МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

ПРОГРАМА, МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
з вивчення дисципліни «Математичні моделі та обчислювальні методи досліджень» та контрольні завдання

для студентів спеціальності 141
«Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
(освітня програма «Електричні машини і апарати»)
заочної форми навчання

2023

Програма, методичні вказівки з вивчення дисципліни «Математичні моделі та обчислювальні методи досліджень» та контрольні завдання для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» (освітня програма «Електричні машини і апарати») заочної форми навчання. / Укл.: Ю.С. Безверхня, Д.С. Яримбаш,. – Запоріжжя : НУ ЗП, 2023. - 63 с.

Укладачі: Д.С. Яримбаш, зав. кафедри, докт. техн. наук
Ю.С. Безверхня, доцент, докт. філософії

Рецензент Т.Є. Дівчук, доцент, канд. техн. наук

Відповідальний за випуск Г.В. Дьомічева, зав.лаб.

Затверджено
на засіданні кафедри
«Електричні машини»
Протокол № 2
від «21» 09. 2023 р.

Рекомендовано до видання
НМК Електротехнічного факультету
Протокол № 2 від 19 жовтня 2023р.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

У відповідності з навчальним планом дисципліна спеціалізації «Математичні моделі та обчислювальні методи досліджень» студентами спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» (освітня програма «Електричні машини і апарати»)вивчається у 11-му семестрі.

Самостійну роботу над матеріалом дисципліни доцільно організувати наступним чином. Прочитати відповідний параграф підручника, а потім, опрацьовуючи його повторно, законспектувати основні положення, визначення, висновки. В конспекті слід повторити математичні викладки, графіки й рисунки, наведені у підручнику, а також всі проміжні викладки й рисунки, котрі знадобились для розгляду матеріалу, який вивчається. Конспектування при вивченні дисципліни є обов'язковим. Потім слід письмово (в конспекті) відповісти на всі запитання для самоперевірки, подані після методичних вказівок до кожної теми. Відповіді слід давати, використовуючи записи в конспекті, достатньо повно пояснюючи їх фізичними, математичними й іншими причинами, які пояснюють таке положення. Якщо відповіді на питання для самоперевірки становлять труднощі, необхідно відповідну тему опрацювати ще раз більш уважно або звернутися за консультацією з цього питання до викладача.

Працюючи над матеріалом дисципліни, бажано користуватись одним із рекомендованих джерел, оскільки завдяки використанню однозначних позначень та визначень полегшується засвоєння. Додаткову літературу можна використовувати для поглиблення знань з окремих тем після повного попереднього опрацювання розділу дисципліни.

При підготовці до іспиту для швидкого відновлення у пам'яті матеріалу, який вивчається, рекомендується проглянути конспект, звернувши особливу увагу на питання для самоперевірки.

На установчій сесії студенти слухають лекції, виконують лабораторні роботи. Протягом семестру студенти виконують одну контрольну роботу. До екзаменаційної сесії студенти захищають лабораторні роботи й контрольну роботу та отримують залік. Під час екзаменаційної сесії студенти здають іспит за розкладом.

РОБОЧА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ. МЕТА І ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ, ЇЇ МІСЦЕ В НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ

Мета викладання дисципліни. Дисципліна «Математичні моделі та обчислювальні методи досліджень» розглядає основні відомості про чисельні методи рішення будь-яких прикладних задач з різною точністю.

Завдання вивчення дисципліни. Вимогами до знань при вивченні дисципліни є:

- елементи теорії погрішностей,
- математичні моделі,
- чисельні методи та їх використання,
- інтерполірування та наближення функцій,
- чисельне диференціювання, чисельне інтегрування,
- чисельне рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь,
- наближене рішення нелінійних та трансцендентних рівнянь й систем рівнянь.

Студент повинен володіти практичними навичками роботи з персональними ЕОМ.

Перелік дисциплін, засвоєння яких необхідне для оволодіння даною дисципліною:

- вища математика,
- обчислювальна техніка та програмування,
- обчислювальна техніка та програмування за фахом,
- теоретичні основи електротехніки,
- електричні машини.

ЗМІСТ ДИСЦИПЛІНИ
НАЗВА ТЕМ, ЇХ ЗМІСТ, ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

Базові математичні моделі в електромеханіці. Елементи теорії погрішностей. Чисельні методи.

Математичні моделі та методи їх реалізації. Побудування математичної моделі об'єкта, що досліджується. Побудування обчислювального алгоритму. Програмування алгоритму на ЕОМ і його тестування. Проведення серії розрахунків з варіюванням визначених параметрів вихідної задачі та алгоритму. Аналіз одержуваних результатів.

Джерела й класифікація погрішностей. Погрішності даних, методу й обчислень. Абсолютна і відносна погрішності обчислення. Погрішності арифметичних операцій. Зворотне завдання оцінки погрішності.

Математичні моделі електромагнітного поля в електротехнічних пристроях. Загальна модель Максвелла. Електростатична модель. Скалярна магнітостатична модель. Векторна магнітостатична модель. Електродинамічна модель. Магнітодинамічна модель.

Моделювання електромагнітних процесів в активній частині синхронного генератора з постійними магнітами.

Рекомендована література:
/1, С.12-34; 2, С.9-31; 4, С.13-26; 6, С.6-27, 10, 14-24/.

Питання для самоперевірки

1 Що таке математична модель?
2 Чисельні методи. Їх основні групи.
3 Що таке абсолютна погрішність?
4 Що таке відносна погрішність?
5 Джерела погрішностей.
6 Яка задача називається сталою?
7 Яка задача називається коректною?
8 Збіжність ітераційного процесу.
9 Математичні моделі електромагнітного поля.

Чисельні рішення нелінійних рівнянь і систем нелінійних рівнянь.

Ітераційні методи рішення нелінійних рівнянь. Відділення коренів. Метод простого перебору. Метод бісекції. Метод простих ітерацій. Метод січних. Метод Ньютона (метод дотичних). Метод хорд (метод лінійної інтерполяції).

Чисельні методи знаходження конструкційних параметрів із рішення систем нелінійних рівнянь. Чисельне рішення систем нелінійних рівнянь стандартним і спрощеним методами Ньютона. Чисельне рішення систем нелінійних рівнянь ітераційними методами. Знаходження коренів поліноміальних рівнянь методами Ньютона та Лагерра, QR-розкладом і методами Сіменса та Якобі.

Рекомендована література:
/2, С.155-168; 8, С.317-357; 10, С.150-157; 12, С.84-103/.

