.

За відсутності зовнішнього електричного поля електрон обертається за круговою орбітою. В електричному полі орбіта електрона витягується, центри додатнього та від'ємного зарядів перестають збігатися в просторі, і атом водню поводитья як електричний диполь, що характеризується дипольним моментом. Так поляризуються неполярні діелектрики, молекули (атоми) яких у відсутності зовнішнього поля не мають власного дипольного моменту. До них відносяться більшість газів і багато твердих діелектриків (кварц, поліетилен і т. і.). У полярних діелектриків (непровідні рідини і деякі тверді діелектрики, наприклад, поліхлорвинил) молекули і без зовнішнього електричного поля вже є диполями, дипольні моменти яких орієнтовано в просторі хаотично. У обох випадках зовнішнє електричне поле здійснює силову дію на диполі і орієнтує дипольні моменти молекул за полем. В результаті з'являється дипольний момент даного об'єму речовини. Кількісною характеристикою поляризації діелектрика є вектор поляризованості  $\vec{P}$ , який визначається як границя (ліміт) відношення сумарного дипольного моменту речовини в об'ємі до величини цього об'єму  $\Delta V$  при  $\Delta V \rightarrow 0$ .

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{P}_i}{\Delta V}. \quad (2.5)$$

Вектор  $\vec{P}$  має розмірність Кл/м<sup>2</sup>. Величина індукованого дипольного моменту пропорційна напруженості електричного поля

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi^E \vec{E}. \quad (2.6)$$

Безрозмірний параметр  $\chi^E$  називається діелектричною сприйнятливістю, який характеризує властивість діелектрика поляризуватися. При описі електромагнітних полів у матеріальному середовищі зручно ввести вектор  $\vec{D}$ , який зв'язано з вектором  $\vec{P}$  співвідношенням

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (2.7)$$

С урахуванням виразу (2.6) формулу (2.7) можна представити у вигляді

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi^E \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi^E) \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad (2.8)$$

де  $\varepsilon_a = \varepsilon_0 (1 + \chi^E)$  – абсолютна діелектрична проникність середовища.

Рівняння (2.8) зв'язує між собою вектори  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$  і зветься матеріальним рівнянням. Пропорційність векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{P}$  у співвідношенні (2.7), а також векторів  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$  у формулі (2.8) справедлива при не дуже сильних електричних полях, а в разі змінного в часі електричного поля ще і за умови, що вектор  $\vec{P}$  встигає «стежити» за вектором  $\vec{E}$ , змінюючись синхронно з ним. На високих частотах через інерцію молекул вектор  $\vec{P}$ , а також і вектор  $\vec{D}$ , відстає в часі від вектора  $\vec{E}$ . Надалі вважатимемо, що середовище безінерційне і співвідношення (2.7) і (2.8) справедливі.

Під дією електричного поля (сталого або змінного в часі) в середовищі, яке має властивість провідності (провідниках), існують вільні електричні заряди, виникає

електричний струм провідності, розподіл якого характеризується вектором об'ємної густини струму провідності

$$\vec{J}(M) = \vec{i}_0 \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}. \quad (2.9)$$

Тут  $\vec{i}_0$  – одиничний вектор, що показує напрям струму (напрямок руху позитивних зарядів) в даній точці  $M$ ,

$\Delta S$  – площинка, яка є перпендикулярною вектору  $\vec{i}_0$ , і в якій розташовано точку  $M$ ,

$\Delta I$  – струм провідності, який протікає через площинку  $\Delta S$ .

Вектор  $\vec{J}$  має розмірність  $A/m^2$ .

Густина струму провідності є пропорційною напруженості електричного поля

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (2.10)$$

Коефіцієнт пропорційності  $\sigma$  зветься питомою провідністю і має розмірність сименс на метр –  $Cm/m$  [ $1/\Omega \cdot m$ ]. Співвідношення (2.10) зветься законом Ома в диференційній формі.

Речовини, які не проводять електричний струм, але магнітне поле усередині них залежить від зовнішнього магнітного поля, зветься магнетиками. Під дією зовнішнього магнітного поля (сталого або змінного в часі) магнетики намагнічуються. В результаті з'являється додаткове магнітне поле, яке накладається на первинне. При цьому сумарне магнітне поле відрізняється від того, яким воно було б у вакуумі.

Явище намагнічування спрощено можна представити таким чином. Атоми і молекули магнетиків мають магнітний момент  $\vec{m}$  і можуть бути уподібнені маленьким рамкам зі струмом. Кожна рамка зі струмом створює власне магнітне

поле. За відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти молекул направлені хаотично і сумарний магнітний момент даного об'єму середовища  $\Delta V$  дорівнює нулю, тобто магнітні поля окремих молекул взаємно компенсуються. Під дією зовнішнього магнітного поля відбувається орієнтація магнітних моментів всіх молекул, а тому сумарний магнітний момент буде відрізнятись від нуля. Додаткове магнітне поле, що утворюється в результаті намагнічування, може як ослаблювати, так і збільшувати первинне поле. Середовища, в яких магнітне поле трохи ослаблюється, називають діамагнітними. Середовища, в яких магнітне поле трохи збільшується, називають парамагнітними, а середовища, в яких відбувається істотне збільшення магнітного поля – феромагнітними.

Намагнічуваність середовища характеризується вектором намагнічуваності  $\vec{M}$ , який визначається як границя (ліміт) відношення сумарного магнітного моменту речовини в об'ємі до величини цього об'єму  $\Delta V$  при  $\Delta V \rightarrow 0$

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{m}_i}{\Delta V}. \quad (2.11)$$

Вектор  $\vec{M}$  має розмірність А/м.

При розгляді багатьох процесів зручно ввести вектор напруженості магнітного поля  $\vec{H}$ , який зв'язано з вектором  $\vec{M}$  співвідношенням

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}. \quad (2.12)$$

Експериментально встановлено, що в не дуже сильних і не дуже швидко змінних зовнішніх магнітних полях зв'язок між векторами  $\vec{M}$  і  $\vec{H}$  є лінійним.

$$\vec{M} = \chi^M \vec{H} . \quad (2.13)$$

Безрозмірний параметр  $\chi^M$  зветься магнітною сприйнятливістю середовища. При підстановці (2.13) в (2.12), отримаємо

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi^M) \vec{H} = \mu_a \vec{H} . \quad (2.14)$$

Коефіцієнт пропорційності  $\mu_a = \mu_0(1 + \chi^M)$  між векторами  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  зветься абсолютною магнітною проникністю середовища. Співвідношення (2.14) є другим матеріальним рівнянням. Порівнюючи (2.14) з (2.8) можна углядіти аналогію між поведінкою поляризованих діелектриків в електричному полі і поведінкою магнетиків, які поміщено в зовнішнє магнітне поле.

Електромагнітне поле в матеріальному середовищі описується чотирма основними векторами  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ , які попарно зв'язано між собою матеріальними рівняннями

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E} , \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H} . \quad (2.15)$$

Матеріальні рівняння характеризують силову дію електромагнітного поля на середовище, яка проявляється в поляризованості і намагнічуваності середовищ. Розглянуті величини  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$ ,  $\chi^E$ ,  $\chi^M$  виражають «міру» відгуку середовища на електромагнітне поле і входять в матеріальні рівняння (2.15).

### 2.3 Класифікація середовищ

Властивості середовища по відношенню до електромагнітного поля визначаються параметрами:

абсолютною діелектричною проникністю  $\varepsilon_a$ , абсолютною магнітною проникністю  $\mu_a$  і питомою провідністю  $\sigma$ . Разом з абсолютною діелектричною проникністю  $\varepsilon_a$  вводиться *відносна* діелектрична проникність

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0}. \quad (2.16)$$

Звідси видно, що величина  $\varepsilon_r$  характеризує середовище ( $\varepsilon_a$ ) по відношенню до електричних властивостей вакууму ( $\varepsilon_0$ ). Для більшості середовищ  $\varepsilon_r > 1$ . Значення  $\varepsilon_r$  для деяких діелектриків, які часто використовуються в радіоелектронних пристроях, наведено в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Відносна діелектрична проникність деяких діелектриків

Матеріал	$\varepsilon_r$
Фторопласт-4	2.08
Поліетилен	2.25
Полістирол	2.55
Плавлений кварц	3.8
Полікор	9.7

Слід зазначити, що існують середовища для яких  $\varepsilon_r < 1$  (іоносфера, плазма).

Аналогічно вводиться відносна магнітна проникність

$$\mu_r = \frac{\mu_a}{\mu_0}. \quad (2.17)$$

Відносна магнітна проникність діамангнітних і парамагнітних речовин трохи відрізняється від одиниці і в практичних

розрахунках ефектами діамагнетизму і парамагнетизму зазвичай нехтують, вважаючи,  $\mu_r = 1$ , тобто  $\mu_a = \mu_0$ . Феромагнітні речовини (залізо, нікель і т. і.) мають  $\mu_r \gg 1$  і її величина істотно залежить від величини зовнішнього магнітного поля. Окрім того, у феромагнітних матеріалах намагнічуваність середовища залежить не лише від величини магнітного поля в даний момент часу, але і від того, яким воно було раніше (явище магнітного гістерезису).

Питома провідність для металів має великі чисельні значення; для деяких з них значення  $\sigma$  наведено в таблиці 2.2

Таблиця 2.2 – Питомі провідності деяких металів

Метал	$\sigma$ [См/м]
Срібло	$7.1 \cdot 10^7$
Мідь	$5.7 \cdot 10^7$
Цинк	$1.7 \cdot 10^7$
Латунь	$1.4 \cdot 10^7$

Значення питомої провідності інших середовищ (діелектриків, напівпровідників) на декілька порядків менші, ніж у металів. Для опису провідних властивостей цих середовищ використовують іншу числову характеристику – кут діелектричних втрат, який буде введено далі.

За «поведінкою» параметрів середовища в електромагнітному полі проводиться класифікація середовищ. Середовище зветься лінійним, якщо його параметри  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ , і  $\sigma$  не залежать від величини амплітуд векторів поля. У лінійному середовищі матеріальні рівняння (2.15) лінійні, тобто є співвідношеннями прямої пропорційності. Середовище зветься *нелінійним*, якщо його параметри  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ , і  $\sigma$  (або хоч би один з них) залежать від величин амплітуд векторів поля. Реальні середовища при не дуже сильних полях

розглядаються як лінійні, і надалі мова буде йти лише про лінійні середовища.

Лінійні середовища поділяють на *однорідні* і *неоднорідні*, *ізотропні* і *анізотропні*. *Однорідними* звать середовища, у яких параметри  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$ , і  $\sigma$  не залежать від координат, тобто властивості середовища однакові у всіх її точках. Середовища, в яких хоч би один з параметрів  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$ , і  $\sigma$  є функцією координат, звуться *неоднорідними*. Прикладами неоднорідних середовищ є тропосфера, іоносфера, діелектрична проникність яких змінюється з висотою.

Якщо властивості середовища однакові для будь-яких орієнтацій векторів впливного поля, то таке середовище звать *ізотропним*. В ізотропних середовищах вектори  $\vec{P}$  і  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$ , а також,  $\vec{M}$  і  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  є паралельними, а параметри  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$ , – скалярні величини.

Середовища, властивості яких залежать від орієнтації векторів впливного поля, звать *анізотропними*. В анізотропних середовищах вектори  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$ , або  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  виявляються не паралельними. При цьому діелектрична, або магнітна проникність вже не є скалярними величинами. Тоді ці параметри має бути представлено у вигляді квадратної матриці, що зветься тензором. До анізотропних середовищ відносяться, наприклад, намагнічена плазма і намагнічений ферит. У намагніченій плазмі тензором є діелектрична проникність. Для намагніченої плазми запис матеріального рівняння, яке зв'язує вектори  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$ , формально залишається тим же

$$\vec{D} = \vec{\epsilon}_a \vec{E}. \quad (2.18)$$

Тут двостороння стрілка над  $\epsilon_a$  є позначенням тензорної величини. Запис (2.18) в декартовій системі координат має вигляд

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{axx} & \varepsilon_{axy} & \varepsilon_{axz} \\ \varepsilon_{ayx} & \varepsilon_{ayy} & \varepsilon_{ayz} \\ \varepsilon_{azx} & \varepsilon_{azy} & \varepsilon_{azz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}.$$

Звідси отримуємо систему скалярних рівнянь, яка є еквівалентною векторному рівнянню (2.18)

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{axx}E_x + \varepsilon_{axy}E_y + \varepsilon_{axz}E_z \\ D_y &= \varepsilon_{ayx}E_x + \varepsilon_{ayy}E_y + \varepsilon_{ayz}E_z. \\ D_z &= \varepsilon_{azx}E_x + \varepsilon_{azy}E_y + \varepsilon_{azz}E_z \end{aligned} \quad (2.19)$$

Непаралельність векторів  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$  (а також  $\vec{P}$  і  $\vec{E}$ ) в анізотропному середовищі пояснюється тим, що напрям вторинного електричного поля, що виникло в результаті поляризації анізотропного середовища, складає деякий кут з напрямом первинного електричного поля.

У намагніченому феритовому середовищі тензором є магнітна проникність і матеріальне рівняння, яке зв'язує вектори  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$ , набуває вигляду

$$\vec{B} = \vec{\mu}_a \vec{H}. \quad (2.20)$$

В лінійних, однорідних і ізотропних середовищах, в яких справедливі матеріальні рівняння у вигляді  $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ , електромагнітне поле може бути визначене двома векторами. У прикладній електродинаміці зазвичай використовують пару векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ , через які виражаються

всі параметри електромагнітних хвиль в різних середовищах і пристроях.

### Контрольні запитання

1. За якою ознакою вводиться вектор напруженності електричного поля?
2. Як вводиться вектор електричної індукції у вакуумі?
3. Що таке електрична стала вакууму?
4. Як визначається сила Лоренця, яка її фізична сутність і як вводяться вектори магнітної індукції та напруженності магнітного поля у вакуумі?
5. Що таке поляризація діелектрика та як можуть створюватись електричні диполі із електрично нейтральних молекул або атомів?
6. Як вводиться вектор поляризованості, яка фізична сутність діелектричної сприйнятливості та абсолютної діелектричної проникності діелектричної речовини?
7. Як вводиться об'ємна густина струму провідності?
8. Що таке закон Ома в диференційній формі та чим він відрізняється від закону Ома для ділянки електричного кола?
9. Чим відрізняється магнетик від діелектрика?
10. Які властивості мають діамагнетики, парамагнетики та феромагнетики?
11. Як вводяться вектори намагнічуваності та напруженності магнітного поля?
12. Яка фізична сутність матеріальних рівнянь електромагнітного поля?
13. Яка фізична сутність відносних діелектричної та магнітної проникностей?
14. Що таке магнітний гістерезис?
15. За якими ознаками проводиться класифікація середовищ?

16. Що таке однорідні та неоднорідні середовища?
17. За якими ознаками розрізняють ізотропні та анізотропні речовини?
18. Що таке тензори діелектричної та магнітної проникностей?

### Приклади вирішення задач

**Задача 2.1** По круглому провіднику, який виконано із міді протікає сталий струм  $I=1.5\text{А}$ . Діаметр провідника  $d=0.5\text{ мм}$ . Знайти напруженість електричного поля усередині провідника та спадання напруги на ділянці довжиною  $l=10\text{м}$ . Як зміниться спадання напруги, якщо діаметр провідника збільшити вдвоє?

### Вирішення

1. Знайдемо площу поперечного перерізу провідника  

$$S = \pi \cdot d^2 / 4 = 3.14 \cdot 0.5^2 / 4 = 1.96 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2.$$
2. Оскільки струм є сталим у часі, то його буде розподілено рівномірно по площі поперечного перерізу і тоді модуль вектору густини струму  

$$J = I/S = 1.5 / 1.96 \cdot 10^{-7} = 7.65 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2.$$
3. Питома провідність міді за даними Табл.2.2 є  $\sigma = 5.7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ , а тоді модуль вектору напруженості електричного поля за виразом (2.10) буде  

$$E = J/\sigma = 7.65 \cdot 10^6 / 5.7 \cdot 10^7 = 0.134 \text{ В/м}.$$
4. Оскільки струм тече вздовж провідника, то і вектор напруженості електричного поля буде мати той же напрям, а тоді спадання напруги на ділянці довжиною  $l$  буде  

$$\Delta U_1 = E \cdot l = 0.134 \cdot 10 = 1.34 \text{ В}.$$
5. Якщо  $d = 1\text{мм}$ , то  $S = 7.85 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2$ ,  $J = 1.91 \text{ А/м}^2$ ,  $E = 0.034 \text{ В/м}$  а спадання напруги складе лише  $\Delta U_2 = 0.34 \text{ В}$ .

Треба чітко розуміти, що зменшення спадання напруги  $\Delta U_2 < \Delta U_1$  зумовлено зменшенням втрат при протіканні струму. В свою чергу, зменшення втрат відбулося за рахунок зменшення значення густини струму з-за збільшення площі провідника. На практиці для більшості застосувань допустимим значенням густини струму вважається величина  $7 \text{ А/мм}^2$  для мідного провідника.

**Задача 2.2** Вектор  $\vec{E}$  задано проєкціями  $E_x=1 \text{ В/м}$ ,  $E_y=2 \text{ В/м}$ ,  $E_z=0$ . Визначити вектор  $\vec{D}$  в анізотропному середовищі, абсолютну діелектричну проникність якого описано тензором

$$\vec{\epsilon} = \epsilon_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Чи будуть в цьому середовищі вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{D}$  паралельними?

### Вирішення

1. За виразом (2.18) вектор  $\vec{D} = \vec{\epsilon}_a \vec{E}$ . Запишемо цей вираз в розгорнутому матричному вигляді. Для знаходження добутку матриці на стовпець застосуємо правило Крамера (рядок на стовпець) і тоді для складових вектору  $\vec{D}$  (проєкцій на вісі координат) отримаємо

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \epsilon_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$$

2. Для вирішення питання про паралельність векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{D}$  треба зіставити їх проєкції на вісі координат. З цього зіставлення видно, що відповідні проєкції не є пропорційними, а отже вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{D}$  в анізотропному середовищі не є паралельними.

### Задачі для самостійного вирішення

**Задача 2.3** Вектор  $\vec{A} = [\vec{m}, \vec{n}]$ , а вектор  $\vec{B} = [\vec{n}, \vec{m}]$ . Чи будуть ці вектори відрізнятися за довжиною (модулем) та напрямом?

**Задача 2.4** Чи можуть силові лінії електричного поля торкатися одна одної в будь якій точці?

**Задача 2.5** Нескінчену металеву площину рівномірно заряджено з поверхневою густиною заряду  $\rho_S = 10^{-4} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$ .

Визначити вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{D}$  у всьому просторі,  $\epsilon_r = 1$ .

## 3 ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

### 3.1 Рівняння Максвелла

Електромагнітні процеси підкоряються багатьом фізичним законам, які було відкрито в XVIII-XIX сторіччях. Ці закони було узагальнено, формалізовано і записано у вигляді рівнянь англійським фізиком Дж. К. Максвеллом. Ці рівняння прийнято представляти в інтегральній або диференціальній формах запису.

1. Перше рівняння Максвелла в інтегральній формі описує закон повного струму: *циркуляція вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  по довільному замкнутому контуру  $l$  дорівнює повному струму, що пронизує цей контур*

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{ct} \right) d\vec{S}. \quad (3.1)$$

Повний струм визначається течією через поверхню  $S$  суми векторів об'ємної густини струмів провідності  $\vec{J}$ , струмів зсуву  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  і сторонніх струмів  $\vec{J}^{ct}$ . У загальному випадку густини струмів мають нерівномірний розподіл на довільній поверхні  $S$ , що спирається на контур  $l$ . В випадку сталих струмів і полів вираз (3.1) є законом Ампера.

Для переходу до диференціальної форми запису закону повного струму в рівнянні (3.1) циркуляція вектору  $\vec{H}$  замінюється за теоремою Стокса інтегралом від вектору  $rot\vec{H}$  (течією цього вектора) через поверхню  $S$

$$\int_S \text{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{\text{CT}} \right) d\vec{S}.$$

Оскільки в поверхневих інтегралах поверхня  $S$  довільна і однакова, то і підінтегральні вирази однакові, тобто маємо

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{\text{CT}}. \quad (3.2)$$

Густина повного струму в рівнянні (3.2) містить три доданки, що мають розмірності А/м. Вектор  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  являє собою густину струму провідності, що виникає в провідному середовищі під дією електричного поля. Разом з густиною струму провідності Максвеллом було введено вектор  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}^{\text{ЗМ}}$ , який він назвав густиною струму зміщення (вектор  $\vec{D}$  має ще назву вектора електричного зміщення). Струм зміщення встановлює внутрішній взаємозв'язок між змінними у часі електричним і магнітним полями. Якщо навіть в деякій точці простору у момент часу  $t$  щільність струму провідності  $\vec{J}$  відсутня, то вихрове змінне в просторі магнітне поле може породжуватися струмом зміщення з густиною  $\vec{J}^{\text{ЗМ}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , тобто змінним в часі електричним полем. Таким чином, змінне електричне поле, так само як і струм провідності, буде супроводжуватися появою змінного магнітного поля. Густина струму зміщення може бути представлено, з урахуванням (2.7), у вигляді двох доданків

$$\vec{J}^{\text{ЗМ}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Перший доданок в правій частині цієї формули є струмом зміщення у вакуумі і відповідає лише зміні електричного поля в часі. Цей струм не супроводжується рухом електричних зарядів. Другий доданок, який Максвелл назвав струмом зміщення в діелектричному середовищі, обумовлено впорядкованим рухом зв'язаних зарядів в результаті дії змінного електричного поля. Прикладом електричної системи, в якій існує лише струм зміщення, може служити конденсатор в колі змінного струму. В цьому випадку лише існуванням струму зміщення між обкладинками конденсатору, що розділені діелектриком, можна обгрунтувати замкнутість електричного кола.

Третій вектор в виразі (3.2) для густини повного струму – вектор  $\vec{J}^{ст}$  – зветься густиною стороннього електричного струму; він грає роль первинного збудника електромагнітного поля. Сторонні струми не залежать від збуджуваного ними поля і вважаються заданими функціями координат і часу. Наприклад, сторонні струми в антенах викликаються зовнішніми джерелами (генераторами) і не залежать від збуджуваних антенами хвиль.

Векторне рівняння (3.2) еквівалентне трьом скалярним рівнянням, які в декартовій системі координат  $x, y, z$  мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} + J_x^{ст}; \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} + J_y^{ст}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} + J_z^{ст}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

2. Друге рівняння Максвелла в інтегральній формі є законом електромагнітної індукції: у замкнутому контурі, що пронизується змінною у часі течією вектору магнітної індукції  $\vec{B}$ , виникає електрорушійна сила  $e = \oint_l \vec{E} d\vec{l}$ , що

дорівнює швидкості зміни  $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$  цієї течії.

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad (3.5)$$

де  $l$  – довільний замкнутий контур в будь-якому середовищі;

$S$  – довільна поверхня, що спирається на цей контур.

Закон (3.5) встановлює факт виникнення і величину напруженості електричного поля під дією змінного магнітного поля. Якщо на місці уявного контура  $l$  розмістити реальний контур, виконаний з провідника, то наявність електрорушійної сили приведе до протікання в провіднику електричного струму у напрямі вектора  $\vec{E}$  – це відомий закон електромагнітної індукції, відкритий експериментально Фарадеєм.

Від інтегральної форми запису другого рівняння Максвелла (3.5) можна перейти до диференціальної форми. Для цього циркуляція вектора  $\vec{E}$  в (3.5) замінюється, відповідно до теореми Стокса, інтегралом від  $rot\vec{E}$  по поверхні  $S$

$$\int_S rot\vec{E} d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Оскільки поверхня  $S$  довільна, то дане рівняння можливе лише при виконанні умови рівності підінтегральних виразів в лівій та правій його частинах, що дає

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Це друге рівняння Максвелла в диференціальній формі. Воно справедливе в будь-якій точці простору у будь-який момент часу і виражає кількісний зв'язок між тими величинами, що входять в закон електромагнітної індукції. Векторне рівняння (3.6) еквівалентне трьом скалярним рівнянням, які в декартовій системі координат  $x, y, z$  мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

3. Третє рівняння Максвелла в інтегральній формі є узагальненням закону Гауса для постійних і змінних електромагнітних полів: *течія вектору електричної індукції  $\vec{D}$  через довільну замкнуту поверхню  $S$  породжується вільним електричним зарядом  $Q$ , що знаходиться в об'ємі  $V$ , обмеженому поверхнею  $S$*

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q. \quad (3.8)$$

Заряд може бути довільно розподілено всередині об'єму  $V$ , який обмежено поверхнею  $S$ , тому його треба задавати інтегралом від об'ємної густини розподілу  $\rho$ , що має розмірність Кл/м<sup>3</sup>, тобто

$$Q = \int_V \rho dV. \quad (3.9)$$

Підстановка (3.9) в (3.8) дає

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (3.10)$$

Рівність (3.10) є третім рівнянням Максвелла в інтегральній формі. Ліву частину виразу (3.10) можна перетворити, використовуючи теорему Остроградського-Гауса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Ця рівність повинна виконуватися для довільного об'єму, що можливо, якщо підінтегральні вирази дорівнюють один одному, тобто

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (3.11)$$

Співвідношення (3.11) зветься третім рівнянням Максвелла в диференціальній формі. З (3.11) витікає, що дивергенція вектору  $\vec{D}$  відрізняється від нуля лише в тих точках простору, де є вільні електричні заряди. У цих точках лінії вектора починаються на додатніх зарядах (джерела поля) і закінчуються на від'ємних зарядах (стоки поля). Скалярне рівняння (3.11) в декартовій системі координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  записується у вигляді

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho. \quad (3.12)$$

Аналогічно стороннім струмам (див. перше рівняння Максвелла) вводяться сторонні заряди, об'ємна густина розподілу яких  $\rho^{ct}$  додається в праві частини третього рівняння Максвелла (3.10) і (3.11)

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V (\rho + \rho^{ct}) dV, \quad \text{div} \vec{D} = \rho + \rho^{ct}. \quad (3.13)$$

4. Четверте рівняння Максвелла в інтегральній формі зветься законом неперервності магнітних силових ліній: *потік вектору магнітної індукції  $\vec{B}$  через будь-яку замкнуту поверхню дорівнює нулю*

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (3.14)$$

Це означає, що не існує ліній вектора  $\vec{B}$ , які лише входять в замкнену поверхню S (або, навпаки, лише виходять з поверхні S), лінії вектора  $\vec{B}$  завжди пронизують її. Лінії вектору магнітної індукції  $\vec{B}$  неперервні, вони або не мають ні початку, ні кінця, або замкнені. Звідси витікає, що векторне поле  $\vec{B}$  не має джерел, тобто магнітних зарядів не існує.

За допомогою теореми Остроградського-Гаусса можна перейти від інтегральної форми четвертого рівняння (3.14) до диференціальної

$$\int_V \text{div} \vec{B} dV = 0.$$

Оскільки об'єм V довільний, то ця рівність може виконуватися лише за умови

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (3.15)$$

Рівняння (3.15) є четвертим рівнянням Максвелла в диференціальній формі.

### 3.2 Система рівнянь електромагнітного поля

Система рівнянь для аналізу електромагнітних хвильових процесів включає чотири рівняння Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{\text{ст}}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho + \rho^{\text{см}}; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \end{aligned} \quad (3.16)$$

і матеріальні рівняння, в яких фіксується вплив середовища на електромагнітні явища, що протікають в ньому

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (3.17)$$

Перші два рівняння Максвелла мають симетрію в наступному сенсі: за першим рівнянням зміна в часі електричної індукції породжує вихрове магнітне поле, вектор напруженості якого змінюється в просторі; за другим рівнянням зміна в часі магнітної індукції породжує вихрове електричне поле, що змінюється в просторі. Таким чином, електричне і магнітне поля можуть існувати, взаємно породжуючи один одного. З цього виходить важливий висновок: електромагнітне поле здатне існувати самостійно і далеко від джерела. Ті збудження електромагнітного поля (зміни його стану), що поширюються в просторі, називають електромагнітними хвилями. Джерелами електромагнітного

поля є електричні заряди і струми. Силкові лінії магнітного поля завжди неперервні. Силкові лінії електричного поля або неперервні, або можуть обриватися на електричних зарядах.

Застосування операції дивергенції до обох частин першого рівняння Максвелла дає

$$\operatorname{div}\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{\text{ст}}\right) = 0. \quad (3.18)$$

З (3.18) витікає, що лінії вектору густини повного струму неперервні. Використовуючи третє рівняння Максвелла і (3.18), отримуємо закон збереження зарядів: *всяка зміна заряду в часі породжує електричний струм*

$$\operatorname{div}\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{J}^{\text{ст}} = -\frac{\partial \rho^{\text{см}}}{\partial t}. \quad (3.19)$$

Більшість використовуваних на практиці матеріальних середовищ є лінійними. В цьому випадку електромагнітні поля задовільняють принципу суперпозиції: поле, яке створене декількома джерелами, можна розглядати як суму полів, створених кожним джерелом.

Системи (3.16) і (3.17) описують будь-які поля (статичні, стаціонарні, квазістаціонарні, нестаціонарні) в будь-якому середовищі.

### **3.3 Система рівнянь монохроматичного електромагнітного поля**

Більшість реальних джерел збуджують гармонійні електромагнітні поля, тобто поля, що змінюються в часі по

косинусоїдальному закону з певною частотою. Такі поля отримали ще назву монохроматичні, тобто «однобарвні» (термін узятий з оптики). Монохроматичні поля завжди переносять енергію, але не несуть інформації. Інформація передаватиметься, якщо відповідно до заданого закону (або випадковим чином) мінятимуться амплітуда, частота, або фаза електромагнітних хвиль, тобто буде виконана модуляція (АМ, ЧМ, ФМ).

Це еквівалентно використанню групи (спектру) монохроматичних хвиль, підсумовування яких дає електромагнітний сигнал, що переносить інформацію. Зв'язок складових спектру з цим сигналом визначається перетворенням Фур'є. Знання поведінки монохроматичних хвиль з довільними частотами в реальних умовах (природні траси поширення, лінії передач, і так далі) дозволяють аналізувати поведінку складних сигналів в тих же умовах. При вивченні монохроматичних полів, що підкоряються лінійним рівнянням Максвелла, ефективно використовується метод комплексних амплітуд. Суть методу полягає у тому, що векторним і скалярним величинам, що входять в системи (3.16), (3.17), ставляться у відповідність комплексні амплітуди. Зв'язок між фізичними величинами і їх комплексними амплітудами можна показати, наприклад, для вектору напруженості електричного поля  $\vec{E}$ . Миттєве значення вектору  $\vec{E}$ , що змінюється в часі за гармонійним законом, в деякій точці простору записується так:

$$\vec{E}(t) = \vec{x}_0 E_{mx} \cos(\omega t + \varphi_x) + \vec{y}_0 E_{my} \cos(\omega t + \varphi_y) + \vec{z}_0 E_{mz} \cos(\omega t + \varphi_z) \quad (3.20)$$

Тут  $E_{mi}, (\omega t + \varphi_i)$  – відповідно амплітуди і фази окремих частотних (спектральних) складових вектору  $\vec{E}$ , які є дійсними

величинами. Вираз (3.20) може бути переписано, як дійсну частину комплексного вектору:

$$\vec{E}(t) = \text{Re} \left[ \left( \bar{x}_0 E_{mx} e^{j\varphi_x} + \bar{y}_0 E_{my} e^{j\varphi_y} + \bar{z}_0 E_{mz} e^{j\varphi_z} \right) e^{j\omega t} \right]. \quad (3.21)$$

Вектор

$$\dot{\vec{E}} = \bar{x}_0 E_{mx} e^{j\varphi_x} + \bar{y}_0 E_{my} e^{j\varphi_y} + \bar{z}_0 E_{mz} e^{j\varphi_z} \quad (3.22)$$

не залежить від часу і називається комплексною амплітудою. Тут і надалі комплексні амплітуди позначатимуться крапками зверху. Миттєве значення вектору (3.20), що гармонійно змінюється в часі, виражається через комплексну амплітуду таким чином:

$$\vec{E}(t) = \text{Re} \left( \dot{\vec{E}} e^{j\omega t} \right). \quad (3.23)$$

Аналогічним чином вводяться комплексні амплітуди для всіх фізичних величин, що входять в рівняння (3.16), (3.17) і що коливаються з частотою  $\omega$ . Наприклад, для скалярних функцій об'ємної густини вільних і сторонніх зарядів буде:

$$\rho(t) = \text{Re} \left( \dot{\rho} e^{j\omega t} \right), \quad \rho^{\text{ст}}(t) = \text{Re} \left( \dot{\rho}^{\text{ст}} e^{j\omega t} \right). \quad (3.24)$$

Рівняння Максвелла є лінійними диференціальними рівняннями. В випадку монохроматичного поля цим же рівнянням задовільнятимуть відповідні комплексні векторні і скалярні функції. Підстановка в перше рівняння Максвелла з системи (3.17) комплексних векторів  $\dot{\vec{E}} e^{j\omega t}$ ,  $\dot{\vec{H}} e^{j\omega t}$ ,  $\dot{\vec{J}}^{\text{ст}} e^{j\omega t}$ ,

диференціювання за часом і скорочення члена  $e^{j\omega t}$  дає рівняння для комплексних амплітуд:

$$\text{rot}\dot{\vec{H}} = \sigma\dot{\vec{E}} + j\omega\varepsilon_a\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{J}}^{\text{CT}}. \quad (3.25)$$

Рівняння (3.25) зазвичай перетворюється до наступного вигляду:

$$\text{rot}\dot{\vec{H}} = j\omega\left(\varepsilon_a - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{J}}^{\text{CT}} = j\omega\varepsilon_a\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{J}}^{\text{CT}}, \quad (3.26)$$

де  $\varepsilon_a = \varepsilon_a - j\frac{\sigma}{\omega}$  – комплексна абсолютна діелектрична проникність середовища. Звернемо увагу, що цей параметр характеризує середовище одночасно з двох точок зору – дійсна частина вказує на «діелектричні», а уявна вказує на «провідні» властивості.

Третє рівняння Максвелла (3.17) для комплексних амплітуд буде мати вигляд

$$\text{div}\dot{\vec{D}} = \dot{\rho} + \dot{\rho}^{\text{CT}}. \quad (3.27)$$

В теорії монохроматичних електромагнітних полів вільні заряди в середовищі зазвичай не розглядаються, оскільки через рівняння неперервності (3.19) вони однозначно визначаються струмами провідності

$$\text{div}\dot{\vec{J}} = -j\omega\dot{\rho}, \quad \dot{\rho} = \frac{j\sigma}{\omega}\text{div}\dot{\vec{E}}.$$

Підстановка останнього співвідношення в (3.27) дає:

$$\text{div}\left(\varepsilon_a\dot{\vec{E}}\right) - j\frac{\sigma}{\omega}\text{div}\dot{\vec{E}} = \dot{\rho}^{\text{CT}},$$

або

$$\operatorname{div}(\dot{\varepsilon}_a \dot{\vec{E}}) = \dot{\rho}^{\text{CT}}. \quad (3.28)$$

Друге і четверте рівняння Максвелла системи (3.17), а також матеріальні рівняння системи (3.17) без додаткових перетворень відразу записуються для комплексних амплітуд.

В результаті, система рівнянь Максвелла для монохроматичного електромагнітного поля набуває наступного вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega \dot{\varepsilon}_a \dot{\vec{E}} + \dot{\vec{J}}^{\text{CT}} \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \dot{\mu}_a \dot{\vec{H}} \\ \operatorname{div}(\dot{\varepsilon}_a \dot{\vec{E}}) = \dot{\rho}^{\text{CT}} \\ \operatorname{div}(\dot{\mu}_a \dot{\vec{H}}) = 0 \end{array} \right., \quad (3.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{D}} = \dot{\varepsilon}_a \dot{\vec{E}} \\ \dot{\vec{B}} = \dot{\mu}_a \dot{\vec{H}} \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Така форма запису рівнянь монохроматичного поля застосовна в досить широкому діапазоні частот і найчастіше вживається для практичних розрахунків. Рівняння записані для комплексних амплітуд, які є функціями трьох просторових координат і не залежать від часу. Таким чином, з рівнянь вилучена часова змінна. Якщо при вирішенні електродинамічної задачі знайдено комплексні амплітуди векторів поля, то їх миттєві значення відновлюються за формулою (3.23).

Введена вище комплексна діелектрична проникність

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega}$$

дозволяє одночасно врахувати діелектричні (поляризаційні) і провідні властивості середовища. Комплексну діелектричну проникність може бути зображено на комплексній площині (рис. 3.1)

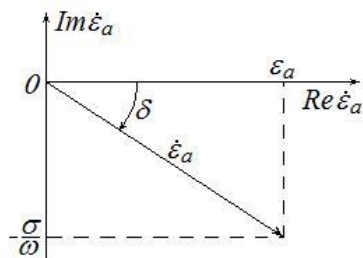


Рисунок 3.1 – До визначення кута діелектричних втрат

Співвідношення між дійсною і уявною частинами  $\hat{\epsilon}_a$  можна описати тангенсом кута  $\delta$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}. \quad (3.31)$$

Величина (3.31) зветься *тангенсом кута діелектричних втрат*. З іншого боку, чисельне значення тангенсу кута втрат дорівнює відношенню амплітуди густини струму провідності до амплітуди густини струму зміщення

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\left| \dot{\vec{J}} \right|}{\left| \dot{\vec{J}}^{\text{ЗМ}} \right|} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}, \quad (3.32)$$

бо для монохроматичного поля комплексні амплітуди векторів густини струму провідності і густини струму зміщення, відповідно, є:

$$\dot{\vec{J}} = \sigma \dot{\vec{E}}, \quad \dot{\vec{J}}^{\text{ЗМ}} = j \omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}.$$

Значення тангенсу кута діелектричних втрат є критерієм поділу середовищ на провідники і діелектрики. Якщо  $\operatorname{tg}\delta \gg 1$ , то в речовині густина струму провідності набагато більше густини струму зміщення, і речовина зветься провідником. Якщо  $\operatorname{tg}\delta \ll 1$ , то в речовині густина струму зміщення набагато більше густини струму провідності, і речовину звать діелектриком

Відмітимо, що величини  $\epsilon_r$  та  $\operatorname{tg}\delta$  є паспортними параметрами технічних діелектричних речовин.

Властивості деяких діелектриків у діапазоні надвисоких частот ( $\lambda = 3$  см, при температурі  $20^0$ – $25^0$ С) наведено в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Параметри типових діелектриків

Діелектрик	$\epsilon_r$	$\operatorname{tg}\delta$
Плексиглас	2,71	$8,4 \cdot 10^{-3}$
Полістирол	2,55	$7 \cdot 10^{-4}$
Фторопласт	2,08	$3,7 \cdot 10^{-4}$
Текстоліт	3,77	$7 \cdot 10^{-2}$
Гетинакс	7	$2 \cdot 10^{-2}$
Склотекстоліт	4,5	$3 \cdot 10^{-2}$
Пінопласт	1,1	$1,5 \cdot 10^{-3}$
Поліетілен	2,3	$3 \cdot 10^{-4}$
Полікор	9,7	$1 \cdot 10^{-4}$

Метали мають велику питому провідність, тому у них  $\operatorname{tg}\delta \gg 1$  на усіх частотах радіодіапазону. У типових діелектриків, навпаки, питома провідність дуже мала, наприклад, в кварці  $\sigma = 2 \cdot 10^{-17}$  См/м, у скла  $\sigma = 10^{-12}$  См/м. Існують середовища, в яких провідність незначна: у морської води  $\sigma = 3 \div 5$  См/м, у вологого ґрунту  $\sigma = 10^{-3} \div 10^{-5}$  См/м. Такі середовища на низьких частотах проявляють властивості

провідників ( $\sigma \gg \omega \epsilon_a$ ), а на високих частотах – властивості діелектриків ( $\sigma \ll \omega \epsilon_a$ ).

При дослідженні властивостей електромагнітних хвиль застосовуються поняття ідеального діелектрика і ідеального провідника. Якщо  $\sigma=0$ , то середовище (речовина) зветься ідеальним діелектриком. Ідеальний провідник – це середовище з нескінченно великою питомою провідністю ( $\sigma \rightarrow \infty$ ). Змінне електромагнітне поле не проникає в ідеальний провідник, тобто в ньому  $\vec{E}=0$  і  $\vec{H}=0$ . Звичайно в природі не існує ідеальних провідників і діелектриків, але введені поняття часто суттєво спрощують вирішення практично значимих задач, результати яких може бути використано для реальних середовищ, близьких за властивостями до ідеальних.

### 3.4 Рівняння балансу миттєвих значень потужностей для електромагнітного поля

Електромагнітні поля здатні переносити енергію в просторі, при цьому частина енергії може перетворюватися в інші види енергії. Електромагнітна енергія підкоряється закону збереження енергії, який закладено в рівняннях Максвелла. Отримаємо рівняння балансу для миттєвих значень потужностей в електромагнітному полі стосовно деякого об'єму середовища  $V$ , обмеженому поверхнею  $S$ .

Хай в об'ємі  $V$ , заповненому лінійним однорідним і ізотропним середовищем, знаходиться стороннє джерело поля  $\vec{J}^{\text{ст}}$ . Для виведення рівняння балансу використовуються два перші рівняння Максвелла (3.29) і матеріальні рівняння (3.30).

Після нескладних перетворень отримаємо:

$$\operatorname{div}[\vec{E}, \vec{H}] + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} \right) + \vec{J} \vec{E} = -\vec{J}^{\text{ст}} \vec{E}. \quad (3.33)$$

Це рівняння зветься рівнянням балансу потужності в диференціальній формі.

Інтегрування по складових (3.33) за об'ємом  $V$  дає:

$$\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H}\vec{B} \right) dV + \int_V \vec{J}\vec{E} dV = \int_V \left( -\vec{J}^{\text{ct}} \vec{E} \right) dV \quad (3.34)$$

У першому доданку (3.34) застосовано теорему Остроградського-Гауса для переходу від об'ємного інтегралу з підінтегральною функцією  $\text{div}[\vec{E}, \vec{H}]$  до поверхневого інтегралу від векторного добутку  $[\vec{E}, \vec{H}]$ .

Вираз (3.34) є рівнянням балансу миттєвих значень потужностей електромагнітного поля і визначає закон збереження енергії електромагнітного поля для виділеного об'єму середовища. Всі члени цього рівняння мають розмірність потужності.

Об'ємний інтеграл

$$W = \int_V \left( \frac{1}{2} \vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H}\vec{B} \right) dV = W^E + W^M, \quad [\text{Дж}] \quad (3.35)$$

є миттєвим значенням енергії електромагнітного поля, що міститься в об'ємі  $V$ , яку розподілено в цьому об'ємі з об'ємною густиною

$$w = \left( \frac{1}{2} \vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H}\vec{B} \right) = w^E + w^M, \quad \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right]. \quad (3.36)$$

Енергія електромагнітної хвилі складається з енергії електричного поля і енергії магнітного поля.

## Об'ємний інтеграл

$$P_n = \int_V \vec{J} \vec{E} dV = \int_V \sigma \vec{E}^2 dV, [\text{Вт}]. \quad (3.37)$$

визначає миттєве значення потужності теплових (джоулевих, або, другими словами, за законом Джоуля) втрат в об'ємі  $V$ .

Інтеграл в правій частині рівняння балансу (3.34) є виразом для обчислення миттєвого значення потужності, що віддається сторонніми струмами електромагнітному полю в об'ємі  $V$

$$P_{\text{ст}} = \int_V \left( -\vec{J}^{\text{ст}} \vec{E} \right) dV, [\text{Вт}]. \quad (3.38)$$

Підінтегральний вираз в поверхневому інтегралі (3.34)

$$\vec{\Pi} = \left[ \vec{E}, \vec{H} \right], \quad \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right] \quad (3.39)$$

зветься *вектором Умова-Пойнтінга* і визначає миттєве значення густини течії потужності (тобто енергії в одиницю часу) через одиничну площинку, яку розташовано перпендикулярно напрямку поширення енергії. Поверхневий інтеграл

$$P_{\Sigma} = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S}, [\text{Вт}] \quad (3.40)$$

є миттєвим значенням течії потужності, що проходить через поверхню  $S$ , яка обмежує об'єм  $V$ . Якщо течія потужності виходить з даного об'єму ( $P_{\Sigma} > 0$ ), то можна вважати, що усередині об'єму знаходиться передавальний пристрій і течія потужності випромінюється в довколишній простір. При  $P_{\Sigma} < 0$  течія потужності входить в об'єм  $V$  і поглинається

приймальним пристроєм. Випадок  $P_{\Sigma}=0$  відповідає випадку екранування об'єму  $V$  ідеально провідною поверхнею  $S$ .

### 3.5 Граничні умови для векторів електромагнітного поля на поверхні розділу середовищ

Реальні середовища, де може існувати електромагнітне поле ніколи не бувають абсолютно однорідними, завжди існують межі розділу середовищ з різними електрофізичними властивостями, наприклад, межа розділу повітря – поверхня Землі і т.і. Роглянемо, як з рівнянь Максвелла, що містять всю інформацію про електромагнітне поле, визначити закони зміни значень векторів поля при переході через межу розділу двох різних середовищ. На межі розділу параметри середовищ  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$ ,  $\sigma$  (або, принаймні, один з них) стрибкоподібно міняють свої значення. Наприклад, на поверхні розділу вода-повітря відбуваються стрибкоподібні зміни провідності і діелектричної проникності. Рівняння Максвелла в диференціальній формі використовуються в середовищах, параметри яких або не залежать від координат, або є неперервними функціями координат. На поверхні розділу середовищ, де порушується неперервність параметрів середовища, рівняння Максвелла в диференціальній формі втрачають зміст і мають бути доповнені умовами, що визначають поведінку векторів поля на межі розділу середовищ. Ці умови встановлюються за допомогою рівнянь Максвелла в інтегральній формі.

Співвідношення, що показують зв'язок між значеннями складових векторів електромагнітного поля в різних середовищах біля поверхні розділу, звуться граничними умовами. Задача про граничні умови ставиться таким чином. Є деяка межа розділу  $S$  між першим середовищем з параметрами  $\epsilon_{a1}$ ,  $\mu_{a1}$ ,  $\sigma_1$  і другим середовищем з параметрами

$\epsilon_{a2}, \mu_{a2}, \sigma_2$ . Середовища – лінійні, ізотропні. На межі розділу відсутні сторонні джерела. На поверхні  $S$  виділяється точка  $M$  і передбачається, що біля цієї точки з боку першого середовища поле задано, а поле з боку другого середовища треба знайти.

Вектор поля біля точки  $M$  треба розкласти на тангенціальні (дотичні) і нормальні (перпендикулярні) до межі розділу складові. Наприклад, вектор  $\vec{E}$  на межі розділу можна представити у вигляді (рис.3.2):

$$\vec{E} = \vec{E}_\tau + \vec{E}_n = \vec{\tau}E_\tau + \vec{n}E_n.$$

Тут  $\vec{\tau}, \vec{n}$  – одиничні вектори (орти) дотичного і нормального напрямів до площини  $S$  в точці  $M$ .

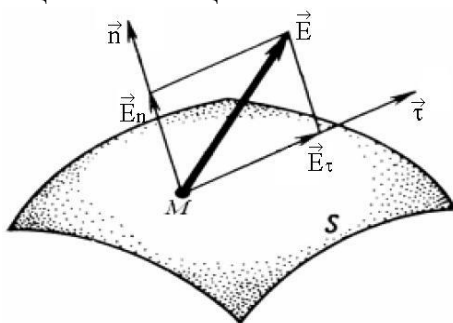


Рисунок 3.2 – Розкладання вектору  $\vec{E}$  на нормальну і дотичну складові

Поведінка нормальних і тангенціальних складових векторів поля розглядається окремо. Біля точки  $M$  виділяється такий елементарний об'єм  $\Delta V$  і такий елементарний контур  $\Delta L$ , що частина  $\Delta V$  і частина  $\Delta L$  знаходяться в першому середовищі, а інші їх частини – в другому середовищі. Тоді за допомогою рівнянь Максвелла в інтегральній формі можна

знайти взаємозв'язок між векторами поля в обох середовищах, якщо гранично стискати  $\Delta V$  та  $\Delta L$  до межі розділу середовищ.

### 3.5.1 Граничні умови для нормальних складових векторів електромагнітного поля

Розглянемо спочатку граничну умову для нормальної складової вектору електричного зміщення  $\vec{D}$ . Для цього на поверхні розділу  $S$  біля вибраної точки  $M$  виділимо елемент поверхні  $\Delta S$ . Елемент  $\Delta S$  має бути настільки малий, аби, по-перше, його можна було вважати плоским, а по-друге, щоб в обох середовищах розподіл нормальної складової вектору електричного зміщення  $\vec{D}$  можна було вважати рівномірним в межах  $\Delta S$ . На елементі  $\Delta S$  будемо циліндр заввишки  $\Delta h$  і об'ємом  $\Delta V$  так, щоб його основи (торці) знаходилися в різних середовищах (рис. 3.3).

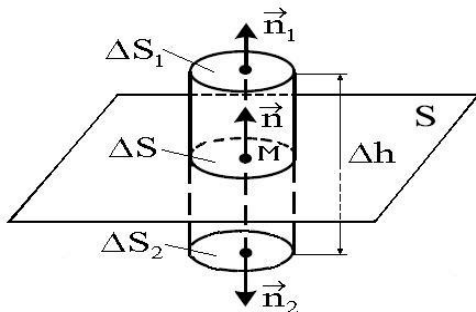


Рисунок 3.3 – До отримання граничних умов для нормальних складових векторів електромагнітного поля

Тут одиничні вектори  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  – орти нормалей до торців циліндра, а  $\vec{n}$  – орт нормалі до межі розділу (направлений з середовища 2 в середовище 1).

Застосуємо третє рівняння Максвелла в інтегральній формі до об'єму циліндра  $\Delta V$ , який обмежено поверхнями

торців  $\Delta S_1$ ,  $\Delta S_2$  та боковою поверхнею циліндра  $\Delta S_\phi$  і тоді після здійснення граничного переходу при  $\Delta h \rightarrow 0$  в результаті нескладних перетворень отримаємо:

$$\vec{D}_1 \vec{n} - \vec{D}_2 \vec{n} = \rho \Delta h. \quad (3.41)$$

У реальних середовищах заряди не скупчуються безпосередньо на межі розділу, вони зосереджуються в тонкому приграничному шарі, так що об'ємна щільність зарядів  $\rho$  залишається скінченною величиною, а тоді права частина (3.41) буде прагнути до нуля при  $\Delta h \rightarrow 0$ . Таким чином, співвідношення (3.41) набуває вигляду:

$$D_{n1} = D_{n2}. \quad (3.42)$$

Рівність (3.42) є граничною умовою, яка формулюється таким чином: *нормальні складові вектору електричної індукції  $\vec{D}$  на межі розділу двох середовищ неперервні.*

Якщо виразити в рівнянні (3.42)  $D_{n1}$  і  $D_{n2}$  через  $E_{n1}$  і  $E_{n2}$  за допомогою матеріального рівняння  $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$ , то отримаємо граничну умову для нормальних складових вектору  $\vec{E}$ :

$$\varepsilon_{a1} E_{n1} = \varepsilon_{a2} E_{n2}, \text{ або } E_{n1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_{n2}. \quad (3.43)$$

Співвідношення (3.43) показує, що нормальна складова вектору  $\vec{E}$  під час переходу через межу розділу реальних середовищ терпить розрив (стрибок), величина якого визначається відношенням діелектричних проникностей цих середовищ.

Якщо застосувати до циліндра  $\Delta V$  четверте рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\int_{\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_6} \vec{B} d\vec{S} = 0,$$

то при  $\Delta h \rightarrow 0$  отримаємо граничну умову для нормальних складових вектору магнітної індукції  $\vec{B}$ :

$$\dot{B}_{n1} = \dot{B}_{n2}, \quad (3.44)$$

З (3.44) витікає, що нормальні складові вектору  $\vec{B}$  під час переходу через межу розділу двох середовищ неперервні. Використання матеріального рівняння  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$  дає граничну умову для нормальних складових вектору напруженості магнітного поля  $\vec{H}$ :

$$\mu_{a1} H_{n1} = \mu_{a2} H_{n2} \text{ або } H_{n1} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} H_{n2}. \quad (3.45)$$

Умови (3.45) показують, що нормальна складова вектору  $\vec{H}$  під час переходу через межу розділу двох середовищ терпить розрив, величина якого визначається відношенням магнітних проникностей цих середовищ.

