

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання практичних робіт
з дисциплін «Теоретична механіка» та «Динаміка точки і системи»
для студентів спеціальності 131 «Прикладна механіка»
всіх форм навчання

2023

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни «Теоретична механіка» та «Динаміка точки і системи» для студентів спеціальності 131 «Прикладна механіка» всіх форм навчання / Укл.: О.С. Омельченко, Н.В. Шалева — Запоріжжя, НУ «Запорізька політехніка», 2023 – 62 с.

Укладач: О.С. Омельченко, ст.викладач
Н.В. Шалева, асистент

Рецензент: В.І. Пожуєв, проф., д.ф-м.н
Відповідальний
за випуск: О.С. Омельченко, ст.викладач

Затверджено
на засіданні кафедри «Механіка»
Протокол № 9 від 5.06. 2023 р.

Рекомендовано до видання
НМК БАД
Протокол № 8 від 27.06.2023 р.

3
ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ.....	4
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ.....	5
1. Плоска система сил. Система довільно розміщених сил	5
1.1 Завдання С1. Визначення реакцій опор твердого тіла (плоска система сил).....	5
1.2 Завдання С.7. Визначення реакцій опор твердого тіла (система сили, які не лежать в одній площині).....	12
2. Кінематика точки.....	17
2.1 Завдання К.1. Визначення швидкості та прискорення точки за заданими рівняннями її руху.....	17
3. Кінематика твердого тіла.....	21
3.1 Завдання К.2. Визначення швидкостей та прискорень точок твердого тіла при поступальному та обертальному русі.....	21
3.2 Завдання К.3. Кінематичний аналіз плоского механізму..	27
4. Динаміка матеріальної точки. Диференційні рівняння руху матеріальної точки.....	35
4.1 Завдання Д.1. Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, що знаходиться під дією постійних сил.....	35
4.2 Завдання Д.6. Застосування основних теорем динаміки до дослідження руху матеріальної точки.....	42
5. Динаміка механічної системи Основні теореми динаміки механічної системи.....	49
5.1 Завдання Д.10. Застосування теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи.....	49

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Методичні вказівки призначені для самостійної роботи студентів при виконанні розрахунково-графічних завдань (РГЗ), які сприяють закріпленню знань з курсу „Теоретична механіка”. Інженеру будь-якого фаху іноді доводиться виконувати розрахунки на міцність. Самостійна робота студента сприяє закріпленню та узагальненню теоретичних знань, використанню їх для рішення конкретних інженерних задач, а також розвиває творчу ініціативу.

Перед рішенням задачі треба виписати її умову, зробити рисунок в масштабі та вказати на ньому величини, які необхідні для розрахунку. Розрахунок спочатку треба зробити в загальному вигляді, позначаючи всі дані літерами. Тільки після цього підставити числові значення та знайти результат. Розрахунки повинні бути виконані у відповідній послідовності, теоретично обґрунтовані і мати пояснювальний текст.

Пояснення мають бути короткими, послідовними, грамотними (без скорочення слів).

Розрахунково-графічні завдання треба виконувати на аркушах формату А4 чітким почерком. Варіант РГЗ призначається викладачем. Титульна сторінка роботи повинна бути оформлена за діючими стандартами.

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ

1. ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ. СИСТЕМА ДОВІЛЬНО РОЗМІЩЕНИХ СИЛ

1.1 Завдання С1. Визначення реакцій опор твердого тіла (плоска система сил)

На схемах (Рис. 1.2-1.4) показано для кожного варіанта три способу закріплення бруса, вісь якого - ламана лінія. Навантаження, що задається (див. табл. 1.1) і розміри (м) у всіх трьох випадках однакові. Визначити реакції опор для способу закріплення бруса, при якому реакція, зазначена в табл. 1 має найменший модуль.

Таблиця 1.1 – Дані за варіантами до завдання

Номер варіанту (Рис. 1-4)	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	Дослідити реакцію	Номер варіанту (рис. 1-4)	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	Дослідити реакцію
1	10	6	2	Y_A	16	12	6	2	M_A
2	20	5	4	M_A	17	20	4	3	Y_A
3	15	8	1	Y_B	18	14	4	2	X_A
4	5	2	1	Y_B	19	16	6	1	R_A
5	10	4	-	X_B	20	10	-	4	Y_A
6	6	2	1	M_A	21	20	10	2	M_A
7	2	4	2	X_A	22	6	6	1	Y_A
8	20	10	4	R_B	23	10	4	2	M_A
9	10	6	-	Y_A	24	4	3	1	Y_A
10	2	4	2	R_A	25	10	10	2	X_A
И	4	10	1	R_B	26	20	5	2	M_A
12	10	5	2	Y_A	27	10	6	1	X_A
13	20	12	2	Y_A	28	20	10	2	Y_A
14	15	4	3	Y_A	29	25	-	1	M_A
15	10	5	2	X_A	30	20	10	2	R_B

Приклад виконання завдання.

Дано: схеми закріплення бруса (Рис. 1.1, а), б), в)); $P = 5 \text{ кН}$; $M = 8 \text{ кН}$ м; $q = 1,2 \text{ кН/м}$.

Визначити реакції опор для того способу закріплення, при якому момент M_A в закріпленні має найменше числове значення.

Рішення. Розглянемо систему сил, що врівноважуються, прикладених до конструкції. Дію в'язів на конструкцію замінюємо їх реакціями (Рис. 1): у схемі а) - X_A , Y_A , M_A , у схемі б) - Y_A , M'_A і R_B , у схемі в) - M'_A , X_B і Y_B . Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q замінюємо рівнодіючою силою $Q = q \cdot 2 = 2,4 \text{ кН}$.

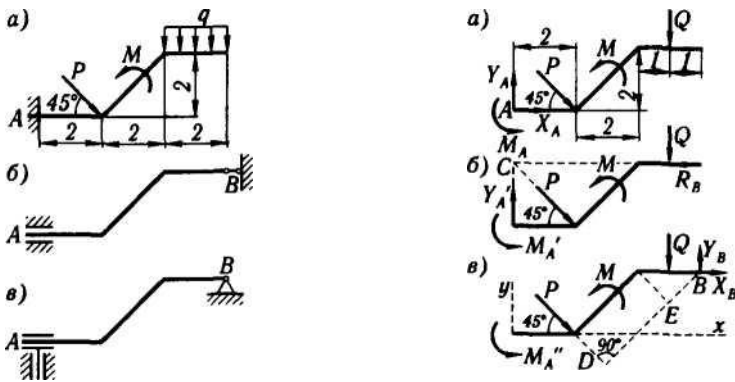


Рисунок 1.1 – Приклад виконання силових схем

Щоб з'ясувати, в якому випадку момент у закріпленні є найменшим, знайдемо його для всіх трьох схем, не визначаючи поки що інших реакцій.

Для схеми а):

$$\sum M_{iA} = 0; M_A - P \cdot 2 \sin 45^\circ + M - Q \cdot 5 = 0.$$

Розрахунки дають

$$M_A = 11,07 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для схеми б):

$$\sum M_{iC} = 0; M'_A + M \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} - 5Q = 0 \text{ та } M'_A = 4,00 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для схеми **в**):

$$\sum M_{iB} = 0, M'_A + P \cdot BD + M + Q \cdot 1 = 0 \text{ та } M_A = -31,61 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Звідси

$$BD = BE + ED = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4,24 \text{ м}.$$

Таким чином, найменший момент в закріпленні буде при закріпленні бруса у схемі **б**. Визначимо інші опорні реакції для цієї схеми:

$$\sum X_i = 0; P \cos 45^\circ - R_B = 0, \text{ звідки } R_B = 3,54 \text{ кН};$$

$$\sum Y_i = 0; Y_A - P \cdot \sin 45^\circ - Q = 0, \text{ звідки } Y_A = 5,94 \text{ кН}.$$

Результати розрахунків наведено в табл. 1.2.

Таблиця 1.2 – Результати розрахунків

Схема по рис. 1.1	Момент, M'_A	Сили, Н	
		Y'_A	R_B
а)	11,07	-	-
б)	4,00	5,94	3,54
в)	-31,61	-	-