Питання для самоперевірки

1 Графічне рішення рівнянь.
2 Навіщо потрібен перший етап – відділення коренів?
3 Метод поділення відрізку навпіл.
4 Метод хорд.
5 Метод Ньютона (дотичних).
6 Метод простої ітерації.
7 Комбінований метод рішення нелінійних рівнянь.
8 Точні методи рішення нелінійних рівнянь.
9 Метод Ньютона для систем нелінійних рівнянь.
10 Метод простої ітерації для систем нелінійних рівнянь.

Методи рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Прямі та ітераційні методи рішення СЛАР.

Чисельні методи знаходження конструкційних параметрів із рішення СЛАР. Прямі методи рішення СЛАР. Метод Гауса. LU-розклад матриці системи рівняння та методи Холецького й Жордана. Метод ортогоналізації матриць. Рішення СЛАР методами, які засновані на розбивці матриці. Ітераційні методи рішення СЛАР. Методи Гауса-Зейделя, Якобі та верхньої релаксації. Методи симетричної релаксації та спряжених градієнтів. Методи неповного розкладу й передобумовленості.

Рекомендована література:
/1, С I 14-154, 2,С.254-314, З, С.126-150; 4, С.70-84/.

Питання для самоперевірки

1 Метод рішення СЛАР з застосуванням зворотної матриці A^{-1}.
2 Правило Крамера.
3 Прямий хід метода Гауса.
4 Зворотній хід метода Гауса.
5 Схема Гауса з вибором головного елементу.
6 Що таке нев’язка?
7 Ітераційні методи рішення СЛАР.
8 Метод простої ітерації.
9 Метод Гауса-Зейделя.

Обробка даних у САПР електромеханічних перетворювачів.

Основні задачи обробки даних у САПР. Математичні формулювання задач інтерполяції, згладжування та апроксимації.

Інтерполяційні поліноми Лагранжа, Ньютона та Ерміта. Базисні поліноми Ньютона. Шматково-поліноміальна інтерполяція. Інтерполяція сплайнами. Кубічні сплайни. Інтерполяція поліноміальними сплайнами. Інтерполяція сплайнами загального типу.

Згладжування. Згладжування даних за методом найменших квадратів. Згладжу вальні сплайни. Згладжування даних функціями Безьє, В-сплайни.

Апроксимація масивів даних. Рівномірна апроксимація. Апроксимація за методом найменших квадратів. Апроксимуючі функції Безьє й сплайни.

Особливості задач інтерполяції, згладжування та апроксимації. Криві на поверхні та в просторі. Обробка поверхонь у САПР.

Рекомендована література:

/1, С.31-76; 2, С.34-73; 3, С.27-69; 4, С.27-69,160-194, 5, 50-154/.

Питання для самоперевірки

1 Поняття про наближення функцій.
2 Що таке апроксимація функції?
3 Точечна та безперервна апроксимація.
4 Задача інтерполірування.
5 Глобальна та локальна інтерполяція.
6 Що таке екстраполяція?
7 Лінійна інтерполяція.
8 Квадратична інтерполяція.
9 Сплайн-інтерполяція.
10 Багаточлен Лагранжа.
11 Багаточлен Ньютона.
12 Що таке поділені різниці?
13 Збіжність інтерполяційних поліномів.

Чисельне диференціювання. Чисельне інтегрування.

Апроксимація похідних. Метод невизначених коефіцієнтів. Часткові похідні. Методи чисельного інтегрування. Методи прямокутників. Метод трапецій. Метод парабол (метод Сімпсона). Метод Монте-Карло.

Рекомендована література:
/1, С.78-113; 8,С.73-153; 11, С.70-124/.

Питання для самоперевірки

1 Апроксимація похідних.
2 Погрішність чисельного диференціювання.
3 Метод невизначених коефіцієнтів.
4 Поліпшення апроксимації похідних.
5 Теорема існування визначного інтеграла.
6 Методи прямокутників (лівих, правих, середніх).
7 Метод трапецій.
8 Метод парабол (Сімпсона).
9 Адаптивні алгоритми.
10 Метод Монте-Карло.

Звичайні диференційні рівняння. Методи рішення диференційних рівнянь.

Основи метода кінцевих елементів. Приклади варіаційного формулювання диференційних рівнянь з межовими умовами. Варіаційне формулювання однорідної задачі Діріхлє. Варіаційне формулювання однорідної і не однорідної задачі Неймана. Метод Ріцца-Гальоркіна. Метод конформних кінцевих елементів. Типи кінцевих елементів.

Рекомендована література:
/2,С.205-236; 6, С.403-480; 9, С.237-289; 12, С.107-126/.

Питання для самоперевірки

1 Метод кінцевих елементів.
2 Метод конформних кінцевих елементів.
3 Типи кінцевих елементів.

Рівняння з частковими похідними. Чисельні методи рішення рівнянь з частковими похідними.

Класифікація диференційних рівнянь в часткових похідних. Загальне формулювання задачі Коши для звичайних диференційних рівнянь. Інтегрування звичайних диференційних рівнянь методом послідовних наближень (метод Пікара). Інтегрування звичайних диференційних рівнянь за допомогою ступеневих рядів. Чисельне інтегрування звичайних диференційних рівнянь стандартним методом Ейлера, модифікованим методом Ейлера, методом Ейлера-Коши, методом Рунге-Кутта.

Рекомендована література:
/5,С.238-290; 8, С.357-402, 480-561; 9, С.290-333/.

Питання для самоперевірки

1 Загальне формулювання задачі Коши.
2 Метод Пікара.
3 Метод Ейлера.
4 Методи Рунге-Кутта.

1 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1
МЕТОДИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ТА АПРОКСИМАЦІЇ ПРИ ОБРОБЦІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

Мета: засвоїти методи інтерполяції та апроксимації, правила їх застосування в системі MathCAD.

1.1 Загальні відомості

Експериментальні дані, отримані у лабораторних або промислових умовах, являються основою для проведення подальших досліджень. В результаті проведення експерименту дослідник одержує деяку таблицю значень – табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Таблиця експериментальних значень

X	x_0	x_1	x_2	. . .	x_N
Y	y_0	y_1	y_2	. . .	y_N

При обробці експериментальних даних можуть виникнути два типа задач:

- для функції, що задана як таблиця, потрібно обчислити значення даної функції для проміжного значення аргументу. Цей тип задач розв'язується методом інтерполяції;

- для функції, що задана як таблиця або графічно, підібрати аналітичну формулу, яка зображує з якоюсь точністю дані значення функції. Задачі даного типу вирішуються методом апроксимації.