Граничні умови (3.42)÷(3.45) справедливі для миттєвих значень векторів змінного електромагнітного поля. В разі гармонійного (монохроматичного) поля граничні умови (3.42)÷(3.45) записуються для незалежних від часу комплексних амплітуд векторів поля таким чином

$$\begin{aligned} \dot{D}_{n1} &= \dot{D}_{n2}, \quad \dot{E}_{n1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \dot{E}_{n2}, \\ \dot{B}_{n1} &= \dot{B}_{n2}, \quad \dot{H}_{n1} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} \dot{H}_{n2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

### 3.5.2 Граничні умови для тангенціальних складових векторів електромагнітного поля

Для з'ясування поведінки тангенціальних складових векторів електромагнітного поля на межі розділу  $S$  двох ізотропних середовищ побудуємо з довільної точки  $M$  орт нормалі  $\vec{n}$ , яку направлено з другого середовища в перше (рис. 3.4). Спочатку розглянемо граничні умови для тангенціальної складової вектору напруженості магнітного поля.

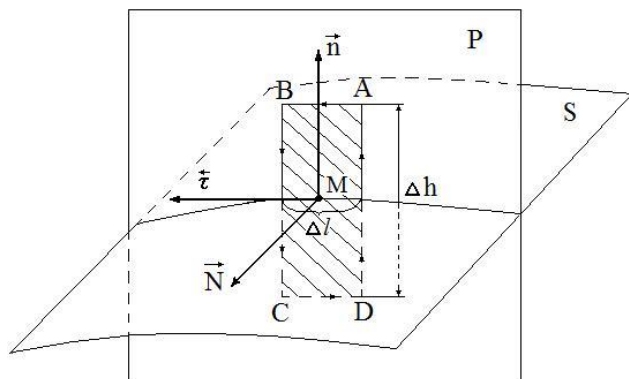


Рисунок 3.4 – До отримання граничних умов для тангенціальних складових векторів електромагнітного поля

Для цього через орт  $\vec{n}$  проводимо площину  $P$  і на лінії перетинання межі розділу  $S$  з площиною  $P$  виділяємо малий відрізок  $\Delta l$ , що містить точку  $M$ . Розміри відрізка  $\Delta l$  мають бути настільки малими, аби, по-перше, його можна було вважати прямолінійним, а по-друге, аби розподіли дотичних складових вектору  $\vec{H}$  в межах  $\Delta l$  в обох середовищах можна було вважати рівномірними. У площині  $P$  будуємо прямокутний замкнутий контур  $ABCD$  так, щоб сторони  $AB$  і

CD були паралельними і знаходились в різних середовищах. З точки М проводимо орт  $\vec{\tau}$  так, щоб він був дотичним до лінії перетинання площини S (межі розділу) з площиною Р. З цієї ж точки будуюмо орт нормалі  $\vec{N}$  до площини Р. Орти  $\vec{n}, \vec{\tau}, \vec{N}$  утворюють праву трійку векторів  $\vec{N} = [\vec{n}, \vec{\tau}]$ . Напрямок обходу контуру ABCD утворює правоївнгову систему з вектором  $\vec{N}$ . Застосувавши до контура ABCD перше рівняння Максвелла в інтегральній формі, після використання граничного переходу при  $\Delta h \rightarrow 0$ , отримуємо:

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}. \quad (3.47)$$

Якщо застосувати до контура ABCD друге рівняння Максвелла в інтегральній формі, то аналогічно можна отримати граничну умову для тангенціальних складових вектора  $\vec{E}$ :

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}. \quad (3.48)$$

Умови (3.47), (3.48) формулюються таким чином: *дотичні складові векторів напруженостей електричного і магнітного полів залишаються неперервними під час переходу через межу розділу двох середовищ.*

Використовуючи матеріальне рівняння  $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$  і враховуючи (3.48), можна записати граничні умови для тангенціальних складових вектору  $\vec{D}$ :

$$\frac{1}{\varepsilon_{a1}} D_{\tau 1} = \frac{1}{\varepsilon_{a2}} D_{\tau 2} \text{ або } D_{\tau 1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} D_{\tau 2}. \quad (3.49)$$

Тангенційна складова вектору  $\vec{D}$  при переході через межу розділу зазнає розриву, величина якого визначається відношенням діелектричних проникностей середовищ.

Аналогічно, з матеріального рівняння  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$  і граничної умови (3.47) отримаємо:

$$\frac{1}{\mu_{a1}} B_{\tau 1} = \frac{1}{\mu_{a2}} B_{\tau 2} \text{ або } B_{\tau 1} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} B_{\tau 2}. \quad (3.50)$$

Гранична умова (3.50) показує, що при переході через межу розділу тангенційна складова вектору  $\vec{B}$  зазнає розриву, величина якого залежить від співвідношення між магнітними проникностями.

Граничні умови (3.47) – (3.50) записані для миттєвих значень векторів поля. В разі монохроматичного поля граничні умови визначаються для комплексних амплітуд векторів поля:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{\tau 1} &= \dot{H}_{\tau 2}, & \dot{E}_{\tau 1} &= \dot{E}_{\tau 2} \\ \dot{D}_{\tau 1} &= \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \dot{D}_{\tau 2}, & \dot{B}_{\tau 1} &= \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \dot{B}_{\tau 2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Слід звернути увагу на той факт, що граничні умови для нормальних і тангенціальних складових векторів поля мають відмінності. Причину цих відмінностей можна показати на прикладі вектору  $\vec{E}$ . Для цього випадку задамо два ізотропні середовища, що характеризуються діелектричними проникностями  $\varepsilon_{a1}$  і  $\varepsilon_{a2}$ , та межу розділу між ними. Під впливом зовнішнього електричного поля обидва середовища поляризуються, причому вектор поляризованості  $\vec{P}$  матиме різні значення, оскільки  $\varepsilon_{a1} \neq \varepsilon_{a2}$ . Хай вектор  $\vec{E}$ , а,

отже, і вектор  $\vec{P}$  будуть перпендикулярними до межі розділу. Тоді на межі розділу виникають некомпенсовані зв'язані заряди (вторинні джерела), що створюють додаткове електричне поле, яке в одному середовищі складається з первинним полем, а в другому – віднімається, так що  $E_{n1} \neq E_{n2}$  і нормальна складова вектора  $\vec{E}$  терпить розрив під час переходу через межу розділу.

Якщо вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{P}$  паралельні поверхні розділу, то некомпенсованих зарядів на межі розділу не виникає, і тангенціальна складова неперервна ( $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$ ). При цьому, через однакові значення  $E_{\tau}$  в обох середовищах, але різних  $P_{\tau}$ , тангенціальна складова вектору електричного зміщення  $D_{\tau} = \epsilon_a E_{\tau} + P_{\tau}$  зазнає стрибка.

Відмінність в граничних умовах для нормальних і тангенціальних складових векторів магнітного поля  $\vec{H}$  і  $\vec{B}$  пояснюється різною мірою намагніченості середовищ, що приводить до появи поверхневих молекулярних струмів, які створюють додаткове магнітне поле.

### 3.5.3 Граничні умови на поверхні ідеального провідника

При вивченні змінних електромагнітних полів поблизу поверхні металевого (провідного) тіла будемо припускати, що воно є ідеальним провідником, тобто  $\sigma \rightarrow \infty$ . При цьому граничні умови спрощуються, оскільки в середовищі, де  $\sigma \rightarrow \infty$  змінне поле відсутнє. Припустимо, що ідеально провідним є друге середовище, тоді  $\vec{D}_2 = \vec{E}_2 = \vec{B}_2 = \vec{H}_2 = 0$ . Перше середовище хай буде ізотропним і непровідним. Поведінку нормальних складових векторів поля можна розглянути за допомогою співвідношення (3.41):

$$\vec{D}_1 \vec{n} - \vec{D}_2 \vec{n} = \rho \Delta h .$$

При наявності змінного у часі поля заряди ідеального провідника зосереджуються на його поверхні в нескінченно тонкому шарі, розподіляючись з деякою поверхневою густиною. Об'ємну густину зарядів представимо в наступному вигляді:

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\Delta Q}{\Delta S \cdot \Delta h} = \frac{\rho_S}{\Delta h} , \quad (3.52)$$

де  $\Delta S$  – елемент поверхні провідника;

$$\rho_S = \frac{\Delta Q}{\Delta S} \text{ – поверхнева густина заряду (її називають}$$

також густиною поверхневих зарядів).

Тоді в правій частині співвідношення (3.41) залишиться лише  $\rho_S$ . Взявши до уваги нульове значення  $D_{n2}$ , отримаємо граничну умову для нормальної складової вектору  $\vec{D}$  на поверхні ідеального провідника:

$$D_{n1} = \rho_S . \quad (3.53)$$

Нормальна складова вектору  $\vec{E}$  визначається з матеріального рівняння  $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$

$$E_{n1} = \frac{\rho_S}{\varepsilon_{a1}} . \quad (3.54)$$

Нормальні складові векторів магнітного поля визначаються із співвідношень (3.44) и (3.45):

$$B_{n1} = 0, \quad H_{n1} = 0 . \quad (3.55)$$

Поведінку дотичних до поверхні  $S$  провідника складових векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  можна встановити за допомогою співвідношення (3.47):

$$\vec{H}_1 \vec{\tau} - \vec{H}_2 \vec{\tau} = \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) N \Delta h.$$

Об'ємна густина струму зміщення завжди є скінченною величиною, оскільки величини векторів поля і їх похідних є обмеженими, тому в правій частині (3.47) буде  $\left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \Delta h \rightarrow 0$  при  $\Delta h \rightarrow 0$ .

Об'ємна густина струму провідності в правій частині (3.47)

$$\vec{J} \Delta h = \rho \vec{v} \Delta h = \vec{v} \Delta h \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta h} = \vec{v} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \vec{v} \rho_S = \vec{J}_S, \quad (3.56)$$

де  $\vec{v}$  – швидкість носіїв заряду,

$\vec{J}_S$  – поверхнева густина струму провідності, що має розмірність А/м.

Тоді граничний перехід в (3.47) дасть праву частину, відмінну від нуля:

$$\vec{H}_1 \vec{\tau} = \vec{J}_S \vec{N}. \quad (3.57)$$

Заміна  $\vec{\tau} = [\vec{N}, \vec{n}]$  і використання властивості циклічної перестановки співмножників в змішаному добутку векторів дають:

$$[\vec{n}, \vec{H}_1] \vec{N} = \vec{J}_S \vec{N}. \quad (3.58)$$

Оскільки ця рівність виконується при будь-якому напрямі орту  $\vec{N}$ , то з (3.58) витікає:

$$[\vec{n}, \vec{H}_1] = \vec{J}_S \text{ або } [\vec{n}, \vec{H}_{\tau 1}] = \vec{J}_S. \quad (3.59)$$

З рівняння (3.48) витікає гранична умова для тангенціальної складової вектору  $\vec{E}$  (оскільки поле в провіднику нульове):

$$E_{\tau 1} = 0. \quad (3.60)$$

Таким чином, на поверхні ідеального провідника виконуються такі граничні умови для нормальних і тангенціальних складових векторів поля:

$$E_{\tau 1} = 0, E_{n1} = \frac{\rho_S}{\epsilon_{a1}}, H_{n1} = 0, [\vec{n}, \vec{H}_{\tau 1}] = \vec{J}_S. \quad (3.61)$$

Тангенціальна складова магнітного поля наводить на поверхні ідеального провідника електричний струм з густиною  $\vec{J}_S$ , причому напрямок цього струму є перпендикулярним до вектору магнітного поля  $\vec{H}$ . На поверхні ідеального провідника нормальна складова вектору  $\vec{H}$  і дотична складова вектору  $\vec{E}$  повинні мати нульові значення. З цього витікає, що розподіл магнітного поля повинен бути таким, щоб його силові лінії (нагадаємо, що вони повинні бути замкненими) біля ідеального провідника мали лише ті складові, які є дотичними (тангенціальними) до його поверхні. Аналогічно, силові лінії електричного поля біля поверхні ідеального провідника повинні мати лише перпендикулярні (нормальні) до нього складові.

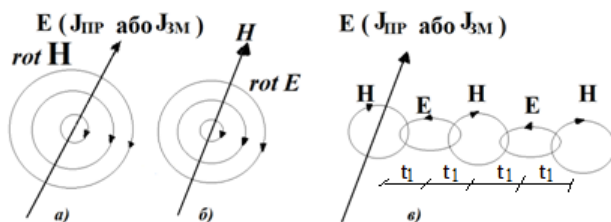
### 3.6 Фізичне тлумачення рівнянь Максвелла для змінних у часі процесів. Створення електромагнітної хвилі (EMX)

Запишемо перше та друге РМ – див.сист. (3.29) – для гармонійного закону зміни  $\dot{\vec{E}}(t)$  та  $\dot{\vec{H}}(t)$  в наступній формі

$$\text{rot}\dot{\vec{H}}(t) = \dot{\vec{J}}_{\text{пр}}(t) + \dot{\vec{J}}_{\text{зм}}(t) = \sigma \dot{\vec{E}}(t) + j\omega\epsilon_a \dot{\vec{E}}(t), \quad (3.62)$$

$$\text{rot}\dot{\vec{E}}(t) = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}(t), \quad (3.63)$$

Будемо розглядати змінні у часі вектори  $\dot{\vec{E}}(t)$  та  $\dot{\vec{H}}(t)$ , як характеристики деякого електромагнітного процесу. При цьому не будемо забувати, що в природі дійсно існують лише електричні заряди (і відповідно струми), які і зумовлюють процес створення електричного поля з напруженністю  $\dot{\vec{E}}(t)$ . З (3.62) витікає, що змінне у часі електричне поле з напруженністю  $\dot{\vec{E}}(t)$  створює у просторі навколо себе вихрове магнітне поле ( $\text{rot}\dot{\vec{H}}$ ) – рис.3.5а. В свою чергу, з (3.63) витікає, що змінне у часі магнітне поле з напруженністю  $\dot{\vec{H}}(t)$  створює у просторі навколо себе вихрове електричне поле ( $\text{rot}\dot{\vec{E}}$ ) – рис.3.5б.



а) – поява вихрового  $\vec{H}$ , б) – поява вихрового  $\vec{E}$ ,  
в) – створення EMX

Рисунок 3.5 - До процесу створення EMX

Звернемо увагу, що при цьому вектори  $\dot{\vec{E}}(t)$  та  $\dot{\vec{H}}(t)$  є взаємно перпендикулярними у просторі. Цю властивість треба довести самостійно. Розглянуті дії відбуваються неперервно (звісно, що не миттєво, а за деякий час  $t_1 \neq 0$ ) і створюють електромагнітний процес, який набуває властивості поширення у просторі з деякою швидкістю – рис.3.5в. Цей процес зветься електромагнітною хвилею (EMX). Дослідженню властивостей EMX присвячено наступний розділ.

### Контрольні запитання

1. Який фізичний зміст мають перше та друге рівняння Максвелла в інтегральній формі?
2. Який фізичний зміст мають третє та четверте рівняння Максвелла в інтегральній формі?
3. За допомогою яких математичних перетворень здійснюється перехід від інтегральної до диференціальної форми рівнянь Максвелла?
4. Який фізичний зміст мають рівняння Максвелла в диференціальній формі?
5. Які складові має вираз для густини струму зміщення в діелектрику та яка їх фізична сутність?
6. Що таке сторонні струми та заряди та яка мета їх введення в перше та четверте рівняння Максвелла?
7. На основі чого можна стверджувати, що магнітних зарядів в природі не існує?
8. Що таке матеріальні рівняння та який їх фізичний зміст?
9. Як розуміється поняття симетрії рівнянь Максвелла?
10. Що таке комплексний вектор та його комплексна амплітуда?
11. Як від комплексної амплітуди перейти до миттєвого значення та навпаки?

12. Як записується система рівнянь Максвелла та матеріальні рівняння в комплексній формі?
13. Як вводиться комплексна діелектрична проникність?
14. Як вводиться параметр  $tg\delta$ , яка його фізична сутність та як за цим параметром класифікують середовища?
15. Що таке ідеальний провідник та ідеальний діелектрик і які їх параметри?
16. Як вводиться рівняння балансу миттєвих значень потужностей та яка фізична сутність його складових?
17. Що таке вектор Пойнтінга, течія потужності та яка їх фізична сутність?
18. На які складові розкладається вектор поля біля межі розділу середовищ?
19. Як отримати граничні умови для нормальних складових векторів електромагнітного поля?
20. Як отримати граничні умови для тангенціальних складових векторів електромагнітного поля?
21. Які складові векторів поля на межі розділу неперервні, а які терплять розрив? Яка величина розриву?
22. Як фізично пояснити розрив деяких складових поля на межі розділу середовищ?
23. Що таке густина поверхневих зарядів для ідеального провідника та як вона застосовується при отриманні граничних умов для  $D_n$  та  $E_n$  на його поверхні?
24. Що таке густина поверхневого струму для ідеального провідника та як вона застосовується при отриманні граничних умов для  $H_t$  та  $E_t$  на його поверхні?
25. Які особливості розподілу електричного та магнітного полів біля поверхні ідеального провідника?
26. За рахунок яких процесів створюється ЕМХ ?

## Приклади вирішення задач

**Задача 3.1** Миттєве значення вектору напруженості електричного поля в повітрі є  $\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x E \sin(\omega t - \beta z)$ . Визначити миттєве значення вектору напруженості магнітного поля, якщо

$$E = 100 \frac{\text{мкВ}}{\text{м}}, \quad \beta = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}, \quad f = 1 \text{ МГц}.$$

### Вирішення

1. Скористаємось другим рівнянням Максвелла в диференціальній формі (3.6), де для повітря візьмемо  $\mu_a = \mu_0, \varepsilon_a = \varepsilon_0$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

2. Обчислимо  $\text{rot} \vec{E}$  в декартовій системі при умові, що  $E_y = E_z = 0$ . Тоді

$$\text{rot} \vec{E} = \det \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} - \vec{e}_z \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Тут для знаходження визначника матриці застосовано розкладання за алгебраїчними доповненнями першого рядка.

Врахуємо, що вектор  $\vec{E}$  не залежить від координати  $y$ , а тому буде

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad \text{ма} \quad \text{rot} \vec{E} = \vec{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\vec{e}_y \beta \cdot E \cdot \cos(\omega t - \beta z).$$

3. Підставимо отриманий вираз для  $\text{rot} \vec{E}$  в друге рівняння Максвелла і тоді одержимо

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{e}_y \frac{\beta}{\mu_0} \cdot E \cdot \cos(\omega t - \beta z).$$

З цього виразу видно, що для знаходження вектору  $\vec{H}$  треба виконати інтегрування останнього виразу за часом, отже

$$\vec{H} = \int \vec{e}_y \frac{\beta}{\mu_0} \cdot E \cdot \cos(\omega t - \beta z) dt = \vec{e}_y \left( \frac{\beta}{\omega \mu_0} \cdot E \cdot \sin(\omega t - \beta z) + C \right)$$

де  $C$  - стала інтегрування.

З фізичних міркувань слід прийняти  $C=0$ , оскільки стале магнітне поле не може збуджувати змінне електричне поле. Тоді з урахуванням значень  $\mu_0$  та  $\epsilon_0$  для миттєвого значення вектору  $\vec{H}$  отримаємо

$$\begin{aligned} \vec{H}(z, t) &= \vec{e}_y \frac{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\omega \mu_0} \cdot E \cdot \sin(\omega t - \beta z) = \\ &= \vec{e}_y \cdot 2.65 \cdot 10^{-7} \sin(2\pi 10^6 t - 2.1 \cdot 10^{-2} z), \text{ A/m.} \end{aligned}$$

### Задачі для самостійного вирішення

**Задача 3.2** Миттєве значення вектору напруженості магнітного поля в повітрі є  $\vec{H} = \vec{e}_y H \cos(\omega t - \beta z)$ . Визначити миттєве значення вектору напруженості електричного поля за умови, що  $H = 10^{-4}$  A/m,  $f = 1$  МГц.

**Задача 3.3** Миттєве значення вектору напруженості електричного поля є  $\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x E \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z)$ . Визначити миттєве значення та комплексну амплітуду вектору напруженості магнітного поля за умови, що  $E = 1$  мВ/м,  $\alpha = 10^{-3}$  1/м,  $\beta = 4.2 \cdot 10^{-2}$  1/м,  $\mu_r = 1$ ,  $f = 1$  МГц

**Задача 3.4** Вектор напруженості електричного поля в сферичній системі координат є  $\vec{E} = \vec{e}_r \cdot 0.25 \cdot r \text{ В/м}$ . Визначити  $\text{div}\vec{D}$  в середовищі з відносною діелектричною проникністю  $\epsilon_r = 6$  та встановити, чи є заряди в цій області.

**Задача 3.5** Миттєве значення вектору напруженості магнітного поля взяти з задачі 3.1 і записати вираз для комплексної амплітуди цього вектору.

**Задача 3.6** Морська вода має параметри  $\epsilon_r = 80$ ,  $\sigma = 2 \text{ См/м}$ . Знайти комплексну діелектричну проникність і величину параметру  $\text{tg}\delta$  на частотах 10 кГц, 1МГц, 100МГц, 10ГГц. Провести класифікацію поведінки цієї речовини на вказаних частотах.

## 4 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ У ОДНОРІДНОМУ ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

### 4.1 Хвилеві рівняння

Одним з найважливіших результатів, отриманих Максвеллом, виявилось доведення хвилевої природи електромагнітного поля. Вже з'ясовано, що зміна в часі електричного поля приводить до виникнення вихрового магнітного поля, що змінюється в просторі, і навпаки. Для доведення хвилевого характеру електромагнітного поля зведемо рівняння Максвелла до інших рівнянь, які безумовно (апріорі, не вимагає доведення) описують хвилеві процеси.

У однорідному ізотропному середовищі з параметрами  $\varepsilon_a, \mu_a$  для спрощення математичних перетворень припускається, що питома провідність середовища  $\sigma = 0$ , тобто це ідеальне діелектричне середовище без втрат. У такому середовищі рівняння Максвелла набувають вигляду:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (4.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0; \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (4.4)$$

Якщо взяти ротор від обох частин рівняння (4.1) і змінити порядок диференціювання за часом і за просторовими координатами в правій частині, то отримаємо диференціальне рівняння другого порядку, якому повинен підкорятися вектор

$\vec{H}$  електромагнітного поля (нагадаємо, що  $\text{rot rot} = \text{grad div} - \nabla^2$ ):

$$\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.5)$$

Аналогічним чином з рівняння (4.2) можна отримати рівняння і для вектору  $\vec{E}$ :

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.6)$$

Наголосимо, що це векторні рівняння, а коефіцієнт перед другою похідною за часом в (4.5), (4.6) має розмірність  $\text{сек}^2/\text{м}^2$ , тобто обернено пропорційний квадрату швидкості. Кожне з векторних рівнянь (4.5), (4.6) еквівалентне трьом скалярним рівнянням. Якщо позначити через  $A$  будь-яку із складових векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ , то скалярні рівняння набудуть вигляду:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \quad (4.7)$$

Як відомо, диференціальні рівняння другого порядку виду (4.7) описують хвилеві процеси, причому параметр  $V$  дорівнює швидкості поширення цього процесу. Такі рівняння називають однорідними (з правою частиною рівною нулю) рівняннями Даламбера або однорідними хвилевими рівняннями. Шукана функція  $A$ , що описує хвилевий процес, змінюється і в просторі і в часі. При врахуванні джерел електромагнітних полів (задача про збурення

електромагнітного поля) права частина рівняння (4.7) не дорівнює нулю і тоді рівняння зветься неоднорідним.

Вирішенням рівняння (4.7) є функції вигляду  $F\left(t \mp \frac{r}{V}\right)$ ,

де верхній знак відповідає хвилі, що біжить уздовж напрямку  $+r$ , а нижній знак  $-$  хвилі, що біжить в протилежному напрямі  $(-r)$ . Вибір фізичного вирішення здійснюється на основі інформації про місце розташування джерела поля.

Рівняння (4.5), (4.6) для векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  відрізняються від (4.7) лише тим, що функції, які в них входять, є векторними. Рівняння такого типу називаються векторними рівняннями Даламбера або однорідними векторними хвильовими рівняннями.

Як вже згадувалось раніше, параметр

$$\varepsilon_a \mu_a = \frac{1}{V^2} \quad (4.8)$$

з'язано зі швидкістю поширення хвилі в середовищі без втрат.

Для монохроматичного поля можна знов скористатися комплексним представленням миттєвих значень векторів поля, що входять в рівняння (4.5), (4.6), тобто  $\vec{E} = \text{Re}\left(\dot{\vec{E}}e^{j\omega t}\right)$ ,  $\vec{H} = \text{Re}\left(\dot{\vec{H}}e^{j\omega t}\right)$ .

Після диференціювання за часом в хвильових рівняннях (4.5), (4.6) і скорочення на  $e^{j\omega t}$ , отримаємо хвильові рівняння для комплексних амплітуд векторів поля  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ :

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + k^2 \dot{\vec{E}} = 0, \quad (4.9)$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} + k^2 \dot{\vec{H}} = 0, \quad (4.10)$$

де  $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \frac{\omega}{V}$  – стала поширення.

Величина  $k$  має розмірність  $\text{м}^{-1}$ . Для  $k$  вживаються також терміни *коефіцієнт фази* і *хвилеве число*; наголосимо, що це одна з найважливіших характеристик хвильового процесу. В теорії гармонійних хвильових процесів рівняння (4.9), (4.10) отримали назву однорідні векторні рівняння Гельмгольца.

Якщо середовище має втрати (у загальному випадку і електричні, і магнітні), то воно характеризується комплексними діелектричною і магнітною проникністями  $\dot{\epsilon}_a, \dot{\mu}_a$ . Тоді хвилеве число стає комплексним  $\dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a}$  і рівняння Гельмгольца набувають вигляду:

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + \dot{k}^2 \dot{\vec{E}} = 0, \quad (4.11)$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} + \dot{k}^2 \dot{\vec{H}} = 0. \quad (4.12)$$

Хвилеві рівняння (4.5), (4.6) для миттєвих значень векторів поля і хвилеві рівняння (4.9) – (4.12) для комплексних амплітуд векторів монохроматичного поля описують хвилеві процеси поширення електромагнітних хвиль в просторі. При вирішенні хвильових рівнянь в сферичній системі координат отримаємо математичний запис хвильового процесу у вигляді сферичної хвилі, в циліндричній системі координат – циліндричної хвилі, в декартовій системі координат – плоскій хвилі.

## 4.2 Плоскі електромагнітні хвилі у однорідному ізотропному середовищі

Плоскою називається електромагнітна хвиля, вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  якої мають постійні фази на площині, що перпендикулярна напрямку поширення. Ця площина називається фронтом хвилі, її називають ще поверхнею рівних

фаз, або хвилевою поверхнею, або синфазною поверхнею. Плоска хвиля називається однорідною, якщо амплітуди векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  не міняються в площині фронту. Збудити в необмеженому просторі плоску однорідну хвилю за допомогою реального пристрою неможливо, оскільки при цьому джерело повинно представляти нескінчену синфазну площину і мати нескінчену енергію.

Поняття плоскої однорідної хвилі застосовується в якості простої математичної моделі, яка розкриває основні властивості вільних електромагнітних хвиль. У реальних випадках це поняття використовується для малих ділянок хвилевого фронту зі складною поверхнею. Так, на значній відстані від джерела малу ділянку сферичного фронту можна наближено замінити площиною.

Наприклад, хай сферична хвиля створюється точковим джерелом, розташованим на початку декартової системи координат (точка Q – рис. 4.1) з віссю z, яку орієнтовано в напрямі на приймальну антену. Хай приймальна антена має малий об'єм V. Хай також вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  випромінюваної хвилі лежать в площині тієї грані об'єму V, яка є перпендикулярною до вісі z (радіус-вектору), вектор  $\vec{E}$  направлений по вісі x, а  $\vec{H}$  - по вісі y.

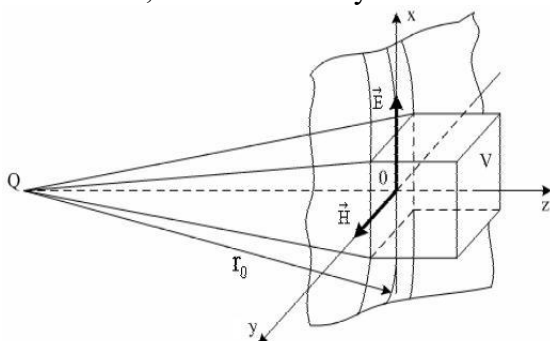


Рисунок 4.1 – До поняття локально плоского фронту хвилі

В межах об'єму  $V$  вектори поля  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  синфазні і фронт хвилі визначається рівнянням  $z = \text{const}$ , тобто є площиною, яка перпендикулярна напрямку поширення. Таким чином, сферичну хвилю в межах області  $V$  можна розглядати як плоску. Цей висновок можна віднести до будь-якого джерела, яке випромінює хвилю з неплоским фазовим фронтом.

Окремим випадком безмежного однорідного ізотропного середовища із заданими значеннями  $\varepsilon_a, \mu_a$  та  $\sigma = 0$  є вакуум з параметрами  $\varepsilon_a = \varepsilon_0, \mu_a = \mu_0, \sigma = 0$ . Атмосферне повітря за своїми параметрами близьке до вакууму, так що в більшості випадків для розрахунку електромагнітних полів повітря може розглядатися як середовище з  $\varepsilon_r = 1, \mu_r = 1, \sigma = 0$ .

Поле плоскої однорідної хвилі можна визначити з вирішення однорідних рівнянь Гельмгольца (4.9), (4.10). Ці векторні рівняння еквівалентні системі шести скалярних рівнянь, вирішення яких максимально спрощується для плоскої однорідної хвилі. В цьому випадку шукані комплексні амплітуди  $\vec{E}$  або  $\vec{H}$  будуть функціями лише однієї координати  $z$  і тоді хвилеві рівняння для окремих складових набудуть вигляду:

$$\frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} + k^2 \dot{E}_x = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{d^2 \dot{E}_y}{dz^2} + k^2 \dot{E}_y = 0, \quad (4.14)$$

Загальне вирішення таких диференціальних рівнянь для обох складових є сумою двох експоненціальних доданків:

$$\dot{E}_x = E_{mx}^+ e^{-jkz} + E_{mx}^- e^{+jkz}, \quad (4.15)$$

$$\dot{E}_y = E_{my}^+ e^{-jkz} + E_{my}^- e^{+jkz}, \quad (4.16)$$

де  $E_{mx}^+, E_{mx}^-, E_{my}^+, E_{my}^-$  – амплітуди, що визначаються потужністю джерела.

Функція  $e^{\pm jkz}$  – називається хвилевим множником, а також оператором рухомої хвилі (хвилі, яка біжить; біжної хвилі), або фазовим множником. Перший доданок в (4.15), (4.16) описує хвилю, що поширюється з певною швидкістю в додатньому напрямку вісі  $z$  (пряма хвиля), а другий член описує хвилю, що поширюється в від'ємному напрямку вісі  $z$  (зворотня хвиля). Дійсно, для миттєвого значення першого доданку в (4.15) маємо:

$$E_x(z, t) = \operatorname{Re}\left(E_{mx}^+ e^{-jkz} e^{j\omega t}\right) = E_{mx}^+ \cos(\omega t - kz). \quad (4.17)$$

Поверхня, що задовольняє умові сталого значення фази

$$\omega t - kz = \text{const}, \quad (4.18)$$

являє собою фронт хвилі. Ця поверхня задовільняє рівнянню  $z = \text{const}$ . Швидкість переміщення фронту хвилі зветься фазовою швидкістю:

$$v_\Phi = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t - \text{const}}{k}\right) = \frac{\omega}{k} = f \cdot \lambda = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (4.19)$$

Оскільки час змінюється завжди лише в одному напрямі, рівняння (4.18) виконуватиметься, якщо координата  $z$  зростає,

що і відповідає переміщенню фронту хвилі в додатньому напрямку вісі  $z$ .

Аналогічно, для миттєвого значення другого доданку в (4.15):

$$E_x(z, t) = \operatorname{Re}\left(E_{mx}^- e^{jkz} e^{j\omega t}\right) = E_{mx}^- \cos(\omega t + kz), \quad (4.20)$$

рівняння постійності фази

$$\omega t + kz = \text{const} \quad (4.21)$$

виконуватиметься для від'ємних значень  $z$ , що відповідає хвилі, яка поширюється в від'ємному напрямку вісі  $z$ .

Вище було прийнято, що єдине джерело розташовано з боку від'ємних значень координати  $z$ , тому в безмежному середовищі має право на існування лише хвиля, що біжить в додатньому напрямку вісі  $z$  (нагадаємо, що з правої сторони джерело поля відсутнє). З цього розгляду витікає, що  $E_{mx}^- = 0$ .

Аналогічні викладення для складової поля  $E_y(z, t)$  дають

$$E_{my}^- = 0.$$

Таким чином, вирішення однорідних рівнянь Гельмгольца (4.9), (4.10) визначає електричне поле плоскої однорідної хвилі, що поширюється вздовж вісі  $z$ :

$$\dot{E}_x = E_{mx}^+ e^{-jkz}, \quad \dot{E}_y = E_{my}^+ e^{-jkz}, \quad \dot{E}_z = 0. \quad (4.22)$$

Комплексні амплітуди вектору напруженості магнітного поля

$$\dot{\vec{H}} \text{ можуть бути знайдені з рівняння Максвелла } \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -\mu_a \frac{\partial \dot{\vec{H}}}{\partial t}$$

:

$$\dot{H}_x = \frac{1}{j\omega\mu_a} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -\frac{k}{\omega\mu_a} \dot{E}_y, \quad (4.23)$$

$$\dot{H}_y = \frac{1}{j\omega\mu_a} \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = -\frac{k}{\omega\mu_a} \dot{E}_x. \quad (4.24)$$

Відмітимо важливий висновок, що витікає з (4.23), (4.24): значення комплексних амплітуд векторів поля  $\dot{E}$  і  $\dot{H}$  в будь-якій точці простору зв'язані коефіцієнтом пропорційності, який має розмірність Ом. Цей коефіцієнт отримав назву “характеристичний опір середовища  $Z_c$ ” (літера “с” від англійського слова characteristic).

$$\dot{E}_x = Z_c \dot{H}_y, \quad \dot{E}_y = -Z_c \dot{H}_x. \quad (4.25)$$

За загальноприйнятим визначенням, характеристичний опір середовища – це величина, яка визначається відношенням поперечних до напрямку поширення хвилі складових комплексних амплітуд векторів поля рухомої хвилі (хвилі, що біжить; біжної хвилі). Таким чином,

$$\begin{aligned} Z_c &= \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{\omega\mu_a}{k} = \frac{\omega\mu_a}{\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

В результаті, шукане вирішення для однорідної плоскої хвилі, що поширюється вздовж вісі  $z$  в ідеальному діелектричному середовищі набуває вигляду:

$$\dot{\vec{E}} = \bar{x}_0 E_{mx}^+ e^{-jkz} + \bar{y}_0 E_{my}^+ e^{-jkz}, \quad (4.27)$$

$$\dot{\vec{H}} = -\bar{x}_0 \frac{E_{my}^+}{Z_c} e^{-jkz} + \bar{y}_0 \frac{E_{mx}^+}{Z_c} e^{-jkz}, \quad (4.28)$$

Нижче, як приклади, розглянуто характеристики плоских однорідних електромагнітних хвиль в деяких середовищах.

1. Вакуум. Ідеалізоване середовище з параметрами  $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ ,  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\sigma = 0$ .

Коефіцієнт фази плоскої хвилі у вакуумі:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}.$$

Звідси фазова швидкість буде:

$$V_\Phi \equiv C_0 = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Наголосимо, що фазова швидкість плоскої однорідної хвилі у вакуумі дорівнює швидкості світла у вакуумі і не залежить від частоти.

Довжина хвилі в вакуумі:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k} = \frac{C_0}{f}.$$

Характеристичний опір вакууму:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}.$$

Величина  $Z_0$  дійсна, тобто в будь-якій точці з простору вектори поля  $\dot{\vec{E}}$  та  $\dot{\vec{H}}$  синфазні. Як вже наголошувалося, атмосферне повітря за нормальних умов близьке за своїми властивостями до вакууму, тому в більшості випадків для дослідження властивостей електромагнітних хвиль в повітрі можна користуватися співвідношеннями, отриманими для вакууму.

2. Діелектричне *немагнітне* середовище без втрат з параметрами  $\varepsilon_r > 1, \mu_r = 1, \sigma = 0$ . Фазова швидкість плоских однорідних хвиль в такому середовищі буде:

$$V_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{C_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

Таким чином, фазова швидкість та довжина хвилі в діелектрику  $\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$  зменшуються в  $\sqrt{\varepsilon_r}$  раз в порівнянні з аналогічними величинами у вакуумі. Характеристичний опір діелектричного середовища також зменшується:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 120\pi \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

3. Магнітодіелектричне середовище без втрат з параметрами  $\varepsilon_r > 1, \mu_r > 1, \sigma = 0$ . Фазова швидкість, довжина хвилі і характеристичний опір в такому середовищі обчислюються за формулами:

$$V_{\phi} = \frac{C_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}, \quad Z_c = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}.$$

### 4.3 Плоскі електромагнітні хвилі у однорідному ізотропному середовищі з ненульовою провідністю

При поширенні в реальних середовищах електромагнітні хвилі зазнають загасання, бо відбуваються втрати енергії, яку переносять ці хвилі. Основні втрати в середовищі зв'язано з провідністю, відмінною від нуля. Електромагнітна хвиля викликає в такому середовищі струми провідності з густиною  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , на існування яких витрачається частина енергії хвилі, внаслідок чого виділяється тепло (закон Джоуля, джоулеві втрати). Теплові втрати в середовищі можуть бути також зумовлено інерційністю процесів поляризації і намагнічуваності середовищ. Але в більшості практичних випадків, при розгляді електромагнітних хвиль радіодіапазону, припускається, що середовища безінерційні і ці втрати не враховуються.

У однорідному ізотропному середовищі з комплексною діелектричною проникністю

$$\hat{\epsilon}_a = \epsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon_a (1 - jtg\delta) \quad (4.29)$$

та дійсною магнітною проникністю  $\mu_a$  хвильове число стає комплексною величиною:

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\hat{\epsilon}_a \mu_a} = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a (1 - jtg\delta)} = \beta + j\alpha. \quad (4.30)$$

У виразі (4.30) через  $\beta$  позначено реальну частину комплексного хвильового числа, через  $\alpha$  – уявну частину. Для подальшого дослідження необхідно отримати формули для величин  $\beta$  та  $\alpha$ , визначити їх фізичну сутність і обґрунтувати вибір знаку перед уявною частиною. Для цього підведемо до квадрату обидві частини рівності (4.30), і тоді після виділення

дійсної і уявної частин, отримуємо систему двох алгебраїчних рівнянь відносно  $\beta$  і  $\alpha$ :

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \\ 2\beta\alpha = -\omega^2 \varepsilon_a \mu_a \operatorname{tg} \delta \end{cases}.$$

Звідси зразу отримаємо

$$\beta^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \right). \quad (4.31)$$

Оскільки дійсна частина комплексного хвильового числа не може бути від'ємною величиною, то у формулі (4.31) потрібно вибрати знак «+». Тоді для коефіцієнту фази  $\beta$ , що характеризує зміну фази рухомої хвилі, отримаємо розрахункову формулу:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \right)}. \quad (4.32)$$

Після цього для коефіцієнту втрат  $\alpha$  отримаємо:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1 \right)}. \quad (4.33)$$

З урахуванням того, що хвиля затухає в процесі її руху в додатньому напрямі вісі  $z$ , комплексне хвильове число треба записувати у вигляді:

$$\dot{k} = \beta - j\alpha. \quad (4.34)$$

Комплексна діелектрична проникність (4.29) входить у вираз для характеристичного опору середовища. Цей параметр також стає комплексною величиною:

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a(1 - jtg\delta)}} = |\dot{Z}_c| e^{j\varphi_c}, \quad (4.35)$$

де  $|\dot{Z}_c| = \sqrt{\frac{\mu_a \cos \delta}{\varepsilon_a}}, \quad \varphi_c = \frac{1}{2} \delta.$

В результаті вирази для векторів поля плоскої однорідної хвилі, яка поширюється вздовж вісі  $z$  в середовищі з ненульовою провідністю набувають вигляду:

$$\dot{\vec{E}} = \bar{x}_0 E_{mx}^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \bar{y}_0 E_{my}^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}} = & -\bar{x}_0 \frac{E_{my}^+}{|\dot{Z}_c|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\varphi_c} + \\ & + \bar{y}_0 \frac{E_{mx}^+}{|\dot{Z}_c|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\varphi_c}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Для прикладу розглянемо плоску хвилю в середовищі з втратами, коли вектор  $\dot{\vec{E}}$  має одну складову, наприклад,  $\dot{E}_x$ , а тоді вектор  $\dot{\vec{H}}$  буде мати складову  $\dot{H}_y$ . Миттєві значення цих складових:

$$\vec{E} = \bar{x}_0 E_{mx}^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z), \quad (4.38)$$

$$\vec{H} = \bar{y}_0 \frac{E_{mx}^+}{|\dot{Z}_c|} e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\delta}{2}\right). \quad (4.39)$$

Амплітуди векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  експоненційно зменшуються вздовж вісі  $z$ , вектор  $\vec{H}$  запізнюється за фазою відносно вектора  $\vec{E}$  на величину  $\varphi_c$ , що дорівнює половині кута втрат  $\delta$ . На рис. 4.2 наведено залежності миттєвих значень векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  від часу  $t$  в деякій фіксованій точці простору  $z = z_0$ .

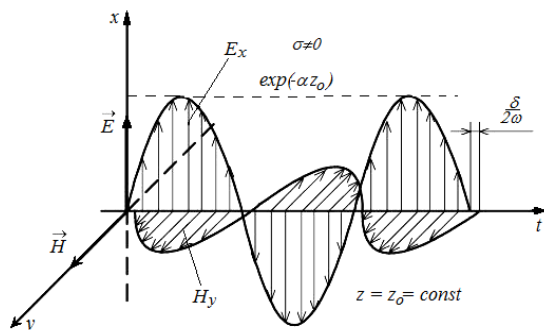


Рисунок 4.2 – Залежність поля плоскої хвилі від часу

Залежність миттєвих значень векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  від координати  $z$  в деякий момент часу  $t = t_0$  зображено на рис. 4.3.

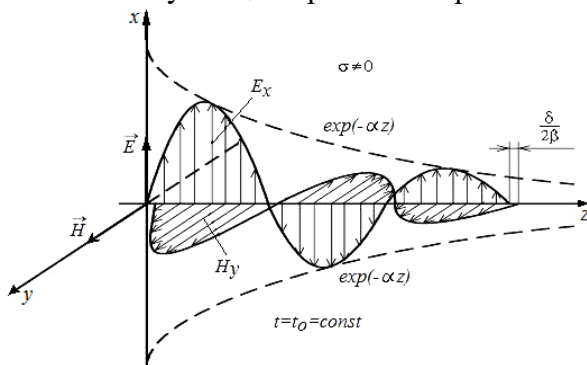


Рисунок 4.3 – Зміна поля плоскої хвилі в просторі

Фазова швидкість плоскої хвилі визначається за загальною формулою, як відношення частоти до дійсної частини комплексного хвильового числа (4.34) - коефіцієнту фази:

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{\operatorname{Re} k} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + tg^2 \delta} + 1 \right)}}. \quad (4.40)$$

Як бачимо з цього виразу, фазова швидкість плоскої хвилі в середовищі з втратами по-перше, менше, ніж фазова швидкість плоскої хвилі в середовищі без втрат ( $\sigma = 0$ ) з тими ж параметрами  $\varepsilon_a$  та  $\mu_a$ , а по-друге, фазова швидкість залежить від частоти, (оскільки  $tg \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a}$ ), причому із збільшенням частоти вона зростає і прагне до фазової швидкості в середовищі без втрат. Крім того, величина  $V_{\phi}$  залежить від значення провідності середовища: при однаковій частоті вона буде менша в середовищі з більшою провідністю.

Довжина хвилі в середовищі з втратами:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\operatorname{Re} k} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + tg^2 \delta} + 1 \right)}} = \frac{V_{\phi}}{f}. \quad (4.41)$$

Довжина хвилі при фіксованій частоті зменшується із збільшенням провідності  $\sigma$ .

Коефіцієнт загасання  $\alpha$  (4.37) це дійсна величина, яка, подібно до коефіцієнту фази, має розмірність 1/м. Величина  $e^{-\alpha \cdot z}$  показує, в скільки разів зменшуються амплітуди векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  по проходженню відстані в  $z$ (м). Відстань, по

проходженню якої електромагнітна хвиля слабшає в  $\epsilon=2.718$  разів, називається глибиною проникнення хвилі в середовище і визначається як  $\Delta = \frac{1}{\alpha}$ .

Основна відмінність параметрів плоскої хвилі, що поширюється в середовищі з кінцевою провідністю (тобто в середовищі з  $\sigma \neq 0$ ) полягає в тому, що в середовищі без втрат параметри хвилі однакові при будь-яких частотах, а в середовищі з провідністю вони залежать від частоти. Явище залежності параметрів хвилі ( $V_{\phi}$ ,  $Z_c$  і ін.) від частоти називається *дисперсією*.

Для діелектриків з малими втратами  $tg\delta \ll 1$ , які широко використовуються в апаратурі радіоелектроніки і зв'язку (звичайно це немагнітні діелектрики з  $\mu_r = 1$ ), величину  $\sqrt{1 - jtg\delta}$  можна розкласти в ряд Тейлора, зберігши два перших члена:

$$\sqrt{1 - jtg\delta} \approx 1 - j\frac{1}{2}tg\delta.$$

З використанням цього наближення з раніше отриманих формул одержимо наближені вирази для коефіцієнту фази та коефіцієнту загасання:

$$\beta = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_0} = \omega\sqrt{\epsilon_r}\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{C_0}\sqrt{\epsilon_r} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\epsilon_r}, \quad (4.42)$$

$$\alpha = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_a}} = \frac{\pi}{\lambda_0}\sqrt{\epsilon_r}tg\delta = \frac{1}{2}\beta \cdot tg\delta. \quad (4.43)$$

Наближений вираз для характеристичного опору середовища отримає вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_c &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_a(1-jtg\delta)}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r} \cdot \sqrt{1-jtg\delta}} = \\ &= \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} \left(1 + j\frac{1}{2}tg\delta\right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Комплексний характер  $\dot{Z}_c$  вказує на незначну несинфазність векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ , якою на практиці можна знехтувати.

Довжина хвилі обчислюється за звичайною формулою:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Фазова швидкість розраховується, як в середовищі з  $\sigma = 0$ :

$$V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}}.$$

З отриманих результатів виходить, що параметри  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $V_\phi$ ,  $Z_c$  хвилі що поширюється в реальному діелектрику з малими втратами в першому наближенні збігаються з параметрами хвилі в середовищі без втрат, а коефіцієнт загасання  $\alpha$  є малою величиною і не залежить від частоти. Дисперсійні властивості при цьому проявляються незначно і ними можна знехтувати.

#### 4.4 Плоскі однорідні хвилі в добре провідних середовищах

В добре провідних середовищах (наприклад, в немагнітних металах)  $tg\delta \gg 1$ , відносна магнітна проникність

$\mu_r = 1$  ( $\mu_a = \mu_0$ ). При  $tg\delta \gg 1$  в загальних виразах коефіцієнту фази  $\beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + tg^2 \delta} + 1 \right)}$  та коефіцієнту загасання  $\alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + tg^2 \delta} - 1 \right)}$  можна нехтувати одиницею в порівнянні з  $tg\delta$ . В результаті отримаємо:

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} = \sqrt{\pi \mu_0 \sigma f}, \quad (4.45)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} = \sqrt{\pi \mu_0 \sigma f}. \quad (4.46)$$

Сталі фази  $\beta$  та загасання  $\alpha$  по-перше, однакові, а по-друге, нелінійно залежать від частоти, отже, властивості хвилі на різних частотах істотно розрізнятимуться. Формули для фазової швидкості, довжини хвилі і характеристичного опору в таких середовищах набувають вигляду:

$$V_\phi = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \sigma}} = 2 \sqrt{\frac{\pi f}{\mu_0 \sigma}}, \quad (4.47)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi \mu_0 \sigma f}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mu_0 \sigma f}}, \quad (4.48)$$

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{\sigma}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2\sigma}}. \quad (4.49)$$

Наприклад, параметри плоских хвиль, які поширюються у вакуумі і міді ( $\sigma = 5,75 \cdot 10^7$  См/м) на частоті 1 МГц будуть складати:

в вакуумі:

$$V_{\phi} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

$$\lambda_0 = 300 \text{ м}$$

$$Z_0 = 120\pi \text{ Ом} \approx 377 \text{ Ом}$$

в металі (мідь):

$$V_{\phi} = 421 \text{ м/с}$$

$$\lambda = 4.21 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$|\dot{Z}_c| \approx 3.74 \cdot 10^{-4} \text{ Ом.}$$

Коефіцієнт загасання хвилі, що поширюється в міді при частоті 1 МГц дорівнює  $\alpha = 14935 \text{ 1/м}$ . Це дуже велике затухання. Глибина проникнення хвилі в мідь на цій частоті складає 77 мкм. Наведені приклади показують, що електромагнітна хвиля на частотах радіодіапазону практично не проникає у глиб провідника. За цією причиною струм провідності  $\vec{J}$  в (3.57) можна вважати поверхневим і його позначають, як  $\vec{J}_S$ .

#### 4.5 Поляризація електромагнітних хвиль

Поляризацією електромагнітної хвилі називають зміни величини і орієнтації векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  у фіксованій точці простору протягом періоду коливання хвилі. Хвиля, у якої в фіксованій точці простору у будь-який момент часу величина і орієнтація векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  є детермінованими (точно визначено), називається поляризованою. Поляризація хвилі – це її орієнтаційна характеристика. У плоскій однорідній хвилі вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  взаємозв'язано, характер їх поведінки в просторі однаковий, тому зазвичай обмежуються розглядом поведінки лише вектору  $\vec{E}$ . Площину, що проходить через вектор  $\vec{E}$  і напрям поширення хвилі, називають *площиною поляризації* (рис. 4.4).

У загальному випадку вираз для вектору  $\vec{E}$  плоскої однорідної хвилі в середовищі без втрат записується у вигляді:

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + \vec{y}_0 E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_2). \quad (4.50)$$

Тут  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  – початкові фази складових  $E_x$  і  $E_y$  в точці  $z=0$  при  $t=0$ .

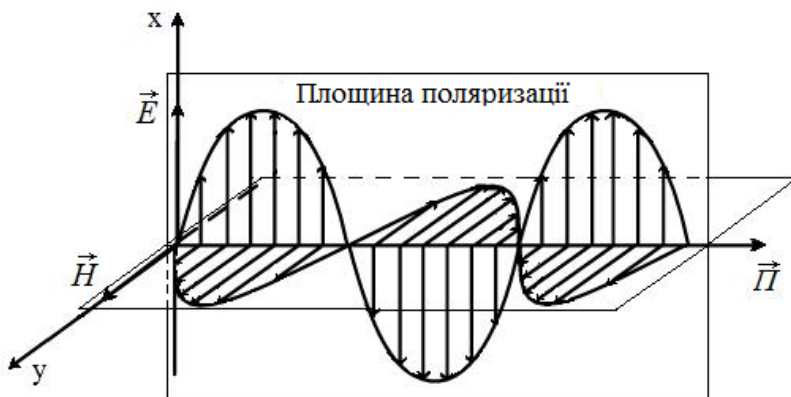


Рисунок 4.4 – Визначення площини поляризації

Орієнтація сумарного вектора  $\vec{E}$  визначається кутом  $\theta$  (рис. 4.5).