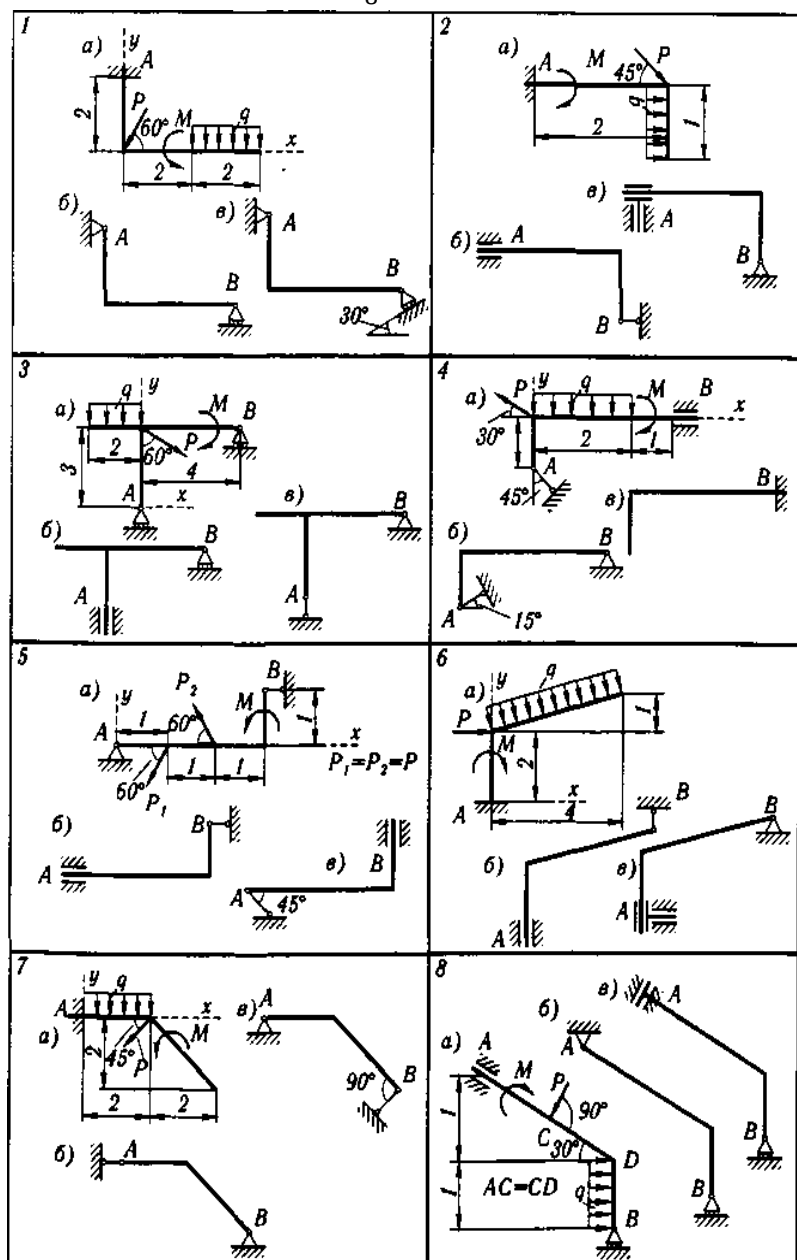


Рисунок 1.2 – Варіанти схем

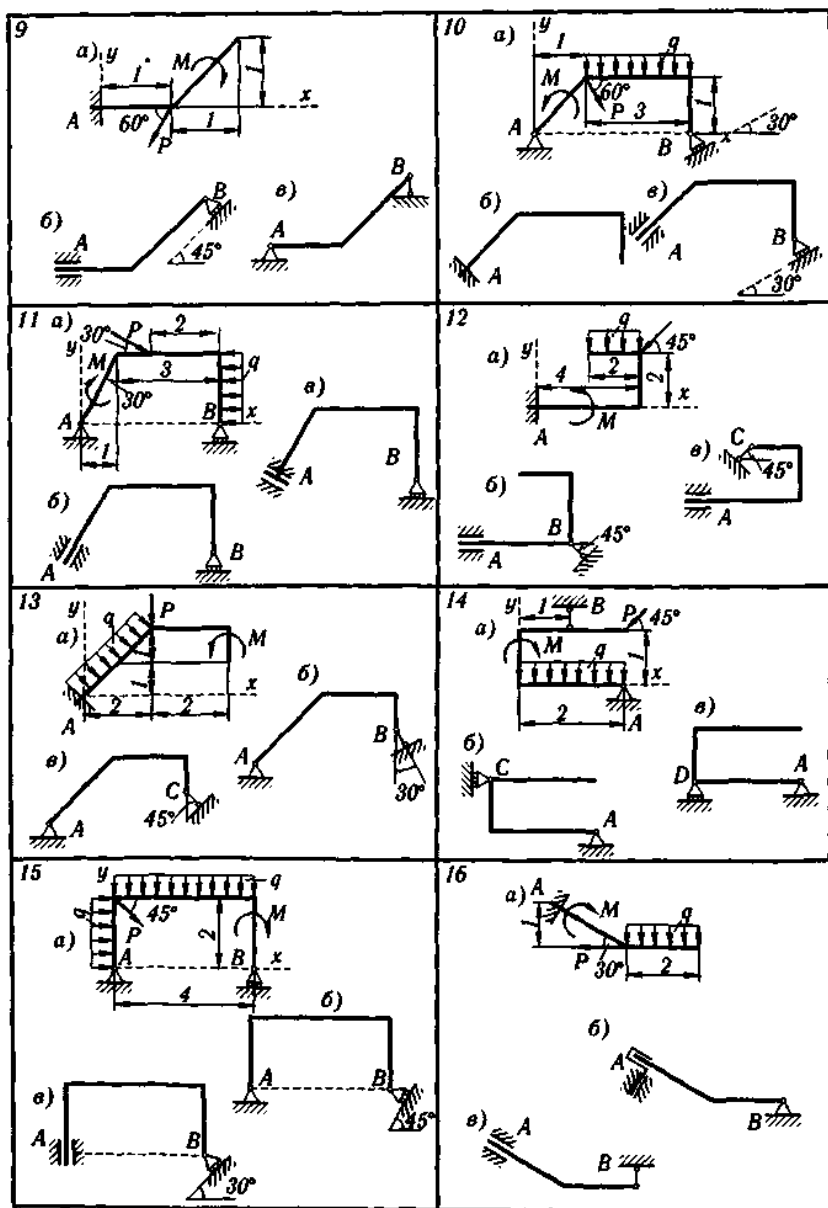


Рисунок 1.3 – Варіанти схем

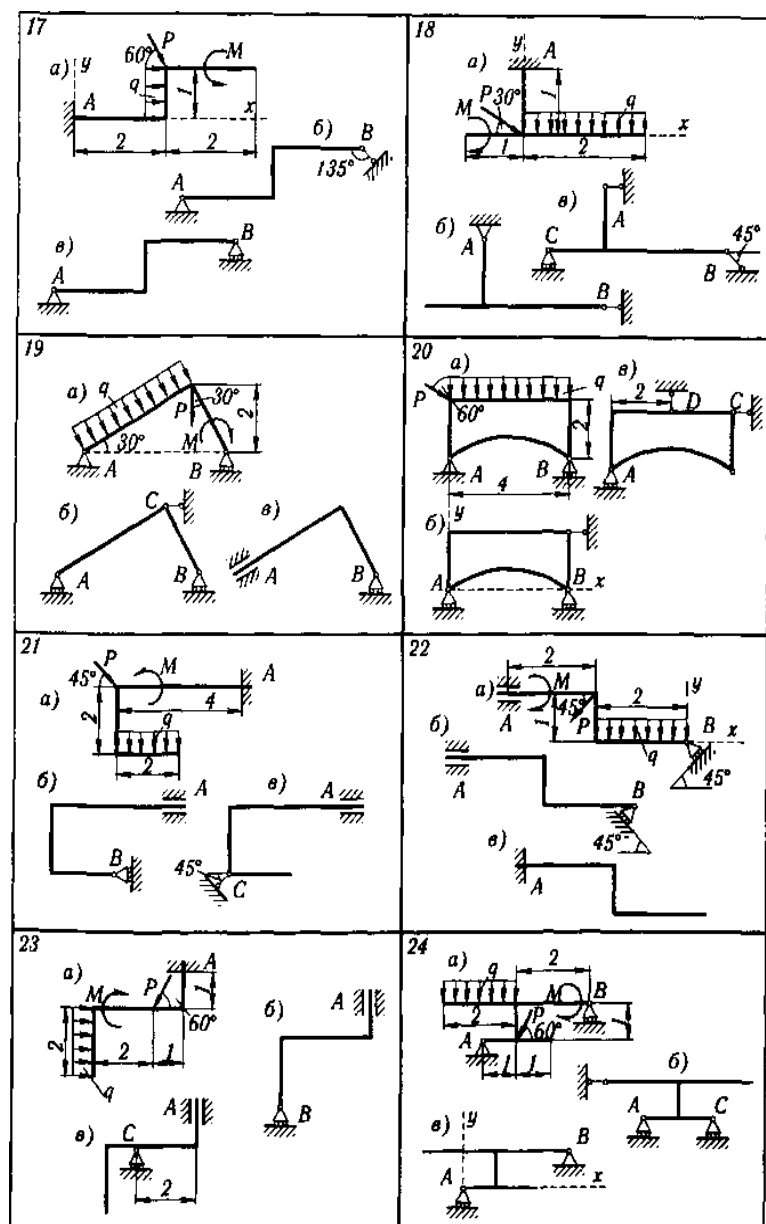


Рисунок 1.4 – Варіанти схем

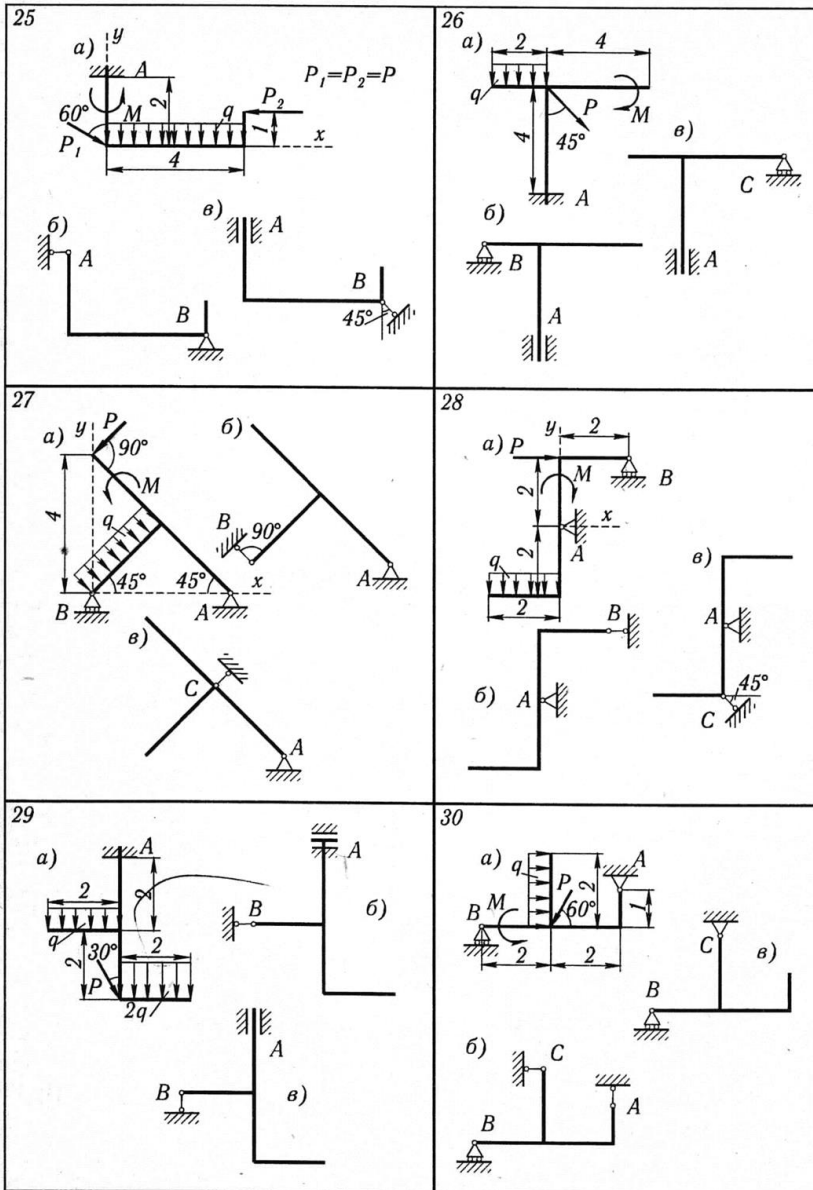


Рисунок 1.5 – Варіанти схем

1.2 Завдання С.7. Визначення реакцій опор твердого тіла (система сил, які не лежать в одній площині)

Знайти реакції опор конструкції. Схеми конструкцій показано на Рис. 1.7-1.9. Необхідні для розрахунку дані наведено у табл. 1.3.

Таблиця 1.3 – Дані за варіантами до завдання

Номер варіанта	Сили, кН			Розміри, см					Номер варіанта	Сили, кН			Розміри, см				
	Q	T	G	a	b	c	R	r		Q	T	G	a	b	c	R	r
1	2	-	20	20	30	10	15	5	16	4	-	2	50	30	-	-	-
2	4	-	2	20	10	30	10	10	17	2	-	1	15	10	20	20	5
3	20	-	18	400	400	450	-	-	18	6	-	2	60	40	60	-	-
4	3	-	2	30	20	40	15	10	19	-	8	2	20	30	40	20	15
5	5	-	3	30	40	20	20	15	20	4	-	-	60	40	20	-	-
6	1	4	2	40	30	20	20	10	21	2	-	-	40	60	30	-	-
7	-	3	1	30	10	5	18	6	22	-	-	5	20	50	30	-	-
8	4	6	3	20	40	15	20	10	23	-	-	4	40	30	50	-	-
9	5	-	3	20	15	10	30	40	24	5	-	2	-	-	-	-	-
10	1	4	2	30	40	20	20	10	25	-	-	3	50	50	60	-	-
11	-	2	1	20	30	15	15	10	26	-	-	1	20	60	40	-	-
12	4	-	1	25	20	8	15	10	27	10	-	-	50	30	50	-	-
13	10	-	5	40	30	20	25	15	28	35	-	32	400	200	200	-	-
14	-	2	1	30	90	20	30	10	29	-	4	3	15	20	15	15	10
15	3	-	2	60	20	40	20	5	30	5	-	-	40	40	10	-	-

Примітка. Вважати, що у варіантах 16, 18, 22-26 петлі не перешкоджають переміщенню рами вздовж AB . У варіантах 20 і 21 дотичні поверхні вважати абсолютно гладкими.

Приклад виконання завдання.

Дано: рама $ABCD$ масою $G = 1$ кН, $P = 2$ кН, $P \parallel Ay$, $AD=BC= 60$ см, $AB = CD = 100$ см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ (Рис. 3). Знайти реакції опор A , B и C

(A - шаровий шарнір, B - петля, C - стержнева опора).

Рішення. До рами $ABCD$ прикладено силу тяжіння G , сила P , реакція S стержня CE та реакції опор A та B . Реакція шарового шарніра A визначається трьома складовими: X_A , Y_A , Z_A , а реакція петлі B — двома: X_B и Y_B (Рис. 1.6).

З цих сил — шість невідомих. Для визначення можна скласти шість рівнянь рівноваги. Рівняння моментів сил щодо координатних осей:

$$\sum M_{ix} = 0; -P \cdot AD \cdot \cos 30^\circ - G \cdot \frac{AB}{2} + S \cdot \cos 30^\circ AB + Z_B AB = 0, \quad (1.1)$$

$$\sum M_{iy} = 0; G \cdot \left(\frac{BC}{2}\right) \sin 30^\circ - S \cdot BC \sin 60^\circ = 0, \quad (1.2)$$

$$\sum M_{iz} = 0; P \cdot AD \cdot \sin 30^\circ + S \cos 60^\circ AB - X_B - AB = 0. \quad (1.3)$$

З рівняння (2) визначаємо S , потім з рівнянь (1) та (3) знаходимо Z_B і X_B . Рівняння проєкцій сил на осі координат:

$$\sum X_i = 0; X_A + X_B - S \cos 60^\circ = 0, \quad (1.4)$$

$$\sum Y_i = 0; Y_A + P = 0, \quad (1.5)$$

$$\sum Z_i = 0; Z_A - G + Z_B + S \cos 30^\circ = 0. \quad (1.6)$$

З цих рівнянь знаходим X_A , Y_A і Z_A .

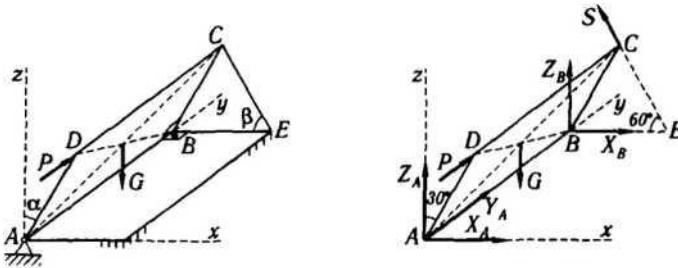


Рисунок 1.6 – Схема до прикладу

Таблиця 1.4 – Дані за варіантами до завдання

S	X_A	Y_A	Z_A	X_B	Z_B
0,289	-0,6	-2,0	-0,54	0,744	1,29

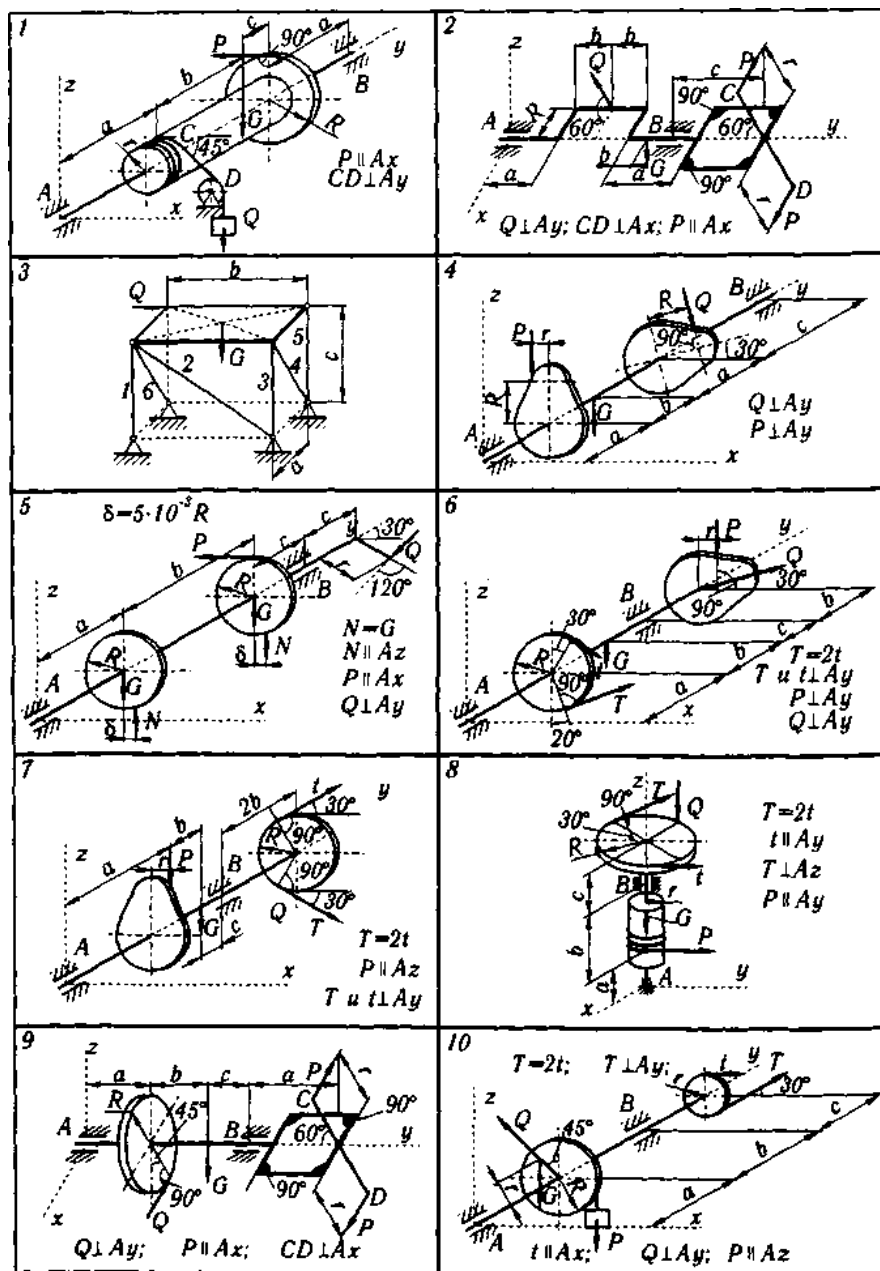


Рисунок 1.7 – Варіанти схем

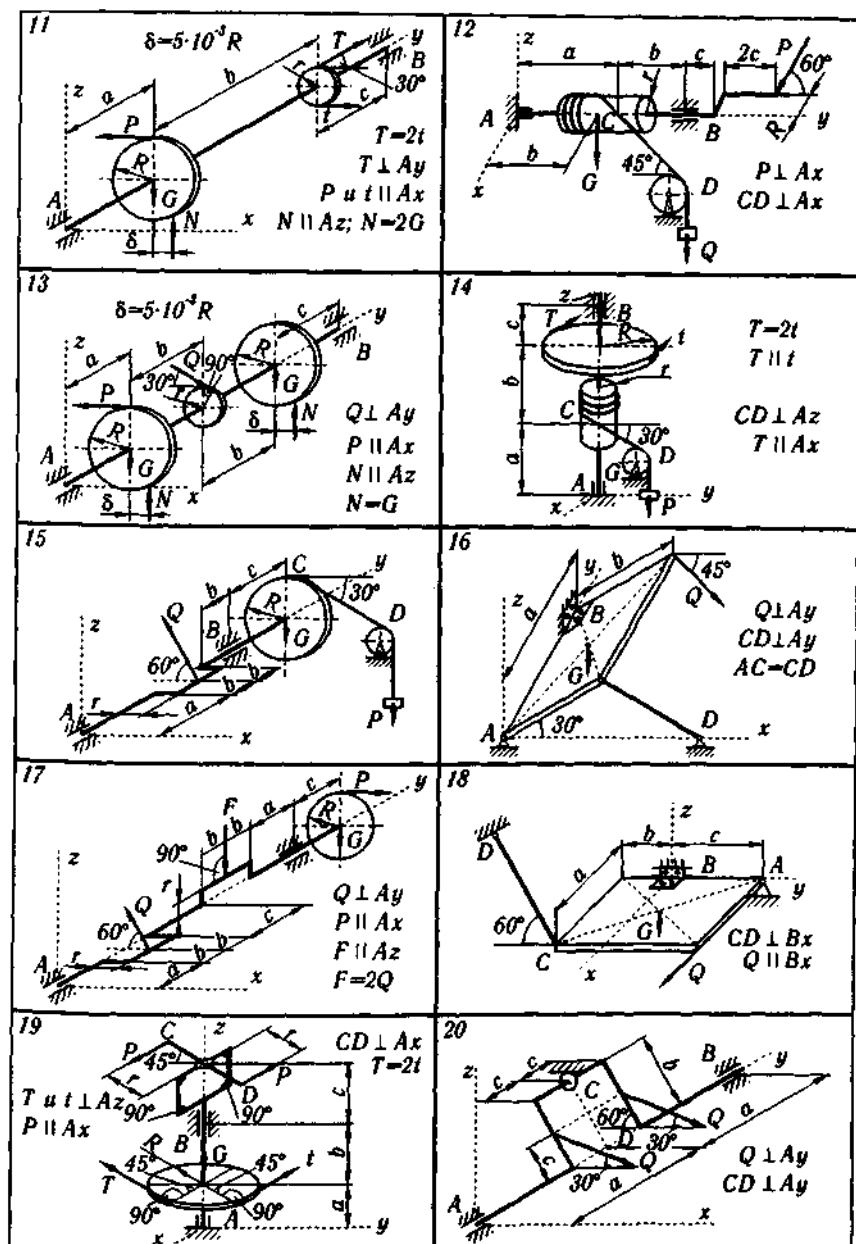


Рисунок 1.8 – Варианты схем

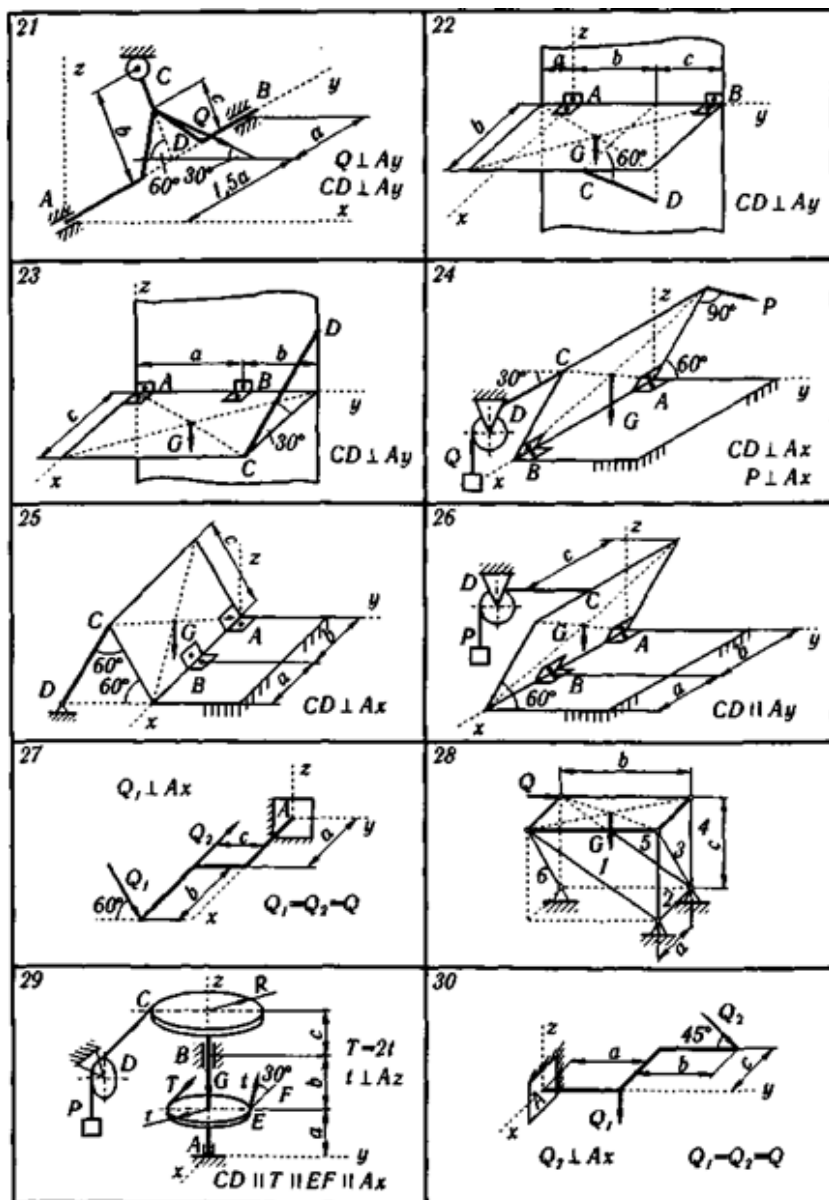


Рисунок 1.9 – Варіанти схем

2. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

Завдання К.1. Визначення швидкості та прискорення точки за заданими рівняннями її руху

За заданими рівняннями руху точки М встановити вид її траєкторії та для моменту часу $t = t_1$ (с) знайти положення точки на траєкторії, її швидкість, повне, дотичне та нормальне прискорення, а також радіус кривизни траєкторії.