Апроксимація функцій полягає в наближеній заміні заданої функції $f(x)$ деякою функцією $\varphi(x)$ так, щоб відхилення функції $\varphi(x)$ від $f(x)$ у заданій області було найменшим. Функція $\varphi(x)$ при цьому називається *апроксимуючою*. Типовою задачею апроксимації функцій є задача *інтерполяції*. Необхідність *інтерполяції* функцій в основному пов'язана з двома причинами:

- функція $f(x)$ має складний аналітичний опис, що викликає певні труднощі при його використанні;

- аналітичний опис функції $f(x)$ невідомий, тобто $f(x)$ задана у вигляді таблиці. При цьому необхідно мати аналітичний опис, що приблизно представляє $f(x)$ (наприклад, для обчислення: значень $f(x)$ у довільних точках, визначення інтегралів і похідних від $f(x)$ і т. ін.).

Інтерполяція

Найпростіша задача *інтерполяції* полягає в наступному. Для заданих точок $x_i = x_0, x_1, ..., x_n$, які називаються *вузлами інтерполяції,* і значень у цих точках деякої функції $f(x_i) = y_0, y_1, . . ., y_n$ побудувати поліном $\varphi(x)$ (*інтерполяційний поліном*) ступеня n у вигляді

$$\varphi(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \tag{1.1}$$

який приймає у вузлах інтерполяції x_i ті ж значення y_i, що і функція $f(x_i)$:

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi(x_1) = y_1, ..., \varphi(x_n) = y_n, i = 0,1,...,n \tag{1.2}$$

Геометрично це означає, що потрібно знайти криву $\varphi(x)$ деякого визначеного типу, що проходить (див. рис. 1.1) через задану систему $M(x_i, y_i)$, де ($i = 0, 1, ..., n$).

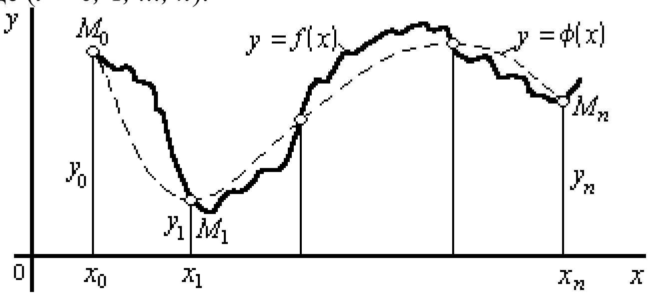


Рисунок 1.1 – Геометричний смисл інтерполяції

Розрізняють два види інтерполяції:

- *глобальна* – з'єднання всіх точок $f(x)$ єдиним інтерполяційним поліномом;

- *локальна* – з'єднання точок відрізками прямої (по двох точках), відрізками параболи (по трьох точках).

Глобальна інтерполяція

Найпростішим видом *глобальної інтерполяції* є *параболічна інтерполяція*, коли, використовуючи описані вище умови (1.2), для знаходження невідомих $n+1$ коефіцієнтів $a_0, a_1, . . ., a_n$ виразження (1.1) одержують систему з $n+1$ рівнянь:

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = y_0, \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = y_1, \\ \ldots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \ldots + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases} \quad (1.3)$$

Якщо вирішити цю систему відносно невідомих $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ми отримаємо аналітичний вираз полінома. Він завжди має одне рішення, так як і визначник системи

$$D = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

відомий в алгебрі, як *визначник Вандермонда*, відмінний від нуля.

Інтерполяційна формула Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \quad (1.4)$$

Для побудови *інтерполяційної формули Лагранжа* в MathCAD зручно використовувати функцію *if*

if(*cond, tval, fval*)	Повертає значення *tval*, якщо *cond* відмінний від 0 (істина). Повертає значення *fval*, якщо *cond* дорівнює 0 (неправда).

Часто інтерполяція ведеться для функцій, що задані у виді таблиці, із *рівновіддаленими* значеннями аргументу ($h_i = x_{i+1} - x_i =$ =const). Величина h називається кроком.

Введемо спочатку поняття *кінцевих різниць:*

$$\begin{aligned} &\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, (i = 0,1,\ldots,n-1) \\ &\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, (i = 0,1,\ldots,n-2) \\ &\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, (i = 0,1,\ldots,n-k) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Введемо також змінну $t=(x-x_0)/h$.

З урахуванням уведених позначень *перша інтерполяційна формула Ньютона* має вид:

$$N_{n1}(x)=N_{n1}(x_0+th)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\ldots$$
$$\ldots+\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \qquad (1.6)$$

Друга інтерполяційна формула Ньютона для інтерполяції назад має вид:

$$t=\frac{x-x_n}{h},$$

$$N_{n2}(x)=N_{n2}(x_n+th)=y_n+t\Delta y_{n-1}+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\ldots \qquad (1.7)$$
$$\ldots+\frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Проте, інтерполяція при великому числі вузлів призводить до необхідності працювати з багаточленами високого ступеня (наприклад, 50-го або навіть 100-го), що неприйнятно як із погляду обчислень, так і через схильність таких багаточленів до осціляції (коливанням) між вузлами сітки. Тому на практиці часто використовують *локальну інтерполяцію*.

Локальна інтерполяція

Найпростішим і часто використовуваним видом локальної інтерполяції є *лінійна інтерполяція.* Вона складається в тому, що задані точки $M(x_i, y_i)$ при (i = 0, 1, ... , n) з'єднуються прямолінійними відрізками, і функція $f(x)$ наближається до ламаної з вершинами в даних точках (рисунок 1.2).

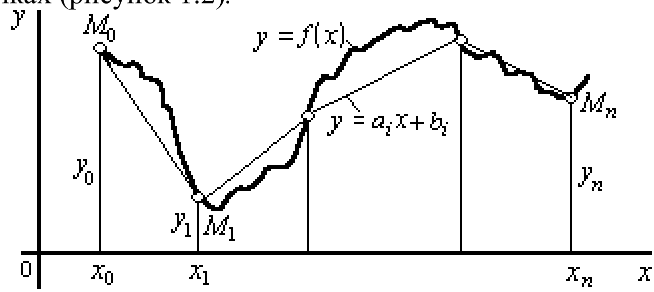


Рисунок 1.2 - Лінійна інтерполяція

Рівняння кожного відрізка ламаної лінії в загальному випадку різні. Оскільки є n інтервалів (x_i , x_{i+1}), то для кожного з них у якості рівняння інтерполяційного полінома використовується рівняння прямої, що проходить через дві точки. Зокрема, для *і-го* інтервалу можна написати рівняння прямої, що проходить через точки (x_i , y_i) і (x_{i+1}, y_{i+1}), у виді:

$$\frac{y-y_i}{y_{i+1}-y_i}=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}. \tag{1.8}$$

Звідси

$$y=a_i x+b_i, x_i \le x \le x_{i+1}$$

$$a_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}, b_i=y_i-a_i x_i. \tag{1.9}$$

Отже, при використанні лінійної інтерполяції, спочатку потрібно визначити інтервал, у який потрапляє значення аргументу x, а потім підставити його у формулу (1.9) і знайти наближене значення функцій у цій точці.

