ВЛАСТИВОСТІ КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЙ ТА ЇХНЄ ВИКОРИСТАННЯ В КОМБІНАТОРНІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ

Надія Тимофієва
Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України

PROPERTIES OF COMBINATORY CONFIGURATIONS AND THEIR USE IN COMBINATORY OPTIMIZATION

Abstract. The properties of combinatorial configurations are considered, the use of which allows to explain some phenomena that exist in combinatorics and combinatorial optimization. This is the similarity of problems of combinatorics and combinatorial optimization, which explains the universality of algorithms and methods for solving the specified problems. The peculiarity of the structure of combinatorial sets, which are the argument of the objective function, explains the situation of uncertainty in combinatorial optimization problems.

Вступ. В статті описано властивості комбінаторних конфігурацій, використання яких дозволяє пояснити деякі явища, що наявні в комбінаториці та комбінаторній оптимізації. Це – подібність комбінаторних конфігурацій та задач комбінаторної оптимізації, особливість структури комбінаторних множин, які є аргументом цільової функції, завдяки якій в комбінаторній оптимізації виникає ситуація невизначеності. Виявлено задачі, які подібні за аргументом цільової функції, а також встановлена подібність комбінаторних конфігурацій, множини яких генеруються одним і тим же алгоритмом або його модифікацією. Цією властивість пояснюється універсальність методів та алгоритмів в комбінаторній оптимізації.

Подібність комбінаторних конфігурацій. Під комбінаторною конфігурацією розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої базової множини $A=\{a_1,...,a_n\}$. Позначимо її упорядкованою множиною

$w^k = (w_1^k, ..., w_\eta^k)$, де $\eta \in \{1,...,n\}$ – кількість елементів у w^k (в подальшому η позначатимемо і як η^k), $W = \{w^k\}_1^q$ – множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k \in \{1,...,q\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W, q – кількість w^k у W.

Рекурентним комбінаторним оператором назвемо сукупність правил, за допомогою яких з елементів базової множини A утворюється комбінаторна конфігурація w^k. Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання, транспозиція, арифметичний [1].

Означення 1. Дві нетотожні комбінаторні конфігурації $w^k = (w_1^k,...,w_{\eta^k}^k)$ та $w^i = (w_1^i,...,w_{\eta^i}^i)$ назвемо ізоморфними, якщо $\eta^k = \eta^i$.

Означення 2. Підмножину $W_{\eta^k} \subset W$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи – ізоморфні комбінаторні конфігурації.

Означення 3. Назвемо подібними задачі з комбінаторики або задачі комбінаторної оптимізації різних класів, які розв'язуються за однією і тією ж обчислювальною схемою або модифікацією одного і того ж алгоритму.

Подібність комбінаторних конфігурацій встановлюється за способом їхнього утворення. Сполучення як з повтореннями так і без повторення утворюються єдиною операцією – вибиранням. Перестановки утворюються або транспозицією або вибиранням. Розбиття числа утворюються однією операцією – арифметичною. Розбиття n-елементної множини на підмножини утворюються двома рекурентними комбінаторними операторами: або арифметичним або транспозицією. Розміщення як з повтореннями так і без повторення утворюються двома операціями: або вибиранням або транспозицією. Бінарні послідовності можуть утворюватися двома операціями: арифметичною або операцією вибирання. До того ж, кількість бінарних послідовностей у їхній множині дорівнює 2^n, а кількість сполучень без повторення – відповідно $2^n - 1$. Генерування розбиття n-елементної множини на підмножини проводять алгоритмом розбиття числа і генеруванням перестановок. Упорядкування розміщення як без повторення, так і з повтореннями проводять алгоритмами генерування сполучень і перестановок. Формування бінарних послідовностей з

використанням рекурентного комбінаторного оператора вибирання проводять за тими ж правилами, що і утворення сполучень без повторення.

Отже, за способом утворення подібні такі комбінаторні конфігурації: бінарні послідовності і сполучення без повторення; розбиття n-елементної множини на підмножини і розбиття натурального числа та перестановки; розміщення без повторення (з повтореннями) і сполучення без повторень (з повтореннями) та перестановки.

Подібність задач комбінаторної оптимізації. Наведемо математичну постановку задачі комбінаторної оптимізації.