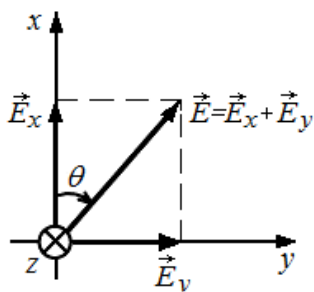


Рисунок 4.5 – Миттєве положення вектора  $\vec{E}$

Кут  $\theta$  відраховується за годинниковою стрілкою від вісі  $x$ , якщо дивитися уздовж напрямку поширення хвилі (вісь  $z$ ) і визначається співвідношенням:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_2)}{E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_1)}. \quad (4.51)$$

Характер зміни орієнтації і величини вектора  $\vec{E}$  з часом у фіксованій точці простору залежить від різниці фаз  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  і від співвідношення амплітуд  $E_{mx}$  і  $E_{my}$ . У загальному випадку кут  $\theta$  може змінюватися в часі. Кінець вектора  $\vec{E}$  з часом у фіксованій точці простору описуватиме лінію, яка зветься годографом. За формою годографа виділяють два види поляризації: лінійну і обертову. В свою чергу обертові підрозділяють на кругову та еліптичну.

**1. Лінійна поляризація.** Тут складові  $E_x$  і  $E_y$  повинні бути або синфазними або протифазними

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.52)$$

Хай спочатку для простоти  $n = 0$ , тобто початкові фази  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  збігаються. Вважаючи у формулі (4.51)  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ , отримаємо стале у часі значення кута орієнтації:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi)}{E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi)} = \frac{E_{my}}{E_{mx}} = \operatorname{const}. \quad (4.53)$$

У фіксованій точці простору вектор  $\vec{E}$ , не міняючи орієнтації ( $\theta = \operatorname{const}$ ), змінюється в часі лише за довжиною (модулем):

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_{mx}^2 + E_{my}^2} \cos(\omega t - kz + \varphi). \quad (4.54)$$

При цьому, якщо значення  $n$  брати, як в (4.52), кінець вектора  $\vec{E}$  зі зміною часової або просторової координати буде переміщуватися вздовж прямої лінії, що складає з віссю  $x$  сталий у часі та просторі кут  $\theta$ :

$$\theta = (-1)^n \arctg \frac{E_{my}}{E_{mx}}. \quad (4.55)$$

При парних значеннях числа  $n$  ( $E_x$  і  $E_y$  синфазні) кут  $\theta$  - величина додатня; при непарних  $n$  ( $E_x$  і  $E_y$  протифазні) кут  $\theta$  - величина від'ємна. Таким чином, хвиля (4.50), при виконанні умови (4.52), має лінійну поляризацію. Якщо за поверхню Землі прийняти площину  $yOz$  (рис. 4.5), то при  $\theta=0$  буде вертикальна лінійна поляризація, при  $\theta=\pi/2$  - горизонтальна лінійна поляризація, а при  $0 < \theta < \pi/2$  - похила лінійна поляризація.

**2. Кругова поляризація.** Тут амплітуди складових  $E_x$  і  $E_y$  однакові, а фази відрізняються на  $\pm \frac{\pi}{2}$ :

$$E_{mx} = E_{my} = E_0, \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (4.56)$$

Підстановка цих значень в (4.51) дає:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2})}{E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_1)} = \frac{\mp \sin(\omega t - kz + \varphi_1)}{\cos(\omega t - kz + \varphi_1)} = \\ &= \mp \operatorname{tg}(\omega t - kz + \varphi_1) \end{aligned}$$

Звідси витікає:

$$\theta = \mp(\omega t - kz + \varphi_1). \quad (4.57)$$

Особливо наголосимо, що при цьому величина вектора  $\vec{E}$  при зміні часової та просторової координати залишається незмінною:

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_0. \quad (4.58)$$

З (4.57) витікає, що у фіксованій точці простору вектор  $\vec{E}$ , залишаючись незмінним за величиною, обертається з кутовою частотою  $\omega$  довкола напрямку поширення. Кількість обертів вектору  $\vec{E}$  за секунду дорівнює частоті коливань. Залежно від напрямку обертання вектору  $\vec{E}$  розрізняють хвилі з правою і лівою поляризацією (рис. 4.6).

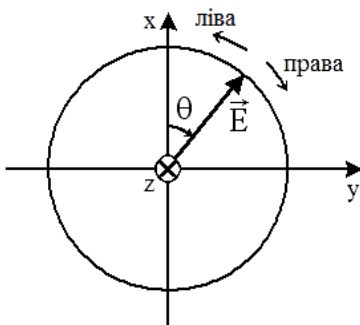


Рисунок 4.6 – Годограф вектору  $\vec{E}$  при круговій поляризації

Хвиля має праву кругову поляризацію, коли вектор  $\vec{E}$  обертається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися уздовж напрямку поширення хвилі ( $\theta > 0$ ). Хвиля має ліву кругову поляризацію, коли вектор  $\vec{E}$  обертається проти

годинникової стрілки, якщо дивитися уздовж напрямку поширення хвилі ( $\theta > 0$ ). Відзначимо, що напрям обертання визначається знаком фазового зсуву між складовими в (4.56). На рис. 4.7 показано зміну орієнтації вектору  $\vec{E}$  в просторі у фіксований момент часу для плоскої хвилі з правою круговою поляризацією, що поширюється уподовж осі  $z$ , в середовищі без втрат.

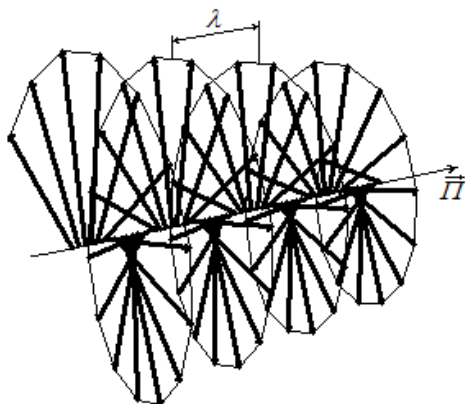


Рисунок 4.7 – Зміна орієнтації вектору  $\vec{E}$  в просторі при правій круговій поляризації

Лінія, що з'єднує кінці векторів, є правогвинтовою спіраллю з кроком, що дорівнює довжині хвилі. Її проекція на площину  $xOy$  утворює коло з обертанням вектора  $\vec{E}$  за годинниковою стрілкою, якщо дивитися уздовж напрямку поширення хвилі.

**3. Еліптична поляризація.** Тут складові поля  $E_x$  і  $E_y$  можуть мати довільні співвідношення амплітуд і фаз. Сумарний вектор  $\vec{E}$  у фіксованій точці простору з часом змінюється за величиною і обертається довкола напрямку поширення хвилі, його кінець описує еліпс (рис. 4.8).

Хвилі такого типу прийнято називати еліптично поляризованими. Якщо обертання вектора  $\vec{E}$  відбувається за

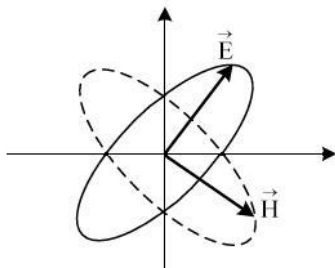


Рисунок 4.8 – Годографи векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  при еліптичній поляризації

годинниковою стрілкою, то хвиля має праву еліптичну поляризацію, якщо обертання проти годинникової стрілки – це хвиля лівої еліптичної поляризації. Міру еліптичності хвилі оцінюють по коефіцієнту еліптичності, що дорівнює відношенню малої вісі еліпса до великої. Орієнтація еліпса задається кутом між великою віссю еліпса і віссю  $x$  (або віссю  $y$ ).

Слід зазначити, що поняття еліптичної, кругової і лінійної поляризації застосовне не лише для плоских однорідних хвиль, але і інших типів хвиль. Поляризаційні властивості електромагнітних хвиль мають велике значення в прикладній радіотехніці. Наприклад, стрижнева антена, що розміщена в полі хвилі з круговою поляризацією перпендикулярно напрямку її поширення, створюватиме вихідний сигнал незмінної амплітуди незалежно від орієнтації антени в поперечній площині. Цей факт робить хвилі з круговою поляризацією переважними для організації радіозв'язку з рухливими об'єктами, які можуть займати в просторі довільні і непередбачувані положення.

**4. Розкладання лінійно поляризованої хвилі в круговому базисі.** Розглянемо дві хвилі ( $\dot{\vec{E}}_1$  та  $\dot{\vec{E}}_2$ ) кругової поляризації з однаковими комплексними амплітудами:

лівої кругової

$$\dot{\vec{E}}_1 = (\bar{x}_0 + j \cdot \bar{y}_0) \cdot \dot{\vec{E}}_x, \quad (4.59)$$

правої кругової

$$\dot{\vec{E}}_2 = (\bar{x}_0 - j \cdot \bar{y}_0) \cdot \dot{\vec{E}}_x. \quad (4.60)$$

Якщо скласти (4.59) та (4.60), або, другими словами, скласти поля хвиль двох кругових поляризацій з протилежними напрямками обертання площини поляризації, то отримаємо

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_1 + \dot{\vec{E}}_2 = \bar{x}_0 2 \cdot \dot{\vec{E}}_x. \quad (4.61)$$

Вираз (4.61) відповідає запису комплексної амплітуди вектору електричного поля хвилі з лінійною поляризацією. З цього розгляду витікає, що лінійно поляризована хвиля завжди може бути представлена у вигляді суми двох хвиль, поляризованих по колу в протилежних напрямках. Це розкладання пояснюється на рис.4.9.

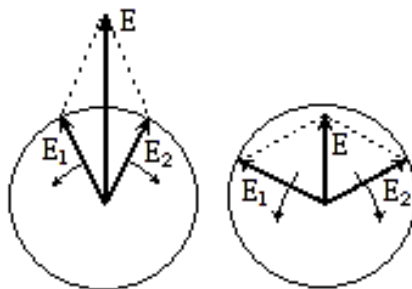


Рисунок 4.9- Розкладання хвилі з лінійною поляризацією

## Контрольні запитання

1. Як перейти від рівнянь Максвелла до однорідних хвильових рівнянь відносно векторів  $\vec{H}$  та  $\vec{E}$  електромагнітного поля? Яка фізична сутність параметру  $\varepsilon_a \mu_a = \frac{1}{V^2}$  в хвильових рівняннях?
2. Як вводиться, яка розмірність та фізична сутність параметру  $k$  в рівняннях Гельмгольца? Як змінюється цей параметр в середовищі з втратами?
3. Як вводиться поняття фронту хвилі? Що таке фазовий та амплітудний фронт хвилі? Що таке плоска хвиля та однорідна плоска хвиля? Що таке локально плоска хвиля?
4. Яка фізична сутність обох доданків в загальному вирішенні хвильового рівняння? Які фізичні процеси можуть зумовити появу зворотньої хвилі?
5. Що таке фазова швидкість хвилі? Як вона визначається та від яких параметрів середовища залежить?
6. Як визначаються комплексні амплітуди  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ ? Який зв'язок між ними? Як вводиться поняття характеристичного опору та якими параметрами середовища він визначається?
7. Які параметри хвилі у вакуумі, діелектрику та магнітодіелектрику без втрат? Про що свідчить порівняльний аналіз поведінки хвиль в цих середовищах?
8. Як впливають втрати в середовищі на параметри поширення хвиль в них? Які особливості визначення параметрів  $\beta$  та  $a$  в середовищі з втратами?
9. Яка фізична сутність сталої втрат та комплексного характеристичного опору в середовищі з втратами? Від чого залежить фазовий зсув між  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  при поширенні хвилі в середовищі з втратами?

10. Як знайти параметри  $\beta$  та  $\alpha$  в добре провідному середовищі (в металі)? Які їх особливості? Про що свідчить порівняльний аналіз параметрів хвиль в металі та в діелектрику?
11. Що таке поверхневий струм та глибина занурення хвилі в метал?
12. Як вводиться поняття поляризації плоскої хвилі? Що таке вертикальна, горизонтальна та похила лінійні поляризації?
13. Що таке обертова (зокрема, кругова, еліптична) поляризація хвилі?
14. Як можна розкласти хвилю з лінійною поляризацією?

### Приклади вирішення задач

**Задача 4.1.** Плоска хвиля поширюється в повітрі. Амплітудне значення її вектору  $\vec{E}$  дорівнює 1 В/м. Знайти амплітудне значення вектору  $\vec{H}$  та середнє значення вектору Пойнтінга.

#### Вирішення

1. За виразом (4.26) для амплітуди вектору  $\vec{H}$  маємо  

$$H = E/Z_0 = 1/(120 \cdot \pi) = 2.65 \cdot 10^{-3} \text{ А/м.}$$
2. За виразом (3.39) для середнього значення вектору Пойнтінга будемо мати  

$$P_{\text{ср}} = E_d \cdot H_d = 1/2 \cdot (E \cdot H) = 1/2 \cdot (1 \cdot 2.65 \cdot 10^{-3}) = 1.33 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/м}^2.$$

**Задача 4.2.** Напруженість електричного поля плоскої хвилі, яка в повітрі поширюється вздовж вісі  $z$  при  $z=0$  є  $E_x(t) = 0,2 \cdot \cos(\omega t + \pi/3)$ . Тут  $\omega = 10^6$  рад/с. Записати вираз для миттєвого значення напруженості електричного поля на відстані  $l = 100$  м.

## Вирішення

1. Питома провідність повітря  $\sigma = 0$ , а тому і  $\operatorname{tg}\delta=0$ , значить при поширенні хвиля не змінюється за амплітудою, а буде набувати лише фазового зсуву  $\Delta\varphi$ .
2. Знайдемо фазовий зсув, який хвиля набуває при поширенні на відстань  $l=100\text{м}$ .

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \beta \cdot l = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot l = \\ &= 10^6 \sqrt{\frac{1}{36\pi} 10^{-9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} \cdot 100 = \frac{1}{3}, \text{ рад}.\end{aligned}$$

Запишемо вираз для напруженості електричного поля на відстані  $l=100\text{ м}$ , де воно набуло фазового зсуву  $\Delta\varphi = \beta l$ .

$$E_x(z, t) = 0.2 \cos\left(\omega t - \beta \cdot l + \frac{\pi}{3}\right) = 0.2 \cos\left(10^6 t - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

**Задача 4.3.** Біля поверхні сухого ґрунту ( $\varepsilon_r=4$ ,  $\sigma=10^{-3}\text{См/м}$ ) хвиля має амплітуду напруженості електричного поля  $E=100\text{ мкВ/м}$ . Знайти величину  $E$  на глибині  $h=100\text{ м}$  для двох частот  $f_1=100\text{ КГц}$ ,  $f_2=10\text{ МГц}$ .

## Вирішення

1. За виразом (3.31) знайдемо величину  $\operatorname{tg}\delta$  для сухого ґрунту на заданих частотах.

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{\sigma}{2\pi \cdot f_1 \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{10^{-3}}{2\pi \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}} = 45,$$

$$\operatorname{tg}\delta_2 = \frac{\sigma}{2\pi \cdot f_2 \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{10^{-3}}{2\pi \cdot 10^7 \cdot 4 \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}} = 0.45$$

Знайдемо коефіцієнт втрат (сталу втрат)  $\alpha_1$  на частоті  $f_1$ . Тут величина  $\operatorname{tg}\delta_1=45 \gg 1$ , а тому треба застосовувати вираз (4.46).

$$\alpha_1 = \sqrt{\pi \cdot \mu_0 \cdot \sigma \cdot f_1} = \sqrt{\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3} \cdot 10^5} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м}$$

Знайдемо сталу втрат  $\alpha_2$  на частоті  $f_2$ . Тут  $\operatorname{tg}\delta_2 = 0.45 \approx 1$ , а тому треба застосовувати вираз (4.33).

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 2\pi \cdot f_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_2} - 1 \right)} = \\ &= 2\pi \cdot 10^7 \sqrt{\frac{4\varepsilon_0 \mu_0}{2} \left( \sqrt{1 + 0.45^2} - 1 \right)} = 0.092 \text{ 1/м} \end{aligned}$$

2. Знайдемо величину  $E_1$  на глибині  $h=100$  м для частоти  $f_1$ .

$$E_1 = E \cdot e^{-\alpha_1 h} = 100 \cdot e^{-0.02 \cdot 100} = 13.53 \text{ мкВ/м}.$$

Знайдемо величину  $E_2$  для частоти  $f_2$ .

$$E_2 = E \cdot e^{-\alpha_2 h} = 100 \cdot e^{-0.092 \cdot 100} = 0.01 \text{ мкВ/м}.$$

### Задачі для самостійного вирішення

**Задача 4.4.** Титанат барію (кераміка) має параметри  $\varepsilon_r = 144$ ,  $\mu_r=1$ ,  $\operatorname{tg}\delta = 0.6$ . Визначити параметри плоскої хвилі  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $Z_c$ ,  $V_\phi$ . Виконати порівняльний аналіз з аналогічними параметрами в повітрі.  $f=1$ ГГц.

**Задача 4.5.** Плоска хвиля в повітрі має  $\lambda=10$ м. Якими будуть  $\lambda$ ,  $V_\phi$  та  $\alpha$  в морській воді з  $\varepsilon_r=80$ ,  $\mu_r=1$ ,  $\sigma=3$ См/м? Як зміняться ці параметри, якщо  $\lambda=10$  см? Проаналізувати отримані результати.

**Задача 4.6.** Визначити комплексну амплітуду вектору  $\vec{E}$  в алюмінії на частоті  $f_1 = 1\text{кГц}$ , якщо в заданій точці простору амплітуда вектору  $\vec{H}$  дорівнює  $1\text{ А/м}$ . Якою буде глибина занурення поля в цей метал? Як зміняться результати на частоті  $f_2=100\text{ МГц}$ ? Як зміняться результати на обох частотах, якщо замість алюмінію буде срібло? Виконати порівняльний аналіз за частотою та середовищами.

## 5 ВІДБИТТЯ І ЗАЛОМЛЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА МЕЖІ РОЗДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

Хай на плоску межу розділу середовищ, які мають різні параметри ( $\sigma$ ,  $\mu_a$ ,  $\varepsilon_a$ ), падає плоска однорідна хвиля. Потрапляючи на межу розділу, електромагнітна хвиля частково (або повністю) відбивається і частково (або повністю) проникає в друге середовище, тобто виникають явища відбиття і заломлення хвилі. Площина, що проходить через нормаль до поверхні розділу двох середовищ і напрям поширення падаючої хвилі, називається площиною падіння. Вектор напруженості електричного поля плоскої хвилі завжди є перпендикулярним до напрямку її поширення, а по відношенню до площини падіння може бути орієнтований довільно. Якщо вектор  $\vec{E}$  перпендикулярний площині падіння, то така хвиля називається *нормально поляризованою*. Якщо вектор  $\vec{E}$  паралельний площині падіння (лежить в цій площині) – хвиля називається *паралельно поляризованою*. Очевидно, що хвилю з будь-якою іншою орієнтацією вектору  $\vec{E}$ , а також хвилі, що мають кругову або еліптичну поляризацію, можна представити у вигляді суперпозиції двох хвиль, одна з яких є нормально поляризованою, а друга – паралельно поляризованою.

### 5.1 Падіння нормально поляризованої плоскої хвилі на межу розділу двох середовищ

Плоска електромагнітна хвиля нормальної лінійної поляризації, поширюючись в першому середовищі, падає на плоску межу розділу двох однорідних ізотропних середовищ, що характеризуються параметрами  $\varepsilon_{a1}, \mu_{a1}, \sigma_1 = 0$ ,  $\varepsilon_{a2}, \mu_{a2}, \sigma_2 = 0$ . Геометрію задачі і орієнтацію координатних

вісей показано на рис. 5.1. Кут  $\varphi$  між напрямом поширення падаючої хвилі і нормаллю до межі розділу називається кутом падіння. Напрямок поширення падаючої хвилі  $z'$  записується в системі координат  $x, y, z$  через напрямні косинуси

$$\cos \varphi_x = \cos \varphi, \quad \cos \varphi_y = 0, \quad \cos \varphi_z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$$

в такому вигляді:

$$z' = x \cos \varphi + z \sin \varphi. \quad (5.1)$$

У падаючій хвилі вектор  $\vec{E}$  є паралельним до вісі  $y$ , вектор  $\vec{H}$  лежить в площині падіння (рис. 5.1).

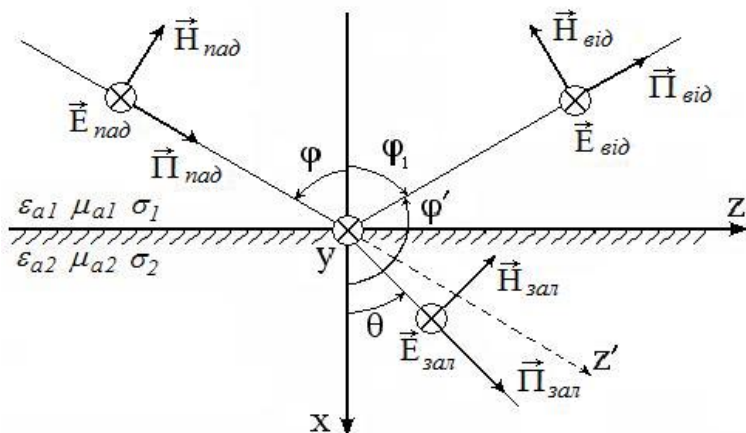


Рисунок 5.1 - Падіння нормально поляризованої хвилі

Комплексні амплітуди векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  падаючої хвилі в системі координат  $x, y, z$  набувають вигляду:

$$\dot{\vec{E}}_{\text{пад}} = \vec{y}_0 \dot{E}_{\text{пад}} e^{-jk_1 z'} = \vec{y}_0 \dot{E}_{\text{пад}} e^{-jk_1 (x \cos \varphi + z \sin \varphi)}, \quad (5.2)$$

$$\dot{H}_{\text{пад}} = -(\bar{x}_0 \sin \varphi - \bar{z}_0 \cos \varphi) \frac{\dot{E}_{\text{пад}}}{Z_{c1}} e^{-jk_1(x \cos \varphi + z \sin \varphi)}, \quad (5.3)$$

де  $k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_{a1} \mu_{a1}}$  – коефіцієнт фази падаючої хвилі в першому середовищі,

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\varepsilon_{a1}}} \quad \text{– характеристичний опір першого}$$

середовища.

Оскільки поле падаючої хвилі (5.2), (5.3) не залежить від змінної  $y$ , то поля заломленої і відбитої хвиль також не залежать від координати  $y$ . Це означає, що напрями поширення відбитої і заломленої хвиль лежать в площині падіння  $xoz$  та визначаються кутом відбиття  $\varphi_1$  і кутом заломлення  $\theta$ , відповідно (рис. 5.1). Відбиту і заломлену хвилі, які зумовлені своїм існуванням наявністю падаючої хвилі, будемо визначати аналогічно (5.2), (5.3) у вигляді нормально поляризованих плоских однорідних хвиль.

Вирази для векторів поля відбитої хвилі можуть бути отримані з формул (5.2), (5.3), якщо в останніх замінити  $\dot{E}_{\text{пад}}$  на  $\dot{E}_{\text{від}}$  і кут  $\varphi$  на кут  $\varphi'$ . Кут  $\varphi'$  зв'язано з кутом відбиття  $\varphi_1$  простим співвідношенням  $\varphi' = \pi - \varphi_1$ . При цьому комплексні амплітуди векторів поля відбитої хвилі набувають вигляду:

$$\dot{E}_{\text{від}} = \bar{y}_0 \dot{E}_{\text{від}} e^{-jk_1(-x \cos \varphi_1 + z \sin \varphi_1)}, \quad (5.4)$$

$$\dot{H}_{\text{від}} = -(\bar{x}_0 \sin \varphi_1 - \bar{z}_0 \cos \varphi_1) \frac{\dot{E}_{\text{від}}}{Z_{c1}} e^{-jk_1(-x \cos \varphi_1 + z \sin \varphi_1)} \quad (5.5)$$

Поле заломленої хвилі, що поширюється в другому середовищі, записується також з використанням формул (5.2),

(5.3) при наступних замінах:  $\dot{E}_{\text{пад}}$  замінюється на  $\dot{E}_{\text{зал}}$ , кут падіння  $\varphi$  – на кут заломлення  $\theta$ ,  $k_1$  – на  $k_2$ ,  $Z_{c1}$  на  $Z_{c2}$ :

$$\dot{\vec{E}}_{\text{зал}} = \vec{y}_0 \dot{E}_{\text{зал}} e^{-jk_2(x \cos \theta + z \sin \theta)}, \quad (5.6)$$

$$\dot{\vec{H}}_{\text{зал}} = -(\vec{x}_0 \sin \theta - \vec{z}_0 \cos \theta) \frac{\dot{E}_{\text{зал}}}{Z_{c2}} e^{-jk_2(x \cos \theta + z \sin \theta)}, \quad (5.7)$$

де  $k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_{a2} \mu_{a2}}$  – коефіцієнт фази заломленої хвилі в другому середовищі;

$$Z_{c2} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\varepsilon_{a2}}} \text{ – характеристичний опір другого середовища.}$$

Тепер задача полягає в тому, аби при заданій падаючій хвилі (5.2), (5.3) знайти такі напрями і комплексні амплітуди відбитої і заломленої хвиль, при яких поля в першому і в другому середовищах задовольняли б обов'язковим граничним умовам – дотичні (тангенціальні) складові векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  залишаються неперервними (однаковими) на межі розділу, тобто в площині  $x = 0$ .

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}, \quad (5.8)$$

$$\dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}. \quad (5.9)$$

Поле в першому середовищі складається з полів падаючої і відбитої хвиль, а поле в другому середовищі збігається з полем заломленої хвилі. Для запису умови (5.8) використовуються вирази (5.2), (5.4) і (5.7) при  $x=0$ :

$$\dot{E}_{\text{пад}} e^{-jk_1 z \sin \varphi} + \dot{E}_{\text{від}} e^{-jk_1 z \sin \varphi_1} = \dot{E}_{\text{зал}} e^{-jk_2 z \sin \theta}. \quad (5.10)$$

Оскільки від значень  $z$  залежать лише експоненти, то рівність (5.10) може задовольнитися лише за умови, якщо:

$$k_1 \sin \varphi = k_1 \sin \varphi_1 = k_2 \sin \theta. \quad (5.11)$$

Отже маємо:

$$\varphi = \varphi_1, \quad (5.12)$$

$$k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \theta. \quad (5.13)$$

Рівність (5.12) є *першим законом Снелліуса* – кут відбиття дорівнює куту падіння. Із співвідношення (5.13) визначається кут заломлення

$$\sin \theta = \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi. \quad (5.14)$$

Рівність (5.14) виражає *другий закон Снелліуса*. Оскільки коефіцієнти фази в обох середовищах обчислюються за однією і тією ж формулою вигляду:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a},$$

співвідношення (5.14) можна записати так, що в нього увійдуть лише параметри середовищ, а робочу частоту буде вилучено.

$$\frac{\sin \theta}{\sin \varphi} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{V_{\varphi 2}}{V_{\varphi 1}} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (5.15)$$

де  $V_{\phi 1}, V_{\phi 2}$  – фазові швидкості плоских однорідних хвиль для обох середовищ.

$n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}, n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}}$  – показники заломлення першого і другого середовищ.

Слід зазначити, що закони Снелліуса (5.12), (5.14) справедливі при будь-якій орієнтації векторів поля відносно площини падіння. Вони визначають напрями поширення відбитої і заломленої хвиль при похилому падінні плоскої однорідної хвилі на межу розділу різних середовищ. Співвідношення (5.12), (5.14) залишаються вірними і в разі середовищ з втратами, коли проникність середовищ, а з ними і хвильові числа в (5.14) стають комплексними величинами і при куті падіння  $\varphi$  величина кута заломлення  $\theta$  також буде комплексною.

На межі розділу дотичні складові векторів  $\vec{E}$  трьох хвиль (падаюча, відбита, заломлена) є у-вими складовими (рис. 5.1), а дотичні складові векторів  $\vec{H}$  – z-ми складовими. Використовуючи вирази для дотичних складових полів цих трьох хвиль з (5.2)÷(5.7) при  $x=0$  (межа розділу) з врахуванням рівності (5.11) впливає гранична умова (5.8) у вигляді:

$$\dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{від}} = \dot{E}_{\text{зал}}, \quad (5.16)$$

а гранична умова (5.9) у вигляді:

$$\frac{\dot{E}_{\text{пад}}}{Z_{c1}} \cos \varphi - \frac{\dot{E}_{\text{від}}}{Z_{c1}} \cos \varphi = \frac{\dot{E}_{\text{зал}}}{Z_{c2}} \cos \theta. \quad (5.17)$$

Введемо коефіцієнт відбиття, як відношення комплексних амплітуд напруженості електричного поля відбитої і падаючої хвиль на межі розділу:

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{\dot{E}_{\text{від}}}{\dot{E}_{\text{пад}}}. \quad (5.18)$$

Аналогічно вводиться коефіцієнт проходження (заломлення):

$$\dot{T}_{\perp} = \frac{\dot{E}_{\text{зал}}}{\dot{E}_{\text{пад}}}. \quad (5.19)$$

Коефіцієнти  $\dot{R}_{\perp}$  і  $\dot{T}_{\perp}$  називають ще коефіцієнтами Френеля для хвиль нормальної поляризації. З (5.16), (5.17) нескладно отримати систему двох алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $\dot{R}_{\perp}$  і  $\dot{T}_{\perp}$ :

$$\begin{cases} 1 + \dot{R}_{\perp} = \dot{T}_{\perp} \\ 1 - \dot{R}_{\perp} = \frac{Z_{c1} \cos \theta}{Z_{c2} \cos \varphi} \cdot \dot{T}_{\perp} \end{cases} \quad (5.20)$$

Вирішення системи (5.20) дає значення коефіцієнтів відбиття і заломлення для випадку нормальної поляризації:

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{Z_{c2} \cos \varphi - Z_{c1} \cos \theta}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \theta}, \quad (5.21)$$

$$\dot{T}_{\perp} = 1 + \dot{R}_{\perp} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \theta}. \quad (5.22)$$

Формули (5.21), (5.22) справедливі і в тому випадку, якщо одне з середовищ (або обидва середовища) володіють провідністю. При цьому комплексними будуть хвильові числа при визначенні кута заломлення  $\theta$  і характеристичні опори середовищ у формулах (5.21), (5.22).

На практиці часто доводиться обчислювати коефіцієнти відбиття і заломлення плоских хвиль для випадку, коли першим середовищем служить повітря ( $\mu_r = 1, \varepsilon_r = 1$ ), а другим середовищем – немагнітний ( $\mu_r = 1$ ) діелектрик без втрат з відносною діелектричною проникністю  $\varepsilon_r$ . При цьому формули (5.21), (5.22) з врахуванням закону Снелліуса (5.14) записуються у вигляді

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \varphi}}, \quad (5.23)$$

$$\dot{T}_{\perp} = \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \varphi}}. \quad (5.24)$$

## 5.2 Падіння паралельно поляризованої плоскої хвилі на плоску межу розділу двох середовищ

Хай плоска однорідна хвиля, що падає на плоску межу розділу, буде паралельно поляризованою. В цьому випадку вектори напруженості електричного поля  $\vec{E}$  падаючої, відбитої і заломленої хвиль лежать в площині падіння хвиль, а вектори напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  цих трьох хвиль перпендикулярні площині падіння. Геометрія цієї задачі збігається з геометрією задачі падіння плоскої нормально поляризованої хвилі (рис.5.1), якщо в останній замінити  $\vec{E}$  на

$\dot{H}$ , а  $\dot{H}$  замінити на мінус  $\dot{E}$ . Враховуючи зміну орієнтації векторів поля по аналогії з формулами (5.2)÷(5.7), можна записати поля падаючої, відбитої і заломленої хвиль. Напрями поширення цих хвиль залишаються тими ж і підпорядковані тим же законам Снелліуса (5.12) (5.14). Комплексні амплітуди векторів поля відбитої і заломленої хвиль визначаються з граничних умов (5.8), (5.9), запис яких в даній задачі відрізнятиметься від випадку нормальної поляризації. Дотичними до межі розділу складовими векторів  $\dot{E}$  трьох хвиль будуть тепер z-ві складові, а векторів  $\dot{H}$  – y-ві складові. Граничні умови (5.8), (5.9) набувають вигляду:

$$\dot{E}_{\text{пад}} \cos \varphi - \dot{E}_{\text{від}} \cos \varphi = \dot{E}_{\text{зал}} \cos \theta, \quad (5.25)$$

$$\frac{\dot{E}_{\text{пад}}}{Z_{c1}} + \frac{\dot{E}_{\text{від}}}{Z_{c1}} = \frac{\dot{E}_{\text{зал}}}{Z_{c2}}. \quad (5.26)$$

Аналогічно попередньому випадку вводяться коефіцієнти відбиття і заломлення:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{\text{від}}}{\dot{E}_{\text{пад}}}, \quad \dot{T}_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{\text{зал}}}{\dot{E}_{\text{пад}}}. \quad (5.27)$$

З (5.25), (5.26) впливає система рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $\dot{R}_{\parallel}$  і  $\dot{T}_{\parallel}$  :

$$\begin{cases} 1 - \dot{R}_{\parallel} = \dot{T}_{\parallel} \frac{\cos \theta}{\cos \varphi}, \\ 1 + \dot{R}_{\parallel} = \dot{T}_{\parallel} \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}. \end{cases} \quad (5.28)$$

Вирішення системи дає значення коефіцієнтів відбиття і заломлення для паралельно поляризованих хвиль:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{Z_{c1} \cos \varphi - Z_{c2} \cos \theta}{Z_{c1} \cos \varphi + Z_{c2} \cos \theta}, \quad (5.29)$$

$$\dot{T}_{\parallel} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c1} \cos \varphi + Z_{c2} \cos \theta}. \quad (5.30)$$

Якщо першим середовищем є повітря, а другим середовищем – немагнітний діелектрик без втрат з відносною діелектричною проникністю  $\varepsilon_r$ , то формули (5.29), (5.30) спрощуються до вигляду, більш зручного для розрахунків:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\varepsilon_r \cos \varphi - \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \varphi}}{\varepsilon_r \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \varphi}}, \quad (5.31)$$

$$\dot{T}_{\parallel} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \varphi}{\varepsilon_r \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \varphi}}. \quad (5.32)$$

Слід зазначити, що формули (5.29), (5.30) справедливі і в тому випадку, якщо одне з середовищ (або обидва середовища) мають провідність. При цьому діелектричні проникності середовищ будуть комплексними величинами, отже відповідно комплексними будуть і хвилеві числа в (5.14) і характеристичні опори середовищ у (5.29) (5.30).

### 5.3 Повне проходження хвилі в друге середовище

Розглянемо умови, при яких падаюча хвиля без відбиття повністю переходить в друге середовище, тобто

потужність падаючої хвилі повністю переходить в потужність заломленої хвилі. Умови, при яких відсутня відбита хвиля, можуть бути встановлені шляхом вирішення рівнянь  $\dot{R}_{\parallel} = 0$  і  $\dot{R}_{\perp} = 0$  відносно кута падіння  $\varphi$ . У окремому випадку, коли обидва середовища є немагнітними діелектриками без теплових втрат, для паралельно поляризованої хвилі з умови

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{Z_{c1} \cos \varphi - Z_{c2} \cos \theta}{Z_{c1} \cos \varphi + Z_{c2} \cos \theta} = 0$$

випливає

$$Z_{c1} \cos \varphi - Z_{c2} \cos \theta = 0.$$

Після вилучення з цього рівняння  $\cos \theta$ , з використанням закону Снелліуса (5.14), отримаємо

$$\sin^2 \varphi = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}. \quad (5.33)$$

Таким чином, плоска паралельно поляризована хвиля цілком проходить в друге середовище при куті падіння, що зветься кутом *Брюстера*

$$\varphi_B = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}. \quad (5.34)$$

У загальному випадку, коли  $\varepsilon_{r1} \neq \varepsilon_{r2}$ ,  $\mu_{r1} \neq \mu_{r2}$ , для паралельно поляризованої хвилі при  $\dot{R}_{\parallel} = 0$  впливає

$$\sin^2 \varphi = \frac{\frac{\mu_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}{\frac{\mu_{r2}}{\varepsilon_{r2}} - \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}, \quad (5.35)$$

а для випадку нормальної поляризації при  $\dot{R}_\perp = 0$  отримаємо

$$\sin^2 \varphi = \frac{\varepsilon_{r2} / \varepsilon_{r1} - \mu_{r2} / \mu_{r1}}{\mu_{r1} / \mu_{r2} - \mu_{r2} / \mu_{r1}}. \quad (5.36)$$

Як впливає з (5.36), для існування кута Брюстера при нормальній поляризації необхідно, аби  $\mu_{r1} \neq \mu_{r2}$ .

Плоскі хвилі кругової і еліптичної поляризацій можна представити у вигляді суперпозиції паралельно і нормально поляризованих хвиль. Оскільки умови існування кута Брюстера для паралельної і нормальної поляризації різні, то хвилі з круговою і еліптичною поляризацією будуть відбиватися при будь-яких кутах падіння. Проте при цьому зміниться поляризація відбитої і заломленої хвиль в порівнянні з поляризацією падаючої хвилі. Зокрема, якщо плоска хвиля з круговою поляризацією попаде під кутом Брюстера на межу двох немагнітних діелектриків, то відбита хвиля виявляється нормально поляризованою, а заломлена – еліптично поляризованою. Це явище зветься деполіризацією.

#### **5.4 Перпендикулярне падіння плоскої електромагнітної хвилі на плоску межу розділу середовищ**

При перпендикулярному (нормальному) падінні плоскої хвилі на межу розділу середовищ втрачає визначеність поняття площини падіння, і, отже, зникає різниця між нормально і паралельно поляризованими хвилями. Оскільки кути падіння і заломлення дорівнюють нулю, то вирази для коефіцієнтів відбиття і заломлення при нормальному падінні набувають вигляду

$$\dot{R} = \dot{R}_{\perp} = -\dot{R}_{\parallel} = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}, \quad (5.37)$$

$$\dot{T} = \dot{T}_{\perp} = -\dot{T}_{\parallel} = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}}. \quad (5.38)$$

Коефіцієнти відбиття і заломлення повністю визначаються характеристичними опорами середовищ, які межують одне з одним. Важливий окремий випадок – нормальне падіння хвилі з повітря на немагнітний діелектрик. Формули (5.37), (5.38) спрощуються і набувають вигляду

$$\dot{R} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_r}}{1 + \sqrt{\varepsilon_r}}, \quad \dot{T} = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon_r}}.$$

Слід звернути увагу на те, що при  $\varepsilon_r > 1$  коефіцієнт відбиття  $R < 0$ . Це означає, що на межі розділу комплексна амплітуда вектору відбитої хвилі зсунута за фазою на  $180^\circ$  відносно комплексної амплітуди вектору падаючої хвилі.

## 5.5 Проходження електромагнітної хвилі через шар речовини

У загальному випадку, при перпендикулярному падінні електромагнітної хвилі на шар речовини (рис.5.2) з боку першого середовища, амплітуди відбитої та заломленої хвиль визначатимуться не лише першою межею розділу, але також і товщиною шару  $d$  і другою межею розділу середовищ. На рис. 5.2 стрілками позначено напрями руху хвиль відповідного напрямку, а  $E_i$  – амплітуди напруженості електричного поля цих хвиль.

Практично важливим є дослідження явища повного проходження хвилі з середовища 1 в середовище 3. Цьому відповідає відсутність хвилі, відбитої від шару в перше середовище ( $E_{\text{від1}} = 0$ ).

Один із способів вирішення цієї задачі полягає в розгляді інтерференційних явищ при багатократному відбитті хвилі від меж розділу.

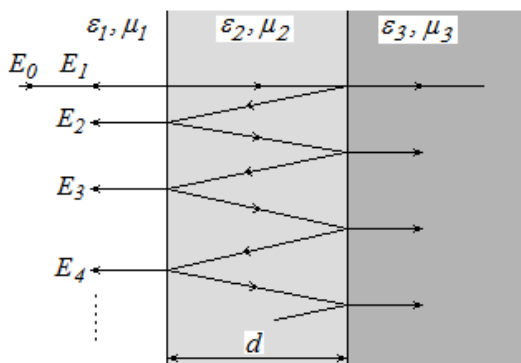


Рисунок 5.2 – Проходження хвилі через шар речовини

Використовуючи формули Френеля (5.37), (5.38) для перпендикулярного падіння, знаходимо, що амплітуда хвилі, однократно відбитої від першої межі, запишеться у вигляді  $E_1 = R_{12}E_0$ , де  $R_{12} = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}$  – коефіцієнт відбиття

від першої межі. Тут  $Z_{ci} = \sqrt{\frac{\mu_{ai}}{\epsilon_{ai}}}$ ,  $i = 1, 2, 3$  –

характеристичний опір  $i$ -того середовища. Амплітуда тієї хвилі, яка пройшла у середину шару  $E_{12} = T_{12}E_0$ , де

$T_{12} = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}}$  – коефіцієнт заломлення для першої межі.

Амплітуда тієї хвилі, яка вийшла з шару в перше середовище після однократного відбиття від другої межі

$$E_2 = T_{21}R_{23}T_{12}E_0e^{-2\dot{\gamma}_2d},$$

де 
$$R_{23} = \frac{Z_{c3} - Z_{c2}}{Z_{c3} + Z_{c2}}, T_{21} = \frac{2Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}},$$

$\dot{\gamma}_2 = \alpha_2 + j\beta_2$  – стала поширення в речовині середовища шару.

Після 2–кратного відбиття від другої межі вираз для амплітуди хвилі, яка вийшла з шару в перше середовище, має вигляд

$$E_3 = T_{21}R_{23}T_{12}R_{21}R_{23}E_0e^{-4\dot{\gamma}_2d}.$$

Амплітуда тієї хвилі, яка вийшла з шару в перше середовище після  $n$ –кратного відбиття від другої межі

$$E_n = E_0R_{23}T_{12}T_{21}e^{-2\dot{\gamma}_2d} \left( R_{23}R_{21}e^{-2\dot{\gamma}_2d} \right)^{n-1}.$$

Повна амплітуда хвилі, відбитої від плоского шару, дорівнює сумі всіх  $E_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$E_{\text{від1}} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k = E_0 \left\{ R_{12} + R_{23}T_{12}T_{21}e^{-2\dot{\gamma}_2d} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ R_{23}R_{21}e^{-2\dot{\gamma}_2d} \right]^{k-1} \right\}$$

Використання формули для нескінченно спадної геометричної прогресії дає співвідношення

$$E_{\text{від1}} = E_0 \cdot \frac{R_{12} + R_{23}e^{-2\dot{\gamma}_2d}}{1 + R_{12}R_{23}e^{-2\dot{\gamma}_2d}}. \quad (5.39)$$

З умови  $E_{\text{від1}} = 0$  маємо

$$R_{12} + R_{23}e^{-2\dot{\gamma}_2 d} = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}} + \frac{Z_{c3} - Z_{c2}}{Z_{c3} + Z_{c2}} e^{-2\dot{\gamma}_2 d} = 0. \quad (5.40)$$

За відсутності втрат ( $\alpha = 0$ ), для існування вирішення необхідно, аби

$$2\beta_2 d = \frac{4\pi d}{\lambda_2} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Звідси отримаємо

$$d = n \frac{\lambda_2}{4}. \quad (5.41)$$

З виразу (5.41) випливає, що при  $n$  – непарному ( $n = 2k + 1$ ), з (5.40) неважко отримати

$$Z_{c2} = \sqrt{Z_{c1} \cdot Z_{c3}}. \quad (5.42)$$

Якщо ж  $n$  – парне число ( $n = 2k$ ), то в цьому випадку з (5.40) випливає, що для існування вирішення необхідно, аби  $Z_{c1} = Z_{c3}$ . При цьому величина  $Z_{c2}$  може бути будь-якою.

Для немагнітних середовищ без втрат ( $\mu_{r1} = \mu_{r2} = \mu_{r3} = 1$ ) вираз (5.42) набуває вигляду

$$\varepsilon_{r2} = \sqrt{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r3}}. \quad (5.43)$$

Таким чином, електромагнітна хвиля без відбиття пройде через шар речовини, якщо:

1. Товщина шару  $d$  кратна чверті довжини хвилі в речовині шару і параметри середовищ зв'язані співвідношенням (5.42);

2. Товщина шару  $d$  кратна половині довжини хвилі в речовині шару і параметри середовищ зв'язані співвідношенням  $Z_{c1} = Z_{c3}$ , при цьому величина  $Z_{c2}$  може мати довільне значення.

## 5.6 Наближені граничні умови Леонтовича. Розрахунок потужності втрат в провідниках

Хай плоска хвиля падає під кутом  $\varphi$  на плоску межу розділу двох середовищ, причому друге середовище оптично набагато щільніше, ніж перше, тобто  $k_2 \gg k_1$  або  $n_2 \gg n_1$ . З другого закону Снелліуса  $\sin \theta = \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi$  витікає, що кут заломлення  $\theta$  близький до нуля, і в другому середовищі хвиля поширюється практично по нормалі до межі розділу при будь-якому куті падіння. Важливим є випадок, коли друге середовище має велику провідність або високу діелектричну проникність і оптично є набагато щільніше першого, тобто

$$|\dot{k}_2| \gg k_1. \quad (5.44)$$

Частинними випадками таких середовищ є метали з високою питомою провідністю, а також водне середовище на низьких частотах. У металів  $|\dot{k}_2| = \sqrt{\omega \mu a_2 \sigma_2}$ , оскільки питома провідність  $\sigma_2$  велика, то умова (5.44) практично завжди виконується. Можна показати, що у випадку (5.44) заломлена хвиля і в добре провідному середовищі поширюється практично вздовж нормалі до поверхні розділу при будь-якому куті падіння. Ця хвиля є поперечною, причому вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  в ній зсунуті за фазою на кут  $\pi/4$ .

Амплітуди векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  поля заломленої хвилі дуже швидко зменшуються при поширенні її від межі розділу (вглиб провідника) і на високих частотах хвиля фактично існує лише в тонкому шарі поблизу поверхні розділу. Це явище називається поверхневим ефектом або скін-ефектом (skin – шкіра). Явище поверхневого ефекту дозволяє використовувати на високих частотах металеві екрани для захисту різних пристроїв від впливу на них зовнішнього електромагнітного поля. Слід зазначити, що в разі сталих у часі і низькочастотних полів металевий екран не пропускає електричне поле, але пропускає магнітне, якщо екран виконано з парамагнітного або діамагнітного металу.

Хвилю в другому, добре провідному середовищі (металі) можна вважати плоскою однорідною, для якої повинно виконуватися співвідношення

$$\dot{\vec{E}}_2 = \dot{Z}_{c2}[\vec{n}, \dot{\vec{H}}_2], \quad (5.45)$$

де  $\vec{n}$  – одинична нормаль, зовнішня до другого (провідного) середовища.

Оскільки припускається, що хвиля в другому (провідному) середовищі поширюється перпендикулярно межі розділу, то вектори  $\dot{\vec{E}}_2$  і  $\dot{\vec{H}}_2$  будуть паралельні (дотичні, тангенціальні) до межі

$$\dot{\vec{E}}_2 = \dot{E}_{2\tau} \text{ и } \dot{\vec{H}}_2 = \dot{H}_{2\tau'}. \quad (5.46)$$

Різні індекси  $\tau$  і  $\tau'$  у векторів  $\dot{\vec{E}}_2$  і  $\dot{\vec{H}}_2$  підкреслюють, що дотичні складові векторів поля на площині розділу ортогональні між собою. Згідно точним граничним умовам, дотичні складові векторів  $\dot{\vec{E}}$  та  $\dot{\vec{H}}$  неперервні на межі розділу

$$\dot{\vec{E}}_{1\tau} = \dot{\vec{E}}_{2\tau} \text{ та } \dot{\vec{H}}_{1\tau'} = \dot{\vec{H}}_{2\tau'}, \quad (5.47)$$

і тоді з врахуванням рівностей (5.46), (5.47) співвідношення (5.45) набуває вигляду

$$\dot{\vec{E}}_{1\tau} = \dot{Z}_{c2}[\vec{n}, \dot{\vec{H}}_{1\tau'}]. \quad (5.48)$$

Якщо ввести на поверхні провідника декартову систему координат, то (5.48) можна переписати в скалярному вигляді

$$\dot{E}_x = \dot{Z}_{c2}\dot{H}_y, \quad \dot{E}_y = -\dot{Z}_{c2}\dot{H}_x. \quad (5.49)$$

Співвідношення (5.48), (5.49) зветься *наближеними граничними умовами Леонтовича*. З (5.48) витікає, що на поверхні реального провідника тангенціальна складова електричного поля відмінна від нуля. В граничному випадку  $\sigma_2 \rightarrow \infty$  гранична умова Леонтовича збігається з точною граничною умовою  $E_{1\tau} = 0$  на поверхні ідеального провідника. Оскільки характеристичний опір в разі високої провідності середовища (металу) має дуже мале значення (на рівні одиниць мОм), то і тангенціальна складова вектору  $\vec{E}$  на поверхні такого середовища буде мати мале значення. В інженерних розрахунках амплітуд полів поблизу провідних поверхонь її зазвичай не враховують, тобто вважають, що структура поля над реальним провідником така ж, як і над ідеальним провідником.

Але врахування тангенціальної складової (5.48) електричного поля на поверхні реального провідника необхідне при розрахунку втрат в провідниках. Ця тангенціальна складова  $\vec{E}_{1\tau}$  визначає нормальну до поверхні,

тобто направлену у глиб провідника компоненту вектора Пойнтінга – це та течія енергії, яка рухається вглиб металу. Тут ця енергія перетворюється на теплову енергію, яка розсіюється в довколишньому просторі, тобто безповоротно втрачається.

Умова (5.48) була отримана для плоскої межі розділу. При довільній формі поверхні розділу цією умовою можна користуватися в тих випадках, коли радіус кривизни поверхні значно перевищує глибину проникнення поля в провідне середовище, яке, у свою чергу, має бути малим в порівнянні з довжиною хвилі.

Граничні умови Леонтовича дозволяють не розглядати електромагнітне поле в добре провідному середовищі (металі) і враховувати вплив цього середовища на електромагнітні поля поза ним (металом) лише через граничні умови на поверхні. У опорі  $\dot{Z}_{c2}$  закладена інформація про параметри провідника і поведінку електромагнітного поля у середині нього.

Втрати енергії в провіднику можна обчислити таким чином. Хай металевий провідник, розміри і мінімальний радіус кривизни поверхні  $S$  якого великі в порівнянні з глибиною проникнення, знаходиться в монохроматичному електромагнітному полі. Під впливом цього поля в металі наводяться струми провідності, на підтримку яких витрачається електромагнітна енергія. Відповідна цьому процесу середня за період потужність теплових втрат, яка визначається як течія середнього значення вектору Пойнтінга через поверхню  $S$  провідника, дорівнює

$$P_{\text{сер}} = \operatorname{Re} \int_S \dot{\vec{\Pi}} d\vec{S}. \quad (5.50)$$

Для обчислення потужності (5.50) немає необхідності визначати поле усередині провідника, досить обчислити

складову комплексного вектора Пойнтінга, що направлена всередину провідника перпендикулярно (нормально) до його поверхні. Нормальна складова вектора Пойнтінга визначається тангенціальними складовими векторів поля на поверхні провідника

$$\dot{\Pi}_n = \frac{1}{2} \left[ \dot{\vec{E}}_{1\tau}, \dot{\vec{H}}_{1\tau'} \right]. \quad (5.51)$$

Звідси після використання граничної умови Леонтовича (5.48) буде

$$\dot{\Pi}_n = \frac{1}{2} \dot{Z}_{c2} \left[ \vec{n}, \dot{\vec{H}}_{1\tau'} \right] \cdot \dot{\vec{H}}_{1\tau'} = -\vec{n} \frac{1}{2} \dot{Z}_{c2} \left| \dot{\vec{H}}_{1\tau'} \right|^2. \quad (5.52)$$

Підстановка (5.52) в (5.50), з урахуванням того, що потік енергії направлений всередину провідника, а  $\vec{n}$  – одинична нормаль, зовнішня до поверхні провідника, дає

$$P_{cep} = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \dot{Z}_{c2} \int_S \left| \dot{\vec{H}}_{1\tau'} \right|^2 dS. \quad (5.53)$$

Характеристичний опір реального провідника визначено раніше

$$\dot{Z}_{c2} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a 2}{\sigma_2}} (1 + j) = \frac{1}{\sigma_2 \Delta} (1 + j),$$

де  $\Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_a 2 \sigma_2}}$  – глибина проникнення поля в провідник.