У випадку *квадратичної інтерполяції* в якості інтерполяційної функції на відрізку (x_{i-1},x_{i+1}) приймається квадратний тричлен.

Рівняння квадратного тричлена

$$y=a_i x^2+b_i x+c_i, \quad x_{i-1} \le x \le x_{i+1}, \tag{1.10}$$

містять три невідомих коефіцієнти a_i, b_i, c_i, для визначення котрих необхідні три рівняння.

Ними служать умови проходження параболи через три точки (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}). Ці умови можна записати у виді:

$$\begin{aligned} &a_i x_{i-1}^2+b_i x_{i-1}+c_i=y_{i-1}, \\ &a_i x_i^2+b_i x_i+c_i=y_i, \\ &a_i x_{i+1}^2+b_i x_{i+1}+c_i=y_{i+1}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Інтерполяція для будь-якої точки $x \in [x_0, x_n]$ проводиться по трьох найближчих точках.

Кубічна сплайн-інтерполяція

У останні роки інтенсивно розвивається новий розділ сучасної обчислювальної математика – теорія *сплайнів.* Сплайни дозволяють ефективно вирішувати задачу опрацювання експериментальних залежностей між параметрами, що мають достатньо складну структуру.

Розглянуті вище методи локальної інтерполяції, по суті, є найпростішим сплайном першого ступеня (для лінійної інтерполяції) і другого ступеня (для квадратичної інтерполяції).

У середовищі MathCAD є для цього інструментарій: засоби *лінійної інтерполяції* (функція *linterp*) і *інтерполяції сплайном* (функція *interp*): лінійним (*lspline*), параболічним (*pspline*) і кубічним (*cspline*).

linterp(*vx, vy, x*)	Використовує вектори даних *vx* і *vy*, щоб повернути лінійно інтерпольоване значення *y*, що відповідає третьому аргументу *x*.
lspline(*vx, vy*) pspline(*vx, vy*) cspline(*vx, vy*)	Всі ці функції повертають вектор коефіцієнтів других похідних, що ми будемо називати *vs*. Вектор *vs*, використовується у функції *interp*
interp(*vs, vx, vy, x*)	Повертає іинтерпольоване значення *y*, що відповідає аргументу *x*.

Пророкування

Якщо необхідно оцінити значення функції в точках, які не належать відрізку $[x_0,x_n]$, використовуйте функцію *predict*

predict(*v, m, n*)	Повертає *n* пророкованих значень, заснованих на *m* послідовних значеннях вектору даних *v*.

Ця функція використовує лінійний алгоритм пророкування, що є корисним, коли екстраполююча функція є гладкою і осцілліруючою, хоча не обов'язково періодичною. Лінійне пророкування можна розглядати як різновид екстраполяції, але не можна плутати з лінійною або поліноміальною екстраполяцією.

Апроксимація

Вивчаючи теорію інтерполяції, ви ознайомилися з інтерполяційними формулами, що у точності відтворюють значення даної функції у вузлах інтерполяції. Проте в ряді випадків виконання цієї умови важко або навіть недоцільно:

- якщо задані величини *x* и *y* є експериментальними даними, то можуть містити в собі суттєві помилки, тому що отримані в результаті вимірів або спостережень. Тому побудова апроксимуючого багато-члена, що відтворює в точності задане значення функції, означало б ретельне копіювання допущених при вимірах помилок;

- якщо є точні значення функції в деяких точках, але число таких точок *n* дуже велике, то інтерполяційний багаточлен буде дуже високого ступеня (якщо тільки різниці не будуть ставати постійними).

Тому виникає задача побудови багаточлена деякого, цілком визначеного ступеня, але меншого, чим *n-1*, що хоча й не дає точних значень функції у вузлах інтерполяції, але достатньо близько до них підходить.

Найбільш поширеним методом апроксимації експериментальних даних є ***метод найменших квадратів*** (МНК). Метод дозволяє використовувати апроксимуючі функції довільного виду і відноситься до групи глобальних методів.

Запишемо суму квадратів відхилень для всіх точок $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$S = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^{n} \left[\varphi(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_m) - y_i \right]^2 . \tag{1.12}$$

Параметри $a0$, $a1$,...,a_m емпіричної формули $y=\varphi(x, a_0, a_1, \ldots, a_m)$ будемо знаходити з умови мінімуму функції $S=S(a_0, a_1, \ldots, a_m)$. У цьому складається ідея *методу найменших квадратів*.

Важливою особливістю методу є те, що апроксимуюча функція може бути довільною. Її вид визначається особливостями розв'язуваної задачі, наприклад, фізичними розуміннями, якщо проводиться апроксимація результатів фізичного експерименту. Найбільш часто зустрічаються: апроксимація прямою лінією (лінійна регресія), апроксимація поліномом (поліноміальна регресія), апроксимація лінійною комбінацією довільних функцій (узагальнена регресія).

Розглянемо застосування методу найменших квадратів для окремого випадку, широко використовуваного на практиці. У якості емпіричної формули розглянемо багаточлен

$$\varphi(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 . \tag{1.13}$$

Для даних значень $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$ и $y = y_0, y_1, \ldots, y_n$ необхідно підібрати багаточлен заданого ступеня $m<n$ виду, який у заданих

точках x_i приймає значення як можна більш близькі до табличних значень y_i. Коефіцієнти a_i багаточлена (1.13) знаходять із рішення системи

$$\begin{cases} b_{00}a_0 + b_{01}a_1 + \ldots + b_{0m}a_m = c_0, \\ b_{10}a_0 + b_{11}a_1 + \ldots + b_{1m}a_m = c_1, \\ \ldots \\ b_{m0}a_0 + b_{m1}a_1 + \ldots + b_{mm}a_m = c_m. \end{cases} \tag{1.14}$$