Необхідні на вирішення дані наведено у табл. 2.1

Таблиця 2.1 – Дані за варіантами до завдання

Номер варіанта	Рівняння руху		$t_1, \text{с}$
	$x = x(t), \text{см}$	$y = y(t), \text{см}$	
1	$-2t^2 + 3$	$-5t$	1/2
2	$4\cos(\pi t/3) + 3 + 2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3) + 3$	$\sin(\pi t^2/3) - 1$	1
4	$4t + 4$	$-4/(t + 1)$	2
5	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3) + 4$	1
6	$3t^2 + 2$	$-14t$	1/2
7	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 5t/3 - 2$	1
8	$7\sin(\pi t^2/6) + 3$	$2 - 7\cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t + 2)$	$3t + 6$	2
10	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3) - 3$	1
11	$-4t^2 + 1$	$8 - 3t$	1/2
12	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6) - 3$	1
13	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t - 2$	$-2/(t + 1)$	2
15	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2 + 1$	1/2
17	$7\sin^2(\pi t/6) - 5$	$7\cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1 + 3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3) + 3$	1
19	$-5t^2 - 4$	$3t$	1
20	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - 3t/2 - 3t^2$	0
21	$6\sin(\pi t^2/6) - 2$	$6\cos(\pi t^2/6) + 3$	1
22	$7t^2 - 3$	$5t$	1/4
23	$3 - 3t^2 + 1$	$4 - 5t^2 + 5t/3$	1

Продовження табл. 2.1

Номер варіанта	Рівняння руху		$t_1, \text{с}$
	$x = x(t), \text{см}$	$y = y(t), \text{см}$	
24	$-4\cos(\pi t/3) - 1$	$-4\sin(\pi t/3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1
26	$8\cos^2(\pi t/6) + 2$	$-8\sin^2(\pi t/6) - 7$	1
27	$-3 - 9\sin(\pi t^2/6)$	$-9\cos(\pi t^2/6) + 5$	1
28	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
29	$5t^2 + 5t/3 - 3$	$3t^2 + t + 3$	1
30	$2\cos(\pi t^2/3) - 2$	$-2\sin(\pi t^2/3) + 3$	1

Приклад виконання завдання.

Вихідні дані:

$$x = 4t; y = 16t^2 - 1; \quad (2.1)$$

$$t_1 = 0,5 \text{ (} x \text{ и } y \text{ — в см, } t \text{ и } t_1 \text{ — в с)}.$$

Рішення. Рівняння руху (1) можна розглядати як параметричні рівняння траєкторії точки. Щоб отримати рівняння траєкторії в координатній формі, виключимо час t із рівнянь (1).

Отримуємо $y = x^2 - 1$, тобто траєкторією точки є парабола, показана на Рис. 2.1.

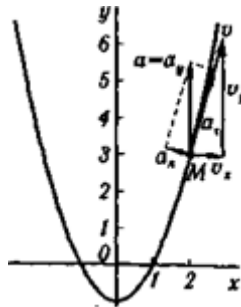


Рисунок 2.1 – Траєкторія руху точки М

Вектор швидкості точки:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}. \quad (2.2)$$

Вектор прискорення:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j}.$$

Тут $\bar{i}, \bar{j}$ — орти осей x и y ; v_x, v_y, a_x, a_y — проекції швидкості та прискорення точки на осі координат.

Знайдемо їх, диференціюючи за часом рівняння руху (2.1):

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= 4 \text{ см/с}; a_x = \ddot{x} = 0; \\ v_y = \dot{y} &= 32t; a_y = \ddot{y} = 32 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

По знайденим проекціям визначаються модуль швидкості:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (2.4)$$

та модуль прискорення точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (2.5)$$

Модуль дотичного прискорення точки:

$$a_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right| \quad (2.6)$$

або

$$a_\tau = \left| \bar{v} \cdot \frac{\bar{a}}{v} \right|; \quad (2.7)$$

$$a_\tau = |(v_x a_x + v_y a_y)/v|; \quad (2.8)$$

dv/dt виражає проекцію прискорення точки на напрямок її швидкості. Знак «+» при dv/dt означає, що рух точки прискорений, напрямки $\bar{a}_\tau$ і $\bar{v}$ збігаються; знак «-», що рух сповільнений.

Модуль нормального прискорення точки:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (2.9)$$

Якщо радіус кривизни траєкторії ρ у точці, що розглядається, невідомий, то a_n можна визначити за формулою:

$$\bar{a}_n = |\bar{v} \times \bar{a}|/v. \quad (2.10)$$

При русі точки у площині формула (2.10) приймає вигляд:

$$a_{\tau} = \frac{|v_x a_y + v_y a_x|}{v}; \quad (2.11)$$

Модуль нормального прискорення можна визначити таким чином:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2}. \quad (2.12)$$

Після того, як знайдено нормальне прискорення за формулами (2.10) або (2.12), радіус кривизни траєкторії в точці, що розглядається, визначається з виразу

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}. \quad (2.13)$$

Результати обчислень за формулами (для заданого моменту часу $t_I = 0,5$ с наведені у табл. 2.2.

Таблиця 2.2 – Результати обчислень

Координати, см		Швидкість, см/с			Прискорення, см/с ²					Радіус кривизни,
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_{τ}	a_n	ρ
2,0	3,0	4,0	16,0	16,5	0	32,0	32,0	31,0	7,8	35,0

На Рис. 2.1 показано положення точки М у заданий момент часу. Вектор $\vec{v}$ будуємо за складовими $\vec{v}_x$ і $\vec{v}_y$, причому цей вектор повинен у напрямку збігатися з траєкторією. Вектор $\vec{a}$ будуємо по складових $\vec{a}_x$ і $\vec{a}_y$ і потім розкладаємо на складові $\vec{a}_{\tau}$ і $\vec{a}_n$. Збіг величин a_{τ} і a_n , знайдених з креслення, зі своїми значеннями, отриманими аналітично, служить контролем правильності рішення.

3. КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА. ПОСТУПАЛЬНИЙ І ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

3.1 Завдання К.2. Визначення швидкостей та прискорень точок твердого тіла при поступальному та обертальному русі

Рух вантажу 1 має описуватися рівнянням

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \quad (3.1)$$

де t - час, c_0, c_1, c_2 - деякі сталі.

У початковий момент часу ($t = 0$) положення вантажу визначається координатою x_0 , та він має швидкість v_0 . Врахувати, що в момент часу $t = t_2$ координата вантажу дорівнює x_2 .

Визначити коефіцієнти c_0, c_1, c_2 , при яких здійснюється необхідний рух вантажу 1. Визначити також у момент часу $t = t_1$ швидкість та прискорення вантажу та точки M одного з коліс механізму.

Схеми механізмів показано на рис. 3.2-3.4, а необхідні дані наведені в табл. 3.1

Приклад виконання завдання.

Дано: схема механізму (Рис. 3.1); $R_2 = 50$ см, $r_2 = 25$ см, $R_3 = 65$ см, $r_3 = 40$ см, $x_0 = 14$ см, $v_0 = 5$ см/с, $x_2 = 168$ см, $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с.

Знайти рівняння руху вантажу, а також швидкості та прискорення вантажу та точки M у момент часу $t = t_1$.

Рішення. Рівняння руху вантажу 1 має вигляд (3.1).

Коефіцієнти c_0, c_1, c_2 , можуть бути визначені з наступних умов:

$$\text{при } t = 0 \quad x_0 = 14 \text{ см, } v_0 = 5 \text{ см/с,} \quad (3.2)$$

$$\text{при } t_2 = 2 \text{ с } \quad x_2 = 168 \text{ см.} \quad (3.3)$$

Швидкість вантажу 1

$$v = x' = 2c_2 t + c_1. \quad (3.4)$$

Підставив (3.2) і (3.3) у формули (3.1) і (3.4), знаходимо коефіцієнти

$$c_0 = 14 \text{ см, } c_1 = 5 \text{ см/с, } c_2 = 36 \text{ см/с}^2.$$

Таким чином, рівняння руху вантажу 1

$$x = 36t^2 + 5t + 4 \quad (3.5)$$

Швидкість вантажу 1

$$v = x = 72t + 5 \quad (3.6)$$

Прискорення вантажу 1

$$a = x = 72 \text{ см/с}^2.$$

Для визначення швидкості і прискорення точки M запишемо рівняння, що зв'язують швидкість вантажу v і кутові швидкості коліс ω_2 і ω_3 .

За схемою механізму

$$\begin{cases} v = r_2 \omega_2 \\ R_2 \omega_2 = R_3 \omega_3 \end{cases} \quad (3.7)$$

звідки

$$\omega_3 = \frac{R_2 v}{r_2 R_3}.$$

або після підстановки даних $\omega = 2,215t + 0,154$.

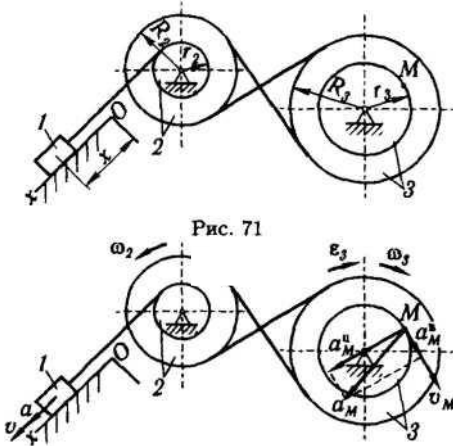


Рис. 71

Рисунок 3.1 – Схема до прикладу

Кутове прискорення колеса 3

$$\epsilon_3 = \omega_3 = 2,215 \text{ рад/с}^2.$$

Швидкість точки M , її оберতালне, доцентрове і повне прискорення визначаються за формулами:

$$v_M = r_3 \cdot \omega_3; \quad a_M^o = r_3 \epsilon_3; \quad a_M^d = r_3 \omega_3^2;$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^o)^2 + (a_M^d)^2}.$$

Результати обчислень для заданого моменту часу $t_1 = 1 \text{ с}$ наведені в табл. 3.1. Швидкості та прискорення тіла 1 та точки M показані на рис. 3.1.

Таблиця 3.1 – Результати обчислень

v , см/с	a , см/с	ω_3 , рад/с	ϵ_3 , рад/с ²	v_M , см/с	a_M^d , см/с ²	a_M^o , см/с ²	a_M , см/с ²
77	72	2,37	2,22	94,8	224	88,6	241

Таблиця 3.2 – Дані за варіантами до завдання

Номер варіанта	Радіуси, см				Координати та швидкість вантажу 1			Розраху- нкові моменти часу, с	
	R_2	r_2	R_3	r_3	$x_0, \text{см}$	$v_0, \text{см}$	$x_2, \text{см}$	t_2	t_1
1	60	45	36	-	2	12	173	3	2
2	80	-	60	45	5	10	41	2	1
3	100	60	75	-	8	6	40	4	2
4	58	45	60	-	4	4	172	4	3
5	80	-	45	30	3	15	102	3	2
6	100	60	30	-	7	16	215	4	2
7	45	35	105	-	8	5	124	4	3
8	35	10	10	-	6	2	111	3	2
9	40	30	15	-	10	7	48	2	1
10	15	-	40	35	5	3	129	4	3
11	40	25	20	-	9	8	65	2	1
12	20	15	10	-	5	10	179	3	2
13	30	20	40	-	7	0	557	5	2
14	15	10	15	-	6	3	80	2	1
15	15	10	15	-	5	2	189	4	2
16	20	15	15	-	4	6	220	4	3
17	15	10	20	-	8	4	44	2	1
18	20	15	10	-	3	12	211	4	1
19	15	10	20	-	5	10	505	5	3
20	25	15	10	-	10	8	277	3	1
21	20	10	30	10	6	5	356	5	2
22	40	20	35	-	7	6	103	2	1
23	40	30	30	15	5	9	194	3	2
24	30	15	40	20	9	8	105	4	2
25	50	20	60	-	8	4	119	3	2
26	32	16	32	16	6	14	862	4	2
27	40	18	40	18	5	10	193	2	1
28	40	20	40	15	8	5	347	3	2
29	25	20	50	25	4	6	32	2	1
30	30	15	20	-	10	7	128	2	1