Таким чином, для середньої за період потужності теплових втрат в провіднику отримаємо

$$P_{cep} = \frac{1}{2 \sigma_2 \Delta} \cdot \int_S \left| \dot{\vec{H}}_{1\tau'} \right|^2 dS. \quad (5.54)$$

Як вже раніше наголошувалося, структура поля біля поверхні реального провідника близька до структури поля біля такої ж поверхні ідеального провідника. Тому при обчисленні потужності втрат амплітуда тангенціальної складової магнітного поля береться рівною амплітуді тангенціальної складової магнітного поля на поверхні ідеального провідника, яка в разі нормального падіння має вигляд

$$H_{1\tau} = 2H_{\text{пад}} = \frac{2E_{\text{пад}}}{Z_{c1}}. \quad (5.55)$$

Це припущення істотно спрощує розрахунки, забезпечуючи достатню для практики точність результатів.

Слід зазначити, що розглянуті вище явища, які мають місце при падінні плоскої однорідної хвилі на межу розділу двох середовищ, мають широку сферу застосування. По-перше, розглянуті закони відбиття та заломлення використовуються і у випадках, коли і електромагнітні хвилі і поверхні розділу не є плоскими. Наближено правильні результати будуть отримані, якщо радіуси кривизни поверхні розділу і поверхні фронту хвилі значно більше глибини проникнення. По-друге, закони можуть бути застосовані і для розрахунку проходження хвиль через пластинки і більш складні шаруваті середовища. По-третє, ці ж закони застосовні і до ліній передачі.

## 5.7 Повне внутрішнє відбиття

Явище повного внутрішнього відбиття може виникати, якщо електромагнітна хвиля падає з середовища з більшим значенням оптичної густини на середовище з меншим значенням оптичної густини, тобто коли  $n_2 > n_1$ . Цей процес

пояснено на рис. 5.3. Другий закон Снелліуса в формі (5.15) при падінні хвилі на межу розділу із середовища з більшим показником заломлення  $n_2$  можна записати у вигляді

$$\sin \theta = \frac{n_2}{n_1} \sin \varphi. \quad (5.56)$$

Оскільки відношення  $\frac{n_2}{n_1} > 1$ , то з (5.56) витікає, що при деякому значенні кута падіння  $\varphi$  може бути значення  $\sin \theta = 1$ , а звідси  $\theta = 90^\circ$ .

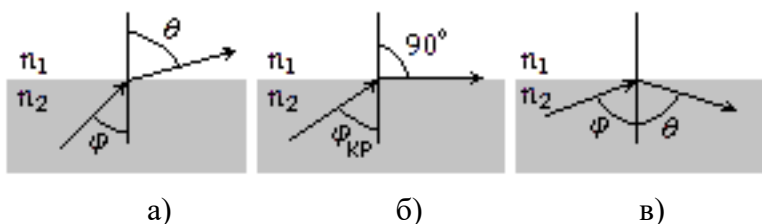


Рисунок 5.3 – Повне внутрішнє відбиття

Той кут падіння  $\varphi$ , який відповідає цьому значенню  $\theta = \pi/2$  звуть *граничним кутом повного внутрішнього відбиття*  $\varphi_{кр}$  (рис.5.3 б). Якщо значення кута падіння  $\varphi > \varphi_{кр}$ , то це означає, що хвиля в середовище з  $n_1$  взагалі не заломлюється, а буде лише відбита хвиля, яка існує в середовищі з  $n_2$  (рис. 5.3 в).

Таким чином, граничний кут повного внутрішнього відбиття  $\varphi_{кр}$  можна знайти з (5.56) при  $\theta = \pi/2$

$$\sin \varphi_{кр} = \frac{n_1}{n_2}, \text{ звідки } \varphi_{кр} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right). \quad (5.57)$$

Для обчислення значення граничного кута повного внутрішнього відбиття  $\varphi_{кр}$  треба знати значення показників заломлення середовищ по обидві сторони від межі розділу. Для прикладу розглянемо межу розділу «вода – повітря». Тоді в інфрачервоному діапазоні маємо для води  $n_2 = 1.33$ , а для повітря  $n_1 = 1$ . За (5.57) обчислимо кут повного внутрішнього відбиття  $\varphi_{кр}$

$$\varphi_{кр} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \arcsin(0.75) = 49^\circ.$$

Аналогічно для скла, в залежності від його хімічного складу, в цьому ж діапазоні будемо мати  $\varphi_{кр} = 30^\circ - 42^\circ$ .

Ефект повного внутрішнього відбиття знаходить широке коло застосувань в різних галузях науки і техніки. Зокрема, цей ефект безпосередньо використовується в оптичному волокні. Оптичне волокно має діаметр порядку декількох мікронів, виробляється з надзвичайно якісного скла і є напрямною системою для оптичного проміню інфрачервоного діапазону. Така напрямна система має дуже мале значення сталої загасання та є дуже широкосмуговою. Ці властивості забезпечують такі об'єми і швидкість передачі даних, які немає можливості отримати при використанні класичних напрямних систем електрозв'язку (вита пара, коаксіальна лінія). Декілька оптичних волокон об'єднують загальним конструктивом, вводять захисні оболонки а інколи і бронепокриви і таким чином отримують оптичний кабель. Сучасним станом оптичний кабель є найбільш перспективним для будівництва нових ліній зв'язку.

## Контрольні запитання

1. Що таке межа розділу середовищ? Що таке площина падіння хвилі? Чим відрізняються одна від одної нормально та паралельно поляризовані хвилі? Як визначається показник заломлення середовища? Як записати закони Снеліуса для межі розділу?
2. На якій підставі можна стверджувати, що структури падаючої, відбитої та заломленої хвиль є однаковими?
3. Яка різниця в застосуванні граничних умов на межі розділу для нормально та паралельно поляризованих хвиль?
4. Як вводяться коефіцієнти відбиття та заломлення для обох різновидів хвиль?
5. Як встановлюються умови при яких може спостерігатися повне проходження хвилі через межу розділу?
6. Що таке ефект Брюстера та кут Брюстера?
7. В чому особливість прояви ефекту Брюстера для хвиль обох поляризацій?
8. Чому величини  $R$  та  $T$  для хвиль обох поляризацій однакові при умові нормального падіння хвиль?
9. Чому при знаходженні коефіцієнту відбиття від шаруватого середовища треба розглядати інтерференційні явища?
10. Чому при знаходженні коефіцієнту відбиття від шаруватого середовища можна застосовувати формулу для спадної геометричної прогресії?
11. При яких умовах може спостерігатися повне проходження хвилі через шарувате середовище?
12. В чому сутність наближених граничних умов Леонтовича? Чому вони «наближені»?
13. Як розраховуються втрати в провідниках?
14. При яких умовах проявляється ефект повного внутрішнього відбиття?
15. Які існують напрями практичного застосування ефекту повного внутрішнього відбиття?

## Приклади вирішення задач

**Задача 5.1.** Межа розділу повітря–ідеальний діелектрик з  $\epsilon_r=3.2$ ,  $\mu_r=1$ . Плоска хвиля падає з повітря під кутом  $\varphi = \pi/6$ . Знайти кути відбиття  $\varphi_1$  та заломлення  $\theta$  (рис.5.1).

### Вирішення

1. За виразом (5.12) знайдемо кут відбиття

$$\varphi_1 = \varphi = \pi/6.$$

2. За виразом (5.14) знайдемо кут заломлення

$$\theta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \varphi\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3.2}}\right) = 16.2^\circ.$$

Тут  $n_i = \sqrt{\epsilon_{ri}}$  показник заломлення  $i$ -го середовища.

**Задача 5.2.** Межа розділу повітря–ідеальний діелектрик з  $\epsilon_r=3.2$ ,  $\mu_r=1$ . Плоска нормально поляризована хвиля, у якої амплітуда вектору  $E_{пад}=1$  В/м падає з повітря під кутом  $\varphi=\pi/6$ . Знайти амплітуди векторів напруженості електричного та магнітного полів відбитої та заломленої хвиль.

### Вирішення

1. Оскільки умова задачі за параметрами межі розділу та падаючої хвилі співпадає з умовами задачі 5.1 то кут заломлення  $\theta = 16.2^\circ$ . При таких умовах зручно від виразів (5.23) та (5.24) перейти до більш простих, де фігурують лише кути  $\varphi$  та  $\theta$ .

$$R_{\perp} = \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\theta + \varphi)}, \quad T_{\perp} = \frac{2 \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)}{\sin(\theta + \varphi)}.$$

2. З цих виразів знайдемо значення  $R_{\perp}$ ,  $T_{\perp}$ .

$$R_{\perp} = \frac{\sin(16.2^{\circ} - 30^{\circ})}{\sin(16.2^{\circ} + 30^{\circ})} = -0.33, \quad T_{\perp} = \frac{2 \sin(16.2^{\circ}) \cdot \cos(30^{\circ})}{\sin(16.2^{\circ} + 30^{\circ})} = 0.67$$

3. За виразом (5.18) знайдемо амплітуду вектору  $E_{\text{від}}$ .

$$E_{\text{від}} = |R_{\perp}| \cdot E_{\text{над}} = 0.33 \cdot 1 = 0.33 \text{ В/м}.$$

4. За виразом (5.19) знайдемо амплітуду вектору  $E_{\text{зал}}$ .

$$E_{\text{зал}} = |E_{\perp}| \cdot E_{\text{над}} = 0.67 \cdot 1 = 0.67 \text{ В/м}.$$

5. За виразом (4.26) при  $\mu_r=1$  знайдемо величину  $Z_{c2}$ , а  $Z_{c1} = 120\pi$ .

$$Z_{c2} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{120 \cdot 3.14}{\sqrt{3.2}} = 211 \text{ Ом}.$$

6. За виразом (4.26) при  $\mu_r=1$  знайдемо амплітуди векторів магнітного поля  $H_{\text{від}}$  та  $H_{\text{зал}}$ .

$$H_{\text{від}} = \frac{E_{\text{від}}}{Z_{c1}} = \frac{0.33}{120 \cdot 3.14} = 8.8 \cdot 10^{-4} \text{ А/м},$$

$$H_{\text{зал}} = \frac{E_{\text{зал}}}{Z_{c2}} = \frac{0.67}{211} = 3.2 \cdot 10^{-3} \text{ А/м}$$

### Задачі для самостійного вирішення

**Задача 5.3.** Межа розділу повітря–ідеальний діелектрик з  $\epsilon_r=3.2$ ,  $\mu_r=1$ . Плоска хвиля, у якої амплітуда вектору  $E_{\text{над}}=20$  В/м падає в напрямку нормалі до межі розділу. Знайти амплітуди векторів електричного і магнітного полів та середні значення векторів Пойнтінга у відбитої та заломленої хвилі.

**Вказівка.** При падінні хвилі в напрямі нормалі вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  падаючої хвилі при обох типах поляризації будуть мати лише дотичні до межі розділу складові поля.

**Задача 5.4.** Межа розділу повітря–ідеальний діелектрик з  $\epsilon_r=3.2$ ,  $\mu_r = 1$ . Знайти значення кута Брюстера для паралельно поляризованої падаючої хвилі.

**Задача 5.5.** Плоска хвиля з амплітудою вектору  $E=300$  В/м падає у напрямі нормалі на мідну площину. Частота  $f=10$  ГГц. Знайти середні значення векторів Пойнтінга падаючої та заломленої хвиль, порівняти їх за порядком отриманих величин, зробити висновки.

## 6 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ В МЕТАСЕРЕДОВИЩАХ

### 6.1 Лівобічні середовища

Поширення електромагнітних хвиль в матеріальному середовищі, як показано вище, описується системою рівнянь Максвелла і однозначно визначається електрофізичними параметрами середовища – відносними діелектричною  $\epsilon_r$  і магнітною  $\mu_r$  проникністями, які входять в дисперсійне рівняння, яке визначає зв'язок між частотою  $\omega$  монохроматичної хвилі і її хвилевим вектором  $\vec{k}$ . В тому випадку, якщо середовище ізотропне, цей зв'язок має вигляд

$$k^2 = \frac{\omega^2}{C_0^2} n^2. \quad (6.1)$$

Тут  $n$  – коефіцієнт заломлення середовища, який в загальному випадку описується співвідношенням

$$n = \pm \sqrt{\epsilon_r \mu_r}. \quad (6.2)$$

Для виразу ( $\epsilon_r \mu_r$ ) під знаком радикала можливі чотири комбінації пар знаків (+,+), (-,+), (+,-) і (-,-), що показано на рис. 6.1 у вигляді діаграми в координатах  $\epsilon_r - \mu_r$ , де відображено властивості електромагнітних хвиль в середовищах з різними значеннями  $\epsilon_r$  і  $\mu_r$ .

Властивості електромагнітних хвиль для перших трьох комбінацій знаків добре відомі в природі і досить повно вивчені. Цим комбінаціям відповідають I, II і IV квадранти на рис.6.1. Квадранту I відповідають більшість ізотропних діелектриків, в яких  $\epsilon_r$  і  $\mu_r$  додатні.

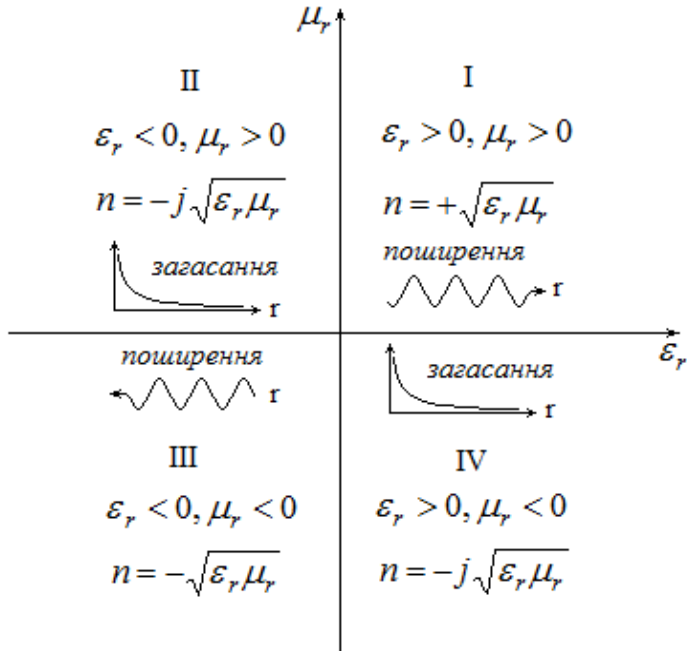


Рисунок 6.1 – До розгляду поведінки електромагнітних хвиль в різних середовищах

Квадранту II ( $\epsilon_r < 0, \mu_r > 0$ ) відповідає плазма, як газоподібна, так і плазма твердих тіл, а також більшість металів. У плазмі за відсутності магнітного поля величина  $\epsilon_r$  описується виразом

$$\epsilon_r = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (6.3)$$

де  $\omega_0^2 = \frac{4\pi \cdot N \cdot e^2}{m}$  – електронна плазмова частота,

$N$  – концентрація носіїв заряду,  $e$  – величина заряду,  $m$  – маса носія заряду, а підсумовування відбувається по всіх типах носіїв.

Неважко бачити, що при малих частотах ( $\omega < \omega_0$ ) величина  $\varepsilon_r < 0$ . При цьому ( $\varepsilon_r < 0, \mu_r > 0$ ) величина  $n$  відповідно до (6.2) виявляється чисто уявною і від’ємною, що і приводить до відбиття хвиль від такого середовища. Цей факт добре підтверджується експериментом, наприклад, в іоносфері.

У гіротропних середовищах, якими є магнетики різного походження, величина  $\mu_r$  має тензорний характер

$$\vec{\mu}_r = \begin{pmatrix} \mu_1 & j\mu_2 & 0 \\ -j\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Якщо в такому середовищі поширюється плоска поперечна хвиля з круговою поляризацією, то значення  $n$  дорівнює

$$n = \pm \sqrt{\varepsilon_r (\mu_1 \pm \mu_2)}. \quad (6.5)$$

Знак  $\pm$  під коренем відповідає двом напрямкам обертання площини поляризації хвилі. Тут, в принципі, можлива така ситуація, коли  $|\mu_2| > |\mu_1| = -\mu_1$ , і це відповідатиме випадку  $\varepsilon_r > 0, \mu_r < 0$ , що відповідає IV квадранту на рис.6.1.

Остання (четверта) комбінація знаків  $(-, -)$ , коли в добутку  $\varepsilon_r \mu_r$  в (6.2) є одночасно від’ємними і  $\varepsilon_r$  і  $\mu_r$ , відповідає новому класу так званих «лівобічних» матеріалів, які потрапляють в III квадрант на рис.6.1. Такі матеріали не існують (або поки що не виявлені) в природі, сучасним станом вони є штучними. У зарубіжній літературі ці матеріали отримали назву середовищ з від’ємною рефракцією (NR-

середовища, «Negative Refraction», LH-середовища «Left-Handed», метасередовища, метаматеріали). Інтерес до них обумовлено їх унікальними властивостями, які відсутні в звичайних природних речовин.

## 6.2 Поширення хвиль в лівобічних середовищах

Для того, щоб виявити закономірності, пов'язані із знаками величин  $\varepsilon_r$  і  $\mu_r$ , слід використовувати співвідношення, в яких  $\varepsilon_r$  і  $\mu_r$  виступають окремо, а не у вигляді добутку, як це має місце в (6.2). Такими співвідношеннями є, перш за все, рівняння Максвелла і матеріальні рівняння

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \right\}, \quad (6.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{B} &= \mu_a \vec{H} \\ \vec{D} &= \varepsilon_a \vec{E} \end{aligned} \right\}. \quad (6.7)$$

В разі плоскої монохроматичної хвилі, коли просторово-часова залежність векторів електромагнітного поля описується уявною експонентою  $e^{j(kz - \omega t)}$ , диференціальні рівняння (6.6) з урахуванням (6.7) перетворюються у алгебраїчні вирази

$$[\vec{k}, \vec{E}] = \omega \mu_a \vec{H}, \quad [\vec{k}, \vec{H}] = -\omega \varepsilon_a \vec{E}. \quad (6.8)$$

З цих виразів видно, що при  $\varepsilon_a > 0$  та  $\mu_a > 0$  вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і  $\vec{k}$  утворюють праву трійку векторів, а якщо  $\varepsilon_a < 0$  і  $\mu_a < 0$  – ліву. Це означає, що поворот від першого вектора до другого, якщо дивитися з кінця третього вектора, здійснюється проти годинникової стрілки для правого середовища і за годинниковою стрілкою – для лівого середовища. Якщо ввести для векторів  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і  $\vec{k}$  напрямні косинуси і позначити їх  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i=1,2,3 \dots$  відповідно, то хвиля, що поширюється в даному середовищі, характеризуватиметься матрицею

$$G = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \quad (6.9)$$

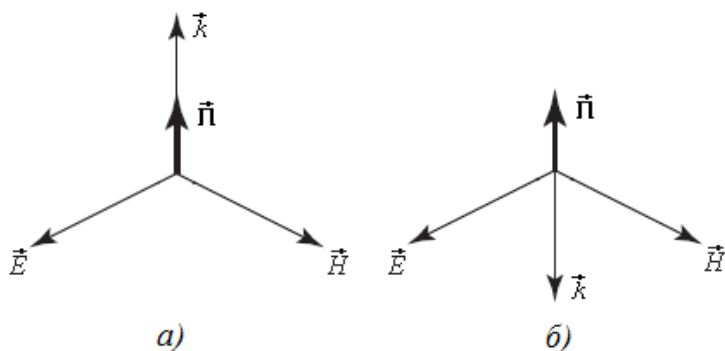
Визначник цієї матриці дорівнює  $+1$ , якщо трійка векторів  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і  $\vec{k}$  права, і дорівнює  $-1$ , якщо ця трійка ліва. Позначивши цього визначника через  $p$ , можна сказати, що  $p$  характеризує “правизну” даного середовища. Середовище є “правим”, якщо  $p = +1$  і “лівим”, якщо  $p = -1$ . Елементи матриці (6.9) задовільняють співвідношенню

$$G_{ik} = pA_{ik}. \quad (6.10)$$

Тут  $A_{ik}$  – алгебраїчні доповнення для елемента  $G_{ik}$ . Крім того, елементи матриці  $G$  ортонормовані. Течія енергії, яку переносить хвиля, визначається вектором Пойнтінга  $\vec{\Pi}$ , який дорівнює

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (6.11)$$

Відповідно до (6.11) вектор  $\vec{\Pi}$  завжди утворює з векторами  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  праву трійку. Звідси витікає, що для правих речовин вектори  $\vec{\Pi}$  і  $\vec{k}$  спрямовані в один бік, а для лівих – в різні (рис. 6.2).



а) праве середовище, б) ліве середовище

Рисунок 6.2 – Вектори  $\vec{\Pi}$  і  $\vec{k}$  в різних середовищах

Оскільки вектор  $\vec{k}$  збігається за напрямом з вектором фазової швидкості, то ліві речовини є речовинами з так званою від’ємною груповою швидкістю, звідси термін “речовина з від’ємною груповою швидкістю”, або скорочено “ліва речовина”. Ці терміни еквівалентні за змістом і сутністю.

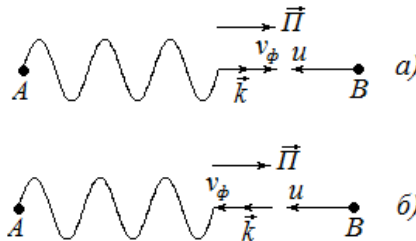
У квантовій теорії електромагнітного поля хвильовий вектор  $\vec{k}$  електромагнітної хвилі зв’язано з величиною імпульсу фотона співвідношенням  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ . За цією причиною напрямок поширення енергії фотону і його імпульс в лівому середовищі спрямовані в протилежні сторони. Звідси витікає можливість явища «світлового тяжіння» в лівому середовищі

замість добре відомого світлового тиску, що має місце в звичайних (правих) середовищах.

З того факту, що в лівих речовинах вектор фазової швидкості протилежний за напрямом до вектору течії енергії, витікають і інші цікаві явища.

### 6.3 Обернення ефекту Доплера

Перш за все, в лівих речовинах спостерігатиметься обернений ефект Доплера (рис. 6.3). Хай джерело (точка А) і приймач (точка В) знаходяться в лівому середовищі (рис. 6.3 б). Джерело випромінює сигнал з частотою  $\omega_0$ . Приймач рухається до джерела із швидкістю  $u$ .



а) праве середовище, б) ліве середовище

Рисунок 6.3 – Ефект Доплера в різних середовищах

Оскільки фазова швидкість  $v_\phi$  збігається за напрямом із швидкістю приймача  $u$  (приймач наздоганяє фронт хвилі), за час  $\Delta t$  фронт хвилі по відношенню до приймача пройде відстань

$$\Delta s = (v_\phi - u)\Delta t = v_\phi \left( 1 - \frac{u}{v_\phi} \right) \Delta t,$$

що еквівалентно зміні фази хвилі на кут

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= k \cdot \Delta s = \frac{\omega_0}{v_{\Phi}} \cdot \Delta s = \omega_0 \left(1 - \frac{u}{v_{\Phi}}\right) \Delta t = \\ &= \omega_0 \Delta t - \omega_0 \frac{u}{v_{\Phi}} \Delta t = (\omega_0 - \Delta\omega) \Delta t\end{aligned}$$

Величина  $\Delta\omega = \frac{u}{v_{\Phi}} \omega_0$  визначає зміну частоти сигналу, який приймається приймачем В. Таким чином, в даному випадку приймач реєструватиме сигнал з частотою

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{u}{v_{\Phi}}\right). \quad (6.12)$$

Якщо тепер джерело А і приймач В помістити в праве середовище при збереженні останніх умов (рис.6.3 а), то по аналогії з попереднім і, враховуючи протилежні напрями швидкостей приймача і фронту хвилі, неважко отримати, що приймач реєструватиме сигнал з частотою

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{u}{v_{\Phi}}\right). \quad (6.13)$$

Порівняння виразів (6.12) і (6.13) показує, що частота, яка сприймається приймачем в випадку лівого середовища, буде менше  $\omega_0$ , а не більше, як це було б в звичайному (правому) середовищі – (6.13). Скориставшись величиною  $p$  для даного середовища, формулу доплерівського зміщення частоти можна записати у вигляді

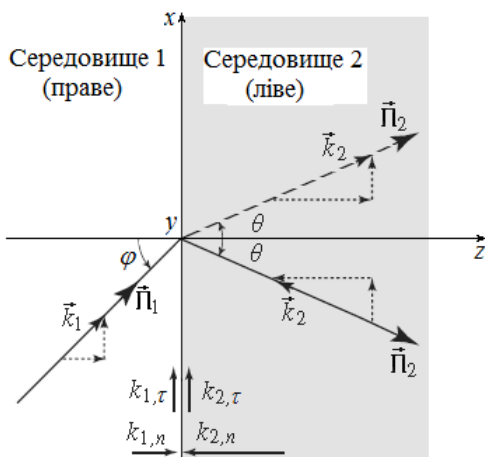
$$\omega = \omega_0 \left(1 + p \frac{u}{v_{\Phi}}\right). \quad (6.14)$$

Якщо приймач рухатиметься в протилежну сторону (від джерела), то у формулах (6.12), (6.13) і (6.14) слід змінити знаки.

Так само як і ефект Доплера, в лівому середовищі буде оберненим і ефект Вавилова—Черенкова. При цьому конус випромінювання буде спрямовано назад по відношенню до напрямку руху частинки.

#### 6.4 Заломлення хвилі на межі середовищ з різною правизною

Хай з правого середовища (середовище 1) на межу розділу з лівим середовищем (середовище 2) під кутом  $\varphi$  до вісі  $z$  (рис.6.4) падає електромагнітна хвиля.



Пунктир – хід променя хвилі для правого середовища;  
суцільна – хід променя заломленої хвилі для лівого середовища

Рисунок 6.4 – Заломлення хвилі на межі розділу правого і лівого середовищ

Під час переходу електромагнітної хвилі з одного середовища в інше граничні умови

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad H_{\tau 1} = H_{\tau 2}, \quad (6.15)$$

$$\varepsilon_{a1} E_{n1} = \varepsilon_{a2} E_{n2} \quad \mu_{a1} H_{n1} = \mu_{a2} H_{n2} \quad (6.16)$$

повинні виконуватися незалежно від того, чи мають ці середовища однакову правизну чи різну. З (6.15) витікає, що  $x$ -ві та  $y$ -ві складові векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  в заломленій хвилі зберігають свій напрям незалежно від правизни обох середовищ. В той же час  $z$ -складові зберігають свій напрям лише тоді, коли правизна обох середовищ однакова. Якщо ж правизна різна, то  $z$ -складові міняють знак. Це відповідає тому, що при переході в середовище з іншою правизною вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  не тільки змінюються за величиною з-за відмінності  $\varepsilon_r$  та  $\mu_r$ , але ще і зазнають дзеркального відбиття відносно межі розділу двох середовищ.

Те ж саме відбувається і з вектором  $\vec{k}$ . Одночасне дзеркальне відбиття всієї трійки векторів  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  та  $\vec{k}$  якраз і відповідає зміні знаку визначника  $G$  в (6.9). Хід заломленої хвилі, що виходить в результаті такого відбиття трійки векторів, якраз і зображено на рис. 6.4 в середовищі 2 суцільною лінією нижче вісі  $z$ . Вище вісі  $z$  пунктирною лінією показано хід променя заломленої хвилі для випадку, коли середовище 2 є правим.

Як видно, заломлена хвиля в другому, лівому середовищі поширюватиметься симетрично відносно вісі  $z$  в порівнянні з випадком, коли друге середовище – праве. Аналіз показує, що промінь відбитої хвилі завжди направлений однаково, незалежно від правизни обох середовищ. При цьому класична формула Снелліуса

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2} \mu_{r2}}{\varepsilon_{r1} \mu_{r1}}} \quad (6.17)$$

в разі, якщо середовища 1 і 2 мають різну правизну, має бути записана у вигляді

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}}{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}}. \quad (6.18)$$

Тут  $p_1$  і  $p_2$  – правизна першого і другого середовищ, відповідно. З виразу (6.18) видно, що відношення коефіцієнтів заломлення двох середовищ може бути і від'ємним, якщо правизна цих середовищ різна. Зокрема, від'ємним коефіцієнт заломлення лівого середовища буде відносно вакууму.

При знаходженні амплітуд заломленої та відбитої хвиль зазвичай користуються формулами Френеля, які залишаються справедливими незалежно від того, яку правизну мають середовища. Але, щоб не зробити помилки, у формулах Френеля слід завжди користуватися абсолютними значеннями тих величин  $\varepsilon_r$ ,  $\mu_r$ ,  $n$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ , які в них входять.

## 6.5 Особливості фокусування плоскою лінзою, яку виконано з лівої речовини

Використання лівих речовин дозволяє створювати вельми незвичайні заломлювальні системи, наприклад, лінзи. Прикладом такої системи є пластина з лівої речовини товщиною  $d$  і показником заломлення  $n = -1$ , що знаходиться у вакуумі. На рис. 6.5 показано, що така пластина може фокусувати випромінювання точкового джерела (точка А), що знаходиться на відстані  $l < d$  від пластини.

Із закону Снелліуса виходить, що при  $n_2 = -n_1 = -1$  кут заломлення  $\theta$  дорівнює куту падіння  $\varphi$ , а коефіцієнт

відбиття за формулами Френеля дорівнюватиме нулю, тобто відбита хвиля буде відсутня. При цьому, як видно з рис. 6.5, заломлені промені зберуться в одній точці  $f_1$  (перший фокус) і потім, зазнавши заломлення на другій межі пластини, знову зберуться в точці  $f_2$  (другий фокус).

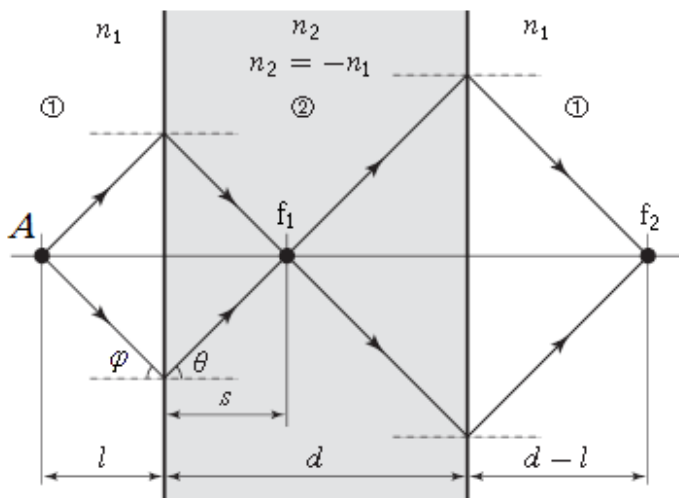


Рисунок 6.5 – Плоска лінза з лівої речовини

Таке фокусування матиме місце лише за умови  $d > l$ . Аналогічна картина спостерігатиметься і у разі, коли  $n_2 = -n_1 \neq -1$ .

У більш загальному випадку  $|n_2| \neq n_1$  кути заломлення для різних променів, що виходять з джерела, відповідно до закону Снелліуса будуть різні і, отже, різними будуть і фокусні відстані (величина  $s$  на рис. 6.5). В результаті, точкове джерело у фокусі лінзи розпливатиметься, тобто матиме місце так звана сферична аберация (рис.6.6 б). На рис. 6.6 а) показано випадок доброго (якісного) фокусування.

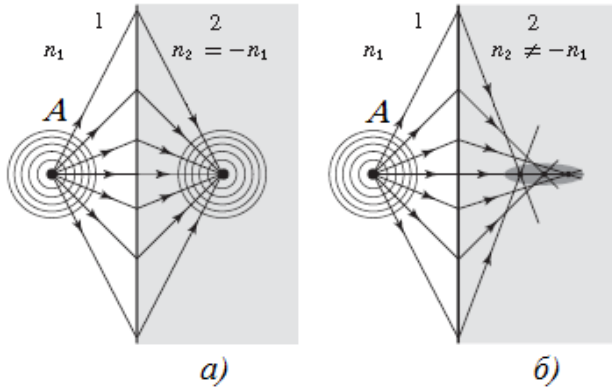
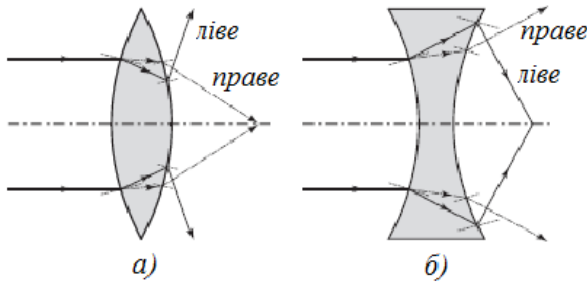


Рисунок 6.6 – Сферична аберція в плоскій лінзі

Хід променів через звичайні лінзи, виконані з відповідної речовини (правого, або лівого) показано на рис. 6.7.



а) збиральна, б) розсіювальна

Рисунок 6.7 – Хід променів у звичайних лінзах

Як видно, якщо лінзи виконані з лівої речовини, то збиральна і розсіювальна лінзи «міняються місцями», тобто опукла лінза стає розсіювальною (рис. 6.7 а), а увігнута – збиральною (рис. 6.7 б).

Необхідно відзначити, що плоска лінза на рис. 6.5 не є лінзою в звичайному сенсі слова, оскільки вона не фокусуватиме в точку пучок паралельних променів.

## 6.6 Подолання дифракційної межі

Ще одне унікальне явище можна спостерігати в середовищах з лівої речовини – подолання дифракційної межі. З теорії дифракції електромагнітних хвиль відомо, що коли два джерела випромінювання однакової частоти знаходяться один від одного на відстані, яка менша довжини хвилі, то вони не можуть бути зафіксовані як роздільні джерела. Іншими словами, приймач сприйме їх як одне (і єдине) джерело.

Проте дифракційна межа може бути подолана за допомогою плоскої лінзи з лівої речовини з параметрами  $\varepsilon_r = \mu_r = -1$ .

Хай шар лівої речовини товщиною  $d$  з параметрами  $\varepsilon_{r2}, \mu_{r2} < 0$  розташовано у вільному просторі (рис. 6.8). Електричне поле об'єкту, який розташовано в правій речовині (у вільному просторі) і випромінюючого на частоті  $\omega$ , може бути представлено у вигляді розкладання за просторовими гармоніками в двовимірний ряд Фур'є

$$\begin{aligned} \dot{E}(x, y, z, t) &= \dot{E}(x, y, z) e^{j\omega t} = \\ &= \sum_n \sum_{k_x, k_y} E_n(k_x, k_y) \cdot e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\text{де } k_{zi} = \begin{cases} \sqrt{k_i^2 - (k_x^2 + k_y^2)} = p_i & \text{якщо } k_x^2 + k_y^2 = \gamma^2 < k_i^2 \\ -j\sqrt{(k_x^2 + k_y^2) - k_i^2} = -jq_i & \text{якщо } k_x^2 + k_y^2 = \gamma^2 > k_i^2 \end{cases}, \quad (6.20)$$

$\gamma$  - поперечна стала поширення,

$$k_i = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_{ri} \cdot \mu_{ri}} = \frac{\omega}{c} \cdot n_i - \text{хвилеве число середовища,}$$

$n_i$  – коефіцієнт заломлення середовища,  $i=1,2$ .

Знак (–) перед коренем в (6.20) обрано з умови загасання хвилі на нескінченності.

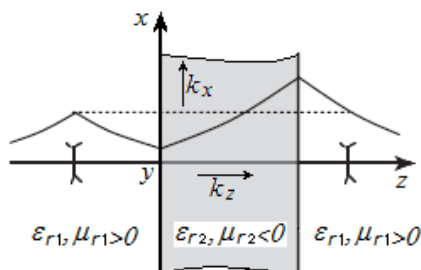


Рисунок 6.8 – Проходження затухаючих гармонік через плоску лінзу

Розкладання (6.19) переводить просторове  $(x, y)$  представлення поля об'єкту в спектральну область  $(k_x, k_y)$ , де вся інформація про зображення об'єкту міститься в спектральних компонентах  $k_x, k_y$ . При цьому малі значення

$$\gamma = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad \text{і, отже, великі значення} \quad \lambda_{\perp} = 2\pi/\gamma$$

відповідають крупним деталям зображення, і навпаки – великі значення  $\gamma$  (малі  $\lambda_{\perp}$ ) відповідають дрібним деталям зображення. Інформація про зображення переноситься до лінзи хвилею, яка поширюється вздовж вісі  $z$ . Якщо залежність цієї хвилі від  $z$  має вигляд  $e^{-jk_z z}$  ( $k_z = k_{z1}$  – вільний простір), то з (6.20) витікає, що при  $\gamma < k_1$  ( $\lambda_{\perp} > \lambda_1$ )  $k_{z1} = p_1$  – дійсне число і, отже, хвиля поширюється без загасання, переносючи інформацію про зображення до лінзи. Якщо ж  $\gamma > k_1$ , або  $\lambda_{\perp} < \lambda_1$ , то  $k_{z1} = -jq_1$  – чисто уявне число

і хвиля експоненціально затухатиме вздовж вісі  $z$ , як показано на рис. 6.8.

Можна показати, що амплітуди відбитих хвиль, які пройшли через лінзу, визначаються сумарними коефіцієнтами відбиття та передачі, які мають вигляд

$$R_{\Sigma} = \frac{\frac{1-K}{1+K} \cdot (1 - e^{+2q_2d})}{1 - \left(\frac{1-K}{1+K}\right)^2 \cdot e^{+2q_2d}}, \quad (6.21)$$

$$T_{\Sigma} = \frac{\left[1 - \left(\frac{1-K}{1+K}\right)^2\right] \cdot e^{+q_2d}}{1 - \left(\frac{1-K}{1+K}\right)^2 \cdot e^{+2q_2d}}, \quad (6.22)$$

де  $K = \frac{k_{z2} / \varepsilon_{r2}}{k_{z1} / \varepsilon_{r1}}$ ,  $\Gamma = \frac{1+K}{1-K}$ .

З (6.21) і (6.22) видно, що при  $K \rightarrow 1$  ( $\varepsilon_{r2} \rightarrow -1$ ) значення  $R_{\Sigma} \rightarrow 0$ , а  $T_{\Sigma}$  зростає по експоненціальному закону і, залежно від товщини шару, може набувати скільки завгодно великих значень. Звідси витікає, що при умові відсутності втрат у структурі амплітуди полів можуть стати нескінченно великими. У реальних структурах з втратами амплітуди полів залишаються скінченними за своїми значеннями.

Таким чином, при падінні затухаючої хвилі на плоский шар метаматеріалу відбувається збільшення амплітуди хвилі, обумовлене збудженням на межах розділу резонансних мод, які зветься поверхневими плазмонами.

При цьому, за рахунок значного збільшення амплітуди високочастотних затухаючих просторових гармонік, з'являється можливість виявити дрібніші деталі зображення і, отже, подолати дифракційну межу. Ці висновки було

підтверджено практичними вимірами, які показали хорошу відповідність теорії і експерименту.

Розглянуті вище ефекти знаходять оригінальні практичні застосування. Прикладом може послужити розробка технологій СТЕЛС в різних областях (радіолокація, гідроакустика, гіпотетично і сейсмологія).

## 6.7 Приклади реалізації лівих речовин

Ліві речовини, що мають одночасно від'ємні значення  $\epsilon_r$  і  $\mu_r$ , відсутні в природі і, як зазначено вище, є штучними. Більшість створених до теперішнього часу метаструктур, що проявляють властивості лівих речовин, являють собою комбінації дротяних (стрічкових) сегментів різної довжини і форми, періодично розташованих в просторі. Перші зразки метаструктур, об'єднання яких в діапазоні НВЧ дає ліву речовину з від'ємними  $\epsilon_r$  і  $\mu_r$  показано на рис. 6.9.

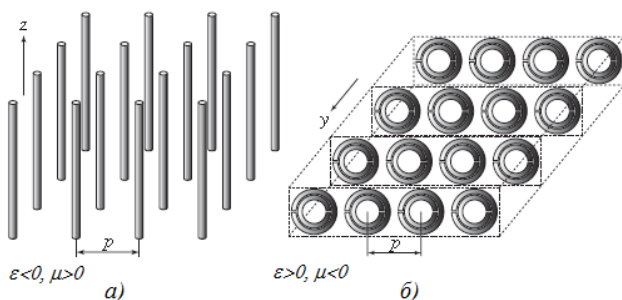
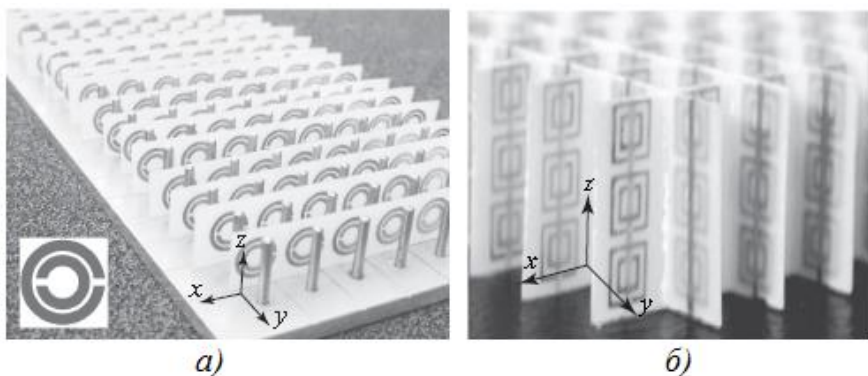


Рисунок 6.9 – Приклади метаструктур

Періодична структура на рис. 6.9 а), що складається з прямолінійних металевих провідників, рівновіддалених один від одного на величину  $p$  (період), в діапазоні НВЧ проявляє властивості речовини з параметрами  $\epsilon < 0, \mu > 0$ . Аналогічно, періодична структура на рис. 6.9 б), яка складається з

кільцевих резонаторів з розривами (split-ring resonators), в НВЧ діапазоні проявляє властивості речовини з параметрами  $\varepsilon > 0$ ,  $\mu < 0$ . Результат об'єднання цих структур в одновимірному і двовимірному варіантах, що дає одночасно негативні  $\varepsilon_r$  і  $\mu_r$ , показано на рис. 6.10.



а) одновимірна структура, б) двовимірна структура  
Рисунок 6.10 – Варіанти метаструктур з негативними  $\varepsilon_r$  і  $\mu_r$

Досліджувалися також метаструктури з іншими формами дрітчастих включень, наприклад, у вигляді  $\Omega$ -подібних фрагментів з періодичним або хаотичним розташуванням в просторі.

Розглянуті та інші метаструктури, що проявляють властивості лівих речовин, знаходять вживання у військовій техніці при створенні поглинаючих або частотно вибіркового поверхонь для забезпечення маскування об'єктів як в мікрохвильовому діапазоні (НВЧ), так і в гідроакустиці (технологія СТЕЛС). Сучасним станом вже існують метаматеріали, які здатні маскувати від спостереження об'єкти і в інфрачервоному (ІЧ) діапазоні. Розробляється також ідея по створенню на тих же технологічних принципах так званого "акустичного плаща", який міг би служити захисним екраном

від проникнення будь-яких вібрацій – звукових або навіть сейсмічних хвиль.

Останніми роками акцент досліджень в області метаматеріалів змістився в оптичний діапазон. Це в значній мірі пов'язано з прогресом в області нанотехнологій і можливістю створення мікро- і наноструктур з необхідними властивостями. У мережі Internet є повідомлення про успішні досліди по створенню «плаща-невидимки» у видимій частині спектру оптичного діапазону.

### Контрольні запитання

1. Які різновиди середовищ можуть існувати за критерієм знаків їх значень  $\varepsilon_r$  і  $\mu_r$ ?
2. За яким критерієм матеріали відносять до «лівобічних»?
3. За яких умов вектори електромагнітної хвилі  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і  $\vec{k}$  можуть утворити «праву» та «ліву» трійку?
4. Які особливості мають вектори  $\vec{P}$  та  $\vec{k}$  в лівих та правих середовищах?
5. В чому полягає явище обернення ефекту Доплера в лівих середовищах?
6. Які особливості заломлення хвилі на межі розділу правого і лівого середовищ?
7. Які особливості фокусування плоскою лінзою, яку виконано з лівої речовини?
8. Що таке дифракційна межа?
9. В чому полягає ефект подолання дифракційної межі за допомогою плоскої лінзи, виконаної з лівого матеріалу?
10. Що таке поверхневі плаزمони?
11. Як реалізувати метаматеріал з  $\varepsilon < 0$ ,  $\mu > 0$ ?
12. Як реалізувати метаматеріал з  $\varepsilon > 0$ ,  $\mu < 0$ ?

13. Як реалізувати метаматеріал де одночасно від'ємні  $\epsilon_r$  і  $\mu_r$ ?
14. Які перспективи практичного використання метаматеріалів?

## 7 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ В ЛІНІЯХ ПЕРЕДАЧІ

### 7.1 Класифікація ліній передачі

Лінією передачі називається пристрій, який призначено для передачі електромагнітних хвиль від джерела до навантаження. Розрізняють регулярні і нерегулярні лінії передачі.

Регулярна лінія передачі являє собою прямолінійну структуру, геометричні і електричні параметри якої є незмінними за її поздовжньою координатою.

У нерегулярній лінії передачі електричні параметри є функцією поздовжньої координати.

На практиці використовують лінії передачі багатьох типів. Основні відмінності ліній одна від одної визначаються типом електромагнітних хвиль, що поширюються вздовж лінії. Відповідно до цього розрізняють:

- лінії передачі з поперечними електромагнітними хвилями (типу Т); сюди відносяться дво- і багатопровідні лінії, коаксіальні і смужкові лінії передачі;

- хвилеводні лінії передачі з хвилями електричного ( $E_{mn}$ ) або магнітного ( $H_{mn}$ ) типів; сюди відносяться хвилеводи прямокутного, круглого і інших форм поперечного перетину;

- лінії передачі поверхневих хвиль; сюди відносяться діелектричні хвилеводи, а також металеві стержні з періодичною структурою поверхні.

### 7.2 Телеграфні рівняння

В структурах з багатозв'язним поперечним перетином можуть існувати поперечні електромагнітні хвилі (ТЕМ або Т – хвилі). У поперечних хвиль відсутні поздовжні компоненти

векторів  $\vec{E}$  або  $\vec{H}$ , вони не мають частоти відсічки, тобто можуть існувати при будь-якому значенні частоти.

Частинним випадком ліній передачі з багатозв'язним поперечним перетином є двозв'язні лінії передачі, що мають два паралельних провідника (коаксіальна лінія, двопровідна лінія, смужкова лінія та ін.). Такі лінії передачі широко використовуються на практиці і основним робочим типом хвилі в них є саме Т – хвиля (у мікросмужковій і подібній до неї лініях чиста Т – хвиля існувати не може, в цих лініях основною є квазі – Т хвиля). Поперечні хвилі в двозв'язній лінії передачі можна описати за допомогою так званих телеграфних рівнянь. Телеграфні рівняння формулюються відносно двох величин – напруги  $U = U(z, t)$  та струму  $I = I(z, t)$  – які задаються для кожного поперечного перетину  $z$  даної лінії передачі в кожен момент часу  $t$  :

$$-\frac{\partial U(z, t)}{\partial z} = RI + L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t}, \quad (7.1)$$

$$-\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = GU + C \frac{\partial U(z, t)}{\partial t}. \quad (7.2)$$

Тут  $L$  – це погонна (тобто та, що приходить на одиницю довжини) індуктивність лінії в Гн/м;

$C$  – погонна ємність лінії у Ф/м;

$R$  – погонний опір лінії в Ом/м;

$G$  – погонна провідність (погонний коефіцієнт витоку) в См/м.

При часовій залежності у вигляді множника  $e^{j\omega t}$  після диференціювання за часом в правих частинах (7.1) і (7.2) і скорочення на  $e^{j\omega t}$  отримаємо

$$-\frac{dU(z)}{dz} = (R + j\omega L)I(z), \quad (7.3)$$

$$-\frac{dI(z)}{dz} = (G + j\omega C)U(z), \quad (7.4)$$

де частинні похідні за координатою  $z$  позначено через  $\frac{d}{dz}$ , оскільки значення  $U$  та  $I$  тепер залежать лише від однієї змінної  $z$ . Рівняння (7.3), (7.4) зуть телеграфними рівняннями лінії.

Для отримання загального вирішення рівнянь (7.3) і (7.4) з них вилучається одна з величин, наприклад  $I$ . Після диференціювання за змінною  $z$  обох частин рівняння (7.3) і підстановки в праву частину  $\frac{dI(z)}{dz}$  з (7.4) отримаємо

$$\frac{d^2U}{dz^2} = -\gamma^2 U, \quad (7.5)$$

де  $\gamma$  – стала, або коефіцієнт поширення, яка дорівнює

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}. \quad (7.6)$$

У загальному випадку цей параметр комплексний:  $\gamma = \alpha + j\beta$ ,  $\alpha$  – коефіцієнт загасання, тобто величина втрат, що вносяться відрізком лінії одиничної довжини;  $\beta = \frac{\omega}{v_\phi}$  – коефіцієнт фази, тобто фазовий зсув на тій же довжині.

Загальне вирішення диференціального рівняння другого порядку (7.5) записується у вигляді

$$U(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z}. \quad (7.7)$$

Підстановка цього виразу в (7.3) дає рівняння для струму

$$I(z) = \frac{1}{Z_X} (Ae^{-\gamma z} - Be^{\gamma z}), \quad (7.8)$$

де величина

$$Z_X = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (7.9)$$

зветься *хвильовим опором лінії*.

З формул (7.7) і (7.8) випливає, що загальне вирішення телеграфних рівнянь є сумою двох хвиль, що рухаються (біжать) назустріч одна одній, з деякими комплексними амплітудами  $A$  і  $B$  відповідно. Ці амплітуди визначаються з застосуванням граничних умов на початку та на кінці лінії. Наявність зворотної хвилі, що характеризується амплітудою  $B$ , зв'язано (як буде показано далі) з процесами відбиття прямої хвилі (амплітуда  $A$ ), яке може виникати внаслідок неузгодженості лінії.

Для ідеальних ліній ( $\sigma \rightarrow \infty, tg \delta \rightarrow 0$ )  $R=0, G=0$ . Тоді, як виходить з (7.6), коефіцієнт загасання  $\alpha=0$ , а коефіцієнт фази

$$\beta = \omega \sqrt{LC}. \quad (7.10)$$

Крім цього, з (7.9) витікає

$$Z_X = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7.11)$$

У реальних лініях передачі  $R \neq 0$  і  $G \neq 0$ , проте на досить високих частотах  $\omega L \gg R$  та  $\omega C \gg G$ , тому у формулах (7.6) і (7.9) величинами  $R$  і  $G$  можна нехтувати в порівнянні з  $\omega L$  і  $\omega C$ . В результаті знову отримуємо вирази

(7.10) та (7.11). Це, так зване «високочастотне» наближення, яке справедливе для більшості ліній передачі розглядуваного типу.

Детальний аналіз структури електромагнітного поля Т – хвилі в багатозв'язній лінії показує, що електричне поле такої хвилі задовільняє рівнянню Лапласа і, отже, збігається по конфігурації з електростатичним полем. А в однозв'язній лінії електростатичне поле без поздовжньої складової існувати не може. Математично це зв'язано з тим, що функція, яка задовільняє рівнянню Лапласа (гармонійна функція) і яка є сталою на межі області, має бути сталою усередині всієї області. Тому в лініях з *однозв'язним* перетином поперечні хвилі (Т-хвилі) *існують не можуть*.