де

$$b_{k,l} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+l}, c_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k y_i,$$
$$k = 0,1,\ldots,m, l = 0,1,\ldots,m.$$

1.2 Порядок виконання лабораторної роботи

1 Обчислити значення заданої функції $y_i = f(x_i)$ у вузлах інтерполяції $x_i = a + h\,i$, де $h = (b - a)/10$, $i = 0, 1, \ldots, 10$, на відрізку $[a, b]$. Варіанти індивідуальних завдань надано в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 - Варіанти індивідуальних завдань до п. 1

№	***f*(*x*)**	**[*a, b*]**	**№**	***f*(*x*)**	**[*a, b*]**
1	$\sin x^2$	[0;2]	12	$2x+\cos(x^2)$	[0;2]
2	$\cos x^2$	[0;2]	13	$\sin(x^2)-x$	[0;2]
3	$e^{\sin x}$	[0;5]	14	$0.1x^4-\cos(3x)$	[0;2]
4	$1/(1 + x^2)$	[0;3]	15	$ln(x) +\cos(x)$	[2;4]
5	$e^{-(x + \sin 2x)}$	[0;3]	16	$e^x/(e^x+1-x)$	[0;5]
6	$1/(1 + e^{-2x})$	[0;3]	17	$2x-3\cos(4x)$	[0;1]
7	$\sin(x + e^{\sin x})$	[0;3]	18	$x^3-\cos(5x)$	[0;1]
8	$e^{-(x +2/x)}$	[1;3]	19	$\cos(3x)-x$	[0;2]
9	$x \cdot \cos(x+\ln(1+x))$	[1;5]	20	$e^x/(x^2+1)$	[0;5]
10	$10 \cdot \ln 2x/(1+x)$	[1;5]	21	$2\sin(6x)$	[0;1]
11	$\sin(x^2) \cdot e^{-(x/2)}$	[0;3]	22	$3xe^{-x}-1$	[0;2]

Продовження таблиці 1.2

№	*f*(*x*)	[*a, b*]	№	*f*(*x*)	[*a, b*]
23	$\cos(x+\cos^3 x)$	[0;3]	32	$10+66x-3x^3$	[0;4]
24	$\cos(x+e^{\cos x})$	[2;6]	33	$3\sin(x)+x-1$	[1;5]
25	$\cos(2x+x^2)$	[1;2]	34	$\cos(x^2)-0.5x$	[0;2]
26	$e^{\cos x}\cos x^2$	[0;2]	35	x^4-x^2-2	[0;2]
27	$e^{x-1}-x^3-x$	[0;1]	36	x^5-x-1	[1;2]
28	$x-1/(3+\sin(3.6x))$	[2;4]	37	$1-x-tg(x)$	[1;2]
29	$3x+e^x-e^{-x}$	[1;4]	38	$e^x-e^{-x}-2$	[6;10]
30	$2x^2+5\cos(x^2)-2$	[1;3]	39	$\sin(x^2)-4\cdot ln(x)-5$	[3;4]
31	$0.1x^2-x\cdot\sin(x)$	[1;3]	40	$0.25x^3+\cos(x)-2$	[0;4]

2 По обчисленій таблиці (x_i, y_i) провести параболічну інтерполяцію.

Для знаходження коефіцієнтів шуканого полінома (1.1) необхідно скласти систему лінійних алгебраїчних рівнянь (1.3). Систему рівнянь вирішити матрично з використанням функції *lsolve*.

Побудувати графік інтерполяційного багаточлена й указати на ньому вузлові точки (x_i, y_i).

3 Для обчисленої табличної функції скласти формулу інтерполяційного багаточлена *Лагранжа*, використовуючи оператори підсумовування і перемножування по дискретному аргументу, а також функцію *if*.

Побудувати графік інтерполяційного багаточлена і указати на ньому вузлові точки (x_i, y_i).

4 Провести інтерполяцію заданої функції за допомогою першої та другої інтерполяційних формул *Ньютона*.

Побудувати графіки інтерполяційних багаточленів і указати на ньому вузлові точки (x_i, y_i).

5 Провести *лінійну інтерполяцію* заданої функції за допомогою убудованої інтерполяційної функції *linterp*.

Побудувати графік функції *linterp* і указати на ньому вузлові точки (x_i, y_i).

6 Провести *сплайн-інтерполяцію* за допомогою функцій *lspline, pspline, cspline* и *interp.*

Побудувати графік функції *interp* і указати на ньому вузлові точки (x_i, y_i).

7 Обчислити значення заданої функції $y_i = f(x_i)$ у точках $x_i = a + i/10$, де, $i = 0, 1, ..., 10\cdot(b - a)$, на відрізку [$a$, b].

З використанням функції *predict* виконати *пророкування* (*екстраполяцію*) отриманого вектора даних y_i у наступних 10 точках по останнім 7 значеннях функції.

Відобразити графічно наявні дані, пророковані дані та істинний вид функції $f(x)$.

8 Створити таблицю експериментальних даних: $x_i = a + h\cdot i$, $i = 0, 1, . . ., 10$, $h=(b - a)/10$ на відрізку [a,b]. Варіанти індивідуальних завдань надані в таблиці 1.3.

Таблиця 1.3 - Варіанти індивідуальних завдань до п. 8

№ вар	y_i	[a, b]
1	2.86; 2.21; 2.96; 3.27; 3.58; 3.76; 3.93; 3.67; 3.90; 3.64; 4.09	[0, 1]
2	1.14; 1.02; 1.64; 1.64; 1.96; 2.17; 2.64; 3.25; 3.47; 3.89;3.36;	[-1, 1]
3	4.70; 4.64; 4.57; 4.45; 4.40; 4.34; 4.27; 4.37; 4.42; 4.50; 4.62	[2, 4]
4	0.43; 0.99; 2.07; 2.54; 1.67; 1.29; 1.24; 0.66; 0.43; 0.35; 0.70	[2, 4]
5	1.55; 1.97; 1.29; 0.94; 0.88; 0.09; 0.02; 0.84; 0.81; 0.09; 0.15	[1, 4]
6	3.24; 1.72; 1.95; 2.77; 2.47; 0.97; 1.75; 1.55; 0.12; 0.70; 1.19	[0, 4]
7	2.56; 1.92; 2.85; 2.94; 2.39; 2.16; 2.51; 2.10; 1.77; 2.28; 1.70	[-1, 2]
8	1.77; 0.92; 2.21; 1.50; 3.21; 3.46; 3.70; 4.02; 4.36; 4.82; 4.03	[-1, 3]
9	1.53; 0.45; 1.68; 0.12; 0.68; 2.36; 2.58; 2.53; 3.45; 2.70; 2.82	[4, 8]
10	2.50; 3.90; 3.54; 4.63; 3.87; 5.25; 4.83; 3.24; 3.08; 3.00; 4.70	[0, 5]
11	2.95; 3.38; 2.71; 2.37; 2.29; 2.75; 2.76; 2.74; 2.57; 2.40; 2.99	[1, 5]
12	-0.23;-0.03;-0.98;-0.97;-0.43;-0.91;-0.27; 0.19;0.88;1.06;0.72	[2, 4]
13	2.36;0.03;-0.38;-1.33; 0.25;-1.36; 0.95; 3.16; 4.03; 4.92; 4.20	[0, 2]
14	3.82; 4.07; 3.53; 4.83; 5.53; 5.04; 5.09; 5.87; 5.53; 4.72; 4.73	[3, 4]
15	2.35; 2.16; 2.39; 2.39; 2.18; 2.09; 2.44; 2.56; 3.35; 3.22; 2.65	[-3, 4]