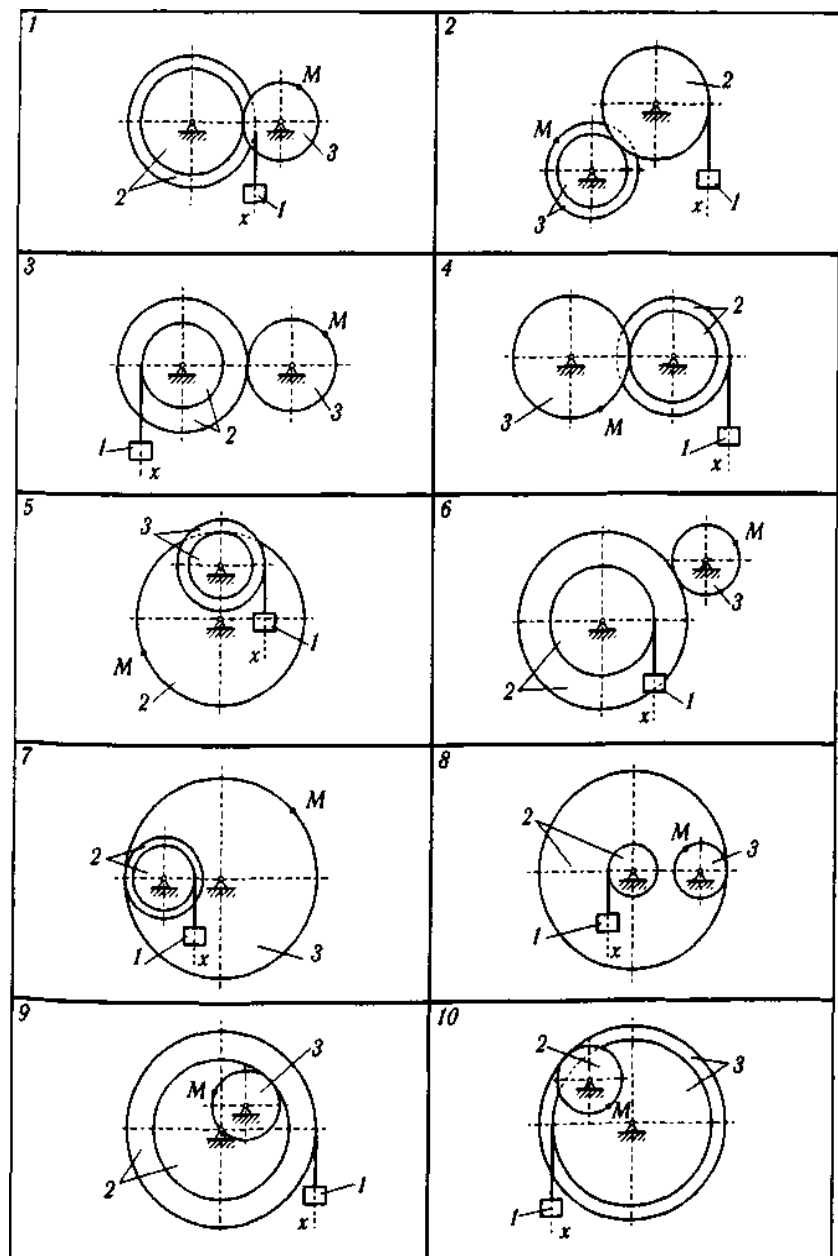


Рисунок 3.2 – Варіанти схем

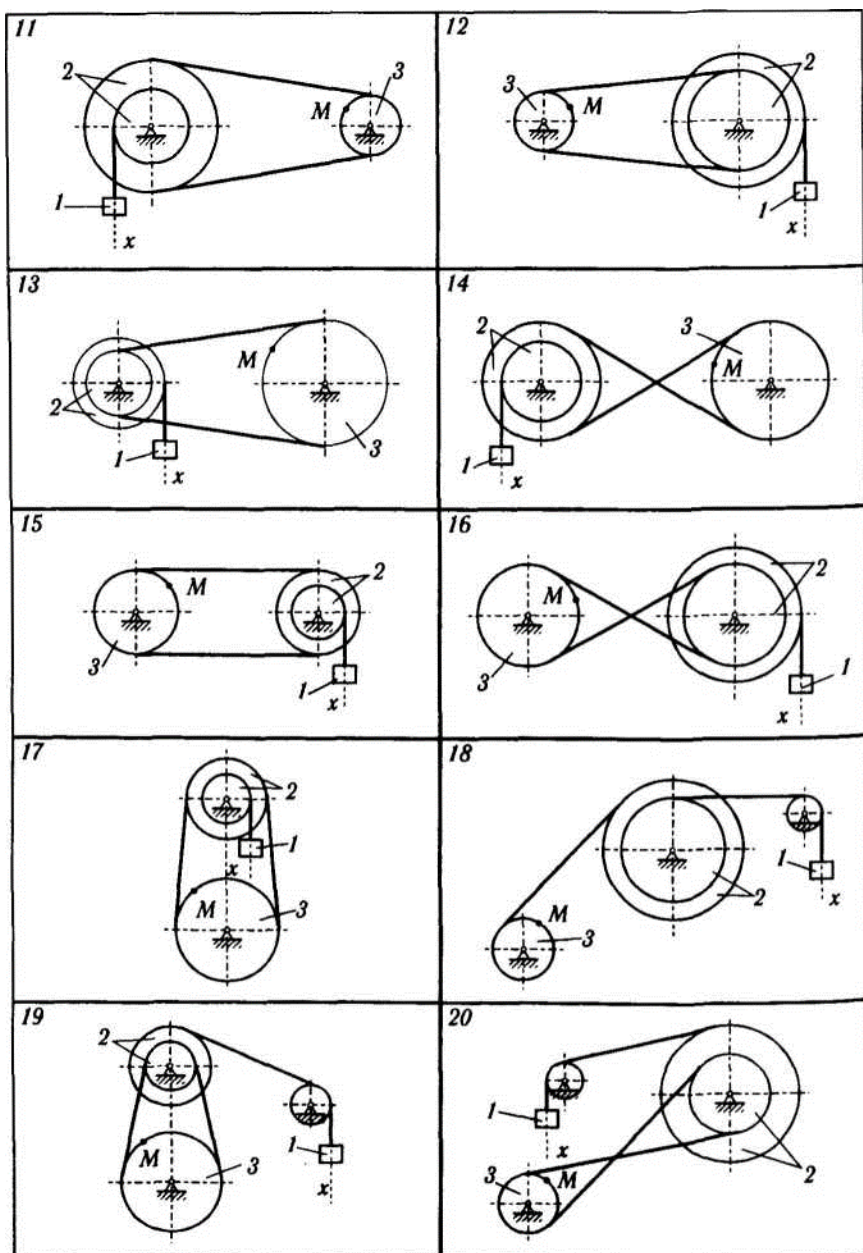


Рисунок 3.3 – Варіанти схем

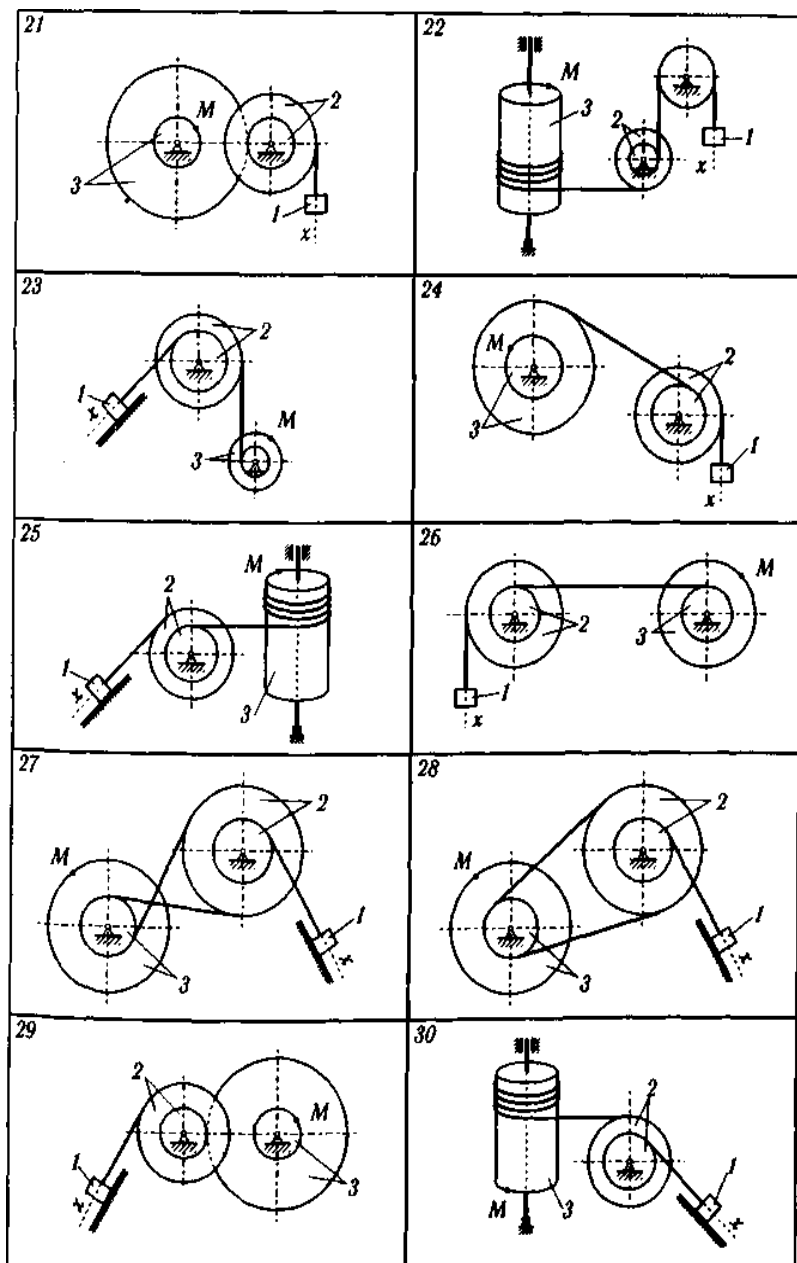


Рисунок 3.4 – Варіанти схем

3.2 Завдання К.3. Кінематичний аналіз плоского механізму

Знайти для заданого положення механізму швидкості та прискорення точок B та C , а також кутову швидкість та кутове прискорення ланки, якій ці точки належать.

Схеми механізмів розміщені на рис. 3.8-3.10, а необхідні для розрахунку дані наведені в табл. 3.3.

Таблиця 3.3 – Дані за варіантами до завдання

Номер варіанта	Розміри, см				ω_{OA} , рад/с	ω_1 , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²	v_A , см/с	a_A , см/с ²
	OA	r	AB	AC					
1	40	15	-	8	2	-	2	-	-
2	30	15	-	8	3	-	2	-	-
3	-	50	-	-	-	-	-	50	100
4	35	-	-	45	4	-	8	-	-
5	25	-	-	20	1	-	1	-	-
6	40	15	-	6	1	1	0	-	-
7	35	-	75	60	5	-	10	-	-
8	-	-	20	10	-	-	-	40	20
9	-	-	45	30	-	-	-	20	10
10	25	-	80	20	1	-	2	-	-
11	-	-	30	15	-	-	-	10	0
12	-	-	30	20	-	-	-	20	20
13	25	-	55	40	2	-	4	-	-
14	45	15	-	8	3	12	0	-	-
15	40	15	-	8	1	-	1	-	-
16	55	20	-	-	2	-	5	-	-
17	-	30	-	10	-	-	-	80	50
18	10	-	10	5	2	-	6	-	-
19	20	15	-	10	1	2,5	0	-	-
20	-	-	20	6	-	-	-	10	15
21	30	-	60	15	3	-	8	-	-
22	35	-	60	40	4	-	10	-	-
23	-	-	60	20	-	-	-	5	10
24	25	-	35	15	2	-	3	-	-
25	20	-	70	20	1	-	2	-	-
26	20	15	-	10	2	1,2	0	-	-
27	-	15	-	5	-	-	-	60	30
28	20	-	50	25	1	-	1	-	-
29	12	-	35	15	4	-	6	-	-
30	40	-	-	20	5	-	10	-	-

Примітка: ω_{OA} , ε_{OA} - кутова швидкість та кутове прискорення кривошипу OA при заданому положенні механізму; ω_1 - кутова швидкість колеса 1; v_A , a_A - швидкість та прискорення точки A .

Приклад виконання завдання:

Дано: схема механізму в заданому положенні (Рис. 3.5);
вихідні дані (табл. 3.4).

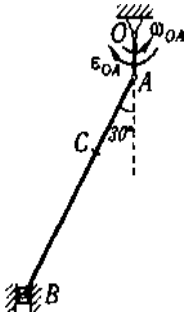


Рисунок 3.5 – Схема механізму в заданому положенні

Таблиця 3.4 – Дані до прикладу

Розміри, см			ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²
OA	AB	AC		
10	60	20	1,5	2

Рішення.

1. Визначення швидкостей точок та кутової швидкості ланки
(Рис. 3.6).

Обчислимо модуль швидкості пальця *A* кривошипа *OA* при заданому положенні механізму:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA$$

Швидкість точки *A* перпендикулярна кривошипу *OA*. Швидкість повзуна напрямлена вздовж вертикалі. Миттєвий центр швидкостей P_{AB} шатуна *AB* знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених з точок *A* і *B* до їх швидкостей.

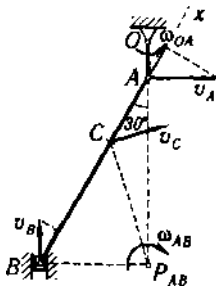


Рисунок 3.6 – Швидкості точок та кутова швидкість ланок

Кутова швидкість ланки AB :

$$\omega_{OA} = \frac{v_A}{AP_{AB}}.$$

Модулі швидкостей точок B та C

$$v_B = \omega_{OA} \cdot BP_{AB} \quad v_C = \omega_{OA} \cdot CP_{AB}.$$

Відстані AP_{AB} , BP_{AB} , CP_{AB} визначаються з трикутників ABP_{AB} та ACP_{AB}

$$AP_{AB}=52,0 \text{ см}; BP_{AB}=30,0 \text{ см}; CP_{AB}=36,1 \text{ см}.$$

У зв'язку з тим $v_A=15,0 \text{ см/с}$; $\omega_{AB}=0,29 \text{ рад/с}$; $v_B=8,7 \text{ см/с}$; $v_C=10,5 \text{ см/с}$.

Вектор v_C направлено перпендикулярно відрізку CP_{AB} в сторону, яка співпадає з напрямом обертання ланки AB .

Вектор $\bar{v}_C$ направлено перпендикулярно до відрізку CP_{AB} у бік, що відповідає напрямку обертання ланки AB .

Для перевірки визначимо швидкість точки B іншим способом. Скористаємося теоремою про рівність проекції швидкостей точок на вісь, проведену через ці точки.

Направимо ось x вздовж шатуна AB у напрямку від B до A .

Маємо

$$v_A \cos(\bar{v}_A, x) = v_B \cos(\bar{v}_B, x) \text{ або } v_A \cos 60^\circ = v_B \cos 30^\circ.$$

Звідки $v_B=8,7 \text{ см}$.

Корисно переконатися, що і знайдена раніше швидкість точки C задовольняє цю теорему.

2. Визначення прискорень точок та кутового прискорення ланки (Рис. 3.7). Прискорення точки A складається з обертального і доцентрового прискорень:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^o + \bar{a}_A^d; a_A^o = \varepsilon_{OA} \cdot OA; a_A^d = \omega_{OA}^2 \cdot OA.$$

Відповідно до теореми про прискорення точок плоскої фігури **прискорення точки B :**

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}^o + \bar{a}_{AB}^d \quad (3.8)$$

Доцентрове прискорення точки B в обертальному русі шатуна AB навколо полюса A :

$$a_{AB}^d = \omega_{AB}^2 \cdot AB.$$

За формулами вираховуємо:



$$a_A^o = 20,0 \text{ см/с}^2; a_A^d = 22,5 \text{ см/с}^2; a_{AB}^d = 5,0 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_A^d$ напрямлений від A до O . Вектор $\bar{a}_A^o$ - перпендикулярно вектору $\bar{a}_A^d$ та протилежно $\bar{v}_A$.

Вектор $\bar{a}_{AB}^d$ направлено від B к A . Щодо прискорення $\bar{a}_B$ точки B та обертового прискорення $\bar{a}_{AB}^o$, то маємо лише лінії дії цих векторів: $\bar{a}_B$ - по вертикалі вздовж направляючих повзуна, $\bar{a}_{AB}^o$ - перпендикулярно AB .

Задаємо довільно їх напрями за вказаними лініями (Рис. 3.7, а).

Ці прискорення визначимо із рівнянь проєкцій векторної рівності (3.8) на осі координат. Знак у відповіді показує, чи відповідає справжній напрямок вектору прийнятому при розрахунку.

Рисунок 3.7 – Прискорення точок та кутове прискорення ланок

Обрав напрями осей x і y , як показано на рис. 3.7)г) маємо:

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = -a_A^o \cdot \cos 60^\circ + a_{AB}^d \cdot \cos 30^\circ + a_{AB}^d; \quad (3.9)$$

$$a_B \cdot \cos 60^\circ = -a_A^o \cdot \cos 30^\circ + a_{AB}^d \cdot \cos 60^\circ + a_{AB}^o. \quad (3.10)$$

З рівняння (3.9) знаходимо $a_B = 16,7 \text{ см/с}^2$.

Прискорення $\bar{a}_B$ направлено, як показано на рис. 3.7, а.

З рівняння (3.10) маємо

$$a_{AB}^o = -20,2 \text{ см/с}^2.$$

Напрямок $\bar{a}_{AB}^o$ протилежно показаному на рис. 1, а. Прискорення $\bar{a}_B$ і всі його складові з урахуванням їх справжніх напрямів та масштабу показані на рис. 3.7, а.

Кутове прискорення шатуна AB з урахуванням того, що тут a_{AB}^o - алгебраїчна величина, визначається за формулою:

$$\varepsilon_{AB} = |a_{AB}^o| / AB.$$

Знаходимо $\varepsilon_{AB} = 0,34 \text{ рад/с}^2$.

Напрямок прискорення $\vec{a}_{AB}^0$ щодо полюса A визначає напрям кутового прискорення ε_{AB} . Тут під напрямом кутового прискорення розуміється напрям дугової стрілки, яке при прискореному обертанні ланки збігається з напрямом його обертання, а при уповільненому - протилежно йому. У цьому випадку кутове прискорення протилежне напрямку обертання шатуна.

Визначити $\vec{a}_B$ та $\vec{a}_{AB}^0$ можливо графічно - **побудувати багатокутник прискорень**.

Відкладемо з точки B згідно (3.8) послідовно вектори $\vec{a}_A^0$, $\vec{a}_A^{\Pi}$ та $\vec{a}_{AB}^{\Pi}$ (Рис. 3.7, в). Через кінець вектору $\vec{a}_{AB}^{\Pi}$ проведемо пряму, паралельну обертальному прискоренню $\vec{a}_{AB}^0$, тобто перпендикулярно $\vec{a}_B$, до її перетину з прямою, вздовж якої направлено прискорення $\vec{a}_B$.

Останнє визначаємо як замикаючу сторону багатокутника прискорень.

Модулі a_B та a_{AB}^0 можуть бути знайдені вимірюванням на кресленні.

Визначаємо прискорення точки C :

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^0 + \vec{a}_A^{\Pi} + \vec{a}_{AC}^0 + \vec{a}_{AC}^{\Pi}$$

Обертальне та доцентрове прискорення точки C у обертальному русі AB навколо полюса A :

$$a_{AC}^0 = \varepsilon_{AB} \cdot AC; \quad a_{AC}^{\Pi} = \omega_{AB}^2 \cdot AC,$$

$$\text{або } a_{AC}^0 = 6,8 \text{ см/с}^2; \quad a_{AC}^{\Pi} = 1,7 \text{ см/с}^2$$

Вектор $\vec{a}_{AC}^0$ **перпендикулярний** вектору $\vec{a}_{AC}^{\Pi}$ і спрямований відповідно до кутового прискорення ε_{AB} .

Прискорення точки C знаходимо **способом проекцій** (Рис. 3.7 а):

$$a_{Cx} = a_{AC}^{\Pi} + \vec{a}_A^{\Pi} \cos 30^\circ - \vec{a}_A^0 \cos 60^\circ.$$

$$a_{Cy} = a_A^{\Pi} \cos 60^\circ + \vec{a}_A^0 \cos 30^\circ - a_{AC}^0.$$

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2}.$$

У результаті маємо: $a_{Cx} = 11,2 \text{ см/с}^2$; $a_{Cy} = 21,8 \text{ см/с}^2$;
 $a_C = 24,5 \text{ см/с}^2$ (Рис. 3.7, г).