Стала поширення поперечних хвиль збігається зі сталою поширення плоских хвиль у вільному просторі. Фазова швидкість Т-хвиль не залежить від частоти:

$$v_{\text{ф}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$$
 Існування можливе для будь-яких частот від 0 до  $\infty$ , тобто  $f_{\text{кр}}=0$ .

Після того, як знайдено електричне поле, магнітне поле може бути отримано з першого рівняння Максвелла

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \text{rot}\vec{E}$$

вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  для Т-хвилі в будь-якій точці мають бути перпендикулярними один одному.

Далі, оскільки магнітне поле також поперечне, струми в провідниках є чисто поздовжніми і, отже, структура магнітного поля в Т-хвилі збігається за конфігурацією з магнітостатичним полем.

Збіг структур електричного і магнітного полів Т-хвилі в багатозв'язній лінії з електростатичним і магнітостатичним полями дозволяє вводити в розгляд відповідні статичні параметри – погонну ємність і погонну індуктивність лінії.

Для деяких типів ліній передачі ці параметри можуть бути легко знайдені.

### 7.3 Основні електричні характеристики ліній передачі

Процес передачі енергії електромагнітною хвилею в будь-якій регулярній лінії передачі може досліджуватися за допомогою моделі у вигляді гіпотетичної двопровідної лінії, основні електричні характеристики якої збігаються з характеристиками досліджуваної лінії. Таке узагальнення (фактично перенесення) теорії двопровідних ліній на інші типи ліній, у тому числі і хвилеводні, можливо в тих випадках, коли властивості лінії можна охарактеризувати обмеженою кількістю зовнішніх параметрів. Скрізь далі (якщо не обумовлено зворотнє) при аналізі процесів в лініях передачі використовуватиметься саме така модель на основі двопровідної лінії.

#### 7.3.1 Комплексний коефіцієнт відбиття

Навантаженням в лінії передачі (рис. 7.1) може бути або зосереджений опір, або відрізок лінії передачі з хвилевим опором, що відрізняється від хвилевого опору основної лінії. У загальному випадку величина опору навантаження  $Z_H$  не дорівнює хвилевому опору лінії  $Z_X$ .

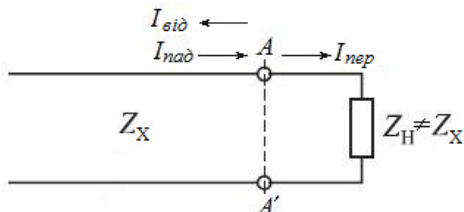


Рисунок 7.1 – Відбиття від навантаження

Раніше вже наголошувалося, що в загальному випадку в лінії поширюються хвилі, що рухаються (біжать) в протилежних напрямках і характеризуються комплексними амплітудами  $A$  та  $B$  – вираз (7.7). Це можуть бути хвилі напруги (7.7), або струму (7.8), або якого-небудь з компонент електромагнітного поля. Вочевидь, що ці хвилі зв'язано з перенесенням енергії по лінії.

Відповідно до рис. 7.1 відбиття частини енергії падаючої хвилі відбувається в тому перетині, де встановлено навантаження. На рис. 7.1 це перетин  $AA'$ . Частина енергії падаючої хвилі, яка не зазнала відбиття, поширюється далі цього перетину (це та хвиля, яка передає енергію в навантаження  $I_{\text{пер}}, U_{\text{пер}}$ ).

Для опису процесу відбиття вводиться поняття коефіцієнту відбиття за напругою  $\Gamma$  в місці під'єднання навантаження

$$\Gamma = \frac{U_{\text{від}}}{U_{\text{пад}}}. \quad (7.12)$$

Знайдемо вираз для  $\Gamma$  через параметри лінії і навантаження. Для цього запишемо рівняння Кірхгофа в перетині  $AA'$  для струму

$$I_{\text{пад}} - I_{\text{від}} = I_{\text{пер}} \quad \text{або} \quad \frac{U_{\text{пад}}}{Z_X} - \frac{U_{\text{від}}}{Z_X} = \frac{U_{\text{пер}}}{Z_H}, \quad (7.13)$$

для напруги

$$U_{\text{пад}} + U_{\text{від}} = U_{\text{пер}}. \quad (7.14)$$

Підстановка (7.14) в (7.13) з урахуванням (7.12) дає

$$\Gamma = \frac{Z_H - Z_X}{Z_H + Z_X}. \quad (7.15)$$

Оскільки опори  $Z_H$  і  $Z_X$  в загальному випадку комплексні, то і величина  $\Gamma$  може бути комплексною і її можна представити у вигляді

$$\Gamma = |\Gamma| \exp(j\theta), \quad (7.16)$$

$$\text{де } |\Gamma| = \left| \frac{Z_H - Z_X}{Z_H + Z_X} \right|, \quad \theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{Im} \Gamma}{\operatorname{Re} \Gamma} \right).$$

Слід підкреслити, що коефіцієнт  $\Gamma$  може характеризувати процес відбиття в будь-якому місці тракту за умови, що в цьому місці відома величина еквівалентного опору навантаження.

### 7.3.2 Коефіцієнт стоячої хвилі

Падаюча та відбита хвилі є когерентними, а тому будуть інтерферувати. В результаті інтерференції в лінії встановлюється режим так званих змішаних хвиль, при якому уздовж лінії спостерігаються (рис. 7.2) максимуми і мінімуми напруги (струму), що зв'язані з амплітудами падаючих і відбитих хвиль.

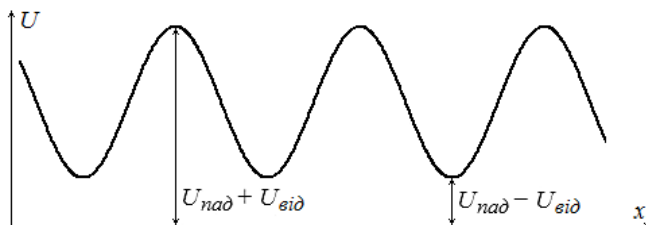


Рисунок 7.2 – Режим змішаних хвиль

Окрім коефіцієнту  $\Gamma$ , для характеристики режиму роботи лінії вводиться також коефіцієнт стоячої хвилі за

напругою (КСХН) або просто коефіцієнт стоячої хвилі (КСХ), який дорівнює відношенню напруг в максимумі і мінімумі

$$КСХ = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{|U_{nad}| + |U_{vid}|}{|U_{nad}| - |U_{vid}|}. \quad (7.17)$$

З цього виразу випливає, що КСХ – дійсна додатня величина, значення якої завжди більше 1. За відсутності втрат та в режимі повного узгодження  $U_{vid} = 0$  і тоді  $КСХ = 1$ . У режимі повного відбиття  $U_{vid} = U_{nad}$ , в цьому випадку  $КСХ \rightarrow \infty$ .

Для отримання взаємозв'язку між  $\Gamma$  і КСХ скористаємось (7.17)

$$КСХ = \frac{1 + |U_{vid}|/|U_{nad}|}{1 - |U_{vid}|/|U_{nad}|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}, \text{ звідки}$$

$$|\Gamma| = \frac{КСХ - 1}{КСХ + 1}. \quad (7.18)$$

Зв'язок величини КСХ з долею потужності, що надходить в навантаження, можна знайти із закону збереження енергії. З нього випливає, що за відсутності втрат потужність падаючої хвилі дорівнює сумі потужностей, одну з яких поглинуто в навантаженні, а другу – відбито від нього, тобто завжди  $P_{nad} = P_H + P_{vid}$ , отже

$$\frac{P_H}{P_{nad}} = \frac{P_{nad} - P_{vid}}{P_{nad}} = 1 - \frac{P_{vid}}{P_{nad}}.$$

Величини  $P_{vid}$  та  $P_{пад}$  пропорційні  $U^2/Z$ , тоді з урахуванням (7.18) отримуємо

$$\frac{P_H}{P_{nad}} = 1 - \left( \frac{KCX - 1}{KCX + 1} \right)^2 = \frac{4KCX}{(KCX + 1)^2}. \quad (7.19)$$

З (7.19) витікає, що при  $KCX=2$  в навантаженні поглинається близько 90% потужності, при  $KCX=3$  – лише 75%, а при  $KCX=20$  – лише 18%. На практиці при розробці НВЧ пристроїв прагнуть отримати величину  $KCX$  близьку до 1. При цьому часто вважається допустимим, якщо  $KCX \leq 2$ .

### 7.3.3 Коефіцієнт корисної дії навантаженої лінії

Введемо коефіцієнт корисної дії, як

$$\eta = \frac{P_H}{P_{nad}}. \quad (7.20)$$

При узгодженому навантаженні  $Z_H = Z_X$ , в лінії довжиною  $l$  встановлюється режим рухомої хвилі, а напруги і струми на вході і виході лінії зв'язано співвідношеннями

$$\left. \begin{aligned} U_H &= U_{вх} e^{-\alpha l} e^{-j\beta l} \\ I_H &= I_{вх} e^{-\alpha l} e^{-j\beta l} \end{aligned} \right\}. \quad (7.21)$$

З-за того, що  $P_H = U_H I_H$  и  $P_{nad} = U_{вх} I_{вх}$ , то з (7.20) з урахуванням (7.21) маємо

$$\eta = \frac{P_H}{P_{nad}} = \frac{U_H I_H}{U_{вх} I_{вх}} = e^{-2\alpha l} \approx 1 - 2\alpha l, \quad (7.22)$$

де  $\alpha$  - стала загасання.

В разі неузгодженого навантаження, коли в лінії встановлюється режим змішаних хвиль, для к.к.д. лінії можна отримати вираз:

$$\eta = e^{-2\alpha l} \cdot \frac{1 - |\Gamma|^2}{1 - |\Gamma|^2 e^{-4\alpha l}}, \quad (7.23)$$

де  $|\Gamma|$  – модуль коефіцієнта відбиття від навантаження – вираз (7.15).

### 7.3.4 Допустимі потужність та напруга в лінії

Напруга в якому-небудь перетині лінії залежить від потужності, що передається по лінії, хвилевого опору і режиму роботи лінії.

В узгодженій лінії амплітуда напруги дорівнює

$$U = \sqrt{2PZ_X}, \quad (7.24)$$

де  $P$  – потужність, що проходить через той перетин лінії, в якому визначається напруга.

У неузгодженій лінії передачі максимальну напругу можна визначити за співвідношенням

$$U_{\max} = \sqrt{2PZ_X \cdot KCX}. \quad (7.25)$$

Якщо  $U_{\max}$  дорівнює пробивній напрузі лінії передачі  $U_{\text{проб}}$ , то з (7.25) визначається максимальна потужність, яка допустима для передачі по лінії

$$P_{\text{дон}} = \frac{U_{\text{проб}}^2}{2Z_X \cdot KCX}. \quad (7.26)$$

Зазвичай, режим обирають так, щоб забезпечити нерівність  $P_{\text{дон}} < P_{\text{max}}$ .

З (7.26) витікає, що із збільшенням КСХ величина допустимої потужності, що передається по лінії, зменшується.

## 7.4 Коаксіальна лінія

Однією з найбільш поширених ліній передачі з Т – хвилею є коаксіальна лінія, яку складено з двох аксіально розташованих циліндрів (рис. 7.1).

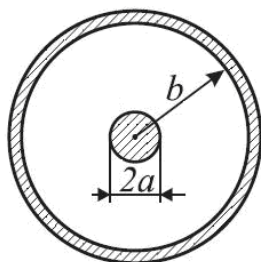


Рисунок 7.1 – Поперечний перетин коаксіальної лінії

Внутрішній простір між провідниками заповнюється діелектриком з відносною діелектричною проникністю  $\epsilon_r > 1$ , відносна магнітна проникність діелектрика  $\mu_r = 1$ . Однією з функцій заповнення є центрування внутрішнього провідника відносно зовнішнього.

Погонну ємність лінії можна обчислити, використовуючи співпадання електричного поля в лінії з електростатичним полем в такій же структурі. Хай між внутрішнім і зовнішнім провідниками прикладено різницю потенціалів  $U$ , під дією якої на провідниках підтримується погонна густина зарядів  $+q$  (наприклад, на внутрішньому провіднику) та  $-q$  (на зовнішньому провіднику).

Тоді, з теореми Гауса  $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q$ , де  $Q$  – повний заряд

будь-якого провідника, витікає, що при  $a \leq r \leq b$  радіальна складова вектору електричної індукції

$$D = \frac{q}{2\pi r} \left[ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right].$$

Оскільки в електростатичному полі різниця потенціалів  $U = \int \vec{E} d\vec{r}$ , то її можна обчислити, використовуючи матеріальне рівняння  $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$ . При цьому знаки векторів можна вилучити, оскільки електричне поле має лише одну радіальну складову. Інтегрування дає:

$$U = \int_a^b \frac{q}{2\pi\varepsilon_a r} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_a} \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

звідки погонна ємність коаксіальної лінії

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln(b/a)} \left[ \frac{\Phi}{\text{м}} \right]. \quad (7.27)$$

Аналогічно, використовуючи співпадання магнітного поля в лінії з магнітостатичним полем, знаходиться погонна індуктивність. Нехай по внутрішньому провіднику тече струм  $I$ . Тоді за законом Ампера  $I = \oint_L \vec{H} d\vec{L}$  випливає, що напруженість магнітного поля в лінії

$$H = \frac{I}{2\pi r} \left[ \frac{\text{А}}{\text{м}} \right].$$

Магнітна індукція в лінії

$$B = \mu_a H = \frac{\mu_a I}{2\pi r} \left[ \text{Тл або } \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} \right].$$

Елемент течії магнітної індукції, що пронизує прямокутник, одна із сторін якого паралельна радіусу і дорівнює  $dr$ , а друга паралельна вісі лінії і дорівнює одиниці (рис. 7.2), описується співвідношенням:

$$\phi = B \cdot dr \cdot 1 = \frac{\mu_a I}{2\pi r} \cdot dr \cdot 1 \quad [\text{Вб}].$$

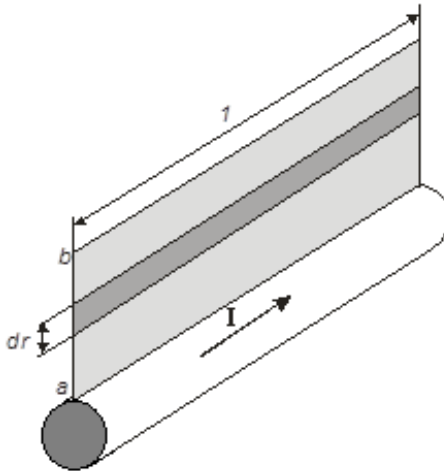


Рисунок 7.2 – До розрахунку течії магнітної індукції

Повний потік магнітної індукції  $\Phi$ , що доводиться на одиницю довжини лінії, дорівнює інтегралу  $\int \phi dr$  в межах від  $a$  до  $b$ . Після інтегрування отримаємо погонну індуктивність:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{1}{I} \int_a^b \frac{\mu_a I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_a}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \left[ \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \right]. \quad (7.28)$$

Хвилевий опір відповідно до (7.11) буде:

$$Z_X = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (7.29)$$

Підстановка значень  $\mu_0$  і  $\varepsilon_0$  з урахуванням  $\mu_r = 1$  дає:

$$Z_X = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) [\text{Ом}]. \quad (7.30)$$

Слід зазначити, що поперечна хвиля існує в коаксіальній лінії лише за умови, що лінію заповнено однорідним діелектриком.

При частковому або неоднорідному заповненні в лінії з'являються поздовжні складові полів, у зв'язку з чим виникає дисперсія і інші явища.

## 7.5 Двопровідна лінія

Поперечний перетин і структуру поля в двопровідній лінії показано на рис. 7.3.

По аналогії з коаксіальною лінією, використовуючи співпадання полів в лінії із статичними полями, знаходяться погонні ємність, індуктивність і хвилевий опір двопровідної лінії.

Погонна індуктивність:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right) \left[ \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \right]. \quad (7.31)$$

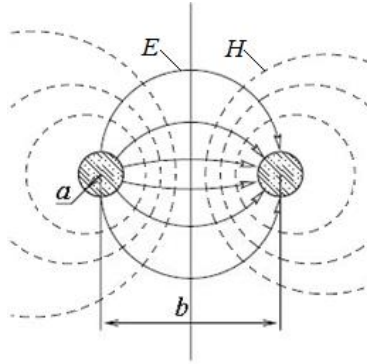


Рисунок 7.3 – Поперечний перетин та структура поля двопровідної лінії

Погонна ємність:

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b-a}{a}\right)} \left[ \frac{\Phi}{M} \right]. \quad (7.32)$$

Хвильовий опір:

$$Z_X = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right). \quad (7.33)$$

Якщо  $b \gg a$ , то замість (7.31), (7.32) і (7.33) використовуються наближені вирази:

$$C \approx \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}, \quad L \approx \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

$$Z_X \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (7.34)$$

Для лінії в повітрі ( $\epsilon_r = 1, \mu_r = 1$ ) ці вирази набувають вигляду:

$$C \approx \frac{1}{36 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[ \frac{\text{нФ}}{\text{м}} \right], L \approx 0.4 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \left[ \frac{\text{мкГн}}{\text{м}} \right],$$

$$Z_X \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Похибка розрахунків за цими формулами не перевищує 10%.

## 7.6 Порівняння деяких властивостей коаксіальної та двопровідної ліній

Порівнюємо структури полів в коаксіальній та двопровідній лініях за критерієм можливого побічного випромінення. В обох лініях головною є хвиля типу TEM, або Т- хвиля.

В коаксіальній лінії ця хвиля повинна мати лише складові  $E_r$  та  $H_\varphi$  (в циліндричній системі координат, де вісь  $z$  співпадає з поздовжньою віссю лінії), які можуть існувати лише в області між внутрішнім та зовнішнім провідниками, але при умові, що зовнішній провідник виконано із ідеального металу (якщо ж метал має скінченне значення провідності, то товщина зовнішнього провідника  $t$  має бути  $t = (3 \dots 5) \cdot \Delta$ , щоб затухання в ньому було достатньо великим). Таким чином, область можливого існування електромагнітного поля в цій лінії обмежено розмірами зовнішнього провідника. З цього витікає, що зовнішнього поля, тобто поля випромінення, в коаксіальній лінії (при згаданих умовах) взагалі не повинно існувати.

В двопровідній лінії область існування поля не обмежується жодним конструктивним елементом. Це означає, що така напрямна система може створювати побічні електромагнітні випромінення, які можуть бути перехоплені засобами ворожої радіотехнічної розвідки. Одним із технічних засобів позбавлення від цієї негативної властивості є застосування екрану, але такий підхід різко збільшує як витрати дефіцитної міді, так і габарити лінії.

Другим підходом до вирішення задачі зменшення побічного випромінення є застосування скручування проводів двопровідної лінії з утворенням «спіральної витої пари». Крок спіралі підбирається за критерієм взаємної компенсації випроміненого поля від обох проводів «витої пари». Такий підхід є домінуючим при виготовленні телефонних кабелів міських телефонних мереж, де кількість «витих пар» в одному телефонному кабелі варіюється від 10 до 4000.

## 7.7 Мікросмужкова лінія

Конструкцію мікросмужкової лінії зображено на рис. 7.4. Така структура знайшла широке застосування при мініатюризації схем і пристроїв НВЧ. Верхній провідник має ширину  $W$  і товщину  $t$ . Нижня поверхня діелектричної пластини металізована і є другим провідником (двозв'язана структура).

Вище наголошувалося, що в мікросмужкової лінії чиста  $T$ -хвиля існувати не може, оскільки діелектричне заповнення в лінії неоднорідне (підкладка з  $\epsilon_r > 1$  і над нею повітря з  $\epsilon_r = 1$ ). Це приводить до того, що в структурі електромагнітного поля лінії з'являються поздовжні складові, за рахунок яких виникає

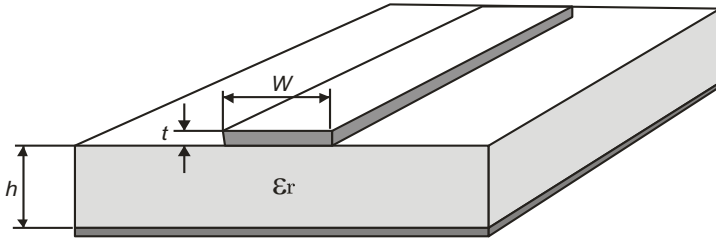
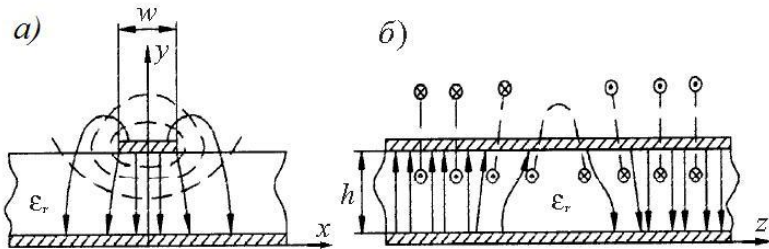


Рисунок 7.4 – Конструкція мікросмужкової лінії

дисперсія. Наближено картину електромагнітного поля в мікросмужковій лінії наведено на рис. 7.5, де суцільними лініями позначено лінії напруженості електричного поля, а пунктирними – лінії магнітного поля.

Складний характер електромагнітного поля не дозволяє отримати строгі аналітичні вирази для основних параметрів мікросмужкової лінії. У зв'язку з цим, в інженерній практиці



а) поперечний перетин; б) поздовжній перетин

Рисунок 7.5 – Структура полів в мікросмужковій лінії

використовуються наближені співвідношення, які забезпечують достатню точність моделювання.

Одним з наближених параметрів є так звана ефективна відносна діелектрична проникність, яка може бути визначена за виразом:

$$\varepsilon_{\text{еф}} = \frac{C}{C_0}, \quad (7.35)$$

де  $C_0$  – погонна ємність лінії з повітряним заповненням;  
 $C$  – погонна ємність лінії за наявності діелектричної пластини.

Величина  $\varepsilon_{\text{еф}}$  характеризує співвідношення між енергіями, які концентруються в повітрі та в діелектричній пластині. Мікросмужкова лінія з широкою смужкою ( $\frac{W}{h} \rightarrow \infty$ ) близька за своїми властивостями до плоского конденсатора, в якому практично вся енергія електричного поля концентрується в діелектриці під смужкою. Тому величина  $\varepsilon_{\text{еф}}$  вельми близька до  $\varepsilon_r$ . Якщо смужка вузька ( $\frac{W}{h} \rightarrow 0$ ), то енергія електричного поля розподіляється практично порівну між повітрям і діелектриком. В цьому випадку величина  $\varepsilon_{\text{еф}}$  близька до напівсуми  $\varepsilon_r$  повітря і діелектричного шару, тобто  $\varepsilon_{\text{еф}} = (\varepsilon_r + 1)/2$ . Таким чином, величина  $\varepsilon_{\text{еф}}$ , залежно від ширини смужки, змінюється в межах:

$$\frac{(\varepsilon_r + 1)}{2} < \varepsilon_{\text{еф}} < \varepsilon_r.$$

Довжина хвилі в мікросмужковій лінії визначається виразом:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{\text{еф}}}} = \frac{c_0}{f \sqrt{\varepsilon_{\text{еф}}}}. \quad (7.36)$$

де  $\lambda_0$  і  $c_0$  – довжина хвилі і швидкість світла в повітрі, відповідно.

Наближені вирази для розрахунку параметрів мікросмужкових ліній при  $\varepsilon_r < 17$  та  $0.05 < W/h < 20$  при нульовій товщині смужки мають вигляд:

для  $W/h < 1$

$$Z_X = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_{\text{еф}}}} \ln\left(\frac{8h}{W} + \frac{W}{4h}\right), \quad (7.37)$$

$$\varepsilon_{\text{еф}} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left[ \left(1 + \frac{12h}{W}\right)^{\frac{1}{2}} + 0.041 \left(1 - \frac{W}{h}\right)^2 \right], \quad (7.38)$$

для  $W/h \geq 1$

$$Z_X = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{\text{еф}}}} \left( \frac{W}{h} + 0.667 \ln\left(\frac{W}{h} + 1.4444\right) + 1.393 \right)^{-1}, \quad (7.39)$$

$$\varepsilon_{\text{еф}} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left(1 + \frac{12h}{W}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.40)$$

Похибка розрахунку за наведеними формулами не перевищує 1%.

Вплив товщини смужки  $t$  можна врахувати, ввівши в (7.37) – (7.40) замість фізичної ширини  $W$  смужки її ефективну ширину  $W_{\text{еф}}$ :

при  $\frac{W}{h} > \frac{1}{2\pi}$

$$\frac{W_{\text{еф}}}{h} = \frac{W}{h} + \frac{t}{\pi h} \left(2 + \ln \frac{2h}{t}\right), \quad (7.41)$$

при  $\frac{W}{h} < \frac{1}{2\pi}$

$$\frac{W_{\text{эф}}}{h} = \frac{W}{h} + \frac{t}{\pi h} \left( 1 + \ln \frac{4\pi W}{t} \right). \quad (7.42)$$

В виразах (7.41), (7.42) передбачається, що  $t < h$  і  $t < W/2$ .

Величина хвилевого опору мікросмужкових ліній (на підкладинці з полікору - див.табл. 3.1), які використовуються на практиці, лежить в межах  $20 < Z_X < 125$  Ом. Верхню межу обумовлено технологічними обмеженнями і підвищеним випромінюванням, а нижню зв'язано з можливістю появи вищих мод в поперечній площині лінії.

Окрім мікросмужкових ліній, в мікрохвильовій техніці широко використовуються також інші типи ліній на основі планарних структур. Найбільш поширені з них: симетрична смужкова лінія, щілинна лінія, копланарна лінія.

### Контрольні запитання

1. За якими критеріями класифікують лінії передачі?
2. Яка фізична сутність погонних параметрів лінії?
3. Яка фізична сутність величин  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ?
4. Яка фізична сутність обох доданків в загальному вираженні для розподілу напруги та струму в лінії?
5. Які особливості розподілу  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  спостерігаються в лініях з хвилею типу Т?
6. Як вводиться та визначається коефіцієнт відбиття  $\Gamma$ ?
7. Як вводиться та визначається КСХ?
8. Як вводиться та визначається ККД в лінії?
9. Як визначається допустима потужність в лінії?
10. Як визначаються погонні параметри  $L$  і  $C$  для коаксіальної лінії? Як знайти хвильовий опір?

11. Чим принципово структура поля двопровідної лінії відрізняється від структури поля коаксіальної лінії? Як це може впливати на побічне випромінювання з них?
12. Які міри приймаються в двопровідних лініях для зменшення побічного випромінювання?
13. Яка фізична сутність параметру  $\varepsilon_{\text{еф}}$  для мікросмушкової лінії?
14. Які обмеження властиві мікросмушкової лінії?

### Приклади вирішення задач

**Задача 7.1.** Коаксіальний кабель з розмірами  $a = 1\text{ мм}$ ,  $b = 3\text{ мм}$  має суцільне діелектричне заповнення з поліетилену. Визначити хвильовий опір.

#### Вирішення

1. За даними Табл.3.1 для поліетилену маємо значення відносної діелектричної проникності  $\varepsilon_r = 2.3$ .
2. За виразом (7.30) визначаємо хвильовий опір.

$$Z_X = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{60}{\sqrt{2.3}} \cdot \ln\left(\frac{3}{1}\right) \approx 43.5 \text{ Ом}.$$

**Задача 7.2.** Двопровідна повітряна лінія має розміри  $a = 1\text{ мм}$ ,  $b = 10\text{ мм}$ . Матеріал проводу латунь, частота  $f = 100\text{ МГц}$ . Визначити погонні параметри  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $G$  та хвильовий опір цієї лінії.

#### Вирішення

1. За даними Табл.2.2 для латуні маємо значення питомої провідності  $\sigma = 1.4 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ .
2. Оскільки лінія повітряна, то  $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ ,  $\mu_a = \mu_0$ .

3. За формулою (7.31) розраховуємо  $C$ .

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b-a}{a}\right)} = \frac{\pi \cdot 10^{-9}}{36\pi \cdot \ln\left(\frac{10-1}{1}\right)} = 1.264 \cdot 10^{-11} \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

За формулою (7.32) розраховуємо  $L$ .

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{b-a}{a}\right) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{10-1}{1}\right) = 8.886 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

4. Формулу для розрахунку погонного опору  $R$  візьмемо з літератури [21].

$$R = \frac{1}{\pi \cdot a} \cdot \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} = \frac{1}{\pi \cdot 10^{-3}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 1.4 \cdot 10^7}} = 1.615 \frac{\text{Ом}}{\text{м}}.$$

5. Величина погонної провідності є  $G = \omega C \cdot \text{tg}\delta$  [21]. Для повітря  $\text{tg}\delta = 0$ , отже і  $G = 0$ .

6. За виразом (7.11) розраховуємо хвильовий опір.

$$Z_X = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{8.886 \cdot 10^{-7}}{1.264 \cdot 10^{-11}}} = 265 \text{ Ом}.$$

З іншої сторони, цей розрахунок можна перевірити, якщо застосувати вираз (7.33).

$$Z_X = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \ln\left(\frac{b-a}{a}\right) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi}{10^{-9}}} \cdot \ln\left(\frac{10-1}{1}\right) \approx 265 \text{ Ом}$$

Бачимо, що результати розрахунків співпадають. Зауважимо, що знання величин  $R$  та  $Z_X$  дозволяє знайти величину сталої загасання  $\alpha_m$  в цій лінії за рахунок втрат в її металевих елементах  $\alpha_m = R/(2Z_X)$ . Щоб знайти повне значення сталої загасання  $\alpha$  треба додатково знайти сталу втрат в діелектричних елементах  $\alpha_d = G \cdot Z_X/2$ . Тоді  $\alpha = \alpha_m + \alpha_d$ .

## Задачі для самостійного вирішення

**Задача 7.3** Лінію передачі, яка має  $Z_X = 75$  Ом, навантажено на комплексний опір, де  $R_H = 150$  Ом,  $X_H = 50$  Ом. Знайти модуль і фазу коефіцієнту відбиття. За цими параметрами визначити КСХ в лінії передачі і ту частину потужності падаючої хвилі, яку може поглинути навантаження. Визначити ККД цієї лінії. Зробити висновки.

**Задача 7.4** В лініях міжміського широкосмугового електрозв'язку застосовується коаксіальний кабель магістрального типу, для якого нормативними документами рекомендовано значення хвилевого опору  $75$  Ом. З метою мінімізації сталої втрат обирають розміри так, щоб  $b/a = 3.6$ . В кабелях марки КМ розмір  $b = 9.6$  мм. Визначити розмір  $a$  для цієї марки кабеля та з'ясувати, яким при цьому повинно бути значення відносної діелектричної проникності заповнення кабеля та як досягти такого значення.

**Задача 7.5** Мікросмужкову лінію з  $Z_X = 50$  Ом (рис.7.4) виконано на підкладинці з полікору ( $\epsilon_r = 9.6$ ,  $\text{tg}\delta = 1.5 \cdot 10^{-4}$ ) товщиною  $h = 1$  мм. Визначити ширину смужкового провідника  $W$ , якщо його товщина  $t = 50$  мкм. Знайти геометричну довжину чвертьхвильового відрізка цієї лінії.

**Вказівка.** Треба вираз (7.37) розглядати як алгебраїчне рівняння відносно невідомої величини  $W = W_{\text{ef}}$  та організувати його чисельне вирішення за допомогою однієї з відомих математичних оболонок. Після цього за виразом (7.41) знайти значення  $W$ , далі за (7.40) –  $\epsilon_{\text{ef}}$ , а потім за (7.36) і величину  $\lambda$ .

## 8 ВИКОРИСТАННЯ КОРОТКИХ ВІДРІЗКІВ ЛІНІЙ ПЕРЕДАЧІ

### 8.1 Трансформація опорів

Вважатимемо відрізок лінії передачі коротким у тому випадку, коли його довжина  $l$  співрозмірна довжині хвилі  $\lambda$ .

Відрізок лінії передачі, навантажений на одному кінці деяким опором, має трансформувальні властивості, оскільки його вхідний опір відрізняється від опору навантаження (рис. 8.1).

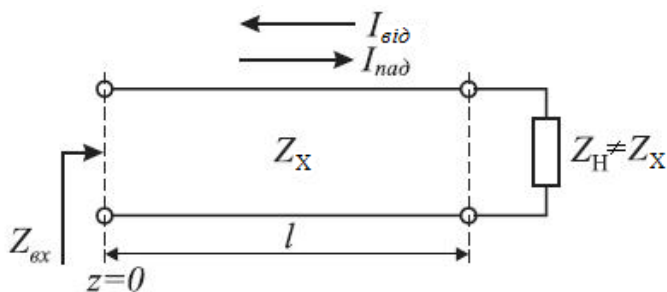


Рисунок 8.1 – Трансформація опорів

Встановимо залежність між цими опороми. У загальному випадку опір навантаження  $Z_H$  не дорівнює  $Z_X$ . Із співвідношення (7.7) маємо:

$$U(z) = Ae^{-\dot{\gamma}z} + Be^{\dot{\gamma}z}, \quad (8.1)$$

де  $\dot{\gamma} = \alpha + j\beta$ .

Повний струм в кожному перетині лінії (рис. 8.1) дорівнює сумі струмів, які створюються падаючою хвилею  $I_{над}$ , що поширюється в напрямі від перетину  $z=0$  до навантаження, і хвилею  $I_{від}$ , відбитою від навантаження:

$I(z) = I_{nad}(z) - I_{від}(z)$ , або

$$I(z) = \frac{1}{Z_X} \left( A e^{-\gamma z} - B e^{\gamma z} \right). \quad (8.2)$$

У перетині  $z = l$  відношення величин  $U_H = U(l)$  і  $I_H = I(l)$  вочевидь дорівнює опору навантаження:

$$Z_H = \frac{U_H}{I_H} = Z_X \frac{A e^{-\gamma l} + B e^{\gamma l}}{A e^{-\gamma l} - B e^{\gamma l}}. \quad (8.3)$$

Звідси відношення коефіцієнтів  $B$  та  $A$ :

$$\frac{B}{A} = \frac{Z_H - Z_X}{Z_H + Z_X} e^{-2\gamma l}. \quad (8.4)$$

Відношення напруги до струму в перетині  $z=0$  вочевидь дорівнює вхідному опору відрізка навантаженої лінії:

$$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{U(0)}{I(0)} = Z_X \frac{A + B}{A - B}, \text{ звідки}$$

$$\frac{Z_{BX}}{Z_X} = \frac{1 + B/A}{1 - B/A}. \quad (8.5)$$

Підстановка в (8.5) відношення коефіцієнтів  $B/A$  з (8.4) дає:

$$\frac{Z_{BX}}{Z_X} = \frac{Z_H [1 + \exp(-2\gamma l)] + Z_X [1 - \exp(-2\gamma l)]}{Z_H [1 - \exp(-2\gamma l)] + Z_X [1 + \exp(-2\gamma l)]}. \quad (8.6)$$

Використовуючи відомі співвідношення для гіперболічних функцій, маємо:

$$\frac{Z_{\text{вх}}}{Z_X} = \frac{\frac{Z_H}{Z_X} + th(j\lambda)}{1 + \frac{Z_H}{Z_X} th(j\lambda)}. \quad (8.7)$$

З (8.7) витікає, що при рівності опорів навантаження і хвилевого опору лінії ( $Z_H=Z_X$ ) вхідний опір  $Z_{\text{вх}}$  лінії збігається з хвилевим, тобто  $Z_{\text{вх}}=Z_X$ . В цьому випадку щезає хвиля, яка відбита від навантаження, і кажуть, що лінію ідеально узгоджено.

Якщо лінія передачі коротка ( $l \leq \lambda$ ) і втрати в ній вельми малі, тобто стала втрат  $\alpha \ll 1$  ( $\alpha \rightarrow 0$ ), то і величина  $\alpha l \rightarrow 0$ , тобто втратами можна знехтувати. Тоді формула (8.7) спрощується і набуває вигляду:

$$\frac{Z_{\text{вх}}}{Z_X} = \frac{\frac{Z_H}{Z_X} + jtg(\beta l)}{1 + j \frac{Z_H}{Z_X} tg(\beta l)}. \quad (8.8)$$

Це випадок «недисипативного» наближення.

Встановимо властивості відрізків ліній передачі, у яких довжини кратні половині або чверті довжини хвилі в цій лінії на певній частоті.

При  $\beta l = n\pi$  де  $n$  – ціле число ( $n \geq 1$ ),  $tg(n\pi) = 0$ . При  $n=1$  маємо  $l = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi \cdot \lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{2}$  (півхвильовий трансформатор).

Підставляючи це значення в (8.8), отримуємо:

$$Z_{\text{вх}} = Z_H. \quad (8.9)$$

Отже, вхідний опір півхвильового відрізка лінії передачі без втрат дорівнює величині опору, якого підключено до його кінця. Іншими словами, півхвильовий трансформатор не перетворює (не трансформує) опір навантаження, або «трансформує сам в себе».

Ще одна важлива властивість півхвильових трансформаторів – додатковий фазовий зсув  $180^0$ , який вноситься трансформатором.

Цікавий результат витікає з (8.8) при  $\beta l = \pi/2$ . Якщо підставити  $\beta l = \pi/2$  або  $n\pi/2$ , де  $n = (2k+1)$  – непарне ціле число (тобто утворюється чвертьхвильовий трансформатор), то можна в (8.8) знехтувати доданками 1 та  $Z_H/Z_X$ , оскільки функція  $tg(\beta l)$  прагне до нескінченності. Тому з (8.8) випливає рівність  $Z_{вх}/Z_X = Z_X/Z_H$ , звідки:

$$Z_X = \sqrt{Z_{вх} Z_H} . \quad (8.10)$$

Згідно з цією рівністю два різні опори ( $Z_{вх}$  і  $Z_H$ ) можна узгодити, якщо між ними встановити чвертьхвильовий відрізок лінії або відрізок з довжиною, що складає непарну кількість чвертей довжини хвилі з хвилевим опором  $Z_{Хтр}$ , який дорівнює середньому геометричному з опорів, які треба узгодити.

## 8.2 Реактивні шлейфи

Реактивним шлейфом (далі просто шлейфом) називають короткий відрізок лінії передачі, причому в перетині навантаження (на кінці відрізка) створено або режим короткого замикання (КЗ), або холостого ходу (ХХ). Режиму КЗ відповідає значення опору навантаження  $Z_H = 0$ , а режиму ХХ –  $Z_H \rightarrow \infty$ .

Знайдемо за (8.7) вхідний опір шлейфу в режимі КЗ:

$$Z_{\text{вхКЗ}} = Z_X \operatorname{th}(j\beta l). \quad (8.11)$$

Якщо лінія недисипативна, то:

$$Z_{\text{вхКЗ}} = Z_X \operatorname{th}(j\beta l) = jZ_X \operatorname{tg}(\beta l). \quad (8.12)$$

Відповідно, в режимі ХХ, при  $Z_H \rightarrow \infty$  в (8.7) отримаємо невизначеність вигляду  $\frac{\infty}{\infty}$  і, розкриваючи її за правилом Лопіталя, маємо:

$$Z_{\text{вхХХ}} = \frac{Z_X}{\operatorname{th}(j\beta l)}. \quad (8.13)$$

Якщо лінія недисипативна, то:

$$Z_{\text{вхХХ}} = -j \frac{Z_X}{\operatorname{tg}(\beta l)} = -jZ_X \operatorname{ctg}(\beta l). \quad (8.14)$$

З виразів (8.12) і (8.14) виходить, що вхідний опір шлейфу в режимі КЗ або ХХ залежить від його довжини і носить або ємнісний, або індуктивний характер. Залежність вхідного опору шлейфу від довжини хвилі, яку розраховано за (8.12) і (8.14) при  $0 \leq l \leq \lambda/4$  наведено на рис. 8.2:

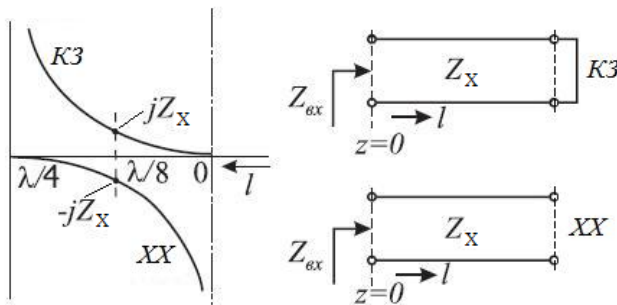


Рисунок 8.2 – Вхідний опір шлейфів

У розімкненій, або короткозамкнутій недисипативній лінії вся енергія падаючої хвилі відбивається від кінця лінії і повертається до її входу.

Перемножуючи вирази (8.12) і (8.14), знаходимо:

$$Z_{\text{вхКЗ}} \cdot Z_{\text{вхХХ}} = Z_X^2. \quad (8.15)$$

На використанні цієї рівності засновано простий метод визначення хвильового опору лінії передачі: спочатку вимірюється вхідний опір лінії в режимі короткого замикання, а потім в режимі холостого ходу.

На рис 8.3 представлено частотну залежність вхідного опору недисипативного шлейфу КЗ при фіксованій довжині відрізка ( $Z_{\text{вх}} = jZ_X \text{tg}(2\pi fl/v_\phi)$ ).

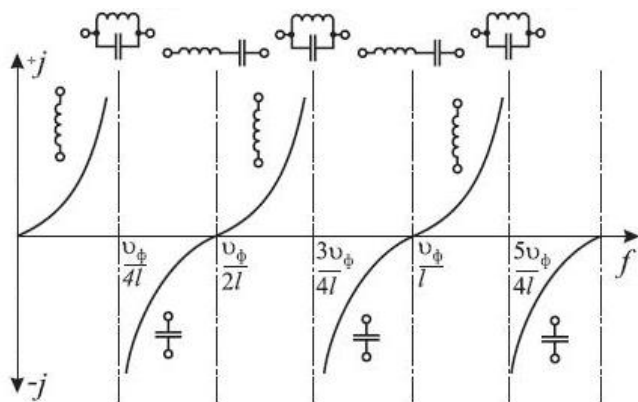


Рисунок 8.3 – Залежність  $Z_{\text{вхКЗ}}$  від частоти

На низьких частотах вхідний опір носить чисто індуктивний характер. Нескінченно великий реактивний опір при  $f=v_\phi/(4l)$ , де довжина відрізка дорівнює чверті довжини хвилі в лінії, відповідає опору паралельного резонансного

контур на частоті резонансу. При подальшому збільшенні частоти вхідний опір стає чисто ємнісним, оскільки значення тангенсу від'ємні. Потім вхідний опір змінюється від ємнісного до індуктивного, проходячи через нуль на частоті  $f=v_{\phi}/(2l)$ , що аналогічно послідовному резонансному LC-контурі. При подальшому підвищенні частоти картина періодично повторюється.

Аналогічно, для частотної залежності  $Z_{\text{вх XX}}(f)$  шлейфу в режимі XX маємо  $Z_{\text{вх XX}} = -jZ_{\text{X}} \text{ctg} \left( \frac{2\pi fl}{v_{\phi}} \right)$ . Ця залежність аналогічна залежності  $Z_{\text{вх КЗ}}(f)$ , яку зображено на рис. 8.3, але починаючи з частоти  $f = \frac{v_{\phi}}{4l}$ , що еквівалентно укороченню шлейфу в режимі КЗ на величину  $\frac{\lambda}{4}$ .

Можливість реалізації довільних значень індуктивності і ємності за допомогою короткозамкнутих і розімкнених шлейфів дозволяє використовувати їх при побудові узгоджувальних схем, і частотно вибіркового пристроїв (коливальних систем, фільтрів).

### **8.3 Використання відрізків ліній в якості коливальних систем**

У наведених вище співвідношеннях для вхідного опору КЗ і XX шлейфів приймалося, що втрати в лініях відсутні ( $al=0$ ). Проте реальні лінії передачі завжди мають втрати ( $al \neq 0$ ), які, як правило, можна вважати малими. Розглянемо цей випадок детальніше, наприклад, для КЗ відрізка.

З формули (8.11) впливає:

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{вх.КЗ}} &= Z_X \operatorname{th}(\alpha l + j\beta l) = Z_X \frac{\operatorname{th}(\alpha l) + \operatorname{th}(j\beta l)}{1 + \operatorname{th}(\alpha l)\operatorname{th}(j\beta l)} = \\
 &= Z_X \frac{\operatorname{th}(\alpha l) + j\operatorname{tg}(\beta l)}{1 + j\operatorname{th}(\alpha l)\operatorname{tg}(\beta l)}. \quad (8.16)
 \end{aligned}$$

При малих втратах, що відповідає умові  $\alpha l \rightarrow 0$ , справедливі відомі співвідношення для малого аргументу

$$\sin(\alpha l) \approx \operatorname{sh}(\alpha l) \approx \operatorname{th}(\alpha l) \approx \alpha l.$$

Тоді з (8.16) отримаємо:

$$Z_{\text{вх.КЗ}} \approx Z_X \frac{\alpha l + j\operatorname{tg}(\beta l)}{1 + j\alpha l \cdot \operatorname{tg}(\beta l)}. \quad (8.17)$$

При  $\beta l = k\pi$ , де  $k=0,1,\dots$   $\operatorname{tg}(\beta l) = 0$ . Тоді вхідний опір буде мати мінімальне значення, яке дорівнює:

$$Z_{\text{вх.КЗ}} = Z_{\min \text{КЗ}} = Z_X \cdot \alpha l. \quad (8.18)$$

При  $\beta l = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{tg}(\beta l) = \infty$ . В цьому випадку в чисельнику (8.17) можна знехтувати  $\alpha l$ , а в знаменнику 1, в результаті вхідний опір матиме максимальне значення, яке дорівнює:

$$Z_{\text{вхКЗ}} = Z_{\max \text{КЗ}} = \frac{Z_X}{\alpha l}. \quad (8.19)$$

Для розімкненого на кінці відрізка лінії (XX) відповідно до (8.13) вхідний опір буде:

$$Z_{\text{вхXX}} = Z_X \operatorname{cth}(\alpha l + j\beta l) = Z_X \frac{1 + j\operatorname{th}(\alpha l)\operatorname{tg}(\beta l)}{\operatorname{th}(\alpha l) + j\operatorname{tg}(\beta l)}. \quad (8.20)$$

Звідси при малих втратах буде:

$$Z_{\text{вхXX}} \approx Z_X \frac{1 + jal \cdot \text{tg}(\beta l)}{al + j\text{tg}(\beta l)}. \quad (8.21)$$

Тоді при  $\beta l = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $\text{tg}(\beta l) = \infty$ , маємо мінімальне значення вхідного опору розімкненого відрізка:

$$Z_{\text{вхXX}} = Z_{\text{min XX}} = Z_X \cdot al. \quad (8.22)$$

При  $\beta l = k\pi$ ,  $\text{tg}(\beta l) = 0$ , і вхідний опір розімкненого відрізка буде мати максимальне значення:

$$Z_{\text{вхXX}} = Z_{\text{max XX}} = \frac{Z_X}{al}. \quad (8.23)$$

На рис. 8.4 показано залежність вхідного опору КЗ і ХХ відрізків лінії від відношення  $l/\lambda$ . Як видно, максимуми (і мінімуми) КЗ і ХХ відрізків однакової довжини зміщено на  $\lambda/4$  і вони мають яскраво виражений резонансний характер. Перший максимум для КЗ відрізка спостерігається при  $l = \lambda/4$ . Ця довжина хвилі зветься основною резонансною довжиною хвилі  $\lambda_{\text{рез}}$ .

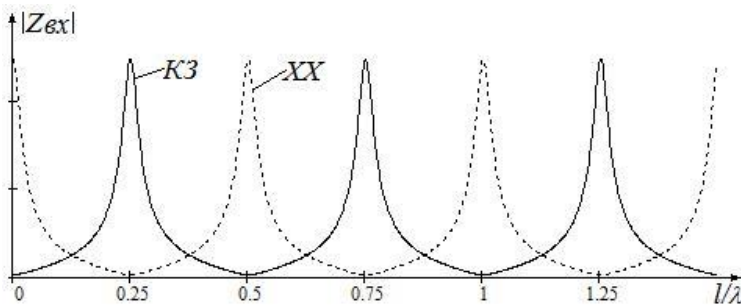


Рисунок 8.4 – Вхідний опір КЗ і ХХ відрізків лінії

При цьому вхідний опір:

$$Z_{\text{вх.рез}} = \frac{4Z_X}{\alpha\lambda_{\text{рез}}}. \quad (8.24)$$

На практиці в якості високодобротних резонаторів широко використовуються, зокрема, чвертьхвильові відрізки КЗ. Розімкнені на кінці (ХХ) відрізки використовуються рідко, оскільки з відкритого кінця лінії випромінюється досить велика частка корисної потужності.

Добротність чвертьхвильового резонатора КЗ можна отримати, розглядаючи невеликі за значенням відхилення від резонансної частоти, тобто коли:

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1. \quad (8.25)$$

Величина  $\delta$  зветься відносним відхиленням частоти, а  $\Delta\omega$  – абсолютним.

При цьому вхідний опір чвертьхвильового КЗ відріжку на частоті  $(\omega_0 + \Delta\omega)$  з достатньою точністю описується формулою:

$$Z_{\text{вх}}(\omega) = \frac{Z_X}{\alpha l} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi\delta}{2\alpha l}\right)^2}}. \quad (8.26)$$

На резонансній частоті  $\omega_0$  ( $\Delta\omega = 0$ )

$$Z_{\text{вх}}(\omega_0) = \frac{Z_X}{\alpha l}. \quad (8.27)$$

Тоді рівняння резонансної кривої буде мати вигляд:

$$\frac{Z_{\text{BX}}(\omega)}{Z_{\text{BX}}(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi\delta}{2\alpha l}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{4\alpha l} \cdot \frac{1}{Q}\right)^2}}. \quad (8.28)$$

Звідси, з врахуванням визначення смуги пропускання за спадом значення резонансної кривої (8.28) до рівня  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , отримаємо вираз для добротності резонатора, утвореного чвертьхвильовим КЗ відрізком лінії довжиною  $l$ :

$$Q = \frac{\pi}{4\alpha l}. \quad (8.29)$$

З формули (8.29) витікає, що резонансні властивості КЗ відрізків лінії виявляються тим різкіше, чим менші втрати.

## 8.4 Використання відрізків ліній для узгодження

Процес налаштування лінії в режим рухомої (біжучої, біжної) хвилі звать узгодженням, а лінію, в якій встановився режим рухомих хвиль – узгодженою.

Для досягнення узгодження між двома лініями або між лінією та навантаженням треба встановити узгоджувальний чотиріполюсник. Призначення цього чотиріполюсника – усунення відбитих хвиль, тобто перетворення опору навантаження  $\dot{Z}_H = R_H + jX_H$  в опір  $\dot{Z}_{\text{ex}} = Z_X + j0$ . З фізичної точки зору цей корисний ефект досягається за рахунок використання явища інтерференції, коли сукупність відбитих хвиль компенсує одна одну.

Якість узгодження оцінюють (або контролюють) за досягнутим рівнем КСХ в лінії. Смугу частот, в межах якої КСХ не перевищує допустимого значення, звать смугою частот узгодження. При цьому розрізняють вузькосмугове та широкосмугове узгодження і застосовують відповідні алгоритми дій .

Алгоритм дій при вирішенні задачі вузькосмугового узгодження передбачає досягнення режиму рухомої хвилі лише на одній розрахунковій частоті. При цьому смугу частот узгодження взагалі не задають та не контролюють, а визначають або розрахунковим шляхом, або експериментом вже після знаходження номіналів узгоджувальних елементів. Після вирішення цієї задачі може статися так, що смуга частот узгодження може виявитися досить широкою. Таким чином, термін «вузькосмугове» означає лише технологію процесу узгодження.

Альтернативою вузькосмуговому є широкосмугове узгодження. При цьому номінали узгоджувальних елементів визначаються із умови досягнення потрібної смуги частот узгодження за критерієм максимально допустимого значення КСХ в лінії. Тут взагалі відсутня вимога досягнення значення  $КСХ=1$  на якійсь розрахунковій частоті (або їх сукупності) та така вимога не є основою для розрахунку номіналів узгоджувальних елементів.