9 Апроксимувати багаточленами 2-го і 6-го ступеня по *методу найменших квадратів* функцію, що задана таблицею значень x_i і y_i, порівняти якість наближень.

Побудувати графіки багаточленів і указати вузлові точки (x_i, y_i).

1.3 Приклад виконання лабораторної роботи

Завдання 1. Визначення заданої функції у вигляді таблиці

$$f(x) := \sin\left[x + (e)^{\sin(x)}\right] \qquad a := 0 \quad b := 4 \quad h := \frac{b-a}{10}$$

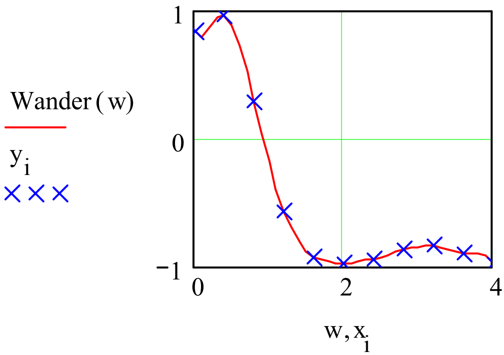
$$i := 0..\,10 \qquad x_i := i \cdot h + a \qquad y_i := f(x_i) \qquad j := 0..\,10$$

$$z := a, a + 0.1\,..\,b$$

Завдання 2. Визначник Вандермонда

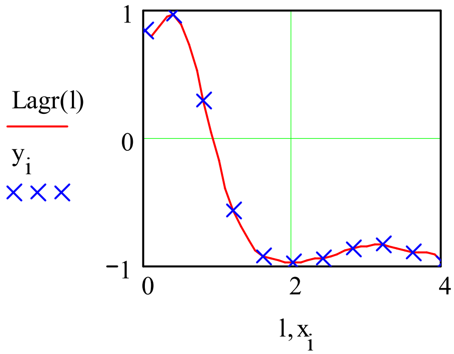
$$A_{i,j} := (x_i)^j \qquad W := \mathrm{lsolve}(A, y) \qquad w := a, a + 0.1\,..\,b$$

$$\mathrm{Wander}(w) := \sum_i W_i \cdot w^i$$



Завдання 3. Метод Лагранжа

$$l := a, a + 0.1\,..\,b \qquad \mathrm{Lagr}(l) := \sum_j y_j \cdot \frac{\prod_i \left(\mathrm{if}(i \ne j, l - x_i, 1)\right)}{\prod_i \left(\mathrm{if}(i \ne j, x_j - x_i, 1)\right)}$$



Завдання 4. Метод Ньютона

$$z := a, a + 0.1 .. b \qquad h := x_1 - x_0$$

Обчислення кінцевих різниць:

$$n := 0..9 \qquad k := 0..8 \qquad m := 0..7 \qquad s := 0..6$$

$$\Delta y_n := y_{n+1} - y_n \qquad \Delta 2y_k := \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$$

$$\Delta 3y_m := \Delta 2y_{m+1} - \Delta 2y_m \qquad \Delta 4y_s := \Delta 3y_{s+1} - \Delta 3y_s$$

$\Delta y_n =$	$\Delta 2y_k =$	$\Delta 3y_m =$	$\Delta 4y_s =$
0.112	-0.778	0.591	0.086
-0.665	-0.186	0.678	-0.86
-0.851	0.492	-0.183	-0.042
-0.36	0.309	-0.225	0.177
-0.051	0.084	-0.048	-0.03
0.033	0.036	-0.078	0.042
0.07	-0.042	-0.036	0.083
0.028	-0.077	0.048	
-0.049	-0.03		
-0.079			

Обчислення по першій інтерполяційній формулі Ньютона (інтерполяція вперед):

$$q(z) := \frac{z - x_0}{h}$$

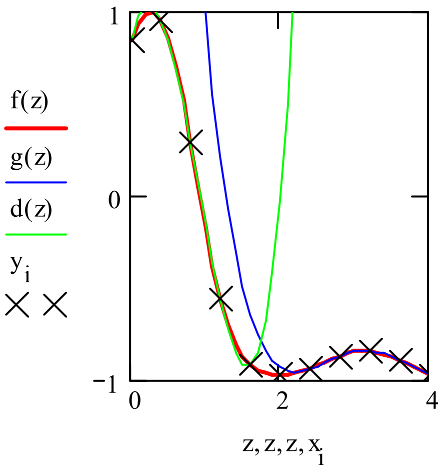
$$d(z) := y_0 + q(z)\cdot\Delta y_0 + q(z)\cdot\frac{q(z)-1}{2!}\cdot\Delta 2y_0 \;...$$
$$+\, q(z)\cdot(q(z)-1)\cdot\frac{q(z)-2}{3!}\cdot\Delta 3y_0 \;...$$
$$+\, q(z)\cdot(q(z)-1)\cdot(q(z)-2)\cdot\frac{q(z)-3}{4!}\cdot\Delta 4y_0$$