Нехай задано одну A або кілька множин, наприклад A та B [1]. Вагою назвемо величину, яка встановлює залежність, що існує між елементами $a_s \in A$ і $b_l \in B$ або між елементами однієї і тієї ж множини, $s \in \{1,...,n\}$, $l \in \{1,..., \tilde{n}\}$, n – кількість елементів множини A, $\tilde{n}$ – кількість елементів множини B. Покладемо, що $n = \tilde{n}$. Значення ваг між елементами множин A і B задамо однією або двома симетричними або несиметричними матрицями C і $Q(w^k)$, де $Q(w^k)$ – комбінаторна матриця, $w^k \in W$ – перестановка. Якщо значення ваг описуються однією матрицею C, то для визначення наявності зв'язків між елементами заданих множин для k-го варіанту розв'язку задачі уведемо симетричну або несиметричну (0,1)-матрицю $Q(w^k)$. Елемент $g_{sl}(w^k) = 1$, якщо між $a_s \in A$ та $b_l \in B$ або $a_s \in A$ і $a_l \in A$ для варіанту w^k існує зв'язок, і $g_{sl}(w^k) = 0$ в іншому разі; $g_{sl}(w^k) \in Q(w^k)$.

Подамо елементи h наддіагоналей симетричної комбінаторної матриці $Q(w^k)$ комбінаторною функцією $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k), \ldots \ldots, \beta_m(f(m), w^k))$, а елементи h наддіагоналей симетричної матриці C – функцією натурального аргументу $\varphi(j)|_1^m = (\varphi(1), \ldots, \varphi(m))$, де $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ – кількість елементів h наддіагоналей матриць C і $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Якщо матриці $Q(w^k)$ і C – несиметричні, то $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ і $\varphi(j)|_1^m$ містять усі їхні елементи, а $m = n^2$ (або $m = n\tilde{n}$). Функція цілі для цих задач набуває вигляду

$$F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j (f(j), w^k) \varphi(j), \quad (1)$$

До задачі комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції в якій є перестановка, зводяться задача комівояжера, задача про призначення, задача розміщення одногабаритних об'єктів на поверхні тощо. Цільова функція для них моделюється виразом (1), за яким проводиться оцінка результату. Завдяки цьому задачі комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції в яких є перестановка і на підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій (задача кластеризації) розв'язуються універсальними методами, зокрема методом структурно-алфавітного пошуку за однією і тією ж схемою. В задачі кластеризації на деяких ізоморфних підмножинах цільова функція змінюється так як і в задачі комівояжера.

Прикладні задачі складні за своєю природою і основна задача, як правило, розділяється на підзадачі, а цільова функція, за якою оцінюється оптимальний розв'язок, залежить від кількох змінних, якими є комбінаторні конфігурації різних типів. Якщо побудувати математичні постановки задач розпізнавання мовленнєвих сигналів та клінічної діагностики з використанням теорії комбінаторної оптимізації, то можна побачити, що вони розділяються на три підзадачі:

а) структуризація бібліотеки еталонів;

б) пошук у бібліотеці еталонної інформації;

в) задача порівняння еталонної і вхідної інформації.

Для обох класів задач аргументом цільової функції в першій підзадачі є розбиття n-елементної множини на підмножини, в другій підзадачі – розміщення без повторень, а в третій – сполучення без повторень. Тобто, ці задачі подібні за аргументом цільової функції.

Невизначеність в задачах комбінаторної оптимізації, що пов'язана зі структурою множини комбінаторних конфігурацій. Ситуація невизначеності в задачах цього класу виникає внаслідок особливої структури множини комбінаторних конфігурацій, що є аргументом цільової функції.

Закономірність зміни значень цільової функції в задачах комбінаторної оптимізації залежить від упорядкування комбінаторних конфігурацій (аргументу) $w \in W$. На підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій W_η цільова функція (1) змінюється так, як і на множині перестановок. Можна довести, що на множині перестановок і на підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій при використанні цільової функції (1) ситуація невизначеності зводиться до

мінімуму. Але на множині W, яка складається з підмножин $W_\eta \subset W$, закономірність зміни значень функції (1) однакова незалежно від вхідних даних, а результат розв'язку задачі – неоднозначний.

Висновок. Отже дослідження та виявлення властивостей комбінаторних конфігурацій дозволяє встановити подібність задач комбінаторики та комбінаторної оптимізації. Відповідно можна пояснити природу універсальності алгоритмів та методів їхнього розв'язання. Особливість структури комбінаторних множин, які є аргументом цільової функції, пояснює ситуацію невизначеності в задачах комбінаторної оптимізації (кластеризації, задача про ранець тощо).

Література

1. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ. 2007. 32 с.

2. Тимофієва Н.К. Про подібність задач комбінаторної оптимізації та універсальність алгоритмів. *Системні дослідження та інформаційні технології.* 2013. № 4. С. 27–37.