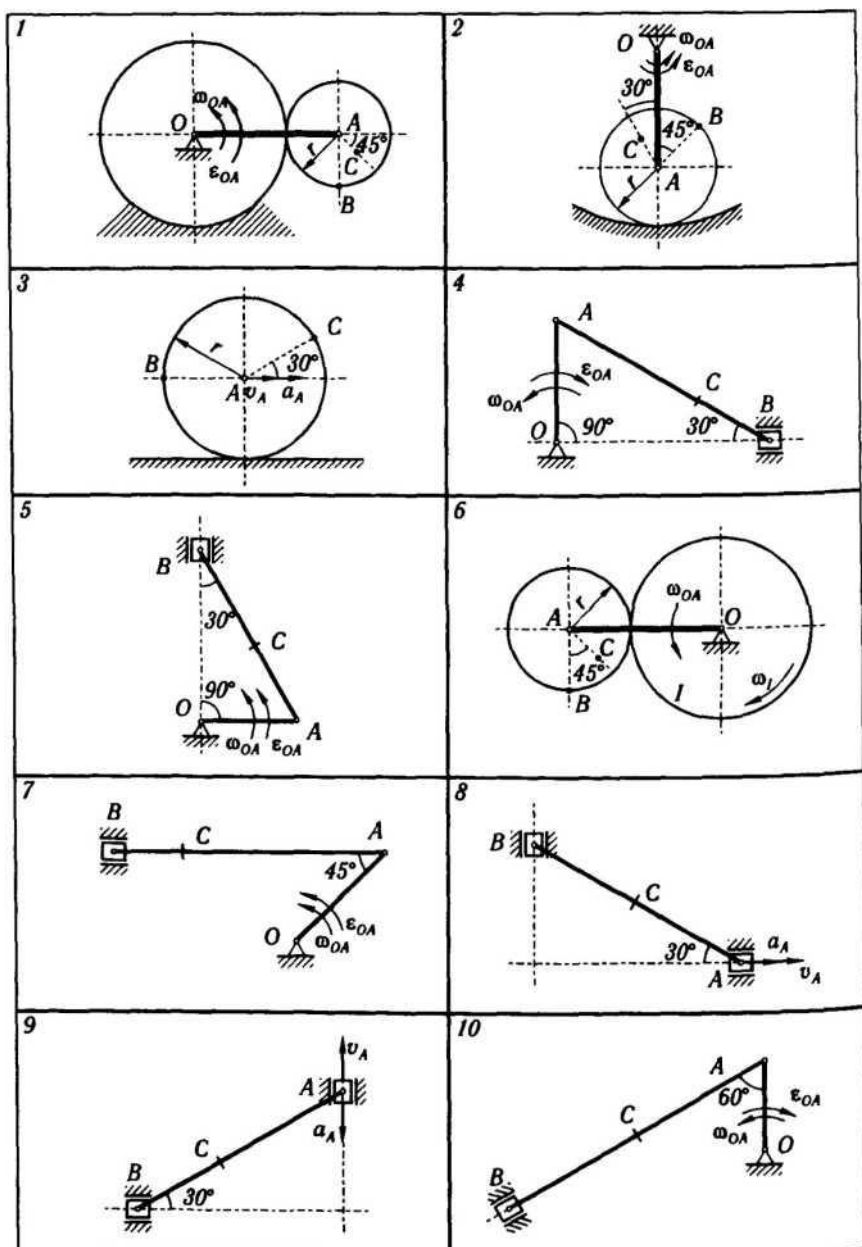


Рисунок 3.8 – Варіанти схем

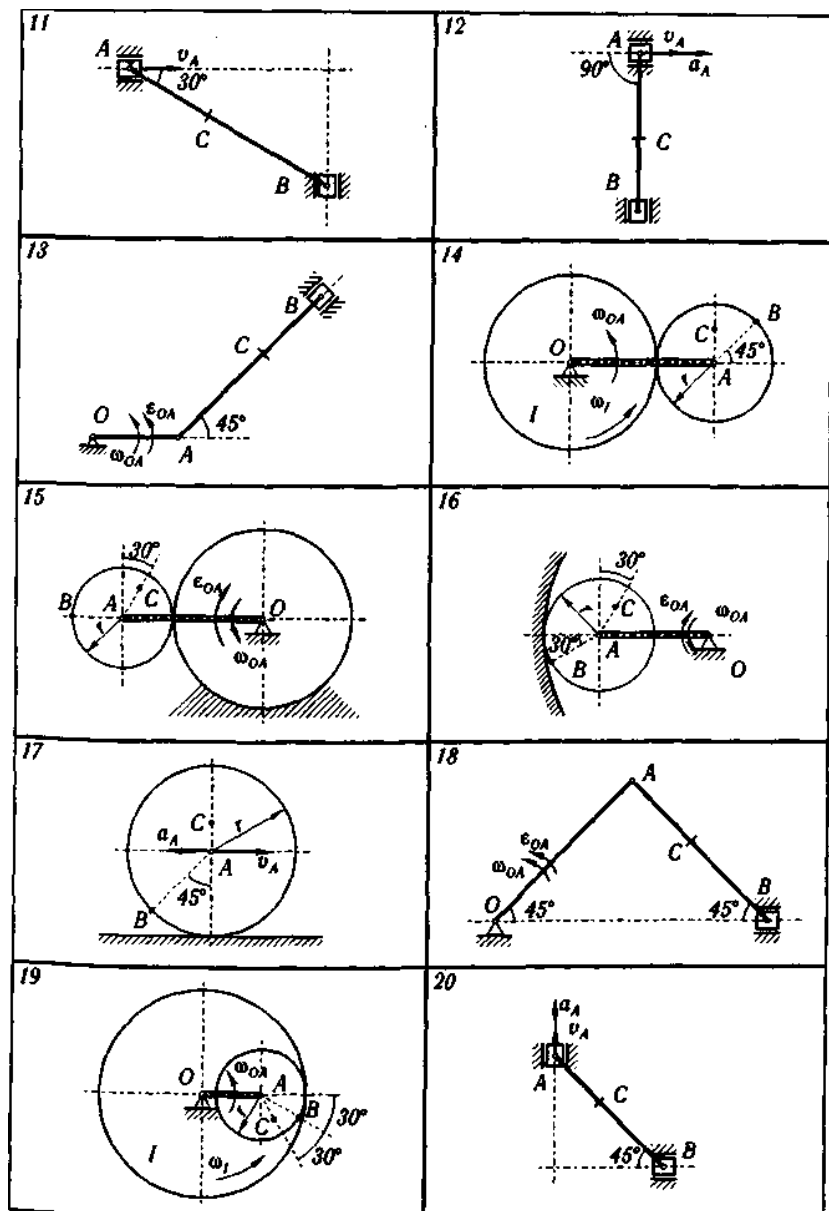


Рисунок 3.9 – Варіанти схем

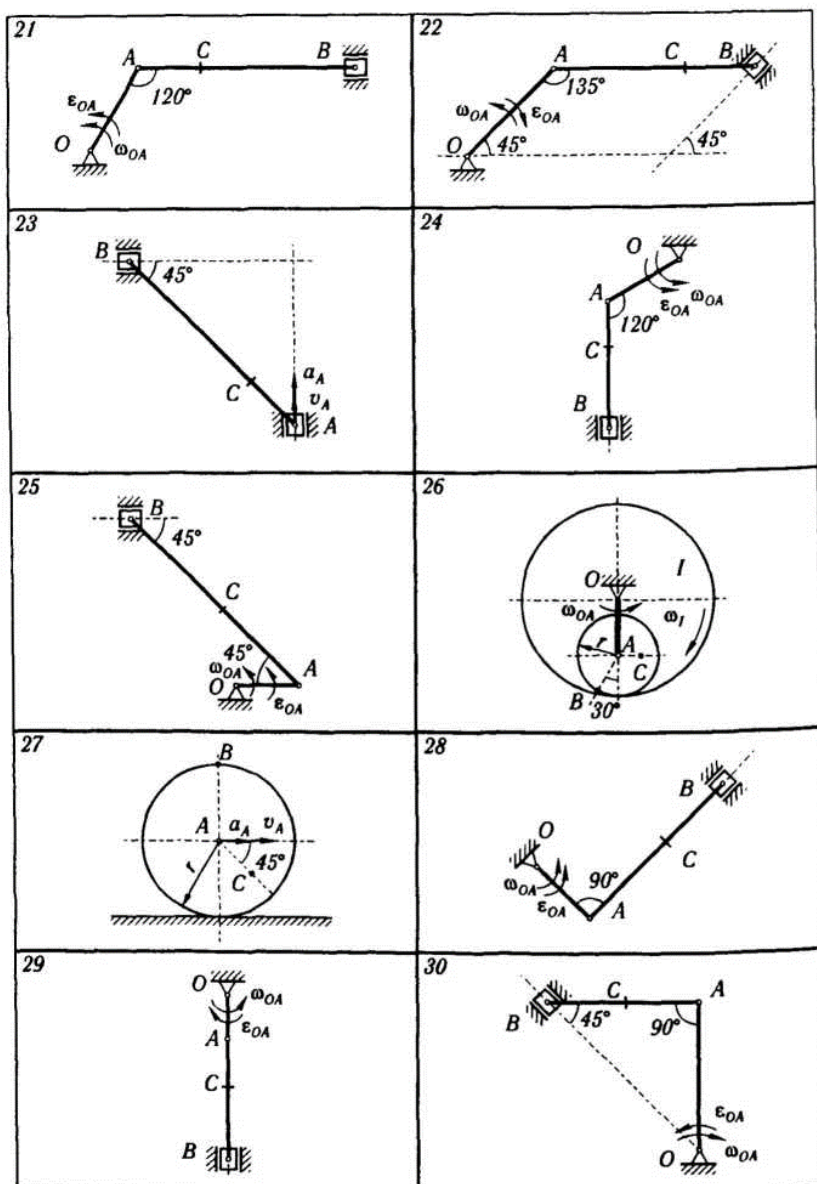


Рисунок 3.10 – Варіанти схем

4. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ. ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

4.1 Завдання Д1. Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, що знаходиться під дією постійних сил

Варіанти 1-5 (Рис. 4.1, схема 1)

Тіло рухається з точки A по ділянці AB (довжиною ℓ) нахиленої площини, що становить кут α з горизонтом, протягом τ , с. Його початкова швидкість v_A . Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині дорівнює f .

У точці B тіло залишає площину зі швидкістю v_B і потрапляє зі швидкістю v_C в точку C площини BD , нахиленої під кутом β до горизонту, перебуваючи в повітрі T с.

При розв'язанні задачі тіло прийняти за матеріальну точку; опір повітря не враховувати.

Варіант 1. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,2$; $\ell = 10$ м; $\beta = 60^\circ$. Визначити τ і h .

Варіант 2. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $v_A = 2$ м/с; $f = 0,2$; $h = 4$ м; $\beta = 45^\circ$. Визначити ℓ та рівняння траєкторії точки на ділянці BC .

Варіант 3. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 3,5$ м/с; $f = 0$; $\ell = 8$ м; $d = 10$ м; $\beta = 60^\circ$. Визначити v_B і τ .

Варіант 4. Дано: $v_A = 0$; $\tau = 2$ с; $\ell = 9,8$ м; $\beta = 60^\circ$; $f = 0$. Визначити a і T .

Варіант 5. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $\ell = 9,8$ м; $\tau = 3$ с; $\beta = 45^\circ$. Визначити f та v_C .

Варіанти 6-10 (Рис. 4.1, схема 2)

Лижник підходить до точки A ділянки трампліну AB , нахиленого під кутом α до горизонту і має довжину ℓ , зі швидкістю v_A . Коефіцієнт тертя ковзання лиж на ділянці AB дорівнює f . Лижник від A до B рухається τ с; в точці зі швидкістю v_B він залишає трамплін. Через T , с лижник приземляється зі швидкістю v_C у точці C гори, що становить кут β з горизонтом.

При вирішенні задачі прийняти лижника за матеріальну точку та не враховувати опір повітря.

Варіант 6. Дано: $\alpha = 20^\circ$; $f = 0,1$; $\tau = 0,2$ с; $h = 40$ м; $\beta = 30^\circ$. Визначити ℓ та v_C .

Варіант 7. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $f = 0,1$; $v_A = 16$ м/с; $\ell = 5$ м; $\beta = 45^\circ$.

Визначити v_B та T .

Варіант 8. Дано: $v_A = 21$ м/с; $f = 0$; $\tau = 0,3$ с; $v_B = 20$ м/с; $\beta = 60^\circ$.

Визначити a та d .

Варіант 9. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $\tau = 0,3$ с; $f = 0,1$; $h = 30\sqrt{2}$ м; $\beta = 45^\circ$.

Визначити v_B та v_A .

Варіант 10. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $f = 0$; $v_A = 12$ м/с; $d = 50$ м; $\beta = 60^\circ$.

Визначити τ та рівняння траєкторії лижника на ділянці BC .

Варіанти 11-15 (Рис. 4.1, схема 3)

Маючи в точці A швидкість v_A , мотоцикл піднімається τ с по ділянці AB довжиною ℓ , що становить з горизонтом кут α . При постійній на всій ділянці AB рухомій силі P мотоцикл у точці B набуває швидкість v_B і перелітає через рів шириною d , перебуваючи в повітрі T с та приземляючись у точці C зі швидкістю v_C . Маса мотоцикла з мотоциклістом дорівнює m .

При розв'язанні задачі вважати мотоцикл з мотоциклістом матеріальною точкою і не враховувати сили опору руху.

Варіант 11. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $P = 0$; $\ell = 40$ м; $v_A = 0$; $v_B = 4,5$ м/с; $d = 3$ м.

Визначити τ та h .

Варіант 12. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $P = 0$; $\ell = 40$ м; $v_B = 4,5$ м/с; $h = 1,5$ м. Визначити v_A та d .

Варіант 13. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $m = 400$ кг; $v_A = 0$; $\tau = 20$ с; $d = 3$ м; $h = 1,5$ м.

Визначити P та ℓ .

Варіант 14. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $m = 400$ кг; $P = 2,2$ кН; $v_A = 0$; $\ell = 40$ м; $d = 5$ м.

Визначити v_B та v_A .

Варіант 15. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $P = 2$ кН; $\ell = 50$ м; $h = 2$ м; $d = 4$ м.

Визначити T та m .

Варіанти 16—20 (Рис. 4.1, схема 4).

Камінь ковзає протягом τ с по ділянці AB відкосу, що становить кут α з горизонтом і має довжину ℓ . Його початкова швидкість v_A . Коефіцієнт тертя ковзання каменю по укусу дорівнює f . Маючи в точці B швидкість v_B , камінь через T с ударяється в точці C у вертикальну

захисну стіну. При розв'язанні задачі прийняти камінь за матеріальну точку; опір повітря не враховувати.

Варіант 16. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 1$ м/с; $\ell = 3$ м; $f = 0,2$; $d = 2,5$ м. Визначити h та T .

Варіант 17. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $\ell = 6$ м; $v_B = 2 v_A$; $\tau = 1$ с; $h = 6$ м. Визначити d та f .

Варіант 18. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $\ell = 2$ м; $v_A = 0$; $f = 0,1$; $d = 3$ м. Визначити h та T .

Варіант 19. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $\ell = 3$ м; $v_B = 3$ м/с; $f = 0$; $\tau = 1,5$ с; $d = 2$ м. Визначити v_A та h .

Варіант 20. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,3$; $d = 2$ м; $h = 4$ м. Визначити ℓ та τ .

Варіанти 21-25 (Рис. 4.1, схема 5).

Тіло рухається з точки A по ділянці AB (довжиною ℓ) нахиленої площини з кутом α до горизонту. Його початкова швидкість v_A . Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f . Через τ с тіло в точці B зі швидкістю v_B залишає похилу площину і падає на горизонтальну площину в точку C зі швидкістю v_C ; при цьому воно знаходиться у повітрі T с.

Варіант 21. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 1$ м/с; $h = 10$ м; $f = 0,1$; $\tau = 1,5$ с. Визначити v_B та d .

Варіант 22. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $\ell = 10$ м; $v_A = 0$; $\tau = 2$ с; Визначити f та рівняння траєкторії на ділянці BC .

Варіант 23. Дано: $\ell = 9,81$ м; $v_A = 0$; $f = 0$; $h = 3$ м $\tau = 2$ с. Визначити α та T .

Варіант 24. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $\ell = 10$ м; $f = 0,2$; $v_A = 0$; $d = 12$ м. Визначити τ та h .

Варіант 25. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,2$; $\ell = 6$ м; $h = 4,5$ м. Визначити v_C та τ .

Варіанти 26-30 (Рис. 4.1, схема 6).

Маючи в точці A швидкість v_A , тіло рухається горизонтальною ділянкою AB довжиною ℓ протягом τ с. Коефіцієнт тертя ковзання тіла площиною дорівнює f . Зі швидкістю v_B тіло в точці B залишає площину і потрапляє в точку C зі швидкістю v_C , перебуваючи в повітрі T с.

Варіант 26. Дано: $v_A = 7$ м/с; $h = 20$ м; $f = 0,2$; $\ell = 8$ м. Визначити v_C та d .

Варіант 27. Дано: $v_A = 4$ м/с; $\tau = 2$ с; $f = 0,1$; $d = 2$ м.

Визначити v_B та h .

Варіант 28. Дано: $\ell = 3$ м; $v_B = 3$ м/с; $f = 0,3$; $h = 5$ м.

Визначити v_A та T .

Варіант 29. Дано: $\ell = 2,5$ м; $h = 20$ м; $v_A = 3$ м/с; $v_B = 1$ м/с.

Визначити f та d .

Варіант 30. Дано $f = 0,25$; $\ell = 4$ м; $h = 5$ м $d = 3$ м.

Визначити v_A та τ .

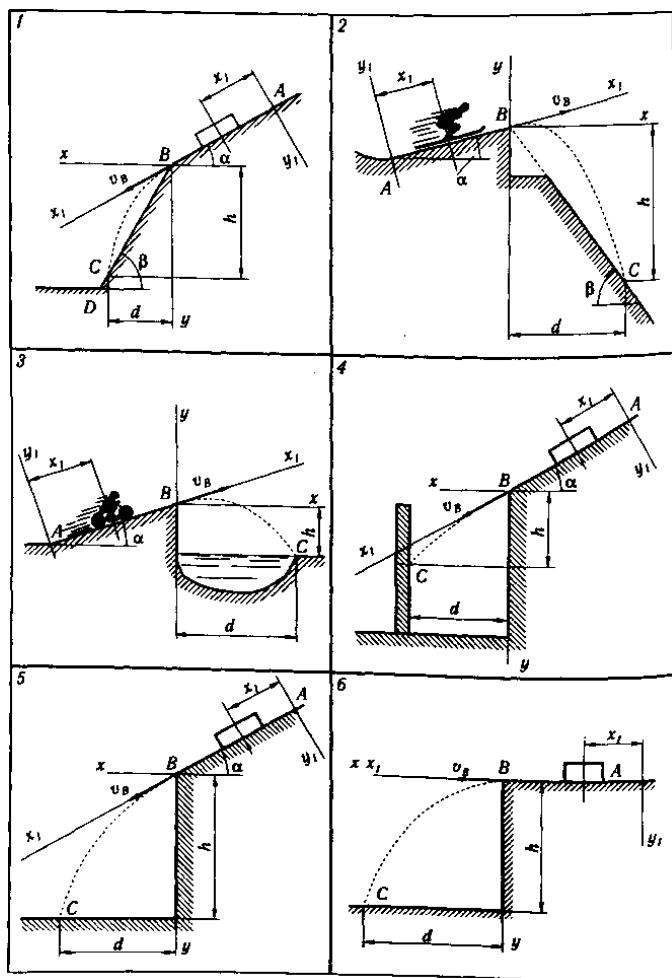


Рисунок 4.1 – Варіанти схем

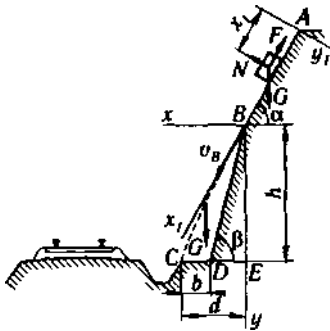
Приклад виконання завдання (Рис. 4.2)

У залізничних скальних виїмках для захисту кюветів від попадання в них із відкосів кам'яних осипів влаштовується «полиця» ДС. Враховуючи можливість руху каменю з найвищої точки A відкосу і вважаючи при цьому його початкову швидкість $v_0 = 0$, визначити найменшу ширину полиці b та швидкість v_C , з якою камінь падає на неї. По ділянці AB відкосу, що складає кут α з горизонтом і має довжину ℓ камінь рухається τ с. При розв'язанні задачі вважати коефіцієнт тертя ковзання f каменю на ділянці AB постійним, а опором повітря знехтувати.

Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 60^\circ$; $\ell = 4$ м; $\tau = 1$ с; $f \neq 0$; $h = 5$ м; $\beta = 75^\circ$.

Визначити b та v_C .

Рішення. Розглянемо рух каменю на ділянці AB . Приймаючи камінь за матеріальну точку, покажемо (Рис. 4.2) сили, що діють на нього: вага G , нормальну реакцію N і силу тертя ковзання F . Складемо диференціальне рівняння руху каменю на ділянці AB :



$$m\ddot{x}_1 = \sum X_{i1}; \quad m\ddot{x}_1 = G \cdot \sin \alpha - F.$$

$$\text{Сила тертя } F = f \cdot N,$$

$$\text{де } N = G \cdot \cos \alpha.$$

Таким чином,

$$m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - fG \cos \alpha.$$

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Рисунок 4.2 – Схема до прикладу

Інтегруючи диференціальне рівняння двічі, маємо

$$\begin{aligned} x_1 &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha) t + C_1; \\ x_1 &= \left[\frac{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{2} \right] t^2 + C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

Для визначення постійних інтегрування скористаємося початковими умовами задачі: при $t = 0$ $x_{10} = 0$ і $\dot{x}_{10} = 0$.

Складемо рівняння, які отримали при інтегруванні, для $t = 0$:

$$x_{10} = C_1; \quad \dot{x}_{10} = C_2$$

Знайдемо постійні: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Тоді

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) t;$$

$$x_1 = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] t^2.$$

Для моменту τ , коли камінь залишає ділянку,

$$\dot{x}_1 = v_B, x_1 = \ell,$$

$$v_B = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau;$$

$$\ell = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] \tau^2,$$

звідки

$$v_B = 2\ell/\tau,$$

$$v_B = 2 \cdot 4/1 = 8 \text{ м/с}.$$

Розглянемо рух каміння від точки B до точки C .

Показав силу тяжіння G , діючу на каміння, складемо диференційне рівняння його руху:

$$m\ddot{x} = 0; m\ddot{y} = G.$$

Початкові умови: при $t = 0$

$$x_0 = 0; y_0 = 0;$$

$$x_0 = v_B \cos \alpha; y_0 = v_B \sin \alpha.$$

Інтегруємо диференційне рівняння двічі:

$$\dot{x} = C_3; \quad \dot{y} = gt + C_4;$$

$$x = C_3 t + C_5; \quad y = \frac{gt^2}{2} + C_4 t + C_6$$

Напишемо знайдені рівняння для $t = 0$:

$$\dot{x}_0 = C_3; \dot{y}_0 = C_4;$$

$$x_0 = C_5; y_0 = C_6.$$

Звідки знайдемо:

$$C_3 = v_B \cos \alpha; C_4 = v_B \sin \alpha;$$

$$C_5 = 0; C_6 = 0.$$

Получимо наступні рівняння проєкцій швидкості каменю:

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_B \sin \alpha$$

та рівняння його руху:

$$x = v_B \cos \alpha \cdot t, \quad y = \frac{gt^2}{2} + v_B \sin \alpha \cdot t.$$

Рівняння траєкторії каменю знайдемо, виключивши параметр t із рівнянь руху. Визначивши t з першого рівняння та підставивши його значення у друге, отримуємо рівняння параболи:

$$y = gx^2/(2v_B^2 \cos^2 \alpha) + xtga.$$

В момент падіння $y = h, x = d$.

Визначаємо d з рівняння траєкторії

$$d_1 = 2,11 \text{ м}, d_2 = -7,75 \text{ м}.$$

Оскільки траєкторією руху каменю є гілка параболи з позитивними абсцисами її точок, то $d = 2,11 \text{ м}$.

Мінімальна ширина полки

$$b = d - ED = d - h/tg75^\circ, \text{ або } b = 0,77 \text{ м}.$$

Використовуючи рівняння руху каміння $x = v_B \cos \alpha \cdot t$, знайдемо час T руху каменю від точки B до точки C .

$$T = 0,53 \text{ с}.$$

Швидкість каміння при падінні знайдемо через проекції швидкості на осі координат:

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_B \sin \alpha$$

за формулою:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Для моменту падіння $t = T = 0,53 \text{ с}$.

$$v_C = \sqrt{(v_B \cos \alpha)^2 + (gT + v_B \sin \alpha)^2}, \text{ або } v_C = 12,8 \text{ м/с}.$$

4.2 Завдання Д.6. Застосування основних теорем динаміки до дослідження руху матеріальної точки

Кулька, яка приймається за матеріальну точку, рухається з положення A всередині трубки, вісь якої розташована у вертикальній площині (Рис. 4.3-4.5). Знайти швидкість кульки в положеннях B і C та тиск кульки на стінку трубки в положенні C . Тертям на криволінійних ділянках траєкторії знехтувати. У варіантах 3, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 19, 25, 28, 29 кулька, пройшовши шлях h_0 , відокремлюється від пружини.

Необхідні для вирішення дані наведено у табл. 4.1.

У завданні прийнято такі позначення: m - маса кульки; v_A - початкова швидкість кульки; t - час руху кульки на ділянці AB (у варіантах 1, 2, 5, 8, 14, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 30) або на ділянці BD (у варіантах 3, 4, 6, 7, 9-13, 15-17, 19, 22, 25, 26, 28, 29); f - коефіцієнт тертя ковзання кульки по стінці трубки; h_0 - початкова деформація пружини; h - найбільше стискання пружини; c - коефіцієнт жорсткості пружини; H - максимальна висота підйому кульки; S - шлях, пройдений кулькою до зупинки.

Приклад виконання завдання (Рис. 4.6). Дано: $m = 0,5$ кг; $v_A = 0,8$ м/с; $t = 0,1$ с (час на ділянці BD), $R = 0,2$ м; $f = 0,1$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $h_0 = 0$; $c = 10$ Н/см = 1000 Н/м.

Визначити: v_B , v_C , N_C , v_D , h .

Рішення.

Для визначення v_B і v_C застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки. Рух кульки на ділянках AC та AB траєкторії відбувається під дією сили тяжіння G (сили тертя на криволінійних ділянках не враховуємо):

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \sum A_i = GH_1 = mgAB\sin\alpha = mg6R\sin\alpha;$$

$$v_B^2 - v_A^2 = 2g6R\sin\alpha;$$

$$v_B = 4,59 \text{ м/с};$$

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \sum A_i = GH_2 = mg(4R\sin\alpha + 4R\cos\alpha);$$

$$v_C^2 - v_A^2 = 4gR(2\sin\alpha + \cos\alpha);$$

$$v_C = \sqrt{v_A^2 + 4gR(2\sin\alpha + \cos\alpha)},$$

$$\text{або } v_C = 4,26 \text{ м/с}.$$

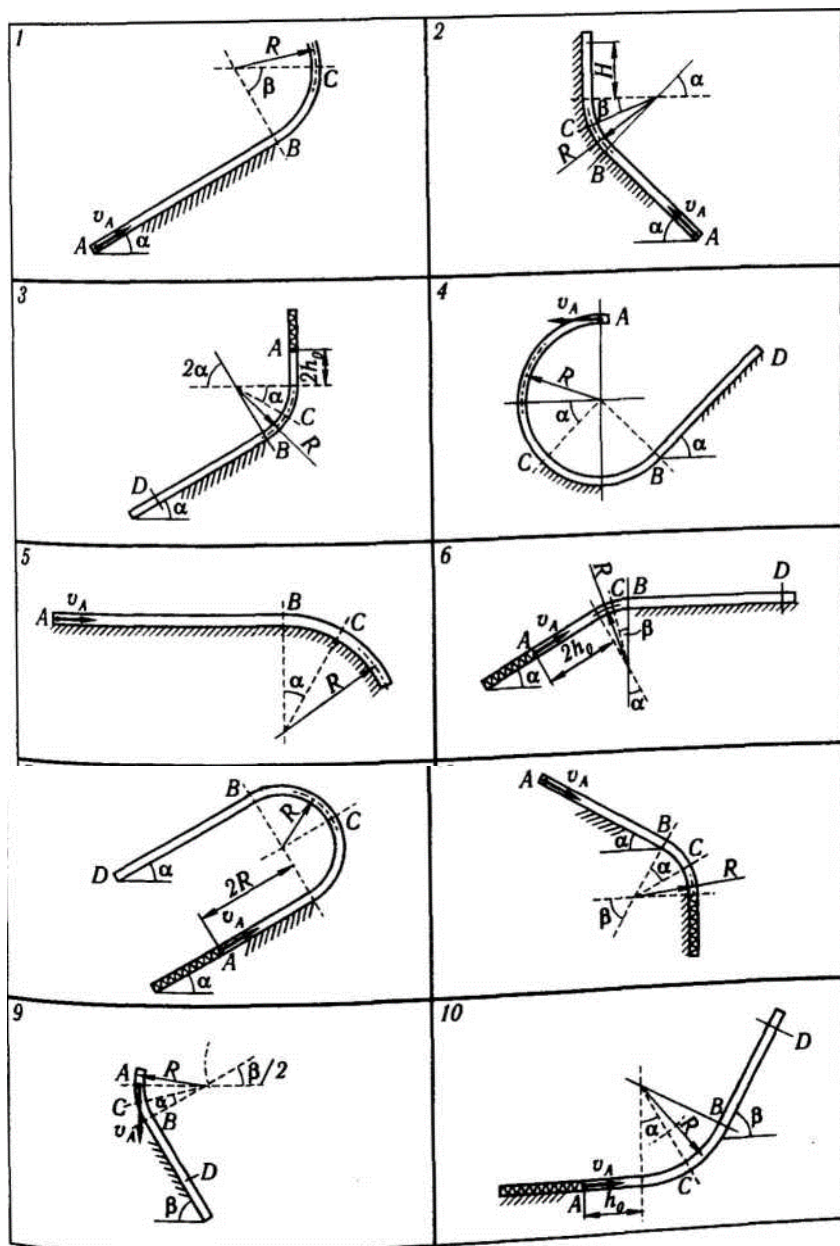


Рисунок 4.3 – Варіанти схем

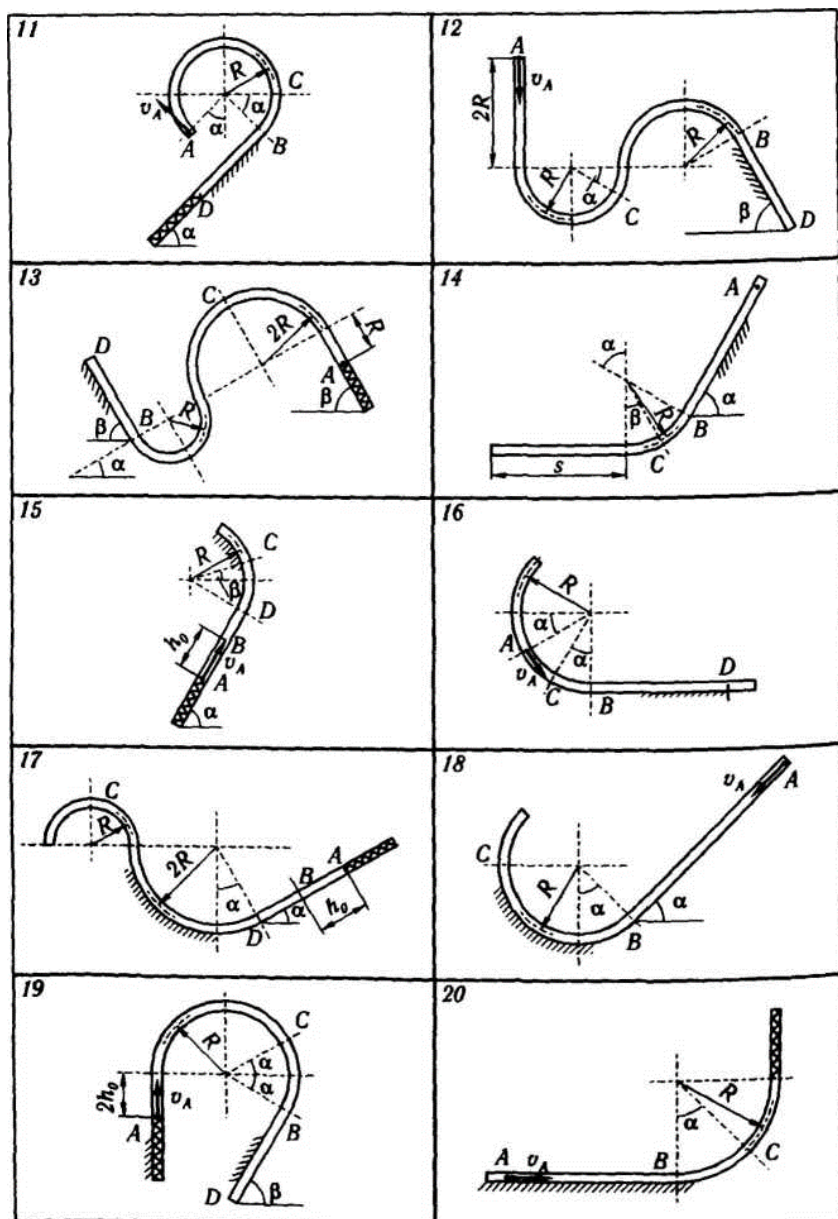


Рисунок 4.4 – Варіанти схем

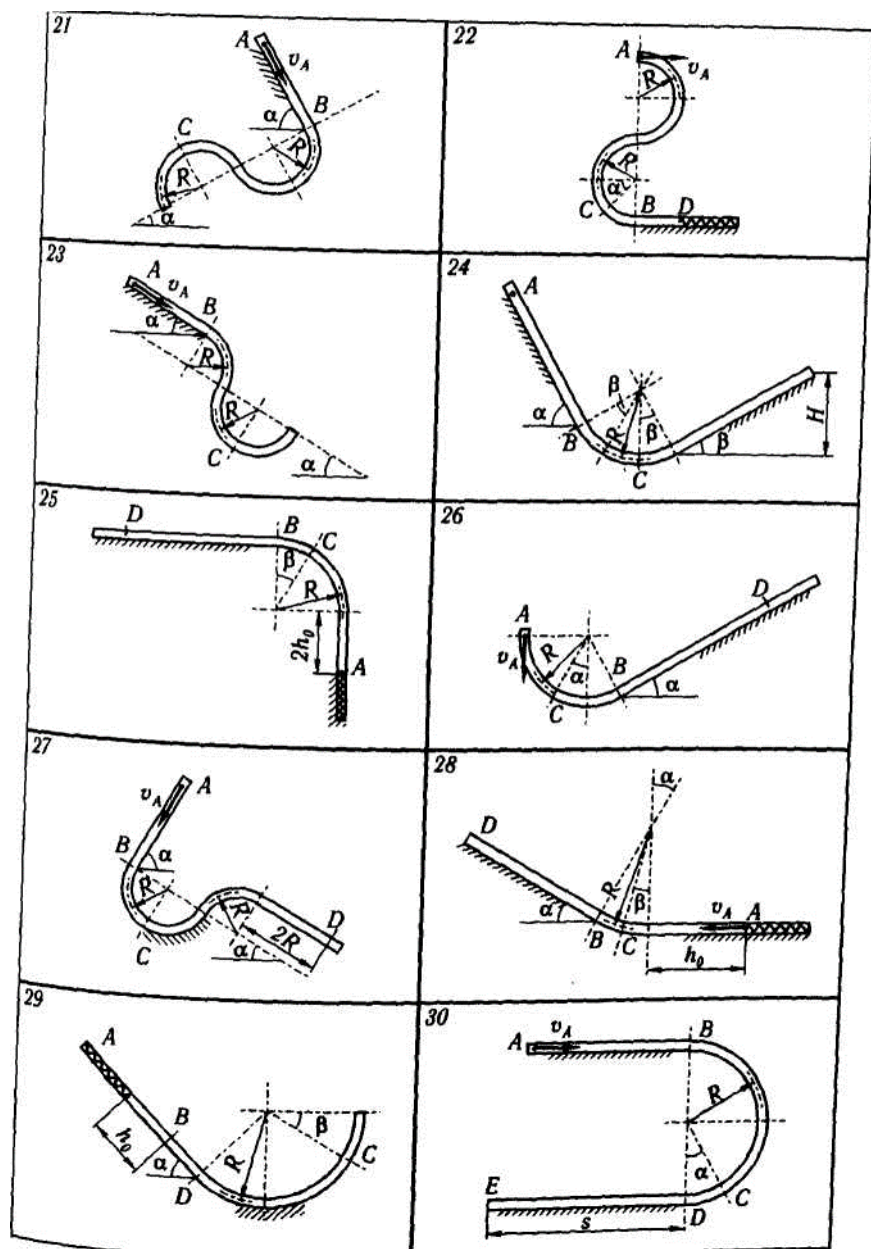


Рисунок 4.5 – Варіанти схем

Таблиця 4.1 – Дані за варіантами до завдання

Номер варіанта	m, кг	v_A , м/с	τ , с	R , м	f	α , град	β , град	h_o , см	c , Н/см	треба визначити
1	0,5	20	2,0	2,0	0,20	30	45	-	-	-
2	0,6	16	0,2	4,0	0,10	45	20	-	-	H
3	0,4	0	2,0	0,2	0,15	30	-	10	1	v_D
4	0,2	5	0,5	1,0	0,10	45	-	-	-	v_D
5	0,1	8	1,5	2,0	0,20	30	-	-	-	-
6	0,3	2	2,0	4,0	0,10	30	20	30	2	v_D
7	0,4	5	1,0	1,0	0,10	30	-	50	5	v_D
8	0,2	1	0,5	1,5	0,15	30	60	0	4	h
9	0,5	2	1,5	4,0	0,25	20	60	-	-	v_D
10	0,4	4	0,1	0,5	0,10	30	60	0,2	0,2	v_D
11	0,2	6	1,0	1,0	0,30	45	-	-	3	v_D
12	0,4	5	0,4	2,0	0,20	30	60	-	-	v_D
13	0,3	0	0,1	1,0	0,10	30	60	50	10	v_D
14	0,6	0	2,0	3,0	0,20	60	30	-	-	S
15	0,1	1	0,1	1,0	0,15	60	20	50	0,2	v_D
16	0,4	2	0,2	2,0	0,40	30	-	-	-	v_D
17	0,2	0	0,1	1,0	0,20	30	-	40	1,0	v_D
18	0,3	3	0,4	1,5	0,10	45	-	-	-	-
19	0,1	4	0,1	0,4	0,30	30	60	10	0,5	v_D
20	0,2	10	1,0	0,5	0,10	60	-	0	1,2	h
21	0,7	3	0,3	0,3	0,20	45	-	-	-	-
22	0,4	1	0,2	0,2	0,40	45	-	0	1,1	v_D
23	0,6	2	0,4	0,2	0,20	45	-	-	-	-
24	0,5	0	0,5	0,6	0,30	60	30	-	-	H
25	0,1	0	0,2	0,5	0,25	-	30	30	0,4	v_D
26	0,2	2	0,1	0,2	0,20	30	-	-	-	v_D
27	0,8	3	0,2	0,4	0,15	45	-	-	-	v_D
28	0,3	4	0,1	0,6	0,35	30	15	60	0,1	v_D
29	0,5	0	0,2	0,5	0,20	45	30	50	0,8	v_D
30	0,8	5	0,3	0,6	0,15	30	-	-	-	t_{DE}

Визначаємо тиск кульки на стінку трубки у положенні C .

