УДК 519.62
Гальченко В.В.[1], Коротунова О.В.[2]
[1] студ. гр. КНТ-228 ЗНТУ
[2] канд. техн. наук, доц. ЗНТУ

МОДЕЛЮВАННЯ РЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ

Математичне моделювання – метод дослідження процесів або явищ шляхом створення математичних моделей і дослідження цих моделей [1].

Вислів Ньютона: «закони природи виражаються диференціальними рівняннями» не втратив своєї актуальності і до теперішнього часу. Під час розв'язування багатьох практичних задач доводиться знаходити невідому функцію $y(x)$ з рівняння, яке містить поряд з цією невідомою функцією її похідні.

Диференціальні моделі широко використовуються в різних галузях науки і техніки для опису динамічних процесів, для моделювання реальних систем, що залежать від часу, зокрема для опису та дослідження економічних і біологічних систем.

Екологія вивчає взаємовідносини людини й живих організмів у загалі з навколишнім середовищем. Основним об'єктом дослідження в екології є еволюція популяцій (сукупності одного виду рослин, тварин, мікроорганізмів, що населяють тривалий час певну територію).

Математично процес розмноження чи вимирання популяцій описується наступним чином. Нехай $x(t)$ – кількісний стан популяції в момент t; A – кількість народжених, B – вмираючих за одиницю часу. Тоді швидкість зміни координати $x(t)$ задається формулою

$$\frac{dx}{dt} = A - B, \tag{1}$$

В рівнянні (1) A і B можуть залежати від x. Наприклад,

$$A = ax, B = bx, \tag{2}$$

де a – коефіцієнт народжуваності, b – смертності. Підставляючи (1) в (2):

$$\frac{dx}{dt} = (a-b)x \cdot \tag{3}$$

Розв'язок диференціального рівняння (3) записується у вигляді

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}, \tag{4}$$

де $x(t_0) = x_0$ – кількісний стан популяції в початковий момент t_0. З розв'язку (4) видно, що при $a > b$ популяція виживає, а при $a < b$ – вимирає.

В біології за допомогою диференціального рівняння можна описати, наприклад, процес залежності площі S листка, що має форму круга, від часу t. Відомо, що швидкість зміни площі $\frac{dS}{dt}$ у момент t пропорційна площі листка, довжині його контуру та косинуса кута між падаючим на листок сонячним променем і вертикаллю листка. Маємо модель:

$$\frac{dS}{dt} = k \cdot S \cdot S^{\frac{1}{2}} \cdot \cos\varphi(t), \tag{5}$$

де $\varphi(t) = at + b \geq 0$, a, b, – const, $\varphi \leq \pi$, k – коефіцієнт пропорційності.

Розв'язуючи рівняння (5), отримаємо залежність

$$S(t) = \left(c + \frac{k}{2a} \cdot \sin(at+b) \right)^{-2}, \tag{6}$$

де c – довільна стала.

Широке поширення отримали диференціальні моделі в економіці. Наприклад, модель макроекономічної динаміки Харрода-Домара. Ця модель описує динаміку доходу, що розглядається як сума споживання та інвестицій. Модель економічного зростання Солоу описує нелінійну виробничу функцію, яка залежить від динаміки трудових ресурсів та технічного прогресу. Модель ринку встановлює закономірність зміни ціни так, щоб між попитом і пропозицією була рівновага.

Взагалі, моделювання динамічних моделей є актуальним напрямком [2]. Неперервний час зручніший для моделювання, оскільки дозволяє використовувати апарат диференціального числення й диференціальних рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гаращенко, Ф.Г. Диференціальні рівняння для інформатиків [Текст]: підручник / Ф.Г. Гаращенко, В.Т. Матвієнко, І.І. Харченко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. – 352 с.

2. Фельдман, Л. П. Чисельні методи в інформатиці [Текст]: підручник/ М. З. Згуровський, Л. П. Фельдман, А. І. Петренко, О. А. Дмитрієва – К.: Вид. група BHV, 2006. – 480 с.