#### **8.4.1 Вузькосмугове узгодження**

Узгодження лінії передачі полягає в перетворенні опору навантаження в такий опір, який дорівнює хвилевому опору, внаслідок чого в лінії встановлюється режим рухомих (біжних) хвиль. Такий режим досягається шляхом встановлення між навантаженням і розглядуваною лінією перехідного узгоджувального елементу.

Один з варіантів узгодження комплексного навантаження з лінією передачі полягає у використанні

реактивних шлейфів та чвертьхвильових трансформаторів опору в якості узгоджувальних елементів. Частіше для цієї мети застосовуються КЗ шлейфи. У простих випадках застосовуються дві схеми узгодження:

- за допомогою КЗ шлейфу і чвертьхвильового трансформатору;
- за допомогою одного КЗ шлейфу.

Схему узгодження за допомогою КЗ шлейфу і чвертьхвильового трансформатору представлено на рис. 8.5.

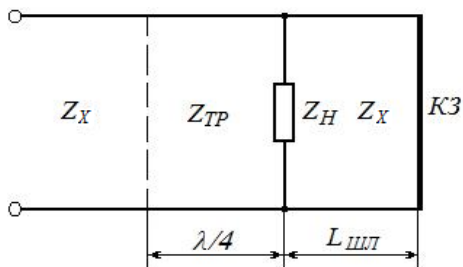


Рисунок 8.5 – Схема узгодження за допомогою КЗ шлейфу і чвертьхвильового трансформатору

Ідея такого узгодження полягає в тому, що спочатку за допомогою КЗ шлейфу компенсується уявна складова провідності опору навантаження. Після цього лінія виявиться навантаженою на деякий дійсний опір, який зручно узгоджувати з хвильовим опором лінії за допомогою чвертьхвильового трансформатору.

Якщо опір навантаження:

$$Z_H = R_H + j \cdot X_H, \quad (8.30)$$

то провідність навантаження буде:

$$Y_H = \frac{1}{Z_H} = G_H - j \cdot B. \quad (8.31)$$

$$\text{Тут } G_H = \frac{R_H}{R_H^2 + X_H^2}, \quad B = \frac{X_H}{R_H^2 + X_H^2}.$$

Умова компенсації уявної складової провідності  $B$  за допомогою КЗ шлейфу має вигляд:

$$-j \cdot B + \frac{1}{j \cdot X_{ШЛ}} = 0, \quad (8.32)$$

де  $X_{ШЛ} = Z_X \cdot \text{tg}(k \cdot L_{ШЛ})$  – вхідний опір КЗ шлейфу;

$$k = 2 \cdot \pi \cdot f / c \quad \text{– хвильове число;}$$

$f$  – робоча частота;

$c$  – швидкість світла у вільному просторі.

Звідси витікає співвідношення для розрахунку довжини КЗ шлейфу:

$$\text{ctg}(k \cdot L_{ШЛ}) = -B \cdot Z_X. \quad (8.33)$$

Таким чином, після компенсації реактивної складової провідності навантаження, лінію буде навантажено на активний опір

$$R = \frac{1}{G_H}, \quad (8.34)$$

який за допомогою чвертьхвильового трансформатору вже може бути узгоджено з лінією. При цьому:

$$Z_{TP} = \sqrt{R \cdot Z_X}. \quad (8.35)$$

Другу схему узгодження за допомогою одного КЗ шлейфу показано на рис. 8.6.

Ідея цього узгодження полягає в наступному. Короткозамкнутий шлейф встановлюється в такому перетині

АА, в якому вхідна провідність навантаженого відрізка лінії, яку обчислено у бік навантаження, буде дорівнювати:

$$Y_{AA} = 1/Z_X - j \cdot B. \quad (8.36)$$

З використанням формули (8.8) для трансформації опору (передбачається, що втрати в лінії відсутні), провідність в перетині АА визначається виразом

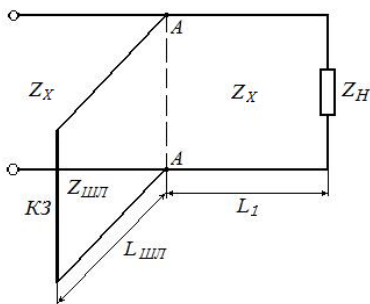


Рисунок 8.6 – Схема узгодження за допомогою одного КЗ шлейфу

$$Y_{AA}(L_1) = \frac{1}{Z_{вх.АА}(L_1)} = \frac{1}{Z_X} \cdot \frac{1 + j \frac{Z_H}{Z_X} \operatorname{tg}(\beta L_1)}{\frac{Z_H}{Z_X} + j \operatorname{tg}(\beta L_1)}. \quad (8.37)$$

Тоді з (8.37) витікає, що:

$$\operatorname{Re}[Y_{AA}(L_1)] = \frac{1}{Z_X}. \quad (8.38)$$

Вирішення трансцендентного рівняння (8.38) дає величину  $L_1$ , підстановка якої в уявну частину (8.37) дозволяє знайти  $B$ :

$$B = \operatorname{Im}[Y_{AA}(L_1)]. \quad (8.39)$$

Довжина паралельного шлейфу ( $L_{шлп}$ ), призначеного для компенсації уявної складової провідності  $B$ , визначається з умови, аналогічної попередньому випадку:

$$-j \cdot B + \frac{1}{j \cdot X_{ШЛ}} = 0, \quad (8.40)$$

де  $X_{ШЛ} = Z_{ШЛ} \cdot \operatorname{tg}(k \cdot L_{ШЛ})$ .

Після компенсації уявної складової  $B$  лінія виявляється навантаженою в перетині АА на опір  $R = Z_X$ , тобто буде узгодженою.

### 8.4.2 Широкопasmове узгодження

Узгодження в широкій смузі частот необхідне при роботі у відносному діапазоні частот порядку 10% і більше, а також при використанні сигналів з широким спектром. Основними широкопasmовими узгоджувальними пристроями є багатоступінчасті трансформатори і лінії із змінним профілем поперечного перетину, які зветься плавними переходами.

Просту схему узгодження за допомогою ступінчастого трансформатору наведено на рис. 8.7; принцип її роботи засновано на використанні формули (8.10), відповідно до якої, для узгодження ліній з хвильовими опорами  $Z_{X1}$  і  $Z_{X2}$  достатньо між ними встановити відрізок лінії завдовжки  $\lambda/4$  з хвильовим опором:

$$Z_{TP} = \sqrt{Z_{X1} \cdot Z_{X2}}. \quad (8.41)$$

Фізично процес узгодження пояснюється взаємною компенсацією падаючих і відбитих хвиль в площинах стику ліній з різними хвильовими опорами.

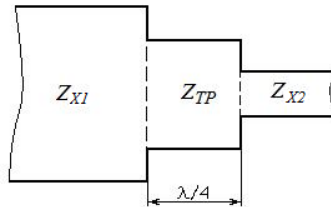


Рисунок 8.7 – Проста схема узгодження

При повному узгодженні ці хвилі мають бути зсунуті за фазою на  $180^0$  і мати однакові амплітуди.

Як правило, ступінчасті трансформатори використовують для узгодження дійсних опорів. В принципі, можна узгоджувати і комплексні опори, але лише при умові що їх значення будуть комплексно спряженими.

Схема на рис.8.7 має істотний недолік – досить вузьку робочу смугу узгодження. Більш широкосмугове узгодження досягається при використанні багатоступінчастих трансформаторів, хоча на практиці звичайно кількість рівнів не перевищує 3, що зв'язано з великою довжиною такої узгоджувальної структури.

Узагальнену схему ступінчастого трансформатору наведено на рис. 8.8.

Просту методику розрахунку багатоступінчастого трансформатору засновано на підборі відношення хвилевих опорів у виразі:

$$\frac{Z_H}{Z_{X n}} = \frac{Z_{X n}}{Z_{ex n}} = \frac{Z_{ex n}}{Z_{X n-1}} = \frac{Z_{X n-1}}{Z_{ex n-1}} = \dots = \frac{Z_{X 1}}{Z_{ex 1}}. \quad (8.42)$$

Групування членів, що попарно стоять поряд дає:

$$Z_{X n}^2 = Z_H \cdot Z_{ex n}, \quad Z_{X n-1}^2 = Z_{ex n} \cdot Z_{ex n-1} \text{ і т.і.} \quad (8.43)$$

Комбінуючи різні співвідношення в (8.43), можна знайти хвилеві опори всіх сходинок. Довжина кожної секції трансформатору дорівнює чверті довжини хвилі в лінії на центральній частоті. Якщо в лінії є дисперсія, то довжина кожної секції обчислюється за формулою:

$$l = \frac{\lambda_B \cdot \lambda_H}{2(\lambda_B + \lambda_H)}, \quad (8.44)$$

де  $\lambda_г$  і  $\lambda_н$  – відповідають найвищій і найнижчій частотам використовуваного діапазону.

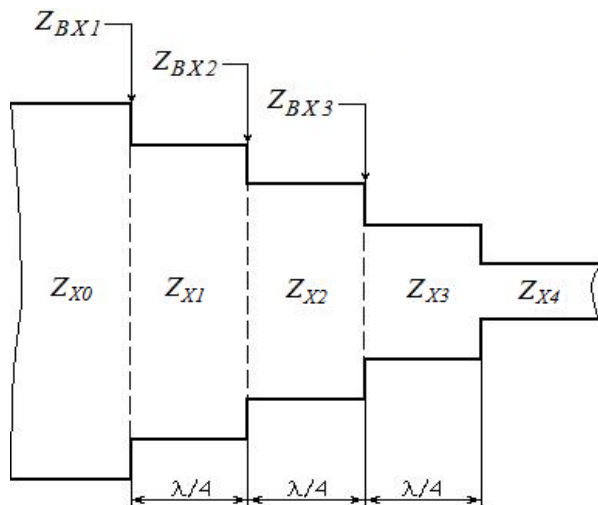


Рисунок 8.8 – Схема багаступінчастого трансформатора

Відносну смугу пропускання трансформатора  $P$  може бути розраховано за формулою:

$$P = \frac{2(\lambda_н - \lambda_г)}{\lambda_н + \lambda_г}. \quad (8.45)$$

По аналогії із смуговими фільтрами амплітудно-частотні характеристики ступінчастих трансформаторів апроксимуються або за Баттервортом, або за Чебишевим. Точні формули для їх розрахунку наведено в таблиці 8.1, де  $n=2$  – відповідає двоступінчастому, а  $n=3$  – триступінчастому трансформатору.

Таблиця 8.1 – Формули розрахунку параметрів ступінчастих трансформаторів

n=2	n=3
Апроксимація за Баттервортом	
$Z_{X1} = Z_{X0} \cdot \left( \frac{Z_H}{Z_{X0}} \right)^{1/4}$ $Z_{X2} = Z_{X0} \cdot \left( \frac{Z_H}{Z_{X0}} \right)^{3/4}$	$V_1^2 + 2R^{1/2} \cdot V_1 - \frac{2R^{1/2}}{V_1} - \frac{R}{V_1^2} = 0$ $Z_{X1} = Z_{X0} \cdot V_1$ $Z_{X2} = Z_{X0} \cdot R^{1/2}$ $Z_{X3} = Z_{X0} \cdot \frac{R}{V_1}$
Апроксимація за Чебишевим	
$V_1^2 = (D^2 + R)^{1/2} + D$ $Z_{X1} = Z_{X0} \cdot V_1$ $Z_{X2} = Z_{X0} \cdot \frac{R}{V_1}$ <p>де <math>R = \frac{Z_{X0}}{Z_H}</math> при <math>Z_{X0} &gt; Z_H</math> або <math>R = \frac{Z_H}{Z_{X0}}</math> при <math>Z_{X0} &lt; Z_H</math></p>	$V_1^2 + 2R^{1/2} \cdot V_1 - \frac{2R^{1/2}}{V_1} - \frac{R}{V_1^2} = \frac{3k^2(R-1)}{4-3k^2}$ $Z_{X1} = Z_{X0} \cdot V_1$ $Z_{X2} = Z_{X0} \cdot R^{1/2}$ $Z_{X3} = Z_{X0} \cdot \frac{R}{V_1}$ <p>де <math>R = \frac{Z_{X0}}{Z_H}</math> при <math>Z_{X0} &gt; Z_H</math> або <math>R = \frac{Z_H}{Z_{X0}}</math> при <math>Z_{X0} &lt; Z_H</math></p>

Додаткова інформація:

$$D = \frac{k^2(R-1)}{2(2-k^2)}; \quad k = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot P\right)$$

Узгоджувальні елементи будуються не лише на основі ступінчастих трансформаторів, але і з відрізків ліній із змінним профілем поперечного перетину, як в разі плавних переходів. При цьому профіль переходу описується якою-небудь добре відомою функцією. Наприклад, досить часто використовується перехід, який описується експоненціальною функцією. На рис. 8.9 зображено такий перехід, який встановлено між лініями з різними значеннями хвильових опорів.

Для експоненціальної функції, яка описує перехід, можна записати:

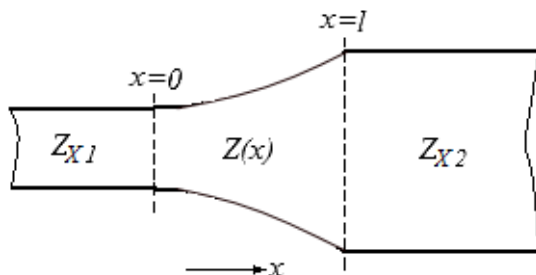


Рисунок 8.9 – Схема експоненціального переходу

$$\frac{Z(x)}{Z_{X1}} = \exp\left(\frac{\theta \cdot x}{l}\right), \quad (8.46)$$

де  $\theta$  – параметр, який характеризує перехід і обирається різними способами. Зазвичай обирають  $\theta = \ln(Z_{X2}/Z_{X1})$ , тоді:

$$\frac{Z(x)}{Z_{X1}} = \exp\left(\frac{\ln(Z_{X2}/Z_{X1}) \cdot x}{l}\right). \quad (8.47)$$

Перевірка граничних умов дає:

при  $x=0$ ,  $Z(0) = Z_{X1} \exp(0) = Z_{X1}$ ,

при  $x=l$ ,  $Z(l) = Z_{X1} \exp(\ln(Z_{X2}/Z_{X1})) = Z_{X2}$ .

Графік нормованого коефіцієнту відбиття для переходу, який описано виразом (8.47), наведено на рис. 8.10.

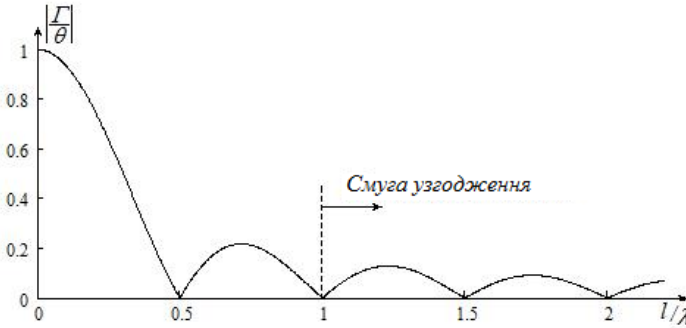


Рисунок 8.10 – Частотна характеристика експоненціального переходу

Можна показати, що ця залежність описується функцією  $|\sin(x)/x|$ . Нульові значення коефіцієнту відбиття спостерігаються при  $l/\lambda = 0.5, 1.0, 1.5, \dots$ , тобто в цих точках має місце найкраще узгодження.

З графіка видно, що якщо довжину переходу вибрати рівній довжині хвилі ( $l/\lambda = 1.0$ ), або більше, то перехід буде вельми широкосмуговим.

## 8.5 Фільтри на розподілених структурах

Короткий відрізок лінії передачі довжиною  $l \ll \lambda$ , з хвилевим опором  $Z_X$  і сталою поширення  $\gamma$  можна представити

у вигляді Т– або П–подібної еквівалентної схеми заміщення із зосереджених елементів (рис. 8.11).

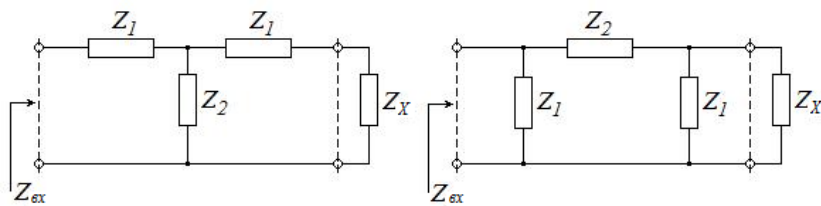


Рисунок 8.11 – Еквівалентні схеми заміщення відрізка лінії

Ці схеми заміщення точно характеризують відрізок лінії лише на тій частоті, на якій розраховано величини елементів, які входять в еквівалентні схеми.

За еквівалентними схемами нескладно знайти вхідні опори  $Z_{вх}$  для кожної з схем. Наприклад, для Т – подібної схеми:

$$Z_{ex} = Z_1 + \frac{Z_2(Z_1 + Z_X)}{Z_1 + Z_2 + Z_X}. \quad (8.48)$$

Окрім цього, вхідний і вихідний струми зв'язано співвідношенням:

$$I_{вих} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_B} I_{вх}. \quad (8.49)$$

Оскільки відрізок лінії вважається узгодженим, то в ньому поширюватиметься лише падаюча хвиля і, отже, струми на вході і виході зв'язані рівнянням:

$$I_{вих} = I_{вх} \exp(-\gamma l). \quad (8.50)$$

Комбінуючи (8.48), (8.49), (8.50), з урахуванням того, що для узгодженої лінії  $Z_{ex} = Z_X$ , після нескладних перетворень отримаємо:

$$Z_1 = Z_X th\left(\frac{j\lambda}{2}\right), \quad (8.51)$$

$$Z_2 = \frac{Z_X}{sh(j\lambda)}. \quad (8.52)$$

Аналогічно розглядаючи П – подібну схему, отримаємо вирази для елементів, які в неї входять:

$$Z_1 = \frac{Z_X}{th\left(\frac{j\lambda}{2}\right)}, \quad (8.53)$$

$$Z_2 = Z_X sh(j\lambda). \quad (8.54)$$

Для короткого відрізка лінії втратами в ній можна нехтувати ( $\alpha l = 0$ ), і тоді, з врахуванням малого значення аргументу  $\beta l$  (оскільки  $l \ll \lambda$ ) з (8.51) і (8.52), отримаємо:

$$Z_1 = Z_X tg\left(j\frac{\beta l}{2}\right) = jZ_X tg\left(\frac{\beta l}{2}\right) \approx jZ_X \frac{\beta l}{2} = jZ_X \frac{\omega l}{2v_\Phi}, \quad (8.55)$$

$$Z_2 = \frac{Z_X}{\sin(j\beta l)} = \frac{Z_X}{j\sin(\beta l)} \approx \frac{Z_X}{j\beta l} = \frac{Z_X}{j\frac{\omega l}{v_\Phi}}. \quad (8.56)$$

Еквівалентні схеми відрізків лінії на зосереджених елементах, які відповідають схемам на рис. 8.11, наведено на рис. 8.12.

Використання (8.55) і (8.56) для Т – подібної схеми на рис. 8.12 дає величини  $X_L$  і  $B$ :

$$X_L = \omega L = Z_X \frac{\omega l}{v_\Phi}, \quad (8.57)$$

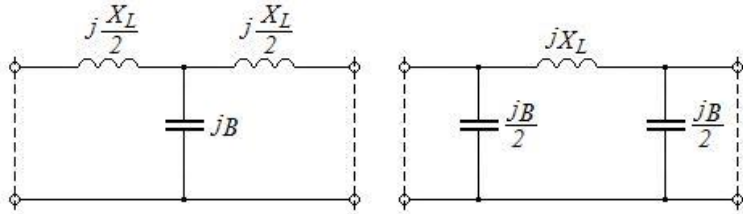


Рисунок 8.12 – Схеми відрізків лінії на зосереджених елементах

$$B = \omega C = \frac{1}{Z_X} \frac{\omega l}{v_\Phi} . \quad (8.58)$$

Аналогічні формули отримують і для П – подібної схеми.

З (8.57) і (8.58) витікає, що характеристики зосереджених елементів і елементів з розподіленими параметрами зв'язано співвідношеннями:

$$L = Z_X \frac{l}{v_\Phi} , \quad (8.59)$$

$$C = \frac{1}{Z_X} \frac{l}{v_\Phi} . \quad (8.60)$$

Ці формули показують, що при встановленні короткого відрізка лінії передачі з високим значенням хвильового опору в розрив лінії з нижчим значенням хвильового опору ємність в (8.60)  $C \rightarrow 0$ . З цього витікає, що такий відрізок буде еквівалентним послідовно ввімкнутій індуктивності. Якщо ж в розрив лінії з високим хвильовим опором встановити відрізок лінії з малим хвильовим опором, то згідно (8.59) і (8.60), такий відрізок поводитиметься як ємність, яку ввімкнуто в лінію паралельно.

Використовуючи розглянуті елементи з розподіленими параметрами, які за властивостями еквівалентні зосередженим, можна реалізувати ряд елементів з іншими схемами ввімкнення: паралельна індуктивність, послідовний контур, який ввімкнено паралельно, і ін. У таблиці 8.2 наведено еквівалентні схеми на зосереджених елементах і відповідні їм реалізації на розподілених елементах на основі смужкової (мікросмужкової) лінії передачі, а також вказано межі їх застосовності.

Реалізація послідовної ємності, або ввімкнутого послідовно паралельного коливального контуру, за допомогою відрізків смужкових і мікросмужкових ліній можлива лише з використанням спеціальних прийомів. Наприклад, для реалізації ємності, яку ввімкнено послідовно, в лініях передачі смужкового типу прорізаються поперечні щілини. Необхідність в таких елементах виникає при створенні фільтрів верхніх частот і смугопропускальних фільтрів.

Як приклад на рис. 8.13 наведено схему фільтру низьких частот на зосереджених елементах і реалізація цієї схеми на елементах з розподіленими параметрами з використанням відрізків мікросмужкових ліній.

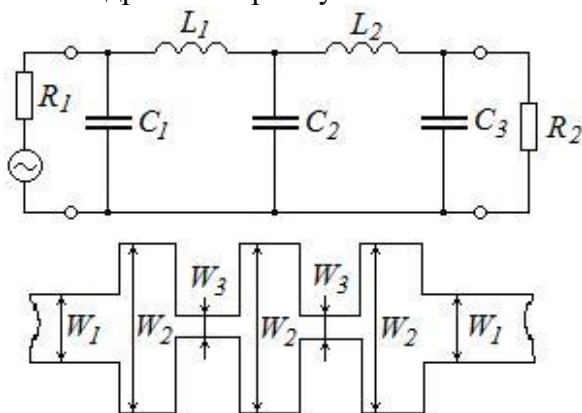
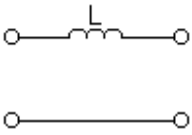
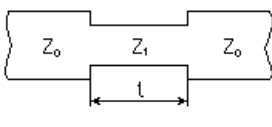
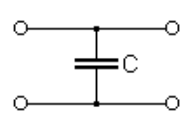
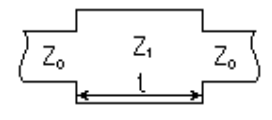
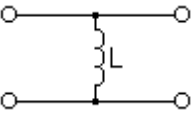
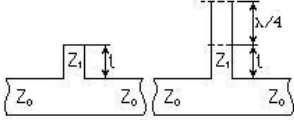
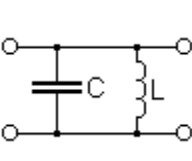
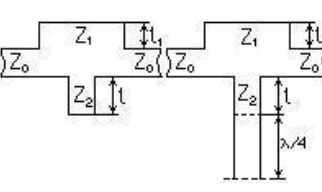
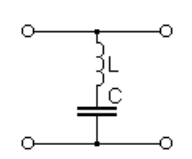
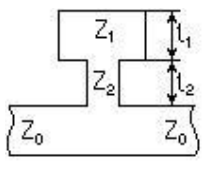


Рисунок 8.13 – Фільтр низьких частот

Таблиця 8.2 – Перехід від зосереджених до розподілених елементів

Кола на зосереджених елементах	Елементи з розподіленими параметрами	Формула переходу
		$L = \frac{Z_1 \cdot l}{f \cdot \lambda},$ $Z_1 > Z_0, l < \lambda/8$
		$C = \frac{l}{Z_1 \cdot f \cdot \lambda},$ $Z_1 < Z_0, l < \lambda/8$
		$L = \frac{Z_1 \cdot l}{f \cdot \lambda}$
		$C = \frac{l_1}{Z_1 \cdot f \cdot \lambda};$ $L = \frac{Z_2 \cdot l_2}{f \cdot \lambda}$
		$C = \frac{l_1}{Z_1 \cdot f \cdot \lambda};$ $L = \frac{Z_2 \cdot l_2}{f \cdot \lambda}$

Приклад топології смужкових провідників при мікросмужковій реалізації смугопрпускательного фільтру з

використанням властивостей чвертьхвильових шлейфів наведено на рис. 8.14.

Якщо в наведеній схемі коротке замикання в чвертьхвильових шлейфах замінити на холостий хід, то отримаємо смугозагороджувальний (режекторний) фільтр.

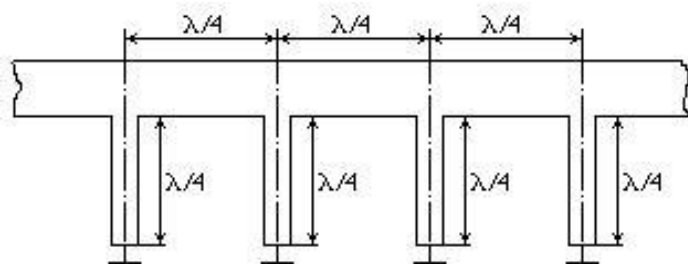


Рисунок 8.14 –Смуговий фільтр на мікросмужкових лініях

Слід зазначити, що для точнішого розрахунку характеристик фільтрів необхідно враховувати реактивний характер впливу неоднорідностей, які виникають в місцях розгалужень і стику ліній з різними значеннями хвильових опорів.

### Контрольні запитання

1. При якій умові відрізок лінії передачі вважається коротким і як пояснити його трансформувальні властивості?
2. Яку фізичну сутність має величина  $Z_{ВХ}$  лінії та за яким виразом його розраховують?
3. Що таке недисипативне наближення?
4. Які властивості має півхвильовий трансформатор?
5. Які властивості має чвертьхвильовий трансформатор?
6. Що таке реактивні шлейфи КЗ та ХХ і як знайти їх  $Z_{ВХ}$ ?
7. Яке є співвідношення між величинами вхідних опорів реактивних шлейфів КЗ і ХХ та як його застосовують?

8. Який вигляд мають частотні залежності  $Z_{ВХ}$  реактивних шлейфів КЗ і ХХ та як ці властивості застосовують?
9. Як впливають втрати в лініях на резонансні властивості КЗ і ХХ коротких відрізків ліній та який вигляд мають резонансні криві таких елементів?
10. Як розуміється режим узгодження та що таке узгоджувальний чотириполюсник?
11. За якими критеріями виконуються вузькосмугове та широкосмугове узгодження?
12. Який алгоритм виконання вузькосмугового узгодження за допомогою шлейфу та трансформатору?
13. Який алгоритм виконання вузькосмугового узгодження за допомогою одного лише КЗ шлейфу?
14. Який алгоритм виконання широкосмугового узгодження за допомогою багатоступінчастого трансформатору?
15. Який алгоритм виконання широкосмугового узгодження за допомогою трансформатору, який виконано у вигляді експоненціального переходу?
16. Який вигляд мають еквівалентні схеми заміщення коротких відрізків лінії та як знайти параметри елементів цих схем?
17. Який вигляд мають схеми на зосереджених елементах для коротких відрізків лінії та як знайти параметри цих елементів?
18. Як в мікросмужковому варіанті реалізуються елементи L та C для різних способів ввімкнення їх в лінію?

### Приклади вирішення задач

**Задача 8.1** Лінію передачі з повітряним заповненням і хвилевим опором  $Z_{Х}=50$  Ом навантажено в перетині  $z_2=25$  мм (рис.8.1) активним опором  $R_H = 100$  Ом. Яким буде вхідний опір цієї лінії в перетині  $z_1=0$  мм? Частота  $f = 3$  ГГц.

## Вирішення

1. Оскільки заповнення повітряне, то  $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ ,  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\operatorname{tg}\delta=0$  і швидкість хвилі  $V_\phi = c = 3 \cdot 10^8$  м/сек. Тоді довжина хвилі  $\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 3 \cdot 10^9 = 0.1$  м = 100мм.
2. Знайдемо за (1.4) фазову сталу  $\beta$ .  
$$\beta = 2\pi/\lambda = 2\pi/0.1 = 20\pi \text{ рад/м.}$$
3. Знайдемо довжину трансформувального відрізка  $l = z_2 - z_1 = 25 - 0 = 25$  мм та його електричну довжину  $\beta l = 20\pi \cdot 0.025 = \pi/2$ . Електричну довжину звичайно позначають грецькою літерою  $\theta$ . Тоді  $\theta = \beta l = \pi/2$ .
4. В техніці НВЧ прийнято користуватися нормованими до хвилевого опору значеннями опорів та провідностей. Їх звичайно позначають відповідними малими літерами. Знайдемо нормовані опір  $Z_H$  та провідність  $y_H$  навантаження.  
$$Z_H = R_H/Z_X = 100/50 = 2; y_H = (1/R_H) \cdot Z_X = 1/Z_H = 0.5.$$
5. Якщо підставити отримані значення в вираз (8.8) то отримаємо невизначеність типу  $\frac{\infty}{\infty}$ . Розкриємо її за правилом Лопітала і тоді для нормованого вхідного опору  $Z_{вх}$  в перетині  $Z_1 = 0$  отримаємо  
$$Z_{вх} = 1/Z_H = 1/2 = 0.5 = y_H.$$

Звернемо увагу на те, що, по – перше, за нашими вихідними даними довжина  $l$  трансформувального відрізка лінії дорівнює **чверті** довжини хвилі  $\lambda$  в лінії ( $l = \lambda/4$ ), а по – друге, що **чвертьхвильовий** ( $l = \lambda/4$ ) відрізок лінії трансформує опір навантаження в такий, що **чисельно** дорівнює провідності навантаження.

**Задача 8.2** Двопровідну лінію з задачі 7.2 (розміри a,b) під'єднано до двопровідної лінії з розмірами  $a_1=1$ мм,  $b_1=3.72$  мм. Треба обґрунтувати спосіб узгодження цих ліній і знайти

поперечні та поздовжні розміри узгоджувального елемента.  
Частота  $f = 100$  МГц.

### Вирішення

1. Хвилевий опір лінії з задачі 7.2  $Z_X = 265$  Ом. Знайдемо за (7.33) хвилевий опір  $Z_{X1}$ .

$$Z_{X1} = 120 \cdot \ln \frac{a_1 - b_1}{b_1} = 120 \cdot \ln \frac{3.72 - 1}{1} \approx 120 \text{ Ом}$$

2. Оскільки з'єднані елементи мають дійсні значення хвилевих опорів то доцільно для узгодження застосувати чвертьхвильовий трансформатор опору (рис.8.7).
3. Оскільки заповнення повітряне, то  $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ ,  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\text{tg} \delta = 0$  і швидкість хвилі  $V_\phi = c = 3 \cdot 10^8$  м/сек. Тоді довжина хвилі  $\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 10^8 = 3$  м, а  $l = \lambda/4 = 3/4$  м.
4. За виразом (8.41) знайдемо хвилевий опір трансформатору.

$$Z_{TP} = \sqrt{Z_X \cdot Z_{X1}} = \sqrt{265 \cdot 120} \approx 178 \text{ Ом}$$

5. З виразу (7.33) для лінії з хвилевим опором  $Z_{TP}$  знайдемо

$$e^{Z_{TP}/120} = \frac{b_{TP} - a_{TP}}{a_{TP}}$$

і при умові, що  $a_{TP} = a$ , отримаємо

$$b_{TP} = a \cdot (e^{Z_{TP}/120} + 1) = 1 \cdot (e^{178/120} + 1) = 5.4 \text{ мм}.$$

### Задачі для самостійного вирішення

**Задача 8.3** Двопровідну лінію з задачі 7.2 (розміри a,b) навантажено на комплексний опір  $Z_H = 120 - j50$  Ом. Виконати узгодження за допомогою чвертьхвильового трансформатору та шлейфу (за рис.8.5).

**Задача 8.4** Двопровідну лінію з задачі 7.2 (розміри a,b) навантажено на комплексний опір  $Z_H = 120 - j50$  Ом.

Виконати узгодження за допомогою одного КЗ шлейфу (за рис.8.6).

**Задача 8.5** Мікросмушкову лінію з задачі 7.5 навантажено на комплексний опір  $Z_H = 90 + j80$  Ом. Виконати узгодження за допомогою чвертьхвильового трансформатору і шлейфу (за рис.8.5) та визначити їх геометричні розміри.

## 9 МАТРИЧНИЙ ОПИС КІЛ НВЧ

Матричний аналіз як в низькочастотній (кола з зосередженими параметрами), так і в надвисокочастотній (кола з розподіленими параметрами) областях є ефективним засобом опису і дослідження кіл. Цьому сприяє інтенсивний розвиток засобів обчислювальної техніки і математичних методів моделювання, заснованих на використанні різних матричних процедур, які вживаються при описі властивостей кіл.

В той же час, в області високих і надвисоких частот традиційний опис кіл за допомогою матриць опору  $Z$  та провідності  $Y$  інколи стає обтяжливим, а часто і неможливим. Це зв'язано з тим, що на високих частотах виміри опору за напругою та струмом (як в колах з зосередженими параметрами) практично неможливі з-за відсутності відповідних вимірювальних приладів. Тому в техніці НВЧ вимірюваними величинами, як правило, є не напруги та струми, а комплексні коефіцієнти відбиття та передачі, які однозначно зв'язано з амплітудами і фазами падаючих і відбитих рухомих хвиль (за нормованими напругою або струмом) на входах та виходах пристроїв. Зазвичай вводять модель реального пристрою у вигляді деякого багатополюсника і далі абстрагуються від внутрішньої структури пристрою і досліджують його властивості лише шляхом аналізу режимів на зовнішніх затисках введеного багатополюсника.

Як математичну модель багатополюсника в діапазоні НВЧ в більшості випадків використовують системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно нормованих (або ненормованих) комплексних амплітуд падаючих і відбитих хвиль в граничних перетинах багатополюсника. Сукупність

коефіцієнтів системи рівнянь являє собою або *матрицю розсіювання S*, або *хвильову матрицю передачі T*.

## 9.1 Матриця розсіювання

Моделлю реального лінійного пристрою НВЧ, який має два входи є наведений на рис. 9.1 чотириполюсник, який описується відносно своїх плечей амплітудами нормованих напруг падаючих та відбитих хвиль. У позначеннях на рис. 9.1 і далі в тексті прийнято падаючі хвилі позначати знаком (+), а відбиті – знаком (-). Слід звернути увагу, що падаючі хвилі з напругою  $U_i^+$  завжди мають напрям від зовнішнього середовища до чотириполюсника (багатополюсника), а відбиті  $U_i^-$  – від багатополюсника у бік зовнішнього середовища.

Властивості чотириполюсника можна однозначно описати (визначити) двома алгебраїчними рівняннями, що зв'язують нормовані амплітуди відбитих хвиль з нормованими амплітудами падаючих хвиль в граничних перетинах AA' і BB' чотириполюсника

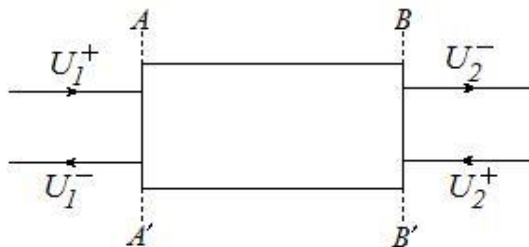


Рисунок 9.1 – Чотириполюсник НВЧ і сигнали на його полюсах (плечах)

$$\left. \begin{aligned} U_1^- &= s_{11}U_1^+ + s_{12}U_2^+ \\ U_2^- &= s_{21}U_1^+ + s_{22}U_2^+ \end{aligned} \right\}, \quad (9.1)$$

або в матричній формі

$$\begin{pmatrix} U_1^- \\ U_2^- \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

Тут  $\begin{pmatrix} U_1^- \\ U_2^- \end{pmatrix}$  – вектор-стовпець нормованих напруг відбитих

хвиль,

$\begin{pmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \end{pmatrix}$  – вектор-стовпець нормованих напруг падаючих

хвиль.

Матриця

$$S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} \quad (9.3)$$

зветься матрицею розсіювання чотирьохполосника (S-матрицею).

У символічній формі рівняння (9.2) запишеться у вигляді:

$$U^- = S \cdot U^+. \quad (9.4)$$

Елементи  $s_{11}$  і  $s_{22}$  є комплексними коефіцієнтами відбиття за напругою відповідно від першого або другого плеча за умови, що до іншого плеча під'єднано узгоджене навантаження (узгоджений режим). Елементи  $s_{21}$  і  $s_{12}$  є комплексними коефіцієнтами передачі за напругою

відповідно між першим та другим або другим та першим плечами в режимі узгодження. Як видно з цих визначень, всі елементи матриці розсіювання мають чіткий фізичний зміст і всі вони можуть бути визначені експериментально за допомогою типової вимірювальної апаратури (вимірювальні лінії або панорамні вимірювачі АЧХ).

Для зручності при виконанні математичних операцій комплексні амплітуди напруг (або струмів) падаючих та відбитих хвиль нормуються таким чином, щоб виконувались рівності:

$$\begin{aligned} \frac{(U_1^+)^2}{2} &= P_{1\text{пад}}, & \frac{(U_1^-)^2}{2} &= P_{1\text{від}}, \\ \frac{(U_2^+)^2}{2} &= P_{2\text{пад}}, & \frac{(U_2^-)^2}{2} &= P_{2\text{від}}. \end{aligned}$$

За відсутності в «нутрощах» чотириполюсника дисипативних втрат закон збереження енергії дає наступний зв'язок між модулями коефіцієнтів матриці розсіювання:

$$\left. \begin{aligned} |s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 &= 1 \\ |s_{12}|^2 + |s_{22}|^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

В літературі співвідношення типу (9.5) прийнято називати співвідношеннями унітарності S-матриці, відповідну властивість – властивістю унітарності, а саму матрицю – унітарною.

На рис. 9.2 наведено довільний багатополіусник, що має  $n$  виходів (або плечей), і тому зветься  $2n$  – полюсником. Такий багатополіусник також може бути описано S-матрицею.



Тут, як і у випадку чотириполюсника,  $\begin{pmatrix} U_1^- \\ U_2^- \\ \dots \\ U_n^- \end{pmatrix}$  і  $\begin{pmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \\ \dots \\ U_n^+ \end{pmatrix}$  – вектори-

стовпці нормованих напруг, відповідно, відбитих і падаючих хвиль. В символній формі запис (9.7) є аналогічним запису (9.4).

В (9.7) матриця коефіцієнтів є матрицею розсіювання  $2n$ - полюсника:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}. \quad (9.8)$$

Діагональний елемент  $s_{kk}$  цієї матриці є коефіцієнтом відбиття за напругою в  $k$ -му плечі багатополюсника за умови, що до всіх інших плечей приєднано узгоджені навантаження. Елемент  $s_{ik}$  при  $i \neq k$  є коефіцієнтом передачі за напругою з плеча  $k$  в плече  $i$  при виконанні умови узгодження в усіх інших плечах. У загальному випадку елементи матриці  $S$  є комплексними величинами.

В випадку недисипативного багатополюсника, на підставі закону збереження енергії, також має місце унітарність, коли сума квадратів модулів всіх матричних елементів будь-якого стовпця матриці розсіювання дорівнює одиниці, тобто:

$$\sum_{i=1}^n |s_{ik}|^2 = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (9.9)$$

Окрім того, якщо багатополіусник взаємний, то його матриця розсіювання симетрична, а тоді сума квадратів модулів всіх матричних елементів і будь-якого рядка матриці розсіювання дорівнює одиниці:

$$\sum_{k=1}^n |s_{ik}|^2 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.10)$$

Вочевидь, формула (9.5), яку отримано раніше для чотириполіусника, є частинним випадком більш загального співвідношення (9.9).

## 9.2 Матриці розсіювання простих елементів НВЧ кіл

При аналізі складних НВЧ пристроїв часто застосовується принцип декомпозиції, при застосуванні якого цей пристрій розбивається на прості складові частини – базові елементи (БЕ). При цьому БЕ обираються так, щоб їх матриці розсіювання можна було досить легко обчислити (або виміряти). Таким чином утворюється декомпозиційна схема складного пристрою. Якщо для кожного БЕ застосувати його математичну модель у вигляді відповідного багатополіусника НВЧ, то отримаємо математичну модель декомпозиційної схеми у вигляді деякого з'єднання багатополіусників. Тоді задача аналізу НВЧ пристрою зведеться до задачі знаходження результуючої матриці розсіювання цієї математичної моделі шляхом об'єднання  $S$ -матриць БЕ. Цей процес зветься рекомпозицією. Розглянемо деякі різновиди БЕ.

**1. Відрізок регулярної лінії без втрат (недисипативний)** довжиною  $l$  (рис. 9.3). При умові узгодження з плечей 1 та 2 його можна описати безпосередньо в термінах падаючих і відбитих хвиль в граничних перетинах.

Враховуючи, що відрізок недисипативної узгодженої лінії вносить лише зсув за фазою, отримаємо систему рівнянь:

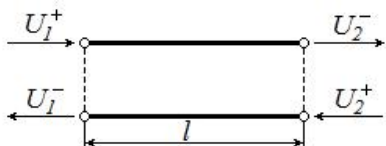


Рисунок 9.3 – Відрізок регулярної лінії

$$\left. \begin{aligned} U_1^- &= U_1^+ \cdot 0 + U_2^+ e^{-j\beta l} \\ U_2^- &= U_1^+ e^{-j\beta l} + U_2^+ \cdot 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Звідси зразу отримуємо матрицю розсіювання відрізка лінії:

$$S = \begin{vmatrix} 0 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 0 \end{vmatrix}. \quad (9.12)$$

**2. Резистор з комплексним опором  $Z = R + jX$ , який ввімкнено паралельно в лінію передачі з хвилевим опором  $Z_X$  (рис. 9.4, а). Опір  $Z$  в узгодженому режимі сумісно з хвилевим опором утворює навантаження  $Z_H = \frac{Z \cdot Z_X}{Z + Z_X}$ .**

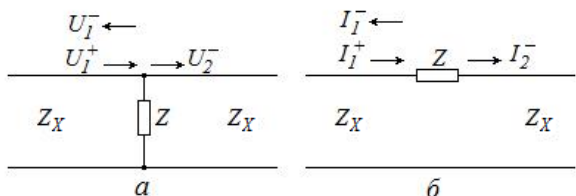


Рисунок 9.4 – а) паралельне включення опору в лінію,  
б) послідовне включення опору в лінію

Отже, коефіцієнт відбиття від цього навантаження буде:

$$\Gamma = s_{11} = s_{22} = \frac{Z_H - Z_X}{Z_H + Z_X} = -\frac{Z_X}{Z_X + 2Z}. \quad (9.13)$$

Коефіцієнти передачі знаходяться безпосередньо за визначенням відповідного елемента S-матриці. В даному випадку:

$$s_{12} = s_{21} = \frac{U_2^-}{U_1^+} = \frac{U_1^+ + U_1^-}{U_1^+} = 1 + \frac{U_1^-}{U_1^+} = 1 + s_{11} = \frac{2Z}{Z_X + 2Z}. \quad (9.14)$$

Таким чином, матриця розсіювання схеми матиме вигляд:

$$S = \frac{1}{Z_X + 2Z} \begin{vmatrix} -Z_X & 2Z \\ 2Z & -Z_X \end{vmatrix}. \quad (9.15)$$

**3. Резистор з комплексним опором  $Z = R + jX$ , який ввімкнуто послідовно в лінію передачі з хвилевим опором  $Z_X$  (рис. 9.4, б).** Опір  $Z$  в узгодженому режимі сумісно з хвилевим опором утворює навантаження  $Z_H = Z + Z_X$ , коефіцієнт відбиття від якого:

$$\Gamma = s_{11} = s_{22} = \frac{Z_H - Z_X}{Z_H + Z_X} = \frac{Z}{Z + 2Z_X}. \quad (9.16)$$

Розгляд падаючих і відбитих хвиль струму на рис. 9.4б дозволяє знайти коефіцієнти передачі:

$$I_2^- = I_1^+ - I_1^- = \frac{U_1^+}{Z_X} - \frac{U_1^-}{Z_X} = \frac{U_1^+}{Z_X} \left( 1 - \frac{U_1^-}{U_1^+} \right) = \frac{U_1^+}{Z_X} (1 - s_{11}).$$

Оскільки вочевидь  $I_2^- Z_X = U_2^-$ , то з попередньої формули витікає:

$$s_{12} = s_{21} = \frac{U_2^-}{U_1^+} = 1 - s_{11} = \frac{2Z_X}{Z + 2Z_X}. \quad (9.17)$$

Таким чином матриця розсіювання цього елементу буде:

$$S = \frac{1}{Z + 2Z_X} \begin{vmatrix} Z & 2Z_X \\ 2Z_X & Z \end{vmatrix}. \quad (9.18)$$

**4. Стрибок хвильового опору** (рис. 9.5) є стиком двох ліній передачі з різними хвильовими опорами.

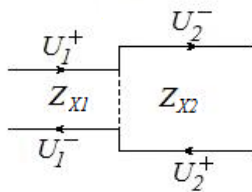


Рисунок 9.5 – Стрибок хвильового опору

В даному випадку навантаженням для першої лінії буде  $Z_{X2}$ , а для другої лінії –  $Z_{X1}$ . Отже, коефіцієнти відбиття в першому і другому плечах визначаються виразами:

$$\Gamma_1 = s_{11} = \frac{Z_H - Z_{X1}}{Z_H + Z_{X1}} = \frac{Z_{X2} - Z_{X1}}{Z_{X2} + Z_{X1}}, \quad (9.19)$$

$$\Gamma_2 = s_{22} = \frac{Z_{X1} - Z_{X2}}{Z_{X1} + Z_{X2}} = -s_{11}, \quad (9.20)$$

Оскільки в стикку дисипативні втрати відсутні, коефіцієнти передачі  $s_{12}$  і  $s_{21}$  можна визначити з умов унітарності:

$$|s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 = 1 \text{ і } |s_{12}|^2 + |s_{22}|^2 = 1.$$

Звідки слідує:

$$s_{21} = s_{12} = \sqrt{1 - |s_{11}|^2} = \frac{2\sqrt{Z_{X1}Z_{X2}}}{Z_{X1} + Z_{X2}}. \quad (9.21)$$

Таким чином, матриця розсіювання стикку:

$$S = \frac{1}{Z_{X1} + Z_{X2}} \cdot \begin{vmatrix} Z_{X2} - Z_{X1} & 2\sqrt{Z_{X1}Z_{X2}} \\ 2\sqrt{Z_{X1}Z_{X2}} & Z_{X1} - Z_{X2} \end{vmatrix}. \quad (9.22)$$

**5. Розгалуження  $n$  ліній** наведені на рис. 9.6. Хай, для простоти, хвилеві опори всіх ліній однакові і дорівнюють  $Z_X$ .

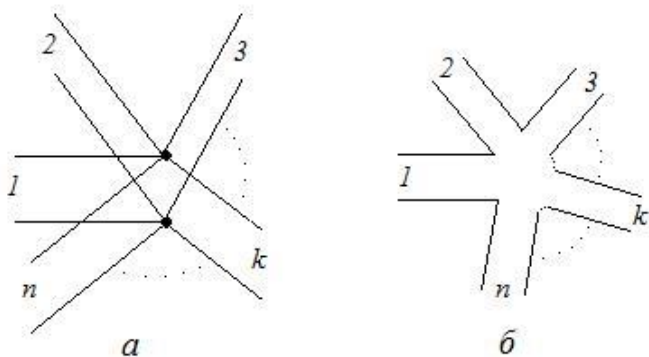


Рисунок 9.6 – Паралельне (а), і послідовне (б) розгалуження  $n$  ліній

При паралельному розгалуженні (рис. 9.6 а), з-за симетрії схеми, опір навантаження для кожного плеча буде

дорівнювати  $Z_H = \frac{Z_X}{n-1}$ , а при послідовному розгалуженні (рис. 9.6 б)  $Z_H = (n-1)Z_X$ . Тоді коефіцієнти відбиття для кожного плеча в обох схемах визначаються виразами:

для паралельної схеми:

$$\Gamma = s_{ii} = \frac{Z_H - Z_X}{Z_H + Z_X} = \frac{2-n}{n}, \quad i=1,2, \dots, n, \quad (9.23)$$

для послідовної схеми:

$$\Gamma = s_{ii} = \frac{Z_H - Z_X}{Z_H + Z_X} = \frac{n-2}{n}. \quad (9.24)$$

З врахуванням симетрії і відсутності втрат, коефіцієнти передачі  $s_{ik}$  між будь-якими двома плечима в кожній схемі будуть однаковими і легко обчислюються з умови унітарності, наприклад, за першим стовпцем:

$$|s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 + \dots + |s_{n1}|^2 = |s_{11}|^2 + (n-1)|s_{21}|^2 = 1,$$

звідки

$$s_{21} = s_{12} = \dots = s_{ik} = \frac{2}{n}, \quad i \neq k. \quad (9.25)$$

Тоді для паралельної схеми матриця розсіювання буде мати вигляд:

$$S = \frac{1}{n} \cdot \begin{vmatrix} (2-n) & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & (2-n) & 2 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & \dots & (2-n) \end{vmatrix}. \quad (9.26)$$

При визначенні S-матриці для послідовної схеми виникають деякі труднощі, які зв'язано з фазністю полів в

різних плечах. Наприклад, при розгалуженні 3-х ліній S-матриця має вигляд:

$$S = \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}. \quad (9.27)$$

### 9.3 Хвилева матриця передачі T

У ряді випадків, наприклад, при аналізі параметрів каскадного з'єднання багатополісників замість матриць розсіювання доцільніше використовувати хвилеві матриці передачі T, які встановлюють взаємозв'язок хвиль на вході з хвилями на виході. При цьому перевага матриці передачі полягає в тому, що результуюча T-матриця каскадного з'єднання ряду елементів дорівнює добутку T-матриць окремих елементів. Така схема аналізу, особливо з використанням обчислювальної техніки, вимагає значно менших витрат машинного часу, ніж при використанні матриць розсіювання. Не треба забувати, що каскадно можна з'єднати лише багатополісники з парною кількістю входів, отже T-матриці є сенс вводити лише для 4M-полісників.

Для практично важливого випадку чотириполісника система рівнянь, яка встановлює залежність хвиль на вході від хвиль на виході, записується у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} U_1^+ &= t_{11}U_2^- + t_{12}U_2^+ \\ U_1^- &= t_{21}U_2^- + t_{22}U_2^+ \end{aligned} \right\}. \quad (9.28)$$

Звідси матриця передачі чотириполісника:

$$T = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix}. \quad (9.29)$$

Комплексні елементи  $t_{ik}$  хвилевої матриці передачі не мають такої простої фізичної сутності, як елементи матриці розсіювання, а є деякими комбінаціями останніх. Формула взаємозв'язку елементів  $T$ -матриці з елементами  $S$ -матриці чотириполосника має вигляд:

$$T = \begin{vmatrix} \frac{1}{s_{21}} & -\frac{s_{22}}{s_{21}} \\ \frac{s_{11}}{s_{21}} & s_{12} - \frac{s_{11}s_{22}}{s_{21}} \end{vmatrix}. \quad (9.30)$$

## 9.4 Матриця $A$

Ця матриця, яку інколи в літературі звать матрицею  $abcd$ , також може застосовуватися при розрахунку параметрів каскадного з'єднання. Як і матриця передачі  $T$ , результуюча матриця  $A$  каскадного з'єднання чотириполосників дорівнює добутку матриць  $A_i$  окремих елементів. І у разі, коли потрібно знати залежності між вхідними і вихідними струмами і напругами, зручніше використовувати матрицю  $A$ , оскільки матриці  $A_i$  чотириполосних елементів, які входять в каскадне з'єднання можуть бути знайдені безпосередньо за схемами цих елементів. На рис. 9.7 наведено чотириполосник з прийнятими напрямками струмів і напруг при визначенні матриці  $A$ .

