СТАБІЛІЗАЦІЯ ДОВЖИНИ УПОРЯДКУВАННЯ ТА АНАЛІЗ ВПЛИВУ ЗМІН ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ НА ОПТИМАЛЬНІСТЬ

Турчина В.А., Малієнко О.О.
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

STABILIZATION OF ORDER LENGTH AND ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF CHANGES IN INITIAL DATA ON THE OPTIMALITY

The paper considers the known problems of parallel ordering of vertices of oriented graphs for the case of certain restrictions. The concept of stabilization of length and conditions of its occurrence is introduced. For stabilized optimal ordering, the issues of influencing the optimality of changes in the initial data related to the simplification of technological constraints and the reduction of time constraints are investigated. It is shown that in these cases the so-called anomalies also occur.

Ряд практичних задачах, що пов’язані з визначенням оптимального розподілу частково впорядкованих робіт між фіксованою кількістю ресурсів, зводиться до відомих оптимізаційних задач на графах. Одна із таких задач [1] розглядається в даній роботі.

Задано орграф $G=(V,U)$, ширина упорядкування h, список пріоритетів $L=(i_1, \ldots, i_n)$, ваги вершин $T=(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ [2]. Необхідно побудувати паралельне упорядкування ширини h, яке задовольняє список пріоритетів та має мінімальну довжину [3].

Зрозуміло, що мінімальне значення довжини упорядкування не може бути менше довжини критичного шляху у графі.

Означення. Будемо казати, що довжина оптимального упорядкування стабілізована, якщо вона дорівнює довжині критичного шляху.

Розглянемо як впливає значення ширини на стабілізацію довжини.

Приклад 1. Нехай задано граф G (рис.1), $h=3$ $L=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$, $T=(5,3,3,2,8,8,7,4,2,9)$.

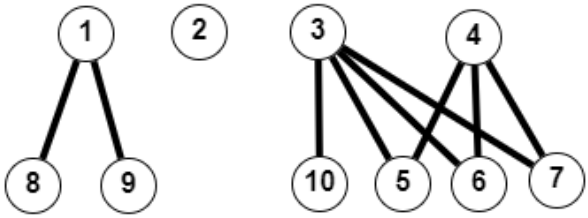

Рис.1 *Граф G*

Знайдемо оптимальне упорядкування та його довжину.

Таблиця 1.

Оптимальне упорядкування вершин графа G при $h=3$

1	1	1	1	1	5	5	5	5	5	5	5	5	8	8	8	8		
2	2	2	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	9	9				
3	3	3	10	10	10	10	10	10	10	10	10	7	7	7	7	7	7	7

Довжина $l=19$. Збільшимо кількість виконавців. Нехай $h=5$. Отримаємо упорядкування (табл. 2) з довжиною $l=12$.

Таблиця 2.

Оптимальне упорядкування вершин графа G при $h=5$

1	1	1	1	1	8	8	8	8	9	9	
2	2	2	5	5	5	5	5	5	5	5	

3	3	3	6	6	6	6	6	6	6	6	
4	4		7	7	7	7	7	7	7		
			10	10	10	10	10	10	10	10	10

Аналізуючи результати, отримані при збільшенні ширини упорядкування, можна зробити висновок, що на деякому кроці відбувається стабілізація, тобто, отримуємо оптимальне упорядкування, довжина якого дорівнює довжині критичного шляху.

Постає питання чи будуть мати місце аномалії після стабілізації довжини упорядкування. Розглянемо на прикладі 1 покращення інших умов. Послабимо обмеження, що стосується технологічного порядку. Отримаємо граф *G'* (рис. 2).

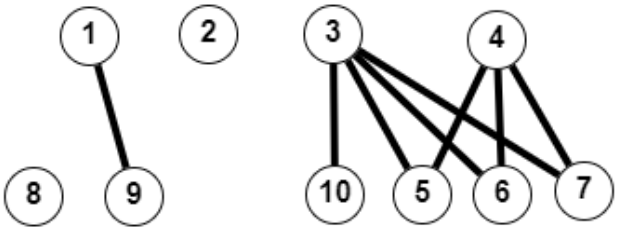

Рис.2 *Граф G'*

Замість очікуваної довжини *l*=12, як видно із табл. 3, довжина *l*=13. Тобто, послаблення технологічних обмежень погіршило значення цільової функції.

Таблиця 3.
Оптимальне упорядкування вершин графа *G'* при *h*=5

1	1	1	1	1	9	9						
2	2	2	5	5	5	5	5	5	5	5		
3	3	3	6	6	6	6	6	6	6	6		
4	4		7	7	7	7	7	7	7			
8	8	8	8	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Погіршення можемо отримати і якщо зменшимо час виконання робіт. При $\tau_1' = 3$ отримаємо оптимальне упорядкування (табл. 4), довжина якого *l*=14.

Таблиця 4.

Оптимальне упорядкування вершин графа G при h=5, τ_1'=3

1	1	1	5	5	5	5	5	5	5	5			
2	2	2	6	6	6	6	6	6	6	6			
3	3	3	7	7	7	7	7	7	7				
4	4		8	8	8	8							
			9	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Інтуїтивне покращення початкових умов знову призвело до погіршення результату на 16,7%.

Таким чином, приходимо до висновку, що і у випадках стабілізації довжини оптимального упорядкування, аномалії мають місце.

Подальшого дослідження потребують питання, пов'язані з отриманням умов, при яких відбувається стабілізація, та встановленням аналітичних залежностей, які будуть гарантувати відсутність аномалій для упорядкувань стабілізованої довжини.

Література

1. Бурдюк В.Я. Алгоритмы параллельного упорядочения: Учебное пособие / В.Я. Бурдюк, В.А. Турчина. – Д.: ДГУ, 1985. – 84с.

2. Челпанова О.О. Узагальнення аномальних випадків у задачах упорядкування. / О.О. Челпанова, В.А. Турчина. // Питання прикладної математики та математичного моделювання: зб. наук. пр. Дніпро, 2021. – Вип. 21. – С. 220-226.

3. Graham R. L. Bounds on multiprocessing timing anomalies // SIAM J. Appl. Math., 1969. V. 17. P. 416–429.