

ХВИЛІ В ЛІНІЙНОМУ В'ЯЗКОПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ, ВИКЛИКАНОМУ УДАРНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Розв'язання хвильових задач у в'язкопружних середовищах зводиться до інтегрування системи рівнянь у часткових похідних першого порядку. На відміну від середовищ без в'язкості, рівняння моделі, що замикає систему, містить не тільки напругу та деформацію, але і їх похідні за часом, що ускладнює рішення. Модель руху середовища приводиться до системи гіперболічного типу, що дозволяє застосувати чисельний метод із використанням характеристик визначальної системи рівнянь.

Основні засади побудови моделей суцільних середовищ розроблено Л.І. Седовим. Моделі лінійної в'язкопружного середовища застосовують для опису хвильових процесів в середовищах, де граничні діаграми динамічного і статичного стиску близькі до лінійних, а залишкові деформації зневажливо малі. У ґрунтах це відповідає тиску порядку атмосфери.

Знайдемо параметри плоскої хвилі, викликані навантаженням, яка рівномірно розподілена по поверхні півпростору. Приймемо цю поверхню за початковий переріз.

У безрозмірному вигляді рівняння руху в'язкопружного середовища мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = 0, \quad (1)$$

де σ – напругення; ε – деформація.

Рівняння, що визначає поведінку середовища при зростанні та зменшенні навантаження:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \varepsilon = \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \gamma \sigma, \quad \gamma = \frac{E_D}{E_S}. \quad (2)$$

Навантаження у початковому перерізі ($x=0$)

$$\sigma = \begin{cases} 1 - \tau / (\mu \theta), & 0 \leq \tau \leq \mu \theta, \\ 0, & \tau > \mu \theta. \end{cases}$$

Зв'язок безрозмірних та розмірних величин визначається наступними співвідношеннями

$$x = \mu \cdot r / C_D, \quad \tau = \mu \cdot t, \quad u = \tilde{u} / \tilde{u}_m, \quad \sigma = \tilde{\sigma} / \tilde{\sigma}_m, \quad \varepsilon = \tilde{\varepsilon} / \tilde{\varepsilon}_m,$$

$$\tilde{u}_m = \frac{-\tilde{\sigma}_m}{C_D \rho_0}, \quad \tilde{\varepsilon}_m = \frac{\tilde{\sigma}_m}{E_D},$$

де розмірні t – час; r – координата; $\tilde{\sigma}$ – напруження; $\tilde{\varepsilon}$ – деформація; $C_D = \sqrt{E_D / \rho_0}$ – швидкість фронту хвилі; ρ_0 – початкова щільність середовища; E_D та E_S – модулі динамічного та статичного стиснення середовища; μ – параметр в'язкості.

При цьому

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{C_D} \cdot \frac{dr}{dt}.$$

Характеристичні співвідношення системи (1)-(2) мають вигляд

$$d\sigma \pm du = (\varepsilon - \gamma\sigma)d\tau, \quad \text{вздовж лінії } dx = \pm d\tau,$$

$$d\sigma - d\varepsilon = (\varepsilon - \gamma\sigma)d\tau, \quad \text{вздовж лінії } dx = 0. \quad (3)$$

Рівняння фронту хвилі $x = \tau$, на якому виконується умова $\sigma = u = \varepsilon$.

Від початкового перерізу середовища при $\tau = 0$ поширюється ударний фронт. Перед фронтом хвилі необурене середовище з параметрами $\sigma = 0$, $u = 0$, $\rho = \rho_0$.

При ударному стиску на фронті хвилі в'язкі властивості не виявляються – середовище поводить як лінійно-пружне. Зі співвідношень на стрибку випливає, що $\sigma = C\rho_0$.

Розв'язання задачі залежить від параметрів E_D , E_S , μ та ρ_0 , що характеризують середовище та двох параметрів σ_m та θ , що визначають вид навантаження у початковому перерізі.

В результаті розрахунків отримані зміни в часі в різних перерізах середовища напруги, деформації та швидкості часток при $\mu\theta = 1; 20$, ($\gamma = 2$).

Варіюючи параметри, що характеризують середовище та вид навантаження за допомогою розглянутого чисельного моделювання, можна досліджувати якісні закономірності нестационарних хвиль у в'язкопружних середовищах.