Обчислення по другій інтерполяційній формулі Ньютона (інтерполяція назад):

$$t(z) := \frac{z - x_{10}}{h}$$

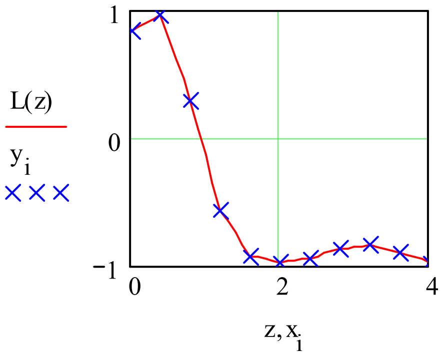
$$g(z) := y_{10} + t(z)\cdot\Delta y_9 + t(z)\cdot\frac{t(z)+1}{2!}\cdot\Delta 2y_8 \;...$$
$$+\,(t(z)+1)\cdot\frac{t(z)+2}{3!}\cdot t(z)\cdot\Delta 3y_7 \;...$$
$$+\,(t(z)+1)\cdot(t(z)+2)\cdot\frac{t(z)+3}{4!}\cdot t(z)\cdot\Delta 4y_6$$

$$newton(z) := if\left(\frac{x_0 + x_5}{2} - z > 0, d(z), g(z)\right)$$



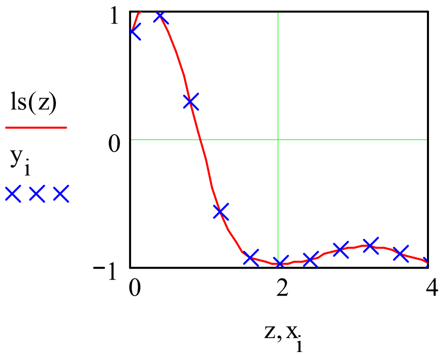
Завдання 5. Лінійна інтерполяція

$$L(z) := \mathrm{linterp}(x, y, z)$$



Завдання 6. Кубічна сплайн-інтерполяція

$$s := \mathrm{cspline}(x, y) \qquad ls(z) := \mathrm{interp}(s, x, y, z)$$

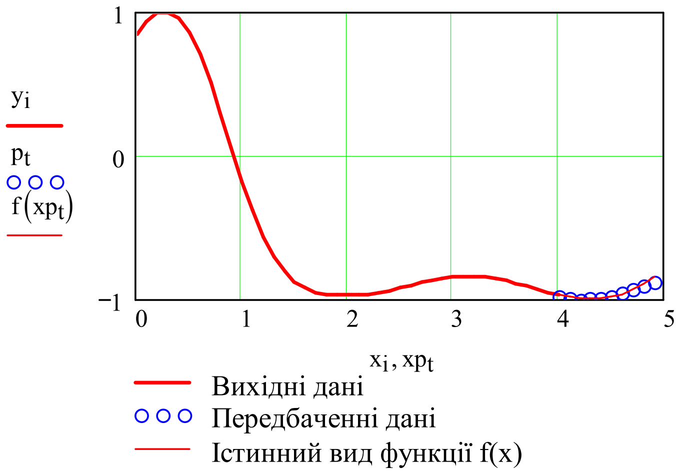


Завдання 7. Екстраполяція функції f(x)

$$i := 0 .. (b - a)\cdot 10 \qquad x_i := a + \frac{i}{10} \qquad y_i := f(x_i)$$

$p := \mathrm{predict}(y, 7, 10)$- передбачення значень функції f(x) у наступних 10 точках по останніх 7 значеннях функції

$t := 0 .. 10 - 1 \quad xp_t := \dfrac{t + b\cdot 10}{10}$- графічна перевірка екстраполяції



Завдання 8. Створення таблиць експериментальних даних

$f(x) := \sin\left[x + (e)^{\sin(x)}\right] \quad a := 0 \quad b := 4 \quad h := \frac{b-a}{10} \quad i := 0..10$

$x2_i := i \cdot h + a \quad y2_i := f\left(x2_i\right)$

$y2_i =$ $\quad z := a, a + 0.1..b$

0.841
0.954
0.288
-0.563
-0.923
-0.974
-0.94
-0.871
-0.842
-0.892
-0.971

Завдання 9. Апроксимація по методу найменших квадратів

Апроксимація багаточленом 2-го ступеня по МНК

Апроксимація багаточленом 6-го ступеня по МНК

$n := 10$

$m1 := 2$

$k1 := 0..m1 \qquad l1 := 0..m1$

$$b1_{k1,l1} := \sum_{i=0}^{n} \left[\left(x2_i\right)^{k1+l1}\right]$$

$$c1_{k1} := \sum_{i=0}^{n} \left(x2_i\right)^{k1} \cdot y2_i$$

$a1 := \mathrm{lsolve}(b1, c1)$

$$MNK2(x) := \sum_{k1} x^{k1} \cdot a1_{k1}$$

$m2 := 6$

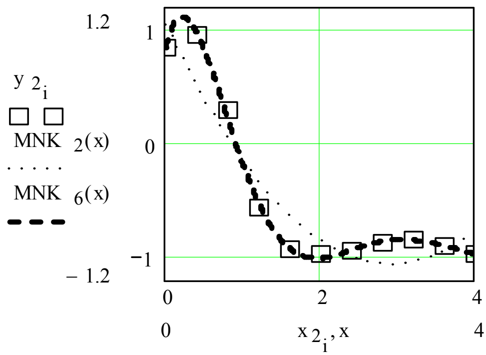
$k2 := 0..m2 \qquad l2 := 0..m2$

$$b2_{k2,l2} := \sum_{i=0}^{n} \left[\left(x2_i\right)^{k2+l2}\right]$$

$$c2_{k2} := \sum_{i=0}^{n} \left(x2_i\right)^{k2} \cdot y2_i$$

$a2 := \mathrm{lsolve}(b2, c2)$

$$MNK6(x) := \sum_{k2} x^{k2} \cdot a2_{k2}$$



1.4 Контрольні запитання

1 Що таке апроксимація функцій?

2 Для чого потрібна інтерполяція функцій?

3 Охарактеризуйте види інтерполяції.

4 Чим визначається близькість інтерполяційного полінома до заданої функції?

5 Чим визначається ступінь інтерполяційного полінома?

6 Які види глобальної інтерполяції вам відомі?

7 Які інтерполяційні формули застосовуються, якщо вузли інтерполяції рівновіддалені?

8 Що таке кінцеві різниці?

9 Що таке емпірична формула та як її підібрати?

10 Яку інтерполяційну формулу Ньютона необхідно застосовувати на початку таблично заданої функції, і яку – наприкінці? Чому?

11 Що таке екстраполяція?

12 Які формули застосовуються для екстраполяції?

13 Як можна підвищити точність інтерполяції?

14 Скільки інтерполяційних поліномів можна побудувати при заданому наборі вузлів інтерполяції?

15 Чим обумовлюється вибір засобів інтерполяції?

16 Які методи локальної інтерполяції вам відомі?