Відповідно до принципу Д'Аламбера для матеріальної точки геометрична сума сил, прикладених до цієї точки та сили інерції цієї точки дорівнює нулю:

$$\vec{G} + \vec{N}'_c + \vec{\Phi} = 0.$$

Силу інерції матеріальної точки можна розкласти на нормальну та дотичну складові:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_\tau$$

Сума проекцій сил $\vec{G}$, $\vec{N}'_c$ та $\vec{\Phi}$ на вісь x дорівнює нулю:

$$N'_c - G \cos 60^\circ - \Phi_n = 0.$$

Звідки

$$N'_c - G \cos 60^\circ + \Phi_n = mg \cos 60^\circ + \frac{mv_c^2}{2R}$$

або $N'_c = 25,2 \text{ Н.}$

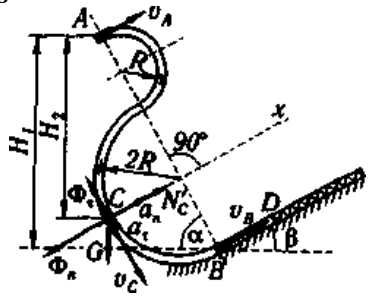


Рисунок 4.6 – Схема до прикладу

Реакцію N'_c можливо також визначити з допомогою натурального рівняння руху:

$$\frac{mv_c^2}{2R} = \sum P_i \cos(\vec{P}_i, \vec{n}) = N'_c - G \cos 60^\circ.$$

Звідси

$$N'_c = G \cos 60^\circ + \frac{mv_c^2}{R}.$$

Шуканий тиск N_c з кульки на стінку трубки по числовому значенню дорівнює знайденої реакції N і направлено в протилежний бік.

Швидкість кульки в положенні D знайдемо, застосувавши на ділянці BD теорему про зміну кількості руху матеріальної точки (Рис. 4.7):

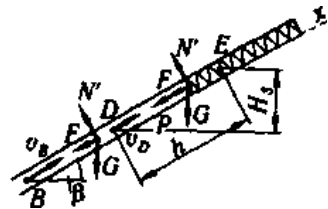


Рисунок 4.7 – Ділянка BD

$$mv_{Dx} - mv_{Bx} = \sum S_{ix}.$$

До точки прикладені сила тяжіння $\vec{G}$, реакція стінки трубки $\vec{N}'$ та сила тертя $\vec{F}$:

$$F = f N' = f G \cos \beta.$$

Так як

$$v_{Dx} = v_D, \quad v_{Bx} = v_B,$$

$$\sum S_{ix} = -G \sin \beta \cdot t - Ft = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t,$$

то

$$mv_D - mv_B = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t,$$

$$v_D = 4,01 \text{ м/с}.$$

Для визначення максимального стиснення h пружини скористаємося на ділянці DE теоремою про зміну кінетичної енергії матеріальної точки:

$$mv_E^2/2 - mv_D^2/2 = \sum A_i = -ch^2/2 - GH_3 - Fh.$$

Враховуючи, що $v_E = 0$ та $H_3 = h \sin \beta$ отримаємо:

$$\frac{ch^2}{2} + G(\sin \beta + f \cos \beta)h - \frac{mv_D^2}{2} = 0,$$

або

$$h^2 + \frac{2Gh(\sin \beta + f \cos \beta)}{c} - \frac{mv_D^2}{c} = 0.$$

Вирішуючи це квадратне рівняння відносно h , получимо

$$h = (-0,003 \pm 0,090) \text{ м}.$$

Приймаємо за позитивний корінь квадратного рівняння:

$$h = -0,003 + 0,090 = 0,087 \text{ м}.$$

5. ДИНАМІКА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

5.1 Завдання Д.10. Застосування теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи

Механічна система під дією сил тяжіння починає рухатись із стану спокою. Враховуючи тертя ковзання тіла 1 (варіанти 1-3, 5, 6, 8-12, 17-23, 28-30) та опір коченню тіла 3, яке котиться без ковзання (варіанти 2, 4, 6-9, 11, 13-15, 20, 21, 24, 27, 29) (Рис. 5.1-5.3), нехтуючи іншими силами опору та масами ниток, які вважаються нерозтяжними, визначити швидкість тіла 1 у той момент, коли пройдений ними шлях стане рівним S . У завданні прийнято такі позначення:

m_1, m_2, m_3, m_4 - маси тіл 1, 2, 3, 4;

R_2, r_2, R_3, r_3 - радіуси великих і малих кіл (коліс);

$i_{2x}, i_{3\xi}$ - радіуси інерції тіл 2 і 3 відносно горизонтальних осей,

які проходять через їхні центри ваги;

α, β - кути нахилу площин до горизонту;

f - коефіцієнт тертя ковзання;

δ - коефіцієнт тертя кочення.

Необхідні для розв'язання дані наведено в таблиці 5.1. Блоки та котки, для яких радіуси інерції в таблиці не вказано, вважати суцільними однорідними циліндрами.

Похилі відрізки ниток паралельні відповідним похилим площинам.

Приклад виконання завдання

Механічна система під дією сил тяжіння починає рух зі стану спокою. Початкове положення системи вказано на рисунку 5.4.

Дано: m_1 - маса вантажу 1, $m_2 = 2m_1$; $m_3 = m_1$; $m_4 =$

$0,5m_1$; $m_5 = 20m_1$. $R_2 = R_3 = 12$ см; $r_2 = 0,5 R_2$;

$r_3 = 0,75 R_3$; $R_5 = 20$ см;

$AB = \ell = 4 R_3$; $i_2 = 8$ см; $i_3 = 10$ см; $\alpha = 30$; $f = 0,1$; $\delta = 0,2$ см;
 $s = 0,06$ м.

Опір коченню тіла 2 не враховувати. Шатун 4 вважати тонким однорідним стержнем; каток 5 – однорідний суцільний циліндр. Масами ланки та повзуна знехтувати. На рисунку 5.4 вказано механічну систему в початковому положенні

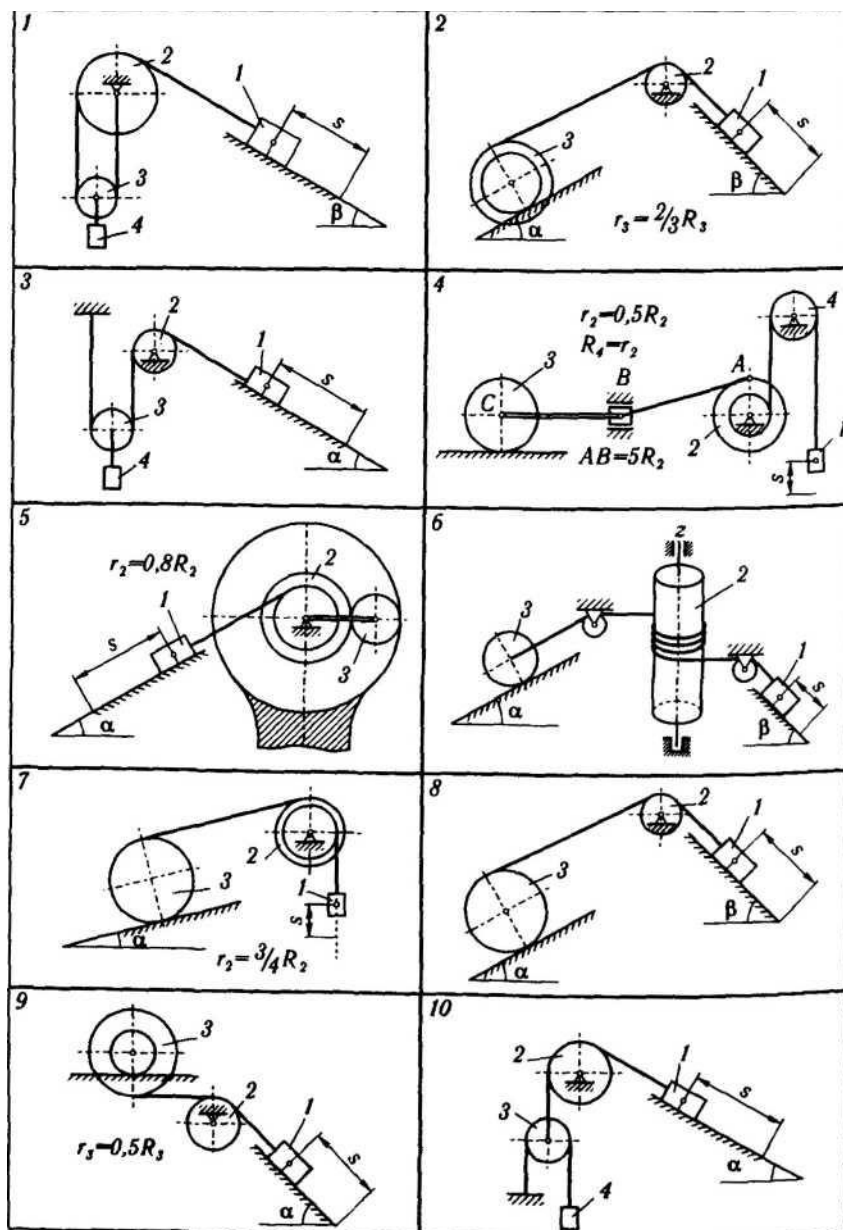


Рисунок 5.1 – Варіанти схем

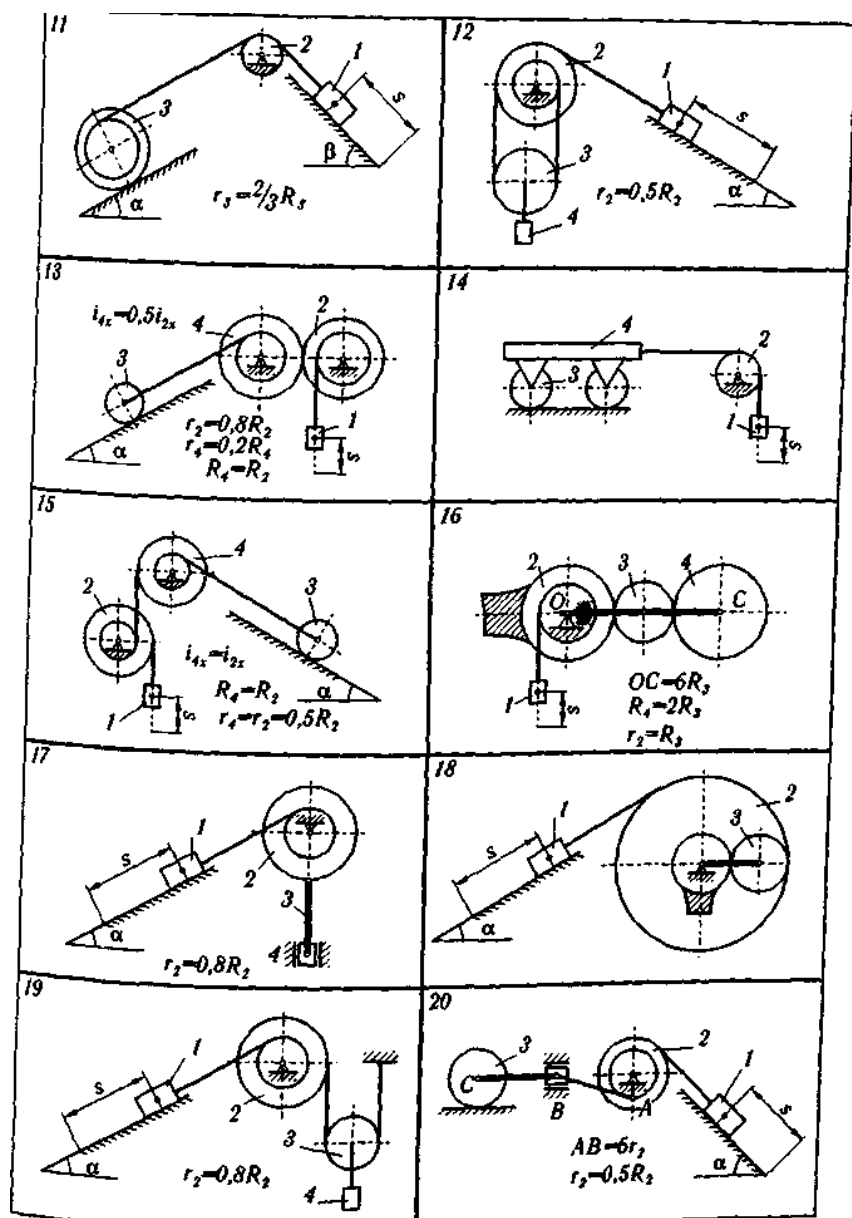


Рисунок 5.2 – Варіанти схем

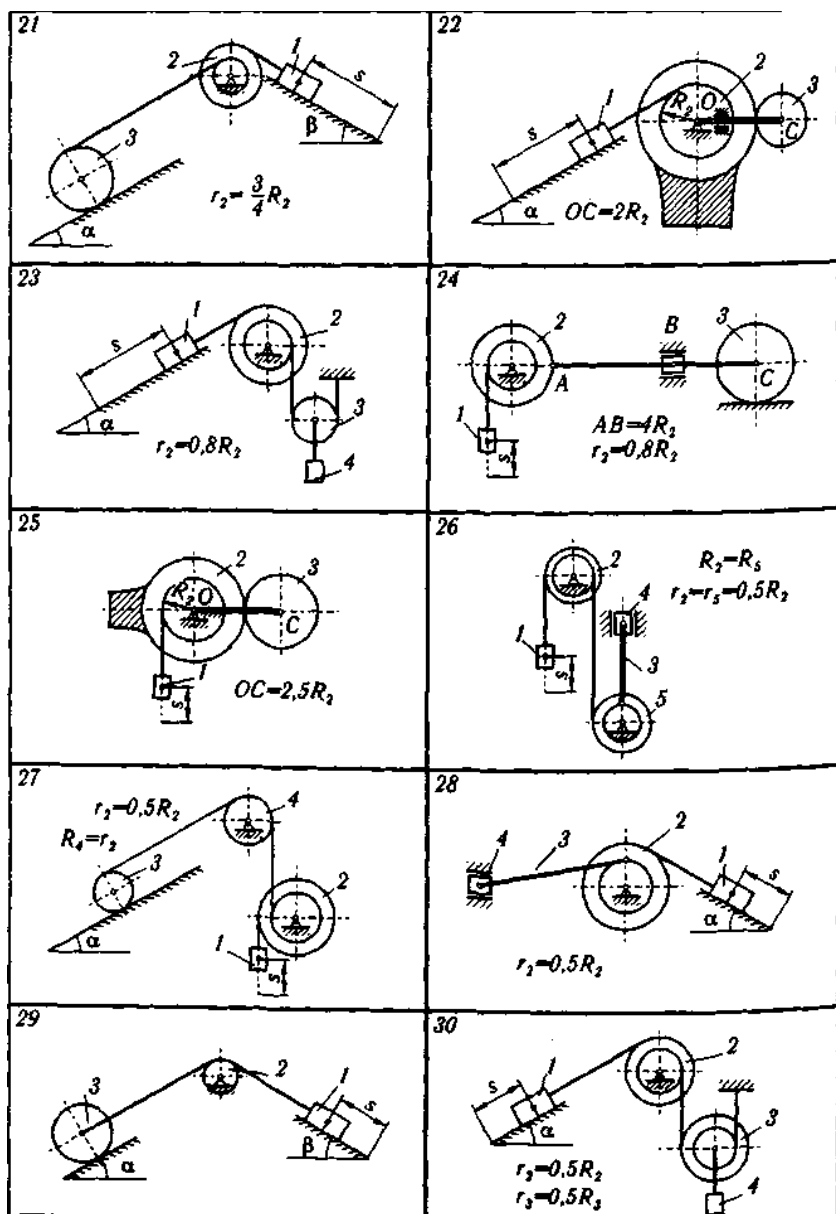


Рисунок 5.3 – Варіанти схем

Таблиця 5.1 – Дані за варіантами до завдання

Номер варіанта	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	$i_{3\xi}$	α	β	f	δ, CM	$S, \text{м}$	Примітки
	кг				см		см		град					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	m	4m	1/5m	4/3m	-	-	-	-	-	60	0,10	-	2	Масами ланок AB, BC и повзуна B знехтувати Масою води́ла знехтувати

Продовження таблиці 5.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
18	<i>m</i>	3 <i>m</i>	<i>m</i>	-	35	15	32	-	60	-	0,15	-	0,2π	Масою води́ла знехтувати
19	<i>m</i>	1/3 <i>m</i>	1/10 <i>m</i>	тп	24	-	20	-	60	-	0,15	-	1,5	Маса́ми ла́нок <i>AB</i> , <i>BC</i> и повзу́на <i>B</i> знехтувати
20	<i>m</i>	2 <i>m</i>	20 <i>m</i>	-	20	15	16	-	30	-	0,10	0,20	0,2π	
21	<i>m</i>	<i>m</i>	2 <i>m</i>	-	20	20	16	-	30	45	0,20	0,32	1,2	
22	<i>m</i>	1/2 <i>т</i>	1/4 <i>m</i>	-	20	10	-	-	60	-	0,17	-	0,1л-	Масою води́ла знехтувати
23	<i>m</i>	<i>m</i>	1/10 <i>m</i>	4/5 <i>m</i>	20	-	18	-	30	-	0,10	-	1	Маса́ми ла́нок <i>AB</i> , <i>BC</i> и повзу́на <i>B</i> знехтувати
24	<i>m</i>	3тп	20 <i>m</i>	-	20	30	18	-	-	-	-	0,60	0,08π	
25	<i>m</i>	1/3 <i>m</i>	1/4 <i>m</i>	-	16	20	-	-	-	-	-	-	0,04π	
26	<i>m</i>	1/2 <i>т</i>	<i>m</i>	1/3 <i>m</i>	30		20						0,6π	Масою води́ла знехтувати Маси та моменти інерції бло́ків 2 і 5 однакові Шату́н 3 розгляда́ти як то́нкий однорі́дний сте́ржень
27	<i>m</i>	тп	6 <i>m</i>	1/2 <i>m</i>	20	20	16	-	30	-	-	0,20	2	Шату́н 3 розгляда́ти як то́нкий однорі́дний сте́ржень
28	<i>m</i>	2 <i>m</i>	3 <i>m</i>	-	20	-	14	-	60	-	0,10	-	0,1π	
29	<i>m</i>	1/4 <i>m</i>	1/8 <i>m</i>	-	-	35	-	-	15	30	0,20	0,20	2,4	
30	<i>m</i>	1/2 <i>m</i>	3/10 <i>m</i>	3/2 <i>m</i>	26	20	20	18	30		0,12		2	

Визначити: - v_1 швидкість вантажу 1 в кінцевому положенні.