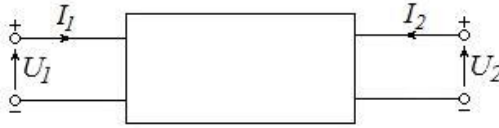


Рисунок 9.7 – Струми і напруги в чотириполуснику

Для визначення матриці А використовуються рівняння, що зв'язують струм і напругу на виході чотириполусника зі струмом і напругою на вході:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= aU_2 - bI_2 \\ I_1 &= cU_2 - dI_2 \end{aligned} \right\}, \quad (9.31)$$

або в матричній формі:

$$\begin{vmatrix} U_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{vmatrix}. \quad (9.32)$$

Вище відмічено, що А-матриці простих чотириполусників можуть бути знайдені безпосередньо за їх схемами.

**1. Резистор з комплексним опором  $Z = R + jX$ , який ввімкнено послідовно в лінію передачі (рис.9.8 а)**

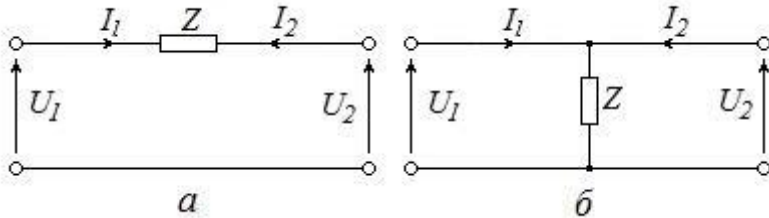


Рисунок 9.8 – Послідовний і паралельний опір в лінії

Як бачимо з рисунка 9.8а величини  $U_1, U_2, I_1, I_2$  зв'язано співвідношеннями:

$$U_1 = U_2 + I_2 Z, \quad I_1 = -I_2,$$

звідки елементи матриці  $A$   $a = 1, b = Z, c = 0, d = 1$ , і матриця:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (9.33)$$

**2. Резистор з комплексним опором  $Z = R + jX$ , який ввімкнено паралельно в лінію передачі** (рис.9.8 б). В цьому випадку співвідношення між величинами мають вигляд:

$$U_1 = U_2, \quad I_1 + I_2 = \frac{U_1}{Z} = \frac{U_2}{Z},$$

або  $I_1 = \frac{U_2}{Z} - I_2$ , тому  $a = 1, b = 0, c = \frac{1}{Z}, d = 1$ .

Таким чином, матриця  $A$  даної схеми:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{vmatrix}. \quad (9.34)$$

**3. Несиметричний Т-подібний чотириполюсник** (рис. 9.9 а)

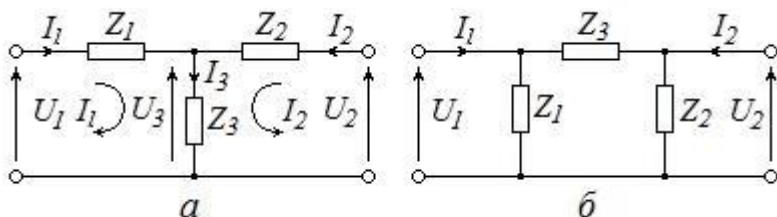


Рисунок 9.9 – Несиметричні Т- і П-подібні чотириполюсники

Із закону Кірхгофа для контуру зі струмом  $I_1$  маємо:

$$U_1 = I_1 Z_1 + I_1 Z_3 + I_2 Z_3,$$

звідки  $I_1 = (U_1 - I_2 Z_3) / (Z_1 + Z_3)$ .

Аналогічно, для контуру зі струмом  $I_2$ :

$$U_2 = I_2 Z_2 + I_2 Z_3 + I_1 Z_3.$$

Підстановка сюди  $I_1$  з попереднього виразу дає:

$$U_2(Z_1 + Z_3) = I_2(Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3) + U_1 Z_3,$$

звідки

$$U_1 = U_2(1 + Z_1 / Z_3) - I_2(Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 / Z_3).$$

З порівняння цього виразу з першим рівнянням в (9.31) витікає:

$$a = 1 + Z_1 / Z_3, \quad b = Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 / Z_3. \quad (9.35)$$

Для визначення елементів  $c$  і  $d$  вираз для контуру зі струмом  $I_2$  можна переписати в наступному вигляді:

$$I_1 Z_3 = U_2 - I_2(Z_2 + Z_3),$$

звідки  $I_1 = U_2 / Z_3 - I_2(1 + Z_2 / Z_3)$ .

З порівняння цього виразу з другим рівнянням в (9.31) витікає:

$$c = 1/Z_3, \quad d = 1 + Z_2/Z_3. \quad (9.36)$$

Таким чином, з (9.35) і (9.36) витікає, що матриця  $A$  несиметричного  $T$ -подібного чотириполюсника має вигляд:

$$A = \begin{vmatrix} 1 + Z_1/Z_3 & Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2/Z_3 \\ 1/Z_3 & 1 + Z_2/Z_3 \end{vmatrix}. \quad (9.37)$$

**4. Несиметричний  $\Pi$ -подібний чотириполюсник** (рис. 9.9 б). По аналогії з  $T$ -подібним чотириполюсником, використовуючи закони Кірхгофа, знаходяться елементи  $A$ -матриці  $\Pi$ -подібного чотириполюсника. В результаті його матриця буде:

$$A = \begin{vmatrix} 1 + Z_3/Z_2 & Z_3 \\ (Z_1 + Z_2 + Z_3)/Z_1 Z_2 & 1 + Z_3/Z_1 \end{vmatrix}. \quad (9.38)$$

**5. Відрізок лінії передачі** довжиною  $l$  з хвилевим опором  $Z_X$  і сталою поширення  $\gamma$  можна представити у вигляді  $T$ -подібного еквівалентного чотириполюсника (рис. 8.11), для якого:  $Z_1 = Z_X th\left(\frac{\gamma l}{2}\right)$ ,  $Z_2 = \frac{Z_X}{sh(\gamma l)}$ .

Підстановка цих значень у вирази для елементів  $A$ -матриці симетричного  $T$ -подібного чотириполюсника дає:

$$a = d = 1 + th\left(\frac{\gamma l}{2}\right) \cdot sh(\gamma l) = ch(\gamma l), \quad (9.39)$$

$$c = 1/Z_2 = sh(\gamma l)/Z_X, \quad b = Z_X sh(\gamma l). \quad (9.40)$$

Таким чином,  $A$ -матриця відрізка лінії має вигляд:

$$A = \begin{vmatrix} ch(\gamma l) & Z_X sh(\gamma l) \\ sh(\gamma l) / Z_X & ch(\gamma l) \end{vmatrix}. \quad (9.41)$$

Елементи  $A$ -матриці відрізка недисипативної лінії знаходять з (9.41) шляхом заміни гіперболічних функцій тригонометричними:

$$A = \begin{vmatrix} \cos(\beta l) & jZ_X \sin(\beta l) \\ j\sin(\beta l) / Z_X & \cos(\beta l) \end{vmatrix}. \quad (9.42)$$

Перехід від  $S$ -матриці чотириполюсника до його  $A$ -матриці і навпаки, проводиться за формулами:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{(1 + s_{11})(1 - s_{22}) + s_{12}s_{21}}{2s_{21}} & \frac{(1 + s_{11})(1 + s_{22}) - s_{12}s_{21}}{2s_{21}} \\ \frac{(1 - s_{11})(1 - s_{22}) - s_{12}s_{21}}{2s_{21}} & \frac{(1 - s_{11})(1 + s_{22}) + s_{12}s_{21}}{2s_{21}} \end{vmatrix}, \quad (9.43)$$

$$S = \frac{1}{(a + b + c + d)} \cdot \begin{vmatrix} a + b - c - d & 2(ad - bc) \\ 2 & -a + b - c + d \end{vmatrix}. \quad (9.44)$$

### Контрольні запитання

1. Яку модель реальних пристроїв використовують в техніці НВЧ?
2. Як вводиться математична модель чотириполюсника?
3. Які з величин, що описують чотириполюсник, зв'язує його матриця розсіювання?
4. Яка фізична сутність елементів матриці  $S$ ?
5. Що таке властивість унітарності матриці  $S$ ?

6. Що таке  $2n$ -поліосник та як для нього вводиться матриця розсіювання?
7. Що таке недисипативний багатополіосник та які його властивості?
8. Як отримати матрицю  $S$  для відрізка недисипативної регулярної лінії?
9. Як отримати матрицю  $S$  для паралельно ввімкнутого опору?
10. Як отримати матрицю  $S$  для послідовно ввімкнутого опору?
11. Як отримати матрицю  $S$  для стрибка хвильового опору?
12. Як отримати матрицю  $S$  для розгалужень ліній?
13. Які з величин, що описують чотириполіосник, зв'язує його хвильова матриця передачі?
14. Як перейти від матриці  $S$  до матриці  $T$ ?
15. Які з величин, що описують чотириполіосник, зв'язує його матриця  $A$ ?
16. Як знайти матриці  $A$  для послідовного та паралельного опорів в лінії?
17. Як знайти матриці  $A$  для  $T$ - та  $\Pi$ -подібних 4-поліосників?
18. Як знайти матрицю  $A$  для відрізка регулярної лінії передачі?
19. Як перейти від матриці  $S$  до матриці  $A$ ?

### Задачі для самостійного вирішення

**Задача 9.1.** Відрізок регулярної недисипативної лінії (рис.9.3) має електричну довжину  $\theta = \beta l = \pi/4$  та  $Z_X = 50$  Ом. Визначити матриці  $S$ ,  $A$ ,  $T$  для цього елемента.

**Задача 9.2** Стрибок хвильового опору (рис. 9.5) є стиком двох

недисипативних ліній передачі з хвилевими опорами  $Z_{X1}=50$  Ом і  $Z_{X2} =100$  Ом. Визначити матриці  $S$ ,  $A$ ,  $T$  для цього елемента.

**Задача 9.3** Паралельне та послідовне розгалуження ліній мають кожне по 3 плеча, причому хвилевий опір лінії в першому плечі  $Z_{X1}= 50$  Ом (рис.3.6). Визначити при яких значеннях  $Z_{X2}$  та  $Z_{X3}$  ці розгалуження будуть узгодженими з першого плеча, тобто буде виконуватись умова  $S_{11}=0$ . Прийняти, що  $Z_{X2} = Z_{X3}$ .

## 10 ПОЛЯ ВИПРОМІНЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ РЕА

Будь-який радіоелектронний пристрій можна розглядати як джерело випромінення електромагнітних хвиль, інтенсивність та просторовий розподіл яких залежить від багатьох чинників, зв'язаних як з технічними і технологічними характеристиками, так і з експлуатаційними параметрами пристрою. Джерелами випромінення можуть бути, наприклад, незаекрановані генератори, елементи монтажу, лінії передачі, кола живлення, пристрої заземлення і так далі. Випромінені такими джерелами електромагнітні хвилі можуть мати досить складну структуру. При цьому, для задач виявлення випромінення найбільший інтерес являє поле в далекій зоні, яке характеризує спрямовані, поляризаційні і енергетичні властивості випромінювача, а поле в ближній зоні характеризує міру паразитних зв'язків між елементами схеми. Крім того, при розрахунку антенних структур поле в ближній зоні дозволяє обчислити вхідний опір антени.

Строгий розрахунок напруженості електромагнітного поля, що створюється випромінювачем, зводиться до вирішення рівнянь Максвелла за заданих граничних умов, проте в більшості випадків такий розрахунок математично складний і не завжди здійснимий. Тому на практиці широко застосовуються різні наближені методи розрахунку, один з яких засновано на тому, що реальний випромінювач розглядається як випромінювальна структура, що складається з нескінченно великої кількості елементарних випромінювачів, а результуюче поле визначається як сума полів цих елементарних випромінювачів. За цією причиною розглянемо властивості та параметри елементарних випромінювачів.

## 10.1 Елементарний електричний випромінювач – диполь Герця

При аналізі випромінювання дротяних (проводових) структур зазвичай приймають, що випромінювач складається з великої кількості малих випромінювальних елементів, кожен з яких можна розглядати як елементарний електричний випромінювач, що зветься диполем Герця. Під диполем Герця розуміють випромінювач у вигляді нескінченно тонкого і короткого, в порівнянні з довжиною хвилі ( $l \ll \lambda$ ), відрізка прямолінійного дроту, вздовж якого амплітуда та фаза змінного струму не змінюються ( $I_0 = const$ ).

Для такого випромінювача може бути отримано замкнуті вирази для компонент електромагнітного поля. У сферичній системі координат (рис. 10.1) ці вирази мають вигляд:

$$\dot{H}_\varphi = \frac{I_0 \cdot l \cdot \sin \theta}{4\pi} \cdot \left( \frac{1}{R^2} + j \frac{k}{R} \right) \cdot e^{-jkR}, \quad (10.1)$$

$$\dot{E}_R = -j \frac{2I_0 \cdot l \cdot \cos \theta}{4\pi\omega \cdot \varepsilon_a} \cdot \left( \frac{1}{R^3} + j \frac{k}{R^2} \right) \cdot e^{-jkR}, \quad (10.2)$$

$$\dot{E}_\theta = -j \frac{I_0 \cdot l \cdot \sin \theta}{4\pi\omega \cdot \varepsilon_a} \cdot \left( \frac{1}{R^3} + j \frac{k}{R^2} - \frac{k^2}{R} \right) \cdot e^{-jkR}. \quad (10.3)$$

З наведених співвідношень випливає, що простір, який оточує диполь, можна умовно розбити на три зони:

1) **ближню зону**, яка зветься також зоною індукції, де в рівняннях для  $E$  і  $H$  істотне значення мають члени, які залежать від відстані  $R$  за законом  $1/R^2$  і  $1/R^3$ . У цій зоні електричний і магнітний вектори зсунуто за фазою на кут,

близький до  $90^\circ$ .

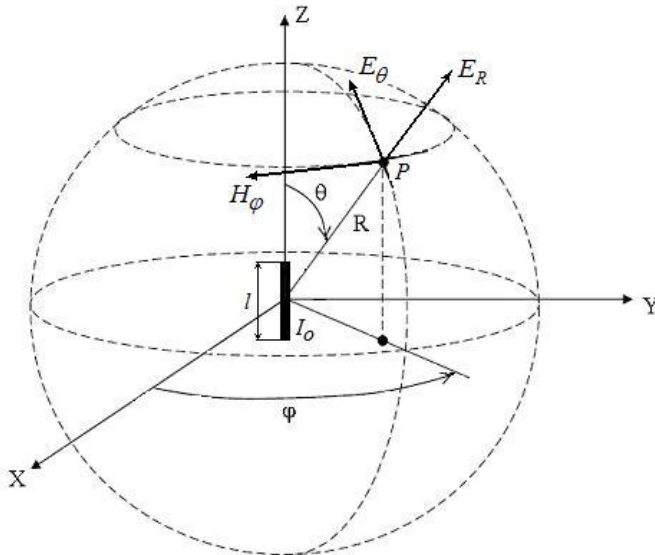


Рисунок 10.1 – Диполь Герца в сферичній системі координат, де  $\varphi$  – азимут,  $\theta$  – кут місця

2) **проміжну зону**, яка зветься також зоною дифракції Френеля, де всі члени виразів (10.1)-(10.3), які є залежними від відстані, мають приблизно однакову величину.

3) **далеку зону**, яка зветься також хвильовою зоною, або зоною дифракції Фраунгофера; вона знаходиться від вібратора на відстані  $R \geq 2 \cdot a^2 / \lambda$  ( $a$  – максимальний лінійний розмір випромінювача). У цій зоні напруженості електричного та магнітного полів зменшуються монотонно за законом  $1/R$ , ЕМХ має локально плоский характер, а напрям поширення збігається з напрямом радіус-вектору  $\mathbf{R}$ .

Як видно з формул, в хвильовій зоні можна знехтувати членами із залежністю  $1/R^2$  і  $1/R^3$ , що дає:

$$\dot{H}_\varphi = j \frac{k \cdot I_0 \cdot l \cdot \sin \theta}{4\pi R} \cdot e^{-jkR}, \quad (10.4)$$

$$\dot{E}_R = 0, \quad (10.5)$$

$$\dot{E}_\theta = j \cdot \frac{\omega \cdot \mu_a \cdot I_0 \cdot l \cdot \sin \theta}{4\pi R} \cdot e^{-jkR} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot H_\varphi. \quad (10.6)$$

Таким чином, в хвильовій зоні вібратору електричне і магнітне поля зв'язано співвідношенням:

$$\dot{E} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot \dot{H} = Z_0 \cdot \dot{H}, \quad (10.7)$$

де  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = 120\pi$  – характеристичний опір вільного простору.

На однакових відстанях від диполя фази обох векторів поля однакові при будь-яких  $\theta$  і  $\varphi$ , а їх амплітуда зменшується обернено пропорційно із збільшенням відстані, отже, диполь Герця випромінює сферичні хвилі.

Вирази для модулів електричного і магнітного векторів поля впливають з формул (10.4) і (10.6):

$$H_\varphi = \frac{k \cdot I_0 \cdot l}{4\pi R} \cdot \sin \theta, \quad (10.8)$$

$$E_\theta = \frac{30 \cdot k \cdot I_0 \cdot l}{R} \cdot \sin \theta. \quad (10.9)$$

Множник  $\sin \theta$  в цих формулах вказує на те, що випромінювання диполя у вертикальній (кутомісцевій, меридіональній) площині є спрямованим, а в горизонтальній

(азимутальній) площині – рівномірним (неспрямованим). Функція залежності амплітуди векторів поля (одного з них) випромінювача від кутових координат зветься діаграмою спрямованості (ДС). На рис. 10.2 наведено діаграми спрямованості за модулем вектору напруженості електричного поля в просторі (рис. 10.2, а) і в перетинах площинами  $\theta = 90^\circ$  (рис. 10.2, б) і  $\varphi = const$  (рис. 10.2, в).

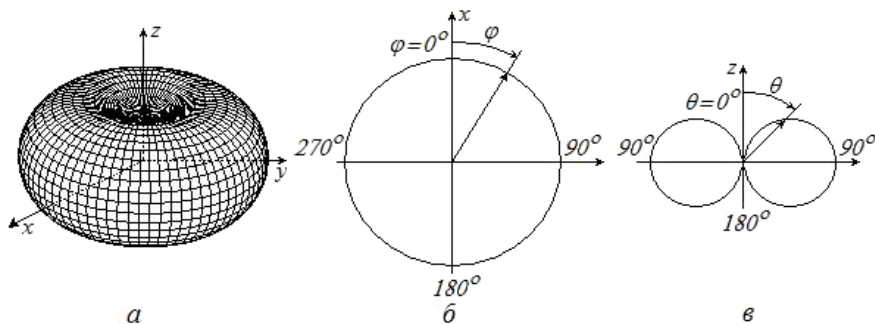


Рисунок 10.2 – Діаграми спрямованості диполя Герця

З цих діаграм видно, що диполь не випромінює вздовж своєї вісі і максимально випромінює перпендикулярно своєї вісі.

## 10.2 Елементарний магнітний випромінювач

Елементарний магнітний випромінювач є замкнутим витком зі струмом  $I_0$ , при цьому розміри витка мають бути малі в порівнянні з довжиною хвилі, що при довільній формі витка може бути визначено співвідношенням  $\lambda \gg \sqrt{S}$ , де  $S$  – площа витка. Зважаючи на малі розміри витка, розподіл струму в ньому можна вважати рівномірним.

Для такого випромінювача також може бути отримано

аналітичні вирази для компонент електромагнітного поля, які в сферичній системі координат (рис. 10.3) мають вигляд (передбачається, що вісь Z перпендикулярна площині витка зі струмом):

$$\dot{E}_\varphi = \frac{\omega \cdot \mu_a \cdot I_0 \cdot S \cdot k^2 \cdot \sin \theta}{4\pi} \cdot \left( \frac{1}{(kR)^2} + j \frac{1}{kR} \right) \cdot e^{-jkR}, \quad (10.10)$$

$$\dot{H}_R = -j \frac{2I_0 \cdot S \cdot k^3 \cdot \cos \theta}{4\pi} \cdot \left( \frac{1}{(kR)^3} + j \frac{1}{(kR)^2} \right) \cdot e^{-jkR}, \quad (10.11)$$

$$\dot{H}_\theta = -j \frac{I_0 \cdot S \cdot k^3 \cdot \sin \theta}{4\pi} \cdot \left( \frac{1}{(kR)^3} + j \frac{1}{(kR)^2} - \frac{1}{kR} \right) \cdot e^{-jkR}. \quad (10.12)$$

Як видно, структура цих співвідношень аналогічна структурі співвідношень (10.1), (10.2), (10.3) для вібратора Герця, тому і розгляд розподілу компонент поля елементарного магнітного випромінювача може бути проведено аналогічно.

Простір, що оточує магнітний диполь, також можна умовно розбити на три зони: **ближню зону** (у якій  $kR \ll 1$ ), **проміжну зону** ( $kR \approx 1$ ) і **далеку зону** ( $kR \gg 1$ ).

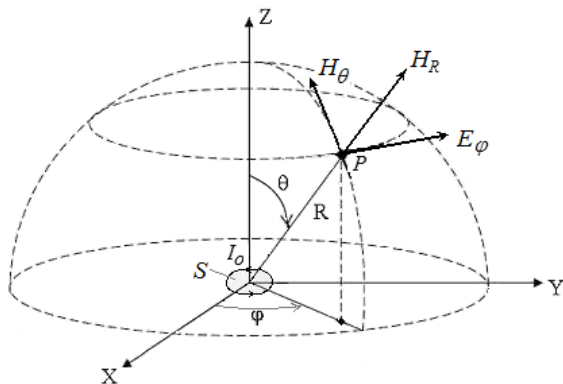


Рисунок 10.3 – Елементарний магнітний випромінювач в сферичній системі координат

У далекій (хвилевій) зоні поле елементарного магнітного випромінювача має вигляд:

$$\dot{E}_\varphi = j \frac{\omega \cdot \mu_a \cdot I_0 \cdot S \cdot k \cdot \sin \theta}{4\pi R} \cdot e^{-jkR}, \quad (10.13)$$

$$\dot{H}_R = 0, \quad (10.14)$$

$$\dot{H}_\theta = j \frac{I_0 \cdot S \cdot k^2 \cdot \sin \theta}{4\pi R} \cdot e^{-jkR}. \quad (10.15)$$

Порівняння (10.13), (10.15) з виразами (10.4), (10.6) для випромінювача Герця показує, що при однакових струмах  $I_0$  в диполі Герця і у витку магнітного випромінювача, магнітний випромінювач в далекій зоні створює електромагнітне поле, співпадаюче з полем вібратора Герця, якщо довжина останнього буде  $l = kS$ .

З цієї умови неважко отримати зв'язок між довжиною диполя Герця і розмірами витка. Якщо, наприклад, виток має форму квадрата із стороною  $a$ , те в цьому випадку зв'язок між  $l$  і  $a$  матиме вигляд:

$$a = \sqrt{\frac{l \cdot \lambda}{2\pi}}.$$

Оскільки для диполя Герця повинна виконуватися умова  $l \ll \lambda$ , то якщо покласти  $l = \lambda/n$ , де  $n$  – додатнє число (для виконання умови  $l \ll \lambda$  необхідно, аби  $n \geq 10$ ), тоді з попереднього співвідношення неважко отримати:

$$\frac{a}{l} = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}.$$

З отриманої формули виходить, що при збільшенні  $n$  (при цьому умова  $l \ll \lambda$  виконується усе більш точноше) відносний розмір сторони квадратної рамки із струмом (в

порівнянні з довжиною диполя  $l$ ) зростає згідно закону  $\sqrt{\frac{n}{2\pi}}$  (якщо, наприклад,  $n = 100$ , то  $a \approx 4l$ ). На практиці це означає, що при однаковій потужності випромінювання розміри рамкових антен мають бути значно більше розмірів вібраторних антен.

Порівняння співвідношень (10.10), (10.11) і (10.12) для магнітного вібратора і (10.1), (10.2), (10.3) для електричного вібратора показує, що поля відрізняються лише просторовою орієнтацією – вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  «помінялися» місцями. Звідси витікає, що діаграма спрямованості магнітного вібратора збігатиметься з діаграмою спрямованості електричного вібратора на рис. 10.2, але при цьому зміниться площина поляризації – вертикальна для електричного вібратора стане горизонтальною для магнітного вібратора.

Як і електричний, магнітний вібратор не випромінює вздовж вісі  $z$  і максимально випромінює перпендикулярно вісі.

### 10.3 Елементарний випромінювач Гюйгенса

При дослідженні випромінювання апертурних антен зазвичай представляють розкриття антени у вигляді сукупності великого числа елементарних ділянок, кожен з яких можна розглядати як елементарний випромінювач Гюйгенса, під яким розуміють невелику порівняно з довжиною хвилі площинку з рівномірним розподілом електричного і магнітного полів. При цьому вектори цих полів перпендикулярні один одному. Випромінювач Гюйгенса можна розглядати як невелику ділянку локально плоскої хвилі. На рис. 10.4 а) показано площинку  $ds = dx \cdot dy$  прямокутної форми, але ця форма може бути довільною.

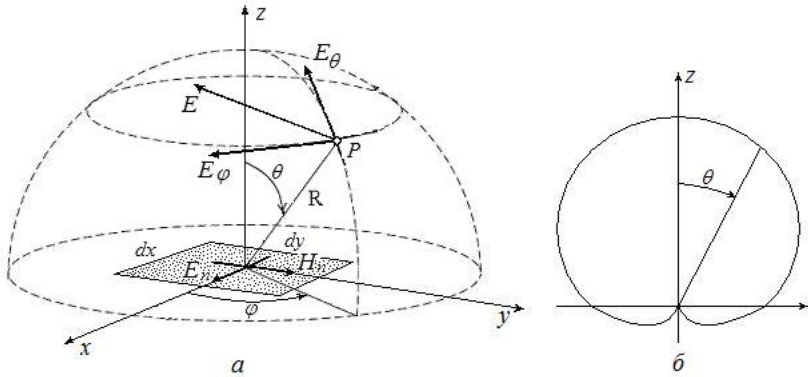


Рисунок 10.4 – Елемент Гюйгенса (а) і його діаграма спрямованості (б)

В системі координат на рис. 10.4 а) і з показаними тут векторами  $E_n$  і  $H_n$  поле в далекій зоні випромінювача Гюйгенса у вільному просторі має наступні компоненти:

$$\dot{E}_\theta = j \cdot \frac{kE_n ds}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} (1 + \cos \theta) \cos \varphi, \quad (10.16)$$

$$\dot{E}_\varphi = -j \cdot \frac{kE_n ds}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} (1 + \cos \theta) \sin \varphi. \quad (10.17)$$

Напрямок електричного вектора  $\vec{E}$  в хвилевій зоні змінюється в залежності від значення кута  $\varphi$ : у площині  $xOz$  ( $\varphi = 0$ ) вектор  $\vec{E}$  має лише компоненту  $E_\theta$ , а в площині  $yOz$  ( $\varphi = \pi/2$ ) лише компоненту  $E_\varphi$ . У проміжних меридіональних площинах вектор  $\vec{E}$  має обидві компоненти. Амплітуда вектору  $\vec{E}$ , яка дорівнює  $|E| = \sqrt{E_\theta^2 + E_\varphi^2}$ , від кута  $\varphi$  не залежить, а від кута  $\theta$  змінюється за законом  $(1 + \cos \theta)$  -

рис.10.4 б). Функція  $f(\theta) = 1 + \cos \theta$  є кардіоїдою, отже, залежність модуля електричного вектора від напрямку в об'ємі характеризується поверхнею, що утворюється обертанням кардіоїди довкола вісі Oz.

Випромінювач Гюйгенса створює *односпрямоване випромінення*, яке максимальне в напрямі, що визначається векторним добутком  $[\vec{E}_n \times \vec{H}_n]$  і дорівнює нулю у зворотньому напрямі. Як впливає з формул (10.16), (10.17) випромінювач Гюйгенса створює в хвилевій зоні сферичні хвилі.

## 10.4 Основні характеристики антен

Спрямована дія антен оцінюється за допомогою діаграм спрямованості (ДС); ДС є залежностями інтенсивності випромінення від кутових координат в просторі. Підкреслимо, що ДС характеризує поле випромінення в далекій зоні антени.

**1. Комплексна векторна ДС антени** – це залежність від кутових сферичних координат комплексного вектору напруженості електричного (або магнітного) поля в рівновіддалених від антени точках

$$\dot{\vec{E}}(\theta, \varphi) = \dot{\vec{p}}(\theta, \varphi) \cdot f(\theta, \varphi) \cdot \exp[j\psi(\theta, \varphi)], \quad (10.18)$$

де  $\dot{\vec{p}}(\theta, \varphi)$  – поляризаційний вектор,  
 $f(\theta, \varphi)$  – амплітудна ДС за полем,  
 $\psi(\theta, \varphi)$  – фазова ДС.

Окрім ДС за полем використовують також ДС за потужністю, при цьому ДС за потужністю пропорційна квадрату ДС за полем. Підкреслимо, що це є ненормовані ДС.

Ненормована ДС за потужністю далі позначатиметься  $f^2(\theta, \varphi)$ .

Для зручності порівняння різних антен використовують нормовані ДС за полем  $F(\theta, \varphi)$  і за потужністю  $F^2(\theta, \varphi)$ , які отримують шляхом ділення ненормованих ДС на їх значення  $f_{\max}$  або  $f_{\max}^2$  у напрямі максимального випромінення:

$$F(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) / f_{\max}$$

і

$$F^2(\theta, \varphi) = f^2(\theta, \varphi) / f_{\max}^2.$$

Тоді нормована векторна комплексна ДС визначатиметься виразом

$$\dot{\vec{F}}(\theta, \varphi) = \dot{\vec{p}}(\theta, \varphi) \cdot F(\theta, \varphi) \cdot \exp[j\psi(\theta, \varphi)], \quad (10.19)$$

Будуються ДС або в полярній (по азимуту  $\varphi$  і по куту місця  $\theta$ ), або в прямокутній системі координат. Для більшої наочності інколи будуються і тривимірні ДС в просторі. Як правило, ДС має декілька напрямів нульового випромінювання («нулів»). Частина ДС між сусідніми нулями називається пелюсткою. Пелюстка, що відповідає напрямам максимальної інтенсивності випромінення, називається *основною (головною) пелюсткою*, інші пелюстки називаються *бічними*. Ефективність антени, при заданій ДС, оцінюється рівнем бічних пелюсток (зазвичай першої).

Для оцінки спрямованих властивостей антени користуються поняттям ширини ДС. Для ДС за потужністю її ширина дорівнює куту  $2\theta_{0.5}$ , в межах якого інтенсивність випромінення не падає нижче 50% від максимальної. Для ДС за полем її ширина визначається за рівнем 0.707 від

максимального значення і позначається  $2\theta_{0.7}$ . Звичайно ці визначення відносяться до симетричних за кутом  $\theta$  ДС.

**2. Фазова ДС антени** – це залежність фази поля від кутових сферичних координат в рівновіддалених від початку координат точках. З цього визначення витікає, що вигляд фазової ДС (на відміну від амплітудної ДС) істотно залежить від вибору точки, в якій розміщено початок координат. Якщо існує таке положення початку координат, при якому фаза в рівновіддалених точках однакова, то це означає, що антена формує сферичний фронт хвилі. Центр цієї сфери називається *фазовим центром антени*.

Антена може і не мати фазового центру. Дійсно, фаза поля на відстані  $R$  від початку координат дорівнює  $\phi = \psi(\theta, \varphi) - kR$ , де  $\psi(\theta, \varphi)$  – фазова ДС антени. На поверхні, де фаза незмінна  $\psi(\theta, \varphi) - kR = \phi_0$ , звідки рівняння поверхні рівних фаз (фронту хвилі) буде:

$$R(\theta, \varphi) = \frac{\psi(\theta, \varphi) - \phi_0}{k}. \quad (10.20)$$

Якщо не існує початку координат, при якому  $\psi(\theta, \varphi) = const$ , то  $R(\theta, \varphi)$  не буде поверхнею сфери і, отже, антена не має фазового центру. Поняття фазового центру використовується, як правило, для апертурних антен.

**3. Поляризаційний вектор**  $\dot{\vec{p}}(\theta, \varphi)$  характеризує залежність поляризації поля випромінювання від кутових сферичних координат.

У загальному випадку вектор  $\dot{\vec{E}}$  можна представити як суму двох лінійно поляризованих компонент:

$$\dot{\vec{E}} = \bar{e}_\theta \dot{E}_\theta + \bar{e}_\varphi \dot{E}_\varphi, \quad (10.21)$$

де  $\bar{e}_\theta$  і  $\bar{e}_\varphi$  – орти сферичної системи координат. Компоненти  $\dot{E}_\theta$  і  $\dot{E}_\varphi$  можуть бути комплексними і мати різні аргументи, тобто між ними може існувати зсув за фазою. Якщо розділити обидві частини рівності (10.21) на  $\sqrt{E_\theta^2 + E_\varphi^2}$ , то отримаємо:

$$\dot{\vec{p}} = \bar{e}_\theta \dot{p}_\theta(\theta, \varphi) + \bar{e}_\varphi \dot{p}_\varphi(\theta, \varphi), \quad (10.22)$$

де

$$\dot{p}_\theta = \dot{E}_\theta / \sqrt{E_\theta^2 + E_\varphi^2}, \quad \dot{p}_\varphi = \dot{E}_\varphi / \sqrt{E_\theta^2 + E_\varphi^2}.$$

З цих формул видно, що компоненти поляризаційного вектора пропорційні компонентам вектору напруженості електричного поля.

**4. Опір випромінювання**  $Z_\Sigma$  формально визначається як відношення потужності  $P_\Sigma$ , яку випромінює антена, до квадрату струму в пучності або до квадрату струму на входних затисках антени:

$$Z_\Sigma = \frac{P_\Sigma}{I_A^2}. \quad (10.23)$$

Потужність випромінювання антени можна визначити інтегруванням вектору Пойнтінга в далекій зоні за поверхнею сфери радіусу  $R$ , яка оточує антену:

$$P_\Sigma = \int_S \Pi ds. \quad (10.24)$$

Площа елемента сферичної поверхні  $\epsilon$ :

$$ds = R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi. \quad (10.25)$$

Підстановка (10.25) в (10.24) з врахуванням зв'язку  $\Pi = E^2(\theta, \varphi) / 240\pi$  дає:

$$P_{\Sigma} = \frac{R^2}{240\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} E^2(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi. \quad (10.26)$$

Потужність випромінення диполя Герца можна, наприклад, розрахувати за (10.26) підстановкою  $E$  з (10.9). Після інтегрування отримуємо:

$$P_{\Sigma Д} = 40\pi^2 I_0^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2. \quad (10.27)$$

Оскільки  $P_{\Sigma Д} = \frac{1}{2} R_{\Sigma Д} I_0^2$ , то з (10.27) витікає, що для диполя Герца опір випромінення буде:

$$R_{\Sigma Д} = 80\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2.$$

У загальному випадку опір випромінення має комплексний характер  $Z_{\Sigma} = R_{\Sigma} + j \cdot X_{\Sigma}$ . У окремому випадку, для тонкого півхвильового вібратору  $R_{\Sigma} = 73.1 \text{ Ом}$ ;  $X_{\Sigma} = 42.5 \text{ Ом}$ .

**5. Вхідний опір**  $Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}}$  визначається як відношення напруги на вхідних затисках антени до струму, який протікає через них, і в загальному випадку також носить комплексний характер. Вхідний опір характеризує антену як навантаження для генератора.

Активна складова вхідного опору  $R_{\text{вх}}$  є сумою опорів випромінення  $R_{\Sigma}$  і втрат  $R_B$ :

$$R_{\text{ex}} = R_{\Sigma} + R_B, \quad (10.28)$$

а реактивний опір характеризує ту частину електромагнітного поля, яка зосереджена поблизу антени і не випромінюється.

Точний розрахунок вхідного опору в загальному випадку складний і його виконано лише для деяких антен простої форми. В окремому випадку півхвильового вібратору ( $l = \lambda/2$ ) має місце резонанс і при цьому  $X_{\text{вх}}=0$ , а  $R_{\text{вх}}=73.1$  Ом. Резонанси також матимуть місце при довжині антени, яка кратна півхвилі, тобто  $l = n \cdot \lambda/2$ . В більшості випадків для розрахунку вхідного опору застосовуються наближені методи.

З вище сказаного виходить, що параметри  $R_{\Sigma}$ ,  $X_{\Sigma}$ ,  $R_{\text{ex}}$ ,  $X_{\text{вх}}$  по своєму фізичному значенню доцільно використовувати лише при розгляді лінійних (дротяних) антен.

### 6. Коефіцієнт корисної дії (ККД) $\eta = P_{\Sigma} / P_0$

визначається як відношення випроміненої потужності  $P_{\Sigma}$  до повної потужності  $P_0$ , яка надходить в антену. Оскільки повна потужність дорівнює сумі випроміненої потужності  $P_{\Sigma}$  і потужності втрат  $P_B$ , вираз для коефіцієнту корисної дії можна записати у вигляді:

$$\eta = P_{\Sigma} / (P_{\Sigma} + P_B). \quad (10.29)$$

Якщо чисельник і знаменник (10.29) розділити на  $0.5I^2$ , то вираз для ККД набуде вигляду:

$$\eta = R_{\Sigma} / (R_{\Sigma} + R_B). \quad (10.30)$$

З пониженням частоти ККД зазвичай знижується із-за зменшення  $R_{\Sigma}$ ; на довгих хвилях ККД інколи може складати одиниці відсотків.

**7. Коефіцієнт спрямованої дії (КСД)  $D$**  показує, в скільки разів треба збільшити потужність випромінювання неспрямованої антени замість розглядуваної спрямованої, щоб потужність випромінювання в місці прийому залишилася незмінною.

Якщо відома ненормована ДС антени за полем  $f(\theta, \varphi)$  і той опір випромінювання  $R_{\Sigma}$ , який обраховано за струмом в пучності, то КСД треба обраховувати за формулою:

$$D = \frac{120 \cdot f^2(\theta, \varphi)}{R_{\Sigma}}. \quad (10.31)$$

Величину  $D$  для симетричної за кутом  $\theta$  ДС можна оцінити (якщо відома величина  $2\theta_{0.7}$  в кутових градусах) за наближеним співвідношенням

$$D = 41200 / (2\theta_{0.7})^2. \quad (10.31a)$$

**8. Коефіцієнт підсилення антени  $G$**  визначається як добуток КСД антени на її ККД.

$$G = \eta \cdot D. \quad (10.32)$$

### 10.5 Симетричний вібратор

До простих антен належить симетричний електричний вібратор, що є прямолінійним відрізком тонкого дроту, який живиться в середині. При цьому довжина вібратору може бути

довільною, а радіус провідника має бути набагато менший довжини хвилі випроміненого поля і довжини вібратора.

Строгі методи розрахунку поля вібратора, які засновано на вирішенні рівнянь Максвелла, математично складні і вимагають громіздких розрахунків, які стали практично здійсними завдяки використанню обчислювальної техніки. В інженерній практиці широко застосовується наближений метод, який спирається на аналогію довгої лінії і симетричного вібратора.

### 10.5.1 Розподіл струму, напруги і заряду по вібратору

Симетричний вібратор завдовжки  $2l$  можна отримати, розвертаючи на  $90^\circ$  кожне плече розімкненого на кінці відрізка двопровідної лінії (рис. 10.5). Якщо радіус  $a$  провідників двопровідної лінії малий порівняно з довжиною плеча  $l$  вібратора, тобто  $a/l \ll 1$ , то теоретичні дослідження і практичні виміри показують, що розподіли струмів по вібратору і по відрітку двопровідної лінії майже однакові.

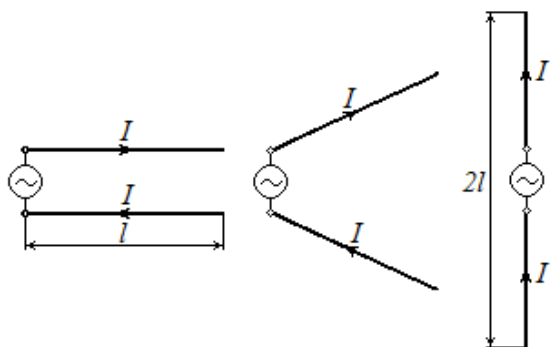


Рисунок 10.5 – Отримання симетричного вібратора

Таким чином, розподіл струму по тонкому вібратору без врахування втрат можна вважати близьким до синусоїдального з вузлами (нулями) на кінцях:

$$I(z) \approx I_0 \sin[k(l-z)], \quad (10.33)$$

де  $I_0$  – струм в пучності,

$i(z,t) = I(z) \cdot e^{j\omega t}$  - миттєве значення струму, а координата  $z$  відраховується від середини вібратору. Приклади розподілу струму по вібраторах різної довжини показано на рис. 10.6. Під час переходу через вузол стоячої хвилі фаза струму міняється на  $180^\circ$ . Якщо  $2l \leq \lambda$ , то розподіл струму синфазний, а при  $2l > \lambda$  на вібраторі з'являються ділянки із струмами протифаз.

Слід зазначити, що між симетричним вібратором і відрізком двопровідної лінії є відмінності, з яких найбільш важливе полягає в тому, що вібратор є випромінювальним пристроєм, а лінія не випромінювальним. З цієї причини, згадану аналогію слід застосовувати лише для наближеного визначення функції розподілу струму.

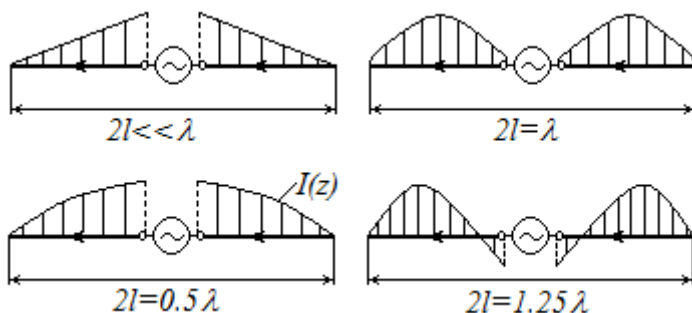


Рисунок 10.6 – Розподіл струму по довжині симетричного вібратору

Наявність випромінення впливає на закон розподілу струму. По-перше, струм у вузлах хоча і малий, але не дорівнює нулю (за винятком кінців вібратора). По-друге, відстань між мінімумами струму у вібратора дещо менша, що можна трактувати як зменшення фазової швидкості хвилі струму. Таким чином, точнішим аналогом вібратору є відрізок довгої лінії з втратами. Тоді розподіл струму описуватиметься не круговим синусом, а гіперболічним, і стала поширення буде комплексною  $\gamma = \alpha + j\beta$ . Коефіцієнт фази дорівнює  $\beta = \xi k = \xi 2\pi / \lambda$ , а поправковий множник  $\xi$  визначається експериментально.

У довгій лінії напруга (різниця потенціалів дротів) в деякому її перетині має певний сенс, оскільки поле в цьому перетині є потенційним. Поле ж симетричного вібратора не є потенційним, тому розподіл напруги по вібратору не відповідає розподілу в лінії.

Для коротких вібраторів ( $l < 0.1\lambda$ ) можна приблизно вважати поле потенційним, а розподіл напруги таким же, як в двопровідній лінії. Тоді пучності напруги будуть розташовані на кінцях вібратора, а розподіл напруги від кінців до середини відбудуватиметься по косинусоїдальному закону.

Розподіл заряду по симетричному вібратору можна визначити з рівняння неперервності, яке має вигляд:  $\partial i(z,t) / \partial z = -\partial q(z,t) / \partial t$ , де  $q$  – заряд на одиницю довжини дроту. Якщо покласти  $q(z,t) = Q(z) \cdot e^{j\omega t}$  і використовувати значення струму  $i(z,t) = I(z) \cdot e^{j\omega t}$ , то неважко отримати:

$$Q(z) = \mp jQ_0 \cos[k(l - |z|)], \quad (10.34)$$

де  $Q_0 = I_0 k / \omega$ , а знаки (-) і (+) відповідають  $z > 0$  і  $z < 0$ . Отже, в симетричних точках вібратору заряди протилежні за знаком. Оскільки величина нормальної до дроту складової

електричного поля пропорційна  $Q(z)$ , то найбільш небезпечними з точки зору електричного пробую є ділянки вібратору поблизу пучностей заряду.

### 10.5.2 Поле випромінення симетричного вібратору

Напруженість електричного поля, що створюється симетричним вібратором в точці М, розташованій в далекій зоні і має координати  $R, \theta, \varphi$ , можна визначити як суму полів в цій точці від елементів  $dz$  вібратору (рис. 10.7). Можна вважати, що в межах малого відрізка  $dz$  розподіл струму рівномірний, і тоді вібратор можна розглядати як сукупність диполів Герця.

Напруженість  $dE$  від кожного елементу  $dz$  розраховується за формулою (10.9), в якій потрібно  $I_0$  замінити на  $I(z)$ , а  $l$  – на  $dz$ . У далекій зоні вектори  $d\vec{E}_1$  і  $d\vec{E}_2$ , створювані в точці М струмами в двох симетрично розташованих елементах  $dz$  (точки 1 і 2) з координатами  $+z$  і  $-z$ , можна вважати паралельними і складати алгебраїчно. Тоді:

$$dE = dE_1 + dE_2 = j30kI(z)dz \sin \theta \cdot \left( \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} \right). \quad (10.35)$$

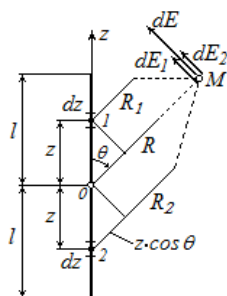


Рисунок 10.7 – До розрахунку поля випромінювання симетричного вібратору

Величини  $R_1$  і  $R_2$  в знаменниках, що впливають на амплітуду поля, можна замінити на  $R$ , оскільки для далекої зони їх відмінність мала. У показниках експонент цього зробити не можна, оскільки набіги фаз на відстанях  $R_1$  і  $R_2$  можуть істотно відрізнятись. Якщо зробити заміну  $R_1 = R - z \cos \theta$  і  $R_2 = R + z \cos \theta$ , тоді:

$$dE = j \frac{60k \cdot I(z) \cdot e^{-jkR}}{R} \cdot \sin \theta \cdot \cos(kz \cos \theta) dz. \quad (10.36)$$

Повне поле випромінення вібратору знайдеться за допомогою інтегрування в інтервалі  $0 \leq z \leq l$ . Вважаючи розподіл струму  $I(z)$  синусоїдальним (формула (10.33)), легко отримати:

$$E = \int_0^l dE = j \frac{60kI_0 e^{-jkR}}{R} \cdot \sin \theta \int_0^l \sin[k(l-z)] \cdot \cos(kz \cos \theta) dz \quad (10.37)$$

Перехід в (10.37) від добутку тригонометричних функцій до їх суми і виконання інтегрування дає вираз для амплітуди поля:

$$E = \frac{60I_0}{R} \cdot \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)}{\sin \theta}. \quad (10.38)$$

Як видно, електричне поле вібратора не залежить від кута  $\varphi$ , тобто воно є симетричним відносно вісі  $z$ .

$$f(\theta) = \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)}{\sin \theta}. \quad (10.39)$$

На практиці зазвичай застосовуються вібратори завдовжки  $2l < 5\lambda/4$ , ДС яких мають в інтервалі  $0 \leq \theta \leq 180^\circ$  лише один максимум в напрямі, який є перпендикулярним до вісі вібратору. З (10.39) витікає, що при  $\theta = \pi/2$  величина  $f(\pi/2) = f_{\max} = 1 - \cos(kl)$ . Тоді вираз для нормованої ДС вібратору набуває вигляду:

$$F(\theta) = \frac{f(\theta)}{f_{\max}} = \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)}{[1 - \cos(kl)] \sin \theta}. \quad (10.40)$$

Для півхвильового вібратора ( $2l = \lambda/2$ ) з (10.40) витікає:

$$F(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}. \quad (10.41)$$

На рис. 10.8 показано ДС симетричного вібратору для деяких значень  $2l$ .

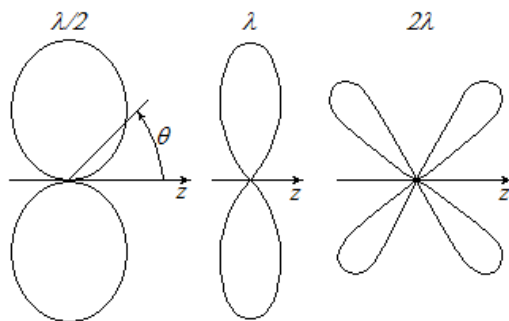


Рисунок 10.8 – ДС симетричного вібратору

Відповідні просторові ДС отримують обертанням цих кривих довкола вісі  $z$  (рис. 10.9).

При збільшенні відношення  $l/\lambda$  число пелюсток зростає, а ширина кожної пелюстки зменшується.

Поляризаційний вектор симетричного вібратора має лише одну компоненту  $\dot{r}_\theta$ , яка обумовлена єдиною складовою

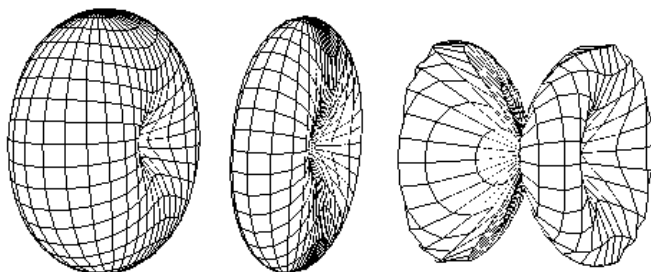


Рисунок 10.9 – Просторові ДС симетричного вібратора

електричного поля  $\dot{E}_\theta$ , отже, вібратор випромінює електромагнітні хвилі з лінійною поляризацією.

### 10.5.3 Опір випромінення симетричного вібратора

Опір випромінення симетричного вібратора по відношенню до струму в пучності можна розрахувати за допомогою співвідношень (10.23) і (10.33). Підстановка у формулу  $R_\Sigma = 2P_\Sigma / I_0^2$  виразу (10.26), з врахуванням (10.38) і вісєвої симетрії поля вібратора, приводить до співвідношення:

$$R_\Sigma = 60 \int_0^\pi \frac{[\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)]^2}{\sin \theta} d\theta. \quad (10.42)$$

При цьому незалежність електричного поля (10.38) від кута  $\varphi$  (тобто вісєва симетрія) приводить до того, що інтегрування за  $\varphi$  дає величину  $2\pi$ . Інтегрування в (10.42) дає вираз:

$$R_{\Sigma} = 30\{[Si(4kl) - 2Si(2kl)]\sin(2kl) + [C + \ln(kl) + Ci(4kl) - 2Ci(2kl)]\cos(2kl) + 2[C + \ln(kl) - Ci(2kl)]\} \quad (10.43)$$

де  $Si(x)$  і  $Ci(x)$  – інтегральні синус і косинус, а  $C=0.577$  – стала Ейлера. Графік залежності  $R_{\Sigma}$  від  $l/\lambda$  наведено на рис. 10.10.

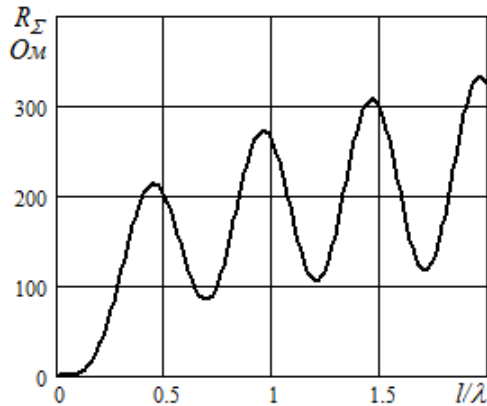


Рисунок 10.10 – Опір випромінювання симетричного вібратору

На рисунку можна відзначити дві характерні точки: для півхвильового вібратору ( $l/\lambda = 0.25$ )  $R_{\Sigma} \approx 73.1$  Ом, для хвильового ( $l/\lambda = 0.5$ )  $R_{\Sigma} \approx 200$  Ом.