Розв'язання

1. Зобразити на рисунку всі зовнішні та внутрішні сили системи (у випадку незмінної механічної системи – лише зовнішні сили).

2. Визначити суму робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил (у випадку незмінної механічної системи – суму робіт лише зовнішніх сил).

3. Визначити кінетичну енергію системи матеріальних точок у початковому та кінцевому положенні (якщо система починає рух зі стану спокою – початкова кінетична енергія дорівнює нулю).

4. Записати теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи та визначити потрібну величину.

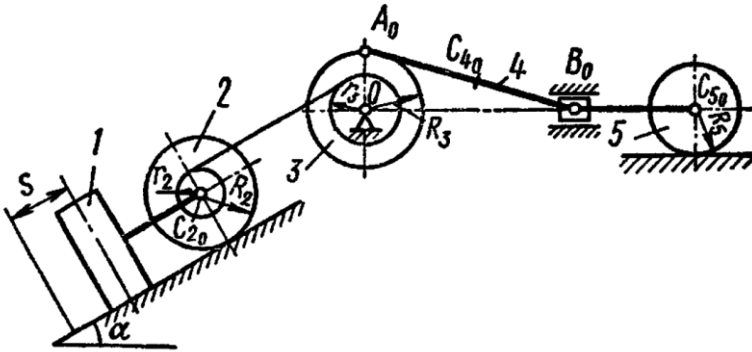


Рисунок 5.4 - Механічна система в початковому положенні

Використаємо теорему про зміну кінетичної енергії системи:

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^J, \quad (5.1)$$

де $T - T_0$ - кінетична енергія системи в початковому та кінцевому положеннях;

$\sum A_i^E$ - сума робіт зовнішніх сил, прикладених до системи на переміщенні системи з початкового положення в кінцеве;

$\sum A_i^J$ - сума робіт внутрішніх сил системи на тому самому переміщенні.

Для систем, що розглядаються, які складаються з абсолютно твердих тіл, що з'єднані між собою нерозтяжними нитками і стрижнями, $\sum A_i^J = 0$.

Оскільки в початковому положенні система знаходиться у стані спокою, відповідно $T_0 = 0$.

Тоді рівняння має вигляд

$$T = \sum A_i^E. \quad (5.2)$$

Для визначення кінетичної енергії та суми робіт зовнішніх сил необхідно зобразити систему в кінцевому положенні (Рис. 5.5).

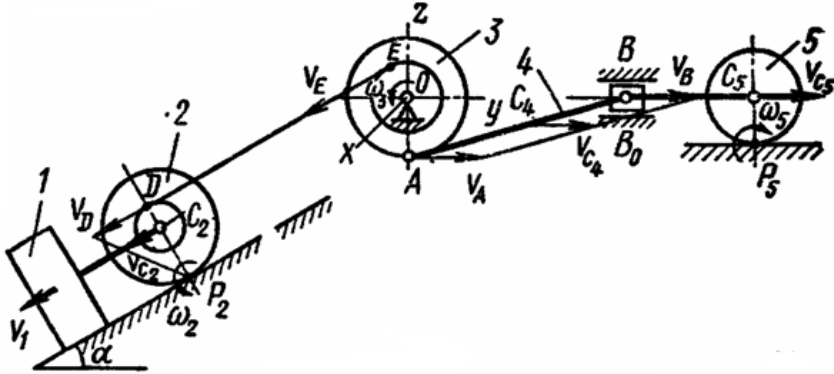


Рисунок 5.5 - Механічна система в кінцевому положенні

Запишемо кінематичні відношення між швидкостями та переміщеннями точок системи, тобто рівняння зв'язків, при цьому швидкості та переміщення виразимо відповідно через швидкість і переміщення вантажу 1.

Швидкість центра мас C катку 2 дорівнює швидкості вантажу 1:

$$v_{C_2} = v_1 \quad (5.3)$$

Кутова швидкість катку 2, миттєвий центр швидкостей якого знаходиться в точці (точці дотику катка та нерухомої поверхні) P_2 ,

$$\omega_2 = \frac{v_{C_2}}{C_2 P_2}.$$

Враховуючи (5.3) отримаємо:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}. \quad (5.4)$$

Швидкість точки D катку 2

$$\begin{aligned} v_D &= \omega_2 \cdot DP_2, \\ v_D &= v_1 / R_2 (R_2 + r_2) \end{aligned}$$

Швидкість точки E блока 3 дорівнює швидкості точки D катку 2:

$$v_E = v_D. \quad (5.5)$$

Але $v_E = \omega_3 r_3$.

Тому (5.5)

$$\omega_3 r_3 = \frac{v_1}{R_2} (R_2 + r_2).$$

Так як $R_2 = 2r_2$, то

$$\omega_3 r_3 = \frac{3}{2v_1},$$

Звідси

$$\omega_3 = \frac{3v_1}{2r_3}. \quad (5.6)$$

Замінивши

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} v_1 = \frac{ds}{dt},$$

отримаємо

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{3}{2r_3} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Після інтегрування (при нульових початкових умовах)

$$\varphi_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{r_3}. \quad (5.7)$$

Коли вантаж 1 пройде шлях $S = 0,06\pi$ м, блок 3 повернеться на кут φ_3 :

$$\varphi_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{r_3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,06\pi}{0,09} = \pi.$$

При цьому повороті блока 3 на 180 градусів його точка A_0 перейде в кінцеве положення A , а шатун 4 з початкового положення A_0B_0 перейде в кінцеве положення AB .

Каток 5 переміститься вліво при повороті блока 3 на кут $\pi/2$ та вправо при повороті блока ще на $\pi/2$; відповідно кінцеве положення катка 5 співпадає з його початковим положенням.

Таким чином, визначено кінцеве положення усієї системи (рисунок 2).

Визначимо кінетичну енергію системи в кінцевому положення як суму кінетичних енергій тіл 1, 2, 3, 4, 5:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 \quad (5.8)$$

Кінетична енергія вантажу 1, що рухається поступально,

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad (5.9)$$

Кінетична енергія котка 2, який здійснює плоский рух,

$$T_2 = \frac{m_2 v_{C2}^2}{2} + \frac{J_{2\xi} \omega_2^2}{2}, \quad (5.10)$$

де $J_{2\varepsilon}$ - момент інерції котка 2 відносно його повздовжньої осі $C_{2\varepsilon}$

$$J_{2\varepsilon} = m_2 i_{2\xi}^2. \quad (5.11)$$

Тоді отримаємо

$$T_2 = \frac{m_2 v_1^2}{2} + \frac{m_2 i_{2\xi}^2}{2R_2^2} \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2} \right) v_1^2. \quad (5.12)$$

Кінетична енергія тіла 3, що обертається навколо осі Ox ,

$$T_3 = \frac{J_{3\xi} \omega_3^2}{2}, \quad (5.13)$$

Де

$$J_{3x} = m_3 i_{3x}^2. \quad (5.14)$$

Підставив (5.6), (5.14) в формулу (5.13) отримуємо:

$$T_3 = \frac{m_3 i_{3x}^2}{2} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{v_1}{r_3} \right)^2 = \frac{9}{8} m_3 \left(\frac{i_{3x}^2}{r_3^2} \right) v_1^2 \quad (5.15)$$

Кінетична енергія шатуна 4, який здійснює плоский рух,

$$T_3 = \frac{m_4 v_{C4}^2}{2} + \frac{J_{4\xi} \omega_4^2}{2},$$

де v_{C4} – швидкість центра мас C_4 шатуна 4;

ω_4 - кутова швидкість шатуна 4;

$J_{4\xi}$ - момент інерції шатуна 4 відносно центральної осі .

Для визначення v_{C4} та ω_4 знайдемо положення миттєвого центра швидкостей шатуна 4. Оскільки швидкості точок A і B в цей момент часу є паралельними, то миттєвий центр швидкостей шатуна 4 знаходиться в нескінченності; відповідно кутова швидкість шатуна в даний момент часу буде 0, а швидкості усіх його точок паралельні та дорівнюють одна одній. Таким чином, кінетична енергія шатуна 4

$$T_4 = \frac{m_4 v_{C4}^2}{2}, \quad (5.16)$$

де

$$v_{C4} = v_A. \quad (5.17)$$

Обертальна швидкість точки A тіла 3

$$v_A = \omega_3 R_3 \quad (5.18)$$

або з урахуванням попередніх розрахунків

$$v_A = \frac{\frac{3}{2} R_3 v_1}{r_3}.$$

Оскільки $r_3 = 3/4 R_3$, отримаємо $v_A = 2v_1$.

По (5.17)

$$v_{C4} = v_A, \quad v_{C4} = 2v_1. \quad (5.19)$$

Після підстановки вираз для визначення кінетичної енергії шатуна 4 має вигляд

$$T_4 = 1/2 m_4 (2v_1)^2 = 2m_4 v_1^2. \quad (5.20)$$

Кінетична енергія катка 5, що здійснює плоский рух,

$$T_5 = \frac{m_5 v_{C5}^2}{2} + \frac{J_{5\xi} \omega_5^2}{2},$$

де v_{C5} - швидкість центра мас катка 5;

$J_{5\xi}$ - момент інерції катка 5;

$J_{5\xi} = m_5 R_5^2 / 2$ - кутова швидкість катка 5;

Оскільки коток котиться без ковзання, то миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці P_5 . Тому

$$\omega_5 = v_{C3} / R_5.$$

Відповідно

$$T_5 = \frac{m_5 v_{C5}^2}{2} + \frac{m_5 R_5^2 v_{C5}^2}{2 \cdot 2 R_5^2} = \frac{3}{4} \cdot m_5 v_{C5}^2.$$

Оскільки ланка BC_5 здійснює поступальний рух, то $v_{C5} = v_B$ але $v_B = v_{C4} = 2v_1$. Тобто $v_{C3} = 2v_1$.

Відповідно, кінетична енергія катка 5

$$T_5 = 3/4 m_5 (2v_1)^2 = 3m_5 v_1^2. \quad (5.21)$$

Кінетична енергія всієї механічної системи визначається за формулою (5.8) з урахуванням (5.9), (5.12), (5.15), (5.20), (5.21):

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right) v_1^2}{2} + \frac{9}{r_3^2} \frac{8m_3 v_1^2 i_{3x}^2}{2} + 2m_4 v_1^2 + 3m_5 v_1^2.$$

Після підстановки заданих значень мас отримаємо

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} \left[1 + 2 \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right) + \frac{9}{4} i_{3x}^2 / r_3^2 + 2 + 120\right] / 2,$$

або

$$T = 129 m_1 v_1^2 / 2. \quad (5.22)$$

Знайдемо суму робіт всіх зовнішніх сил, прикладених до системи, на заданому її переміщенні. Покажемо зовнішні сили, прикладені до системи (Рис. 5.6).

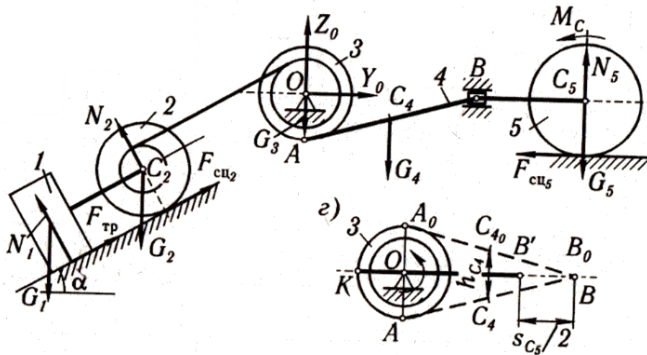


Рисунок 5.6 - Зовнішні сили, прикладені до системи

Робота сили тяжіння G_1

$$A_{G1} = G_1 h_1 = m_1 g s \cdot \sin \alpha. \quad (5.23)$$

Робота сили тертя ковзання $F_{\text{тр}}$

$$F_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} S,$$

так як $F_{\text{тр}} = f N_1 = f G_1 \cos \alpha$,

$$\text{то} \quad A_{F_{\text{тр}}} = -f m_1 g s \cos \alpha. \quad (5.24)$$

Робота сили тяжіння G_2

$$A_{G2} = G_2 h_{C2} = m_2 g s \sin \alpha \quad (5.25)$$

Робота сили зчеплення $F_{\text{сц}2}$, $F_{\text{сц}5}$ катків 2 та 5 дорівнює нулю, оскільки ці сили прикладені в миттєвих центрах швидкостей цих катків.

Робота сили тяжіння G_4

$$A_{G4} = G_4 h_{C4}, \text{ де}$$

h_{C4} - вертикальне переміщення центра тяжіння шатуна 4 з початкового положення в його кінцеве положення:

$$h_{C4} = R_3$$

$$A_{G4} = m_4 g R_3 \quad (5.26)$$

Робота пари сил опору коченню котка 5

$$A_{M_C} = -M_C \varphi_5 \quad (5.27)$$

де $M_C = \delta N_5$ момент пари сил опору коченню котка 5;

φ - кут повороту котка 5.

Оскільки коток 5 котиться без ковзання, то кут його повороту

$$\varphi_5 = \frac{S_{C5}}{R_5}, \quad (5.28)$$

де S_{C5} - переміщення центра тяжіння котка 5.

У даному прикладі роботу пари сил опору визначимо як суму робіт цієї пари при коченні катка 5 вліво при обертанні тіла 3 на кут $\pi/2$ та коченні вправо, коли тіло 3 повернеться ще на кут $\pi/2$.

Переміщення центра тяжіння C_5 катка 5 дорівнює переміщенню повзуна B вліво та вправо:

$$S_{C5} = 2(B_0B_1). \quad (5.29)$$

Визначимо переміщення B_0B' при обертанні тіла 3 на кут $\pi/2$

За початок відліку координати точки B обираємо нерухому точку K площини (Рис. 5.6). При цьому повороті тіла 3 шатун з положення A_0B_0 перейде в положення KB' . Тоді

$$B_0B_1 = KB_0 - KB_1,$$

де

$$KB_0 = K_0 + OB_0 = R_3 + \sqrt{(A_0B_0)^2 - (A_0O)^2} = R_3 + \sqrt{\ell_2^2 - R_3^2},$$

$$KB_1 = \ell = 4R_3.$$

Відповідно

$$B_0B_1 = R_3 + \sqrt{\ell^2 - R_3^2} - \ell =$$

$$= R_3 + \sqrt{(4R_3)^2 - R_3^2} - 4R_3 = 0,88R_3. \quad (5.30)$$

Таким чином, знайдемо повний кут повороту котка 5:

$$\varphi_3 = \frac{1,76R_3}{R_5}. \quad (5.31)$$

Робота пари сил опору коченню за (5.27)

$$A_{M_c} = -\delta m_5 g \cdot \frac{1,76R_3}{R_5}. \quad (5.32)$$

Тоді сума робіт зовнішніх сил за формулами (5.23)-(5.26) та (5.32):

$$\Sigma A_i^E = m_1 g s \sin \alpha - f m_1 g s \cos \alpha +$$

$$+ m_2 g s \sin \alpha + m_4 g R_3 - \delta m_5 g \cdot \frac{1,76R_3}{R_5}.$$

Підставивши в отриманий вираз задані значення мас, отримаємо

$$\Sigma A_i^E = m_1 g s (\sin \alpha - f \cos \alpha + 2 \sin \alpha + \frac{R_3}{2s} -$$

$$- \delta \cdot 20 \cdot 1,76R_3 / (R_5 s),$$

або

$$\sum A_i^E = 1,51 m_1 g s. \quad (5.33)$$

Згідно теореми (2) зрівняємо значення Т та $\sum A_i^E$ згідно формул (5.22) та (5.33):

$$129 \cdot m_1 v_1^2 / 2 = 1,51 m_1 g s, \text{ звідки}$$

$$v_1 = 0,21 \text{ м/с.}$$