### 10.5.4 Вхідний опір симетричного вібратору

Вхідний імпеданс симетричного вібратору  $Z_{вх} = R_{вх} + jX_{вх}$  залежить від розмірів вібратору і довжини хвилі. Імпеданс  $Z_{вх}$  можна визначати, розглядаючи вібратор як відрізок розімкненої двопровідної лінії з втратами.

Згідно теорії довгих ліній вхідний опір розімкненого відрізка:

$$Z_{\text{вх}} = Z_X \text{cth}(\gamma l) = Z_X \frac{\text{sh}(2\alpha l) - j \sin(2\beta l)}{\text{ch}(2\alpha l) - \cos(2\beta l)}, \quad (10.44)$$

де  $Z_X = \sqrt{(R + j\omega L)/(G + j\omega C)}$ , а  $R, G, L, C$  – погонні параметри лінії, яка еквівалентна вібратору. Для вібратору можна вважати  $G \approx 0$  і  $R \ll \omega L$ . Тоді можна вираз для  $Z_X$  розкласти в степеневий ряд і в розкладанні обмежитися першими двома членами:

$$Z_X \approx W_X \left( 1 - j \frac{R}{2\omega L} \right) = W_X \left( 1 - j \frac{\alpha}{k} \right). \quad (10.45)$$

Тут коефіцієнт загасання  $\alpha = R/2W_X$ , а  $W_X = \sqrt{L/C}$  – дійсна частина хвильового опору вібратору,  $k = \omega\sqrt{LC}$ .

Підстановка (10.45) в (10.44), з врахуванням введеного раніше поправкового множника  $\xi$ , дає:

$$Z_{\text{вх}} = W_X \frac{\left[ \text{sh}(2\alpha l) - \frac{\alpha}{k} \sin(2\xi k l) \right] - j \left[ \sin(2\xi k l) + \frac{\alpha}{k} \text{sh}(2\alpha l) \right]}{\text{ch}(2\alpha l) - \cos(2\xi k l)}. \quad (10.46)$$

Оскільки в даному випадку відстань між симетричними елементами вібратора змінюється, то, отже, змінюється і хвильовий опір  $W_X$ . Для розрахунку величини  $W_X$  можна використовувати наближену формулу, отриману для тонких циліндричних вібраторів:

$$W_X = 120 \left( \ln \left( \frac{l}{a} \right) - 1 \right), \quad (10.47)$$

де  $l$  – довжина,  $a$  – радіус провідника вібратору.

Для визначення  $R$  треба прирівняти потужність випромінення вібратору і потужність, яка розсіюється у відрізьку лінії

$$\frac{I_0^2 R_\Sigma}{2} = \int_0^l \frac{I^2(z) \cdot R}{2} dz, \quad (10.48)$$

звідки, вважаючи розподіл струму з врахуванням множника  $\xi$  синусоїдальним  $I(z) = I_0 \sin[\xi k(l - |z|)]$ , після інтегрування неважко отримати:

$$R = \frac{2R_\Sigma}{l \cdot \left[ 1 - \frac{\sin(2\xi kl)}{2\xi kl} \right]}. \quad (10.49)$$

І тоді коефіцієнт загасання:

$$\alpha = \frac{R_\Sigma}{W_X \cdot l \cdot \left[ 1 - \frac{\sin(2\xi kl)}{2\xi kl} \right]}. \quad (10.50)$$

На рис. (10.11) і (10.12) наведено залежності активної і реактивної складових вхідного імпедансу симетричного вібратору від його електричної довжини при двох значеннях радіусу провідника  $a$ .

По характеру кривих видно, що перший резонанс ( $X_{\text{вх}} = 0$ ) є послідовним і спостерігається поблизу точки  $l = \lambda/4$ . При менших довжинах вібратору реактивний опір виявляється ємнісним.

Другий резонанс є паралельним і спостерігається поблизу точки  $l = \lambda/2$ . При цьому  $R_{вх}$  досягає максимуму, величина якого залежить від радіусу провідника  $a$ .

У інтервалі між першим і другим резонансами реактивний опір вібратора є індуктивним. З рисунків видно, що чим товще вібратор (при цьому менше  $W_X$ ), тим в менших межах

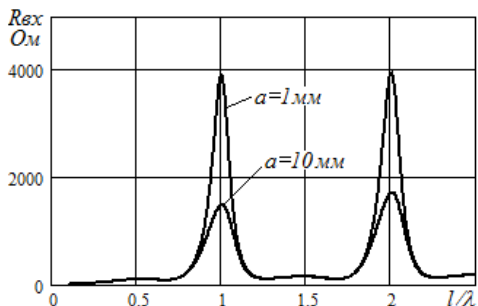


Рисунок 10.11 – Активна складова  $Z_{вх}$  вібратору

змінюється  $R_{вх}$  і тим менше величина  $|X_{вх}|$ , отже, тим більше смуга пропускання вібратору.

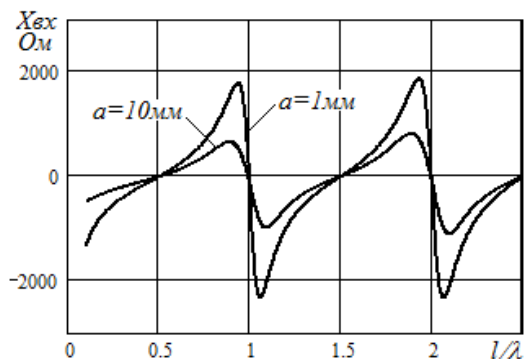


Рисунок 10.12 – Реактивна складова  $Z_{вх}$  вібратору

## 10.6 Турнікетна антена

Турнікетна антена є простим варіантом антени з круговою поляризацією. Вона являє собою (рис. 10.13) два взаємно перпендикулярних симетричних вібратора, які збуджуються з різницею фаз  $90^\circ$ .

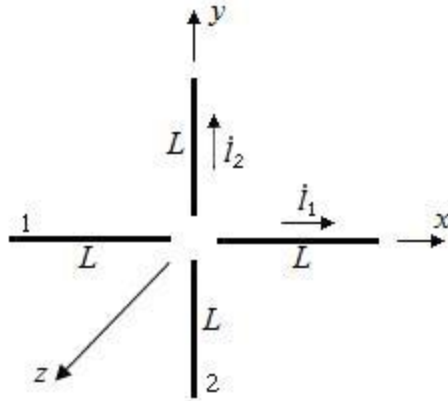


Рисунок 10.13 – Турнікетна антена

Для електромагнітної хвилі, яка поширюється вздовж вісі  $z$ , напруженість електричного поля від вібратора 1 є:

$$\bar{E}_1 = \bar{x}_0 E_m \cos(\omega t - \beta z) \quad (10.51)$$

Напруженість електричного поля від вібратора 2 є:

$$\bar{E}_2 = \bar{y}_0 E_m \cos(\omega t - \beta z - \psi) \quad (10.52)$$

У (10.51), (10.52)  $\bar{x}_0, \bar{y}_0$  це орти вісей  $x$  і  $y$  відповідно.

Сумарне поле антени при зсуві фаз  $\psi = \frac{\pi}{2}$  (для простоти хай також  $\beta z = 2\pi$ ) буде:

$$\bar{E}(t) = E_m[\bar{x}_0 \cos(\omega t) + \bar{y}_0 \sin(\omega t)]$$

Модуль (довжина) вектору  $\bar{E}$ , або його миттєве значення:

$$|\bar{E}(t)| = E_m \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = E_m = \text{const}. \quad (10.53)$$

Кут нахилу вектору  $\bar{E}$  до вісі  $z$  (у площині, перпендикулярній вісі  $z$ ) буде дорівнювати:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{E_m \sin(\omega t)}{E_m \cos(\omega t)}\right) = \arctg[\tg(\omega t)] = \omega t. \quad (10.54)$$

З двох останніх виразів витікає, що модуль вектору результуючого електричного поля залишається сталим, а сам вектор обертається з часом з кутовою швидкістю  $\omega$  довкола напрямку поширення хвилі. Розглянутий випадок відповідає лівій круговій поляризації. Якщо зсув фаз при збудженні вібраторів  $\psi = -\frac{\pi}{2}$ , то в цьому випадку буде права кругова поляризація.

Для напрямів поширення хвилі, що не співпадають з віссю  $z$ , кругова поляризація переходить в еліптичну, як показано на рис. 10.14 (точки 2, 3, 4). При цьому коефіцієнт еліптичності  $m = \cos \theta$ .

Зсув за фазою  $90^\circ$  при синфазному живленні вібраторів можна здійснити шляхом зсуву одного вібратора відносно іншого на відстань  $\lambda/4$ . При цьому одна з хвиль, пройшовши шлях  $\lambda/4$ , набуде додаткову фазу  $90^\circ$ , що еквівалентно збудженню із зсувом фаз  $90^\circ$ .

Просторова ДС турнікетної антени, яку наведено на рис. 10.15, показує, що вона не має енергетичних нулів і є квазіізотропною.

Такі структури можуть застосовуватися як самостійні антени; в той же час слід мати на увазі, що деякі поєднання

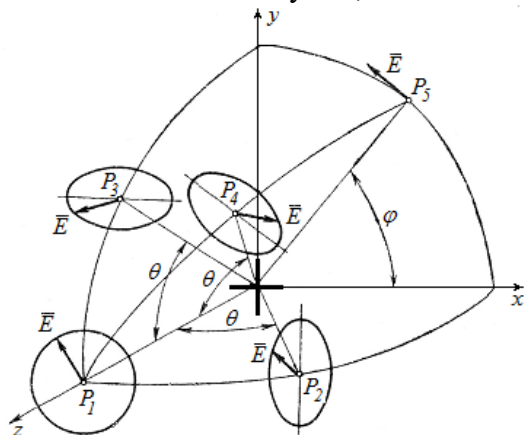


Рисунок 10.14 – Зміна поляризації турнікетної антени

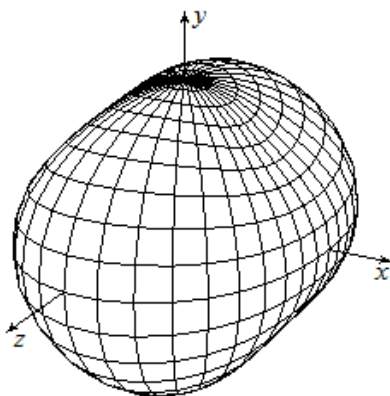


Рисунок 10.15 – Просторова ДС турнікетної антени

випромінювальних елементів радіоелектронної апаратури можуть утворити турнікетну антену і для виявлення цього побічного випромінення (з круговою поляризацією) потрібна приймальна антена з відповідними властивостями. Одним з різновидів таких антен є спіральна антена.

## 10.7 Спіральна антена

Спіральна антена здатна спрямовано випромінювати електромагнітні хвилі з круговою поляризацією в досить широкій смузі частот. Використання таких антен в системах рухомого радіозв'язку підвищує завадозахищеність і стійкість каналу зв'язку. Наприклад, при використанні на рухомих об'єктах антен кругової поляризації, замість традиційно використовуваних антен лінійної поляризації, стійкість зв'язку істотно підвищується. Для опису спіральної антени зазвичай вводять деяку поверхню, на якій розташовано її витки. Тоді спіральні антени можна класифікувати за формою цієї поверхні: циліндричні, конічні, сферичні і інші варіанти поверхонь. Як приклад на рис. 10.16 показано однозаходову циліндричну спіральну антену. Тут  $\beta$  – кут підйому витків спіралі,  $s$  – крок витка спіралі.

За принципом дії спіральні антени відносяться до антен рухомих хвиль з періодичною структурою. Залежно від відношення сумарної довжини витків спіралі  $nL$  (де  $n$  – число витків, а  $L$  – довжина одного витка) до довжини хвилі, може мінятися коефіцієнт спрямованої дії антени.

Строгий розрахунок характеристик спіральних антен пов'язано з великими математичними труднощами, що обумовлено відсутністю відповідної системи координат, в якій поверхня провідника спіралі точно збігалася б з координатними поверхнями. Тому на практиці використовуються різні наближені методи, які при чисельній

реалізації дозволяють розрахувати параметри спіральних антен з досить високою точністю

Ширину ДС (у градусах) однозаходової циліндричної спіральної антени за рівнем половини потужності може бути визначено за наближеною формулою:

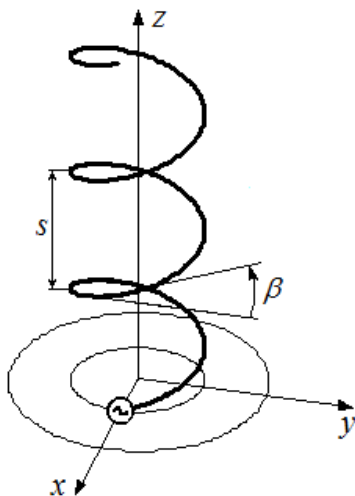


Рисунок 10.16 – Однозаходова циліндрична спіральна антена

$$\Phi_H^o = \Theta_E^o = \frac{52}{\frac{L}{\lambda} \sqrt{\frac{n \cdot s}{\lambda}}} \quad (10.55)$$

Коефіцієнт спрямованої дії антени:

$$D = 15 \cdot \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{n \cdot s}{\lambda} \quad (10.56)$$

Вхідний опір антени є активним і знаходиться за формулою:

$$R_{ex} = 140 \cdot \frac{L}{\lambda}. \quad (10.57)$$

На рис. 10.17 показано об'ємну ДС циліндричної спіральної антени (рис. 10.16) з параметрами:  $\beta = 20^\circ$ ,  $s = 2,25$  см,  $n=3$ , радіус циліндру  $r=1$  см, частота  $f=3,7$  ГГц.

Невелика несиметрія ДС пояснюється несиметричним розташуванням джерела збудження, яку видно з рис. 10.16.

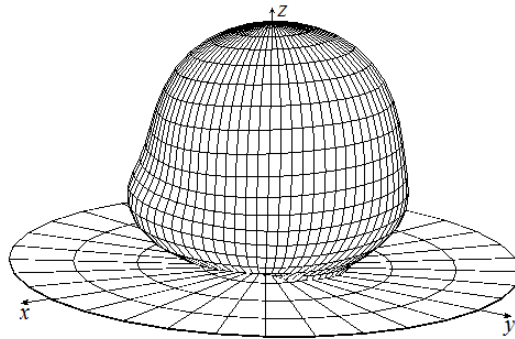


Рисунок 10.17 – Просторова ДС спіральної антени

Слід відзначити, що позитивною якістю спіральних антен є досить велике значення робочої смуги частот. Для циліндричної спіральної антени це майже октава, а для конічної спіральної ще більше – до 2.5...3 октав (нагадаємо, що октаві відповідає подвійна зміна значення частоти).

### Контрольні запитання

1. Яке наближення застосовується для розрахунку випромінювання з реальних випромінювачів?

2. Які умови треба виконати, щоб випромінювач став диполем Герця?
3. Які властивості за фазою та амплітудою має поле випромінення в ближній, проміжній та далекій зонах? В якій з цих зон поле набуває характеру електромагнітної хвилі?
4. Що таке діаграма спрямованості (ДС) випромінювача?
5. Який вигляд має ДС диполя Герця в меридіональній та азимутальній площинах?
6. За якими властивостями елементарний магнітний випромінювач відрізняється від диполя Герця?
7. Як співвідносяться розміри витка зі струмом та диполя Герця?
8. Що таке елементарний випромінювач Гюйгенса? Які компоненти випроміненого поля він має?
9. Які особливості має ДС елемента Гюйгенса в вертикальній та горизонтальній площинах?
10. Що таке комплексна векторна ДС антени?
11. Що таке нормована за амплітудою та потужністю ДС антени?
12. Як будуються ДС антен? Які пелюстки мають ДС і як вони оцінюються?
13. Що таке фазова ДС та як знайти фазовий центр антени?
14. За яким параметром визначаються поляризаційні властивості антени?
15. Що таке опір випромінення антени та як його знайти?
16. Що таке вхідний опір антени та як його знайти?
17. Як знаходиться к.к.д. антени?
18. Що таке КСД та коефіцієнт підсилення антени?
19. Що таке симетричний вібратор та які вимоги до його геометричних розмірів?
20. За яким наближенням встановлюється розподіл струму по тонкому вібратору та які особливості цього розподілу?

21. Як встановлюються розподіли напруги та заряду по вібратору?
22. Як знаходиться поле випромінення вібратору та його ненормована і нормована ДС?
23. Як залежить форма ДС вібратору від його довжини?
24. Як знаходиться опір випромінення симетричного вібратору?
25. Як знаходиться комплексний вхідний опір симетричного вібратору?
26. Які принципи роботи турнікетної антени?
27. Як змінюється поляризація поля випромінення турнікетної антени?
28. Який вигляд має ДС та які напрями застосування турнікетної антени?
29. Які принципи роботи спіральної антени?
30. Як визначаються параметри та який вигляд має ДС спіральної антени?

### Приклади вирішення задач

**Задача 10.1** Диполь Герца з довжиною  $l=2$  м збуджується гармонічним струмом з амплітудою  $I_0 = 5$  А. Частота  $f = 1$  МГц. Знайти амплітуди напруженостей електричного та магнітного полів на відстані  $r = 50$  км від випромінювача в повітряному середовищі при  $\theta = \pi/2$ .

#### Вирішення

1. Знайдемо довжину хвилі  $\lambda$ . Для повітря швидкість хвилі  $V_{\text{ф}} = c = 3 \cdot 10^8$  м/сек отже  $\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 10^6 = 300$  м.
2. Знайдемо сталу поширення  $k = 2\pi/\lambda$  та величину  $1/kr$   $k = 2\pi/300$ ;  $1/kr = 300/(2\pi \cdot 50 \cdot 10^3) = 9.5 \cdot 10^{-4} \ll 1$ .

З цього розрахунку витікає, що точка спостереження знаходиться в хвилевій зоні, де електричне поле має лише складову з амплітудою  $E_\theta$ , а магнітне -  $H_\varphi$  в сферичній системі координат (рис.10.1).

3. За виразом (10.8) знаходимо  $H_\varphi$ .

$$H_\varphi = \frac{k \cdot I_0 \cdot l}{4\pi \cdot r} \sin \theta = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 2}{300 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 10^3} = 3.34 \cdot 10^{-7} \frac{A}{m}.$$

4. За виразом (10.7) знаходимо  $E_\theta$ .

$$E_\theta = Z_0 \cdot H_\varphi = 120\pi \cdot 3.34 \cdot 10^{-7} = 1.26 \cdot 10^{-4} \frac{V}{m}.$$

**Задача 10.2** Антена з довжиною  $l=3$  м збуджується гармонічним струмом з амплітудою  $I_0 = 10$  А. Частота  $f = 1$  МГц. Знайти потужність та опір випромінювання цієї антени. Як зміняться ці величини при довжині антени  $l_l=30$  м? Виконати порівняльний аналіз.

### Вирішення

1. Знайдемо довжину хвилі  $\lambda$ . Для повітря швидкість хвилі  $V_\Phi=c=3 \cdot 10^8$  м/сек отже  $\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 10^6 = 300$  м.
2. Відношення  $l/\lambda$  для цієї антени є  $l/\lambda = 3/300 = 0.01 \ll 1$ . Це свідчить за те, що для розрахунків можна застосовувати формули, які отримані для диполя Герця.
3. За виразом (10.27) знайдемо потужність випромінювання.

$$P_{\Sigma D} = 40\pi^2 I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 40 \cdot 3.14^2 \cdot 10^2 \cdot (0.01)^2 = 3.95 \text{ Вт}.$$

4. Оскільки  $P_{\Sigma D} = \frac{1}{2} R_{\Sigma D} I_0^2$ , то з (10.27) витікає, що для диполя Герця опір випромінювання буде :

$$R_{\Sigma D} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 80 \cdot 3.14^2 \cdot (0.01)^2 = 0.079 \text{ Ом}.$$

Наголосимо, що таке низьке значення опору випромінення свідчить за низьку випромінювальну ефективність такої короткої антени. Розглянемо випадок антени з довжиною  $l_l = 30$  м.

Відношення  $l_l/\lambda$  для цієї антени є  $l_l/\lambda = 30/300 = 0.1 \ll 1$ . Це свідчить за те, що для розрахунків також можна застосовувати формули, які отримані для диполя Герця.

5. Виконавши аналогічні розрахунки, отримаємо

$$P_{\Sigma Д1} = 395 \text{ Вт}; \quad R_{\Sigma Д1} = 7.9 \text{ Ом}.$$

Із порівняння отриманих даних видно, що із збільшенням довжини антени її випромінювальна ефективність збільшується. За цією причиною на практиці звичайно прагнуть там, де це можливо, застосовувати антени з довжиною, яка є співрозмірною з довжиною хвилі.

### Задачі для самостійного вирішення

**Задача 10.3** Лінійна антена з довжиною  $l=4$  м збуджується гармонічним струмом з амплітудою  $I_0 = 1$  А. Частота  $f = 1$  МГц. Знайти потужність та опір випромінення цієї антени. Як зміняться ці параметри, якщо з проводу антени довжиною 4 м утворити круглу рамку, яка живиться таким же струмом  $I_0$ ? Провести порівняльний аналіз. Зробити висновки.

**Задача 10.4** Порівняти КСД півхвильового вібратора та диполя Герця з  $l/\lambda = 0.05$ .

**Задача 10.5** Розрахувати нормовані ДС за полем для симетричних вібраторів з довжинами  $2l=\lambda/2, \lambda, 1.25\lambda, 1.5\lambda$ . Провести порівняльний аналіз. Зробити висновки.

## 11 НЕЛІНІЙНА ЛОКАЦІЯ

Однією з найбільш складних задач в області захисту інформації є виявлення та пошук тих закладних пристроїв, які або взагалі не використовують радіоканал для передачі, наприклад, цифрові диктофони, або знаходяться в пасивному (невипромінювальному) стані. В цьому випадку застосування традиційних засобів виявлення закладних пристроїв (панорамні радіоприймачі, аналізатори спектру або детектори поля) взагалі неможливе, бо відсутній сам факт випромінення. Візуальний же пошук також не гарантує виявлення, бо сучасні технології дозволяють виготовляти їх з будь-яким видом камуфляжу, ховати в елементах будівельних конструкцій, інтер'єру і т.і.

Дослідження та зусилля, які було здійснено для вирішення саме цих задач і привели до появи пошукового пристрою, який отримав назву нелінійний локатор. Своєю назвою він зобов'язаний закладеному в ньому фізичному принципу виявлення підслуховувальних пристроїв.

### 11.1 Принципи дії нелінійного локатору

Сучасним станом загальною і принциповою особливістю всіх технічних засобів будь якого шпіонажу є той факт, що всі ці засоби є радіоелектронними пристроями. До їх складу обов'язково входять напівпровідникові елементи - діоди, транзистори, мікросхеми. Будь який напівпровідниковий елемент має нелінійну вольт-амперну характеристику. При опроміненні такого елемента гармонійною електромагнітною хвилею з частотою  $f_0$  в його вхідному колі наводяться струми цієї частоти. Відгуком на такий вплив є поява в вихідному колі (внаслідок нелінійності елемента) вже негармонійного струму, який має в своєму

спектрі нескінченно велику кількість гармонік з кратними частотами

$$f_n = n \cdot f_0, \quad (11.1)$$

де  $n = 1, 2, 3, \dots$  натуральний ряд чисел.

Ці струми існують не самі по собі, а в деяких провідних елементах вихідних ланцюгів напівпровідникових приборів. Таким чином, ці елементи зі змінними у часі струмами є нічим іншим, як перевипромінювачами електромагнітних хвиль з кратними (по відношенню до частоти опромінення  $f_0$ ) частотами  $n \cdot f_0$ .

Наявність перевипромінених сигналів з кратними частотами  $n \cdot f_0$  якраз і є тим інформативним критерієм, за яким роблять висновок про існування в зоні опромінення напівпровідникового елемента. Таким чином, нелінійний локатор – це прилад, який випромінює електромагнітну хвилю з частотою  $f_0$ , а приймає перевипромінені сигнали на кратних частотах  $f_n$ . Якщо такі сигнали будуть виявлені, то в зоні дії локатору є напівпровідникові елементи, і їх необхідно перевірити на можливу належність до складу закладного пристрою. Зазвичай при опроміненні (в режимі передачі) застосовують сигнали з частотою порядку 1 ГГц (800 МГц – 1000 МГц), а приймають або другу, або третю (або обидві разом) гармоніки (2ГГц, 3ГГц). Таким чином, нелінійний локатор повинен працювати в діапазоні НВЧ навіть при використанні тільки другої та третьої гармонік перевипроміненого сигналу.

Відповідно до вищесказаного, нелінійний радіолокатор за своїм принципом дії повинен виявляти тільки радіоелектронну апаратуру і, на відміну від класичного «лінійного» радіолокатору, «не бачити» відбитого від оточуючих предметів сигналу, тобто він в принципі повинен

мати високу вибірковість по відношенню до розшукуваних елементів. Ці властивості витікають з того, що відбиття від оточуючих предметів – це лінійний процес, а тому відбиті від таких «лінійних» предметів сигнали в своєму спектрі будуть мати виключно частоту опромінення  $f_0$  (нагадаємо, що нелінійний локатор приймає лише перевипромінені сигнали з частотами  $n \cdot f_0$ ).

## 11.2 Джерела завад при роботі нелінійного локатору

В практиці застосування нелінійних локаторів було виявлено, що відгуки на гармоніках сигналу опромінення можуть створюватися не тільки напівпровідниковими елементами із складу закладних пристроїв, але і такими металевими елементами конструкцій, які контактують між собою. Для нелінійного локатору сигнали цих відгуків будуть завадами.

Найбільш типовими структурами, що створюють завади, є контактуючі між собою складові металевого каркасу і арматури залізобетонних будинків, металеві конструкції віконних і дверних коробок, арматура підвісних стель і т.і. Річ у тому, що в області контакту двох металів можуть утворюватися структури, які за своїми властивостями є деякими аналогами р-п переходів в напівпровідниках. Таким чином утворюються хибні нелінійні елементи. Відгуки від цих нелінійних елементів сприймаються нелінійним локатором аналогічно відгукам від справжніх напівпровідників зі складу розшукуваного закладного пристрою, але за своєю сутністю такі відгуки є завадами.

Джерелами завад для роботи нелінійного локатору також може слугувати контакт двох металів зі слабким стисненням, якщо один із них (або обидва) мають проміжний

оксидний шар (складені разом канцелярські скріпки, монети, плетені сітки), або просто піддані корозії метали. Рідко (при великій потужності опромінення) небажаний ефект можуть дати паяні та зварні з'єднання. Такі структури являють собою квазілінійні елементи зі стійким (інколи нестійким)  $p-n$ -переходом.

У фізиці напівпровідників такі поєднання звать структурами типу метал-оксид-метал, а нелінійні елементи - МОМ-структурами. Вольт-амперна характеристика (ВАХ) такої випадкової МОМ - структури, на відміну від характеристики  $p-n$ -переходу, зазвичай симетрична. Приблизний вигляд її показано на рис. 11.1.

При достатньо малій товщині оксидної плівки (менше десятків ангстрем) основним механізмом переносу носіїв через контакт є тунельний ефект. При невеликих напругах (менше 1В) і однакових металах, ВАХ контакту можна апроксимувати



Рисунок 11.1 – ВАХ МОМ – структури

поліномом третього ступеню. При напрузі на контакті більше 1,5В ВАХ стає більш крутою, а при подальшому збільшенні – нестійкою і в більшості випадків настає незворотній пробій контакту. Суттєвою особливістю ВАХ таких МОМ - структур є їхня нестійкість при деяких механічних впливах. Серед досить широкого розмаїття таких впливів в першу чергу виділяють зміну тиску на контакт.

### **11.3 Технічні вимоги до антенних систем нелінійних локаторів**

Питання про побудову антенної системи нелінійного локатору треба розглядати в тісному зв'язку з тими вимогами до його тактико-технічних даних, які власне і повинні забезпечувати успішний пошук закладних пристроїв. Серед цих вимог виділимо ті, які звичайно забезпечують відповідним вибором антенної системи. Це перш за все:

- смуга частот;
- спрямовані властивості;
- поляризаційні властивості.

Розглянемо їх окремо та більш детально.

**1. Смуга частот.** При розгляді цього питання перш за все зауважимо, що класичний варіант побудови структурних схем переважної більшості локаторів будь-якого типу передбачає їх роботу на одну антену і в режимі передачі (частота  $f_T = f_0$ ) і в режимі приймання (частоти  $f_R(n) = n \cdot f_0$ ). Якщо взяти за основу цей варіант, то отримаємо, що антенна система при прийманні другої та третьої гармонік ( $n_{max} = 3$ ) перевипроміненого сигналу ( $f_{max} = 3 \cdot f_0$ ) повинна забезпечити коефіцієнт перекриття  $K_{II}$  частотного діапазону

$$K_{\Pi} = f_{\max} / f_{\min} = f_{R(3)} / f_T = 3. \quad (11.2)$$

З цього розрахунку витікає, що антенна система нелінійного локатору повинна бути надширокосмуговою. Зауважимо, що антенні системи, які будують з використанням лінійних вібраторів (зокрема, вже розглянутих симетричних або несиметричних вібраторів) такою властивістю не володіють – це в принципі вузькосмугові, практично резонансні, антени. В нашому випадку звичайно можна для кожної з застосовуваних частот ( $f_0$ ,  $2f_0$ ,  $3f_0$ ) використати свою, окрему, антену, але такий підхід навряд чи буде доцільним з-за різкого збільшення габаритів антенної системи. Потрібно провести додаткові дослідження для пошуку другого підходу.

**2. Спрямовані властивості.** Для оцінки спрямованих властивостей антени застосовується такий її параметр, як коефіцієнт спрямованої дії (КСД)  $D$ . Як витікає з самого визначення параметру  $D$ , із його збільшенням покращується енергетика випромінювальної системи, а тому за цим критерієм треба обов'язково прагнути до його максимізації. З другої сторони, головною задачею нелінійного локатору є все-таки пошук закладних пристроїв, а тому будемо вважати, що високі його енергетичні параметри не є визначальним критерієм. Але, з третьої сторони, виявлений закладний пристрій треба ще й локалізувати у просторі, особливо якщо його замуровано в стіні, або в залізобетонній плиті перекриття кімнати (будинку). Враховуючи всі ці аргументи, при виборі антенної системи нелінійного локатору будемо прагнути все-таки максимізувати значення  $D$ , але не вважати це визначальним критерієм.

**3. Поляризаційні властивості.** Поляризація - це орієнтаційна характеристика тієї електромагнітної хвилі, яку випромінює

(або приймає) антена. Звичайно ж поляризація випроміненої антеною нелінійного локатору хвилі повинна відповідати вимогам опромінюваного нею напівпровідникового елементу із складу закладного пристрою. Будемо припускати, що більшість таких елементів мають близьку до лінійної геометричну структуру. При виконанні цієї умови, для ефективного наведення струмів у вхідних колах напівпровідникових елементів їх треба опромінювати електромагнітною хвилею з лінійною поляризацією. *Висновок: в режимі передачі антенна система нелінійного локатору повинна забезпечувати лінійну поляризацію випромінених електромагнітних хвиль.*

При аналізі властивостей перевипроміненого сигналу зробити однозначний висновок про те, якою буде поляризація відповідної електромагнітної хвилі неможливо. Це витікає з того, що апріорі невідомі параметри перевипромінювального елементу. За цією причиною можна навіть припустити наявність явища деполяризації у перевипроміненій хвилі. Вплив деполяризації розглянемо на простому прикладі. Хай в нелінійному локаторі і в режимі передачі і в режимі приймання застосовується антена з лінійною поляризацією (наприклад, вже розглянутий симетричний вібратор), причому її поляризаційний вектор  $\vec{p}$  є колінеарним з ортом  $\vec{y}_0$  декартової системи координат – рис.11.2. Ця антена в режимі передачі буде формувати електромагнітну хвилю лінійної поляризації (з вектором напруженості електричного поля  $\vec{E}_{0П}$ ), яка опромінює розшукуваний нелінійний елемент. Припустимо, що перевипромінена хвиля залишилась лінійно поляризованою, але в результаті явища деполяризації її площина поляризації отримала деякий кут нахилу  $\theta$  – рис.11.2. Тоді її вектор  $\vec{E}_{ПВ}$  буде

$$\vec{E}_{ПВ} = \vec{y}_0 \dot{E}_y + \vec{x}_0 \dot{E}_x,$$

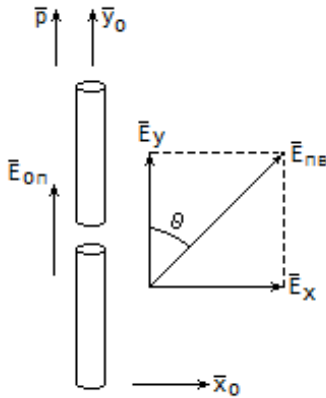


Рисунок 11.2 – До розгляду впливу деполяризації

де  $\dot{E}_y = \dot{E}_{ПВ} \cdot \cos \theta$ ,  $\dot{E}_x = \dot{E}_{ПВ} \cdot \sin \theta$  – декартові складові вектору  $\vec{E}_{ПВ}$ .

Зрозуміло, що в приймальній антені (в нашому прикладі це симетричний вібратор) буде збуджувати струм лише складова  $\dot{E}_y = \vec{y}_0 \dot{E}_y$ , яка є колінеарною до вектору  $\vec{p}$  приймальної антени. Якщо ж виявиться, що в результаті деполяризації кут  $\theta = \pi/2$ , то струм в приймальній антені взагалі не буде збуджуватися. Це поляризаційна розв'язка. Цілком зрозуміло, що антенну систему нелінійного локатору треба обирати так, щоб уникнути явища поляризаційної розв'язки. Відмітимо, що в більш складних випадках, які можуть виникати в реальних умовах, в результаті деполяризації перевипромінена хвиля може мати і обертову поляризацію (кругову, або в загальному випадку еліптичну).

*Висновок: в режимі прийому антенна система нелінійного локатору повинна бути «нечутливою» до будь-якого прояву властивості деполяризації перевипроміненої хвилі.*

## 11.4 Вибір антенної системи нелінійного локатору

В нелінійній локації для передачі використовуються частота порядку  $f_0=800$  МГц, а для прийому - частоти порядку  $2f_0=1.6$  ГГц та  $3f_0=2.4$  ГГц. В цьому діапазоні використовувати антени апертурного типу або антени поверхневої хвилі недоцільно в зв'язку з їх досить великими габаритами, а тому зупинимося на антенах дротового (проводового) типу.

Для отримання лінійної поляризації можна застосувати найпростішу антену типу симетричного вібратору – рис.10.5, рис.10.7, але при прийнятних габаритах, тобто  $2l$  порядку  $\lambda/2$  така антена не забезпечує значення КСД хоча б на рівні  $3\dots 4$  (див. ДС на рис 10.8). Для підвищення значення КСД застосовують антену типу «хвильовий канал» - рис.11.3, але така антена в поздовжньому напрямі (вісь  $z$ ) має досить значні габарити. Для отримання кругової поляризації застосовують комбінації симетричних вібраторів типу турнікетної антени – рис.10.13 (і для поодинокого вібратору і для «хвильового каналу»). Головний недолік антен цього класу – недостатнє значення смуги робочих частот. Це майже резонансні антени.

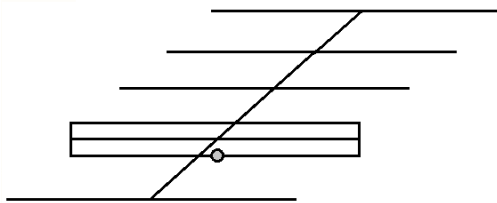


Рисунок 11.3 – Ескіз антени «Хвильовий канал»

Значно більше значення смуги робочих частот мають спіральні антени (від одної до трьох октав), але в «класичному» використанні в вигляді або поодинокій антени, або решітки із таких антен вони забезпечують лише кругову

поляризацію і в режимі передачі і в режимі прийому. В той же час із розгляду виразів (4.59–4.61) та рис.4.9 стає зрозумілим, що антену лінійної поляризації можна отримати поєднанням двох спіральних антен з протилежними напрямками навівки спіралей, щоб утворилась подвійна спіральна антена – рис.11.4, яка вже буде характеризуватись лінійним поляризаційним вектором. Перевагою такої антени є те, що при зміні кута нахилу площини поляризації амплітуда наведеного струму буде величиною сталою, а будуть змінюватися лише фази складових в розкладаннях типу (4.59–4.61). Таким чином, антена стане

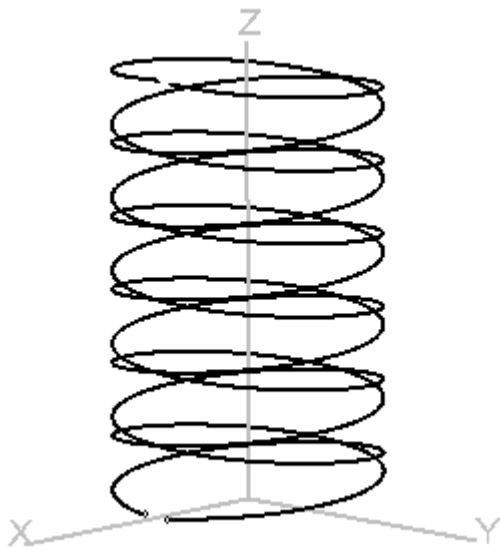
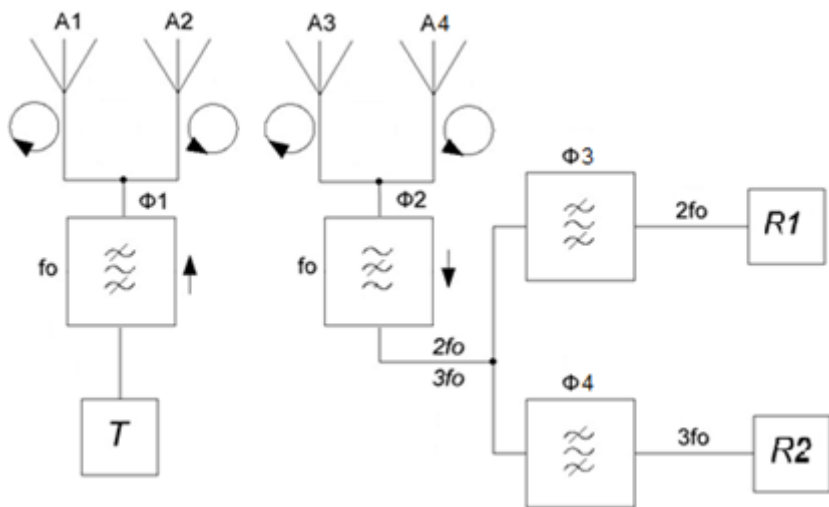


Рисунок 11.4 – Подвійна спіральна антена

«нечутливою» до впливу явища деполіризації перевипроміненої хвилі, що є однією з вимог до антенної системи нелінійного локатору. Додатковою перевагою спіральної антени в порівнянні з лінійною антеною є її менші поперечні розміри, оскільки діаметр витка спіралі  $d=L/\pi$ , а

довжина витка  $L=\lambda$ . Таким чином, поперечний розмір у лінійної антени, як мінімум  $2l=\lambda/2$ , а у спіральної –  $d=\lambda/3$ .<sup>14</sup>

Виходячи з усіх вищенаведених міркувань, для антенної системи нелінійного локатору можна запропонувати схему електричну функціональну, яку наведено на рис.11.5. Тут режекторний фільтр  $\Phi 2$  та смугопропускальні фільтри  $\Phi 1$ ,  $\Phi 3$ ,  $\Phi 4$  введено, як елементи розв'язки режимів прийому та передачі.



$T$  – передавач,  $R1, R2$  – приймачі  
 $A1-A4$  – антени,  $\Phi 1-\Phi 4$  – фільтри

Рисунок 11.5 – Антенна система нелінійного локатору. Схема електрична функціональна

Додатково зауважимо, що поперечні розміри приймальної частини антенної системи, як мінімум в два рази менші розмірів передавальної частини. Виходячи з цього факту, приймальну спіраль є можливість розмістити у внутрішньому об'ємі передавальної спіралі.

## Контрольні запитання

1. В чому полягає принцип дії нелінійного локатору?
2. Чому нелінійний локатор не реагує на відбиття від стін, елементів інтер'єру і т.і.?
3. Як можна охарактеризувати основні завади для роботи нелінійного локатору?
4. Що таке МОМ- структури і в чому особливості їх перевипромінення?
5. В чому зміст основних технічних вимог до антенних систем нелінійних локаторів в плані смуги робочих частот?
6. Чому в режимі передачі слід віддавати перевагу лінійній поляризації?
7. В чому сутність явища деполяризації і чому його треба уникати?
8. В чому полягають недоліки лінійних антен при їх застосуванні в нелінійних локаторах?
9. В чому полягають принципи роботи подвійної спіральної антени?
10. Які переваги антенної системи з подвійними спіральними антенами?

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн [Текст] / С.И. Баскаков. – М.: Высш. шк., 1992. – 416 с.
2. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны [Текст]/ Л.А. Вайнштейн. – М., Радио и связь, 1988. – 440 с.
3. Вольман В.И. Техническая электродинамика [Текст]/ В.И. Вольман, Ю.В. Пименов. – М.: Связь, 1971. – 487 с.
4. Марков Г.Т. Электродинамика и распространение радиоволн [Текст] / Г.Т. Марков, Б.М. Петров, Г.П. Грудинская. – М.: Сов. радио, 1979. – 374 с.
5. Матвеев А.Н. Электродинамика [Текст]: учеб. пособие /А.Н. Матвеев. – М.: Высш. шк., 1980. – 383 с.
6. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн [Текст]: учеб. пособие для вузов / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 544 с.
7. Альтман, Дж. Устройства СВЧ [Текст] / Дж. Альтман; пер. с англ.; под ред. И. В. Лебедева. – М.: Мир, 1968. – 488 с.
8. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи с распределенными параметрами [Текст]: учеб. пособие для вузов / С. И. Баскаков. – М.: Высш. шк., 1980. – 152 с.
9. Бова, Н. Т. Антенны и устройства СВЧ [Текст] / Н. Т. Бова, Г. Б. Резников. – 2-е изд., перераб. и дополн. – К.: Вища шк., 1982. – 278 с.
10. Воскресенский, Д. И. Устройства СВЧ и антенны. 2-е изд., доп. и перераб. / Д. И. Воскресенский, В. Л. Гостюхин, В. М. Максимов, Л. И. Пономарев. – М: Радиотехника, 2006. – 376 с.
11. Микроэлектронные устройства СВЧ / Н. Т. Бова, Ю. Г. Ефремов, В. В. Конин и др. – К.: Техніка, 1984. – 184 с.
12. Григорьев, А.Д. Электродинамика и микроволновая техника [Текст]: учебник / А. Д. Григорьев. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб: Лань, 2007. – 704 с.

13. Интегральные устройства СВЧ телекоммуникационных систем [Текст] / М.Е. Ильченко, А.А. Липатов, Н.А. Могильченко, Т.Н. Нарытник, А.В. Савельев, Ю.И. Якименко. – К.:Техніка, 1998. – 110 с.
14. Неганов, В. А. Теория и применение устройств СВЧ [Текст]: Учебн. пособие для вузов / В. А. Неганов, Г. П. Яровой; Под ред. В. А. Неганова – М.: Радио и связь, 2006. – 720с.
15. Нефедов, Е.И. Устройства СВЧ и антенны [Текст]: учебное пособие / Е. И. Нефёдов. – М.: Академия, 2009. – 384 с.
16. Сазонов, Д. М. Устройства СВЧ [Текст]: учеб. пособие / Д. М. Сазонов, А. Н. Гридин, Б. А. Мишустин. – М.: Высш. шк., 1981. – 295 с.
17. Фуско, В. СВЧ цепи. Анализ и автоматизированное проектирование [Текст] / В. Фуско; пер. с англ.; под ред. В. И. Вольмана. – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.
18. Хелзайн, Дж. Пассивные и активные цепи СВЧ [Текст] / Дж. Хелзайн; пер. с англ.; под ред. А. С. Галина. - М.: Радио и связь, 1981. – 200 с.
19. Pozar, D. M., Microwave Engineering [Text] / D. M. Pozar. – 3-rd edition. – N.Y.: Wiley, 2005. – 700 p.
20. Colin, R. E. Foundations for Microwave Engineering [Text] / R. E. Colin. – 2-nd edition. – N.Y.: Wiley–Interscience, 2001. – 924 p.
21. Шокало В.М. Електродинаміка та поширення радіохвиль [Текст]: підручник / В.М. Шокало, В.І. Правда, В.А. Усін, В.С. Вунтесмері, Д.В. Грецьких. – Харків: Колегіум, 2009.
22. Каганов В.И. Колебания и волны в природе и технике. Компьютеризированный курс [Текст]: Учеб. пособие для вузов / В.И. Каганов. – М.: Горячая линия–Телеком, 2008. – 336 с.

## ЗМІСТ

Перелік скорочень. . . . .	3
<b>ВСТУП.</b> . . . . .	4
<b>1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ.</b> . . . . .	9
1.1 Класифікація хвиль. . . . .	9
1.2 Гармонійна хвиля і її параметри. . . . .	12
<b>2. ВЕКТОРИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ. ПАРАМЕТРИ СЕРЕДОВИЩ І ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ.</b> . . . . .	18
2.1 Вектори електромагнітного поля. . . . .	18
2.2 Матеріальні рівняння електромагнітного поля. . . . .	20
2.3 Класифікація середовищ. . . . .	25
<b>3. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ.</b> . . . . .	34
3.1 Рівняння Максвелла. . . . .	34
3.2 Система рівнянь електромагнітного поля. . . . .	41
3.3 Система рівнянь монохроматичного електромагнітного поля. . . . .	42
3.4 Рівняння балансу миттєвих значень потужностей для електромагнітного поля. . . . .	49
3.5 Граничні умови для векторів електромагнітного поля на поверхні розділу середовищ. . . . .	52
3.5.1 Граничні умови для нормальних складових векторів електромагнітного поля. . . . .	54
3.5.2 Граничні умови для тангенціальних складових векторів електромагнітного поля. . . . .	57
3.5.3 Граничні умови на поверхні ідеального провідника . . . . .	60
3.6 Фізичне тлумачення рівнянь Максвелла для змінних у часі процесів. Створення електромагнітної хвилі (EMX). . . . .	64
<b>4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ У ОДНОРІДНОМУ ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ.</b> . . . . .	70
4.1 Хвилеві рівняння. . . . .	70
4.2 Плоскі електромагнітні хвилі у однорідному ізотропному середовищі. . . . .	73
4.3 Плоскі електромагнітні хвилі у однорідному ізотропному середовищі з ненульовою провідністю. . . . .	81
4.4 Плоскі однорідні хвилі в добре провідних	

середовищах. . . . .	87
4.5 Поляризація електромагнітних хвиль. . . . .	89
<b>5. ВІДБИТТЯ І ЗАЛОМЛЕННЯ</b>	
<b>ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА МЕЖІ</b>	
<b>РОЗДІЛУ СЕРЕДОВИЩ. . . . .</b>	<b>102</b>
5.1 Падіння нормально поляризованої плоскої хвилі на межу розділу двох середовищ. . . . .	102
5.2 Падіння паралельно поляризованої плоскої хвилі на плоску межу розділу двох середовищ. . . . .	109
5.3 Повне проходження хвилі в друге середовище. . . . .	111
5.4 Перпендикулярне падіння плоскої електромагнітної хвилі на плоску межу розділу середовищ. . . . .	113
5.5 Проходження електромагнітної хвилі через шар речовини. . . . .	114
5.6 Наближені граничні умови Леонтовича. Розрахунок потужності втрат в провідниках. . . . .	118
5.7 Повне внутрішнє відбиття. . . . .	124
<b>6. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ В</b>	
<b>МЕТАСЕРЕДОВИЩАХ. . . . .</b>	<b>130</b>
6.1 Лівобічні середовища. . . . .	130
6.2 Поширення хвиль в лівобічних середовищах. . . . .	133
6.3 Обернення ефекту Доплера. . . . .	136
6.4 Заломлення хвилі на межі середовищ з різною правизною. . . . .	138
6.5 Особливості фокусування плоскою лінзою, яку виконано з лівої речовини. . . . .	140
6.6 Подолання дифракційної межі. . . . .	143
6.7 Приклади реалізації лівих речовин. . . . .	146
<b>7. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ В ЛІНІЯХ</b>	
<b>ПЕРЕДАЧІ. . . . .</b>	<b>150</b>
7.1 Класифікація ліній передачі. . . . .	150
7.2 Телеграфні рівняння. . . . .	150
7.3 Основні електричні характеристики ліній передачі. . . . .	155
7.3.1 Комплексний коефіцієнт відбиття. . . . .	155
7.3.2 Коефіцієнт стоячої хвилі. . . . .	157
7.3.3 Коефіцієнт корисної дії навантаженої лінії. . . . .	159
7.3.4 Допустимі потужність та напруга в лінії передачі. . . . .	160
7.4 Коаксіальна лінія. . . . .	161
7.5 Двопровідна лінія. . . . .	164
7.6 Порівняння деяких властивостей коаксіальної та	

двопровідної лінії. . . . .	166
7.7 Мікросмужкова лінія. . . . .	167
<b>8. ВИКОРИСТАННЯ КОРОТКИХ ВІДРІЗКІВ ЛІНІЙ ПЕРЕДАЧІ. . . . .</b>	<b>175</b>
8.1 Трансформація опорів. . . . .	175
8.2 Реактивні шлейфи. . . . .	178
8.3 Використання відрізків ліній в якості коливальних систем. . . . .	181
8.4 Використання відрізків ліній для узгодження. . . . .	185
8.4.1 Вузькосмугове узгодження. . . . .	186
8.4.2 Широкозмугове узгодження. . . . .	190
8.5 Фільтри на розподілених структурах. . . . .	195
<b>9. МАТРИЧНИЙ ОПИС КІЛ НВЧ. . . . .</b>	<b>206</b>
9.1 Матриця розсіювання. . . . .	207
9.2 Матриці розсіювання простих елементів НВЧ кіл. . . . .	212
9.3 Хвилева матриця передачі Т. . . . .	218
9.4 Матриця А. . . . .	219
<b>10. ПОЛЯ ВИПРОМІНЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ РЕА. . . . .</b>	<b>227</b>
10.1 Елементарний електричний випромінювач – диполь Герця. . . . .	228
10.2 Елементарний магнітний випромінювач. . . . .	231
10.3 Елементарний випромінювач Гюйгенса. . . . .	234
10.4 Основні характеристики антен. . . . .	236
10.5 Симетричний вібратор. . . . .	242
10.5.1 Розподіл струму, напруги і заряду по вібратору. . . . .	243
10.5.2 Поле випромінення симетричного вібратору. . . . .	246
10.5.3 Опір випромінення симетричного вібратору. . . . .	249
10.5.4 Вхідний опір симетричного вібратору. . . . .	250
10.6 Турнікетна антена. . . . .	254
10.7 Спиральна антена. . . . .	257
<b>11. НЕЛІНІЙНА ЛОКАЦІЯ. . . . .</b>	<b>264</b>
11.1 Принципи дії нелінійного локатору. . . . .	264
11.2 Джерела завад при роботі нелінійного локатору. . . . .	266
11.3 Технічні вимоги до антенних систем нелінійних локаторів. . . . .	268
11.4 Вибір антенної системи нелінійного локатору. . . . .	272
<b>БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК. . . . .</b>	<b>276</b>

*Наукове видання*

**Романенко С.М.  
Дмитренко В.П.  
Карпуков Л.М.**

**ПОЛЯ І ХВИЛІ В ЗАДАЧАХ  
ТЕХНІЧНОГО ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ**

*Навчальний посібник*

Комп'ютерний набір *Романенко С.М.*

Підписано до друку 25.05.2016. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 16,39.  
Тираж 300 прим. Зам. № 463.

Запорізький національний технічний університет  
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64  
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідотство суб'єкта видавничої справи ДК № 2394 від 27.12.2005.