17 Який метод локальної інтерполяції проводиться по трьох точках?

18 У чому переваги сплайн-інтерполяції в порівнянні з інтерполяційними поліномами?

19 Яка функція MathCAD реалізує лінійну інтерполяцію?

20 Які функції кубічної сплайн-інтерполяції вам відомі? Охарактеризуйте послідовність їх використання.

21 За допомогою якого оператора можна обчислити набір значень, що інтерполюються?

22 Яка функція MathCAD використовується для реалізації екстраполяції? Опишіть її аргументи.

23 У чому полягає метод найменших квадратів?

1.5 Література

Бігун Я.Й. Числові методи. Інтерполювання. Числове інтегрування та диференціювання: Навчальний посібник / Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича. – Чернівці: Рута, 2005. – 80с.

2 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2
ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Мета: засвоїти методи чисельного інтегрування та обчислити приблизно значення інтеграла різними способами

2.1 Загальні відомості

Задача чисельного інтегрування функції полягає в обчисленні визначеного інтеграла на основі ряду значень підінтегральної функції. Чисельне обчислення однократного інтеграла називається *механічною квадратурою.*

Ми будемо розглядати методи наближеного обчислення визначених інтегралів

$$J = \int_a^b f(x)dx \tag{2.1}$$

засновані на заміні інтеграла кінцевою сумою

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k), \tag{2.2}$$

де C_k - числові коефіцієнти, а $x_k \in [a, b]$, при $k = 0, 1, \ldots, n$.

Наближена рівність

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k) \tag{2.3}$$

називається квадратурною формулою, а x_k – вузлами квадратурної формули. Похибка квадратурної формули визначається співвідношенням

$$\psi_n = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k). \tag{2.4}$$

У загальному випадку похибка квадратурної формули (2.4) залежить як від вибору коефіцієнтів C_k, так і від розташування вузлових x_k. Введемо на відрізку $[a, b]$ рівномірну сітку з кроком h, тоді $x_i=a+i\cdot h$, де (i=0,1,... ,n; $h\cdot n = b-a$). Тепер вираження (2.1) можна представити у виді суми інтегралів на часткових відрізках:

$$J = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\,. \qquad (2.5)$$

Таким чином, для побудови формули чисельного інтегрування на відрізку [a, b] достатньо побудувати квадратурну формулу на частковому відрізку [x_{i-1}, x_i] і скористатися формулою (2.5).

Постановка завдання

Потрібно обчислити визначений інтеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

за умовою, що a і b – кінцеві та $f(x)$ виявляється безперервною функцією x на усьому інтервалі $a<=x<=b$. Загальний підхід до рішення задачі такий. Визначений інтеграл I являє собою площу, обмежену кривою $f(x)$, віссю x та ординатами у точках $x=a$ і $x=b$.

Ми будемо обчислювати I, розбиваючи інтервал від a до b на кілька менших інтервалів, находити площу кожної "смуги", яка виходить при такому роздрібненні та підсумовувати площі цих смуг. Чим менше інтервал роздрібнення, тим точніше буде обчислена сума.

Різноманітність методів чисельного інтегрування зумовлена стратегією вибору точок роздрібнення, яка забезпечує у кожному конкретному випадку мінімально можливу помилку.

Метод лівих прямокутників

Метод лівих прямокутників заснований на апроксимації функції $y=f(x)$ на кожному частковому інтервалі [x_i, x_{i+1}] багаточленом нульового ступеня, тобто константою, рівною за значенням функції y_i на лівій межі часткового інтервалу.

Геометричний смисл інтеграла – площа під кривою $y=f(x)$. Приблизно її можна обчислити як суму заштрихованих прямокутників при заміні кривої $y=f(x)$ східчастою штриховою лінією, що починається ліворуч кожного часткового інтервалу:

$$I = h_x(y_o + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}) = h_x(f(x_o) + f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1})) \quad (2.6)$$

Метод правих прямокутників

Метод правих прямокутників заснований на апроксимації функції *y=f(x)* на кожному частковому інтервалі $[x_i, x_{i+1}]$ багаточленом нульового ступеня, тобто константою, рівною за значенням функції y_i на правій межі часткового інтервалу.

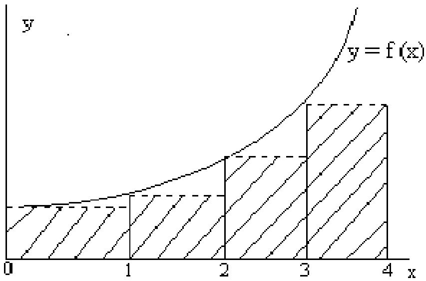


Рисунок 2.1 - Інтегрування методом лівих прямокутників

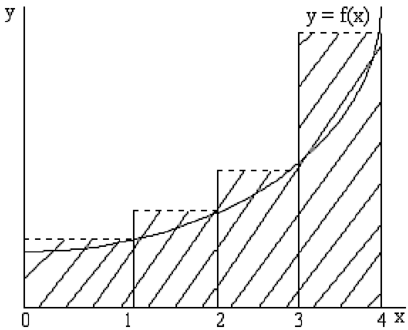


Рисунок 2.2 - Інтегрування методом правих прямокутників

Геометричний смисл інтеграла – площа під кривою *y=f(x)*. Приблизно її можна обчислити як суму заштрихованих прямокутників при заміні кривої *y=f(x)* східчастою штриховою лінією, що починається праворуч кожного часткового інтервалу

$$I = h_x(y_1+y_2+...+y_n) = h_x(f(x_1) + f(x_2) +...+ f(x_n)) \qquad (2.7)$$

Метод середніх прямокутників

Метод середніх прямокутників заснований на апроксимації функції *y=f(x)* на кожному частковому інтервалі $[x_i, x_{i+1}]$ багаточленом нульового ступеня, тобто константою, рівною за значенням функції y_i в центрі (в середині) часткового інтервалу.

Геометричний смисл інтеграла – площа під кривою *y=f(x)*. Приблизно її можна обчислити як суму заштрихованих прямокутників при заміні кривої *y = f(x)* східчастою штриховою лінією, середина якої є серединою кожного часткового інтервалу:

$$I = h_x(y_1^c + y_2^c +...+ y_n^c) = h_x(f(x_1^c) + f(x_2^c) +...+ f(x_n^c)) \qquad (2.8)$$

$$|\psi| \le \frac{1}{24} h_i^3 f^{IV}(x_{i-1/2}) \qquad (2.9)$$

Таким чином, похибка формули (2.8) пропорційна $O(h^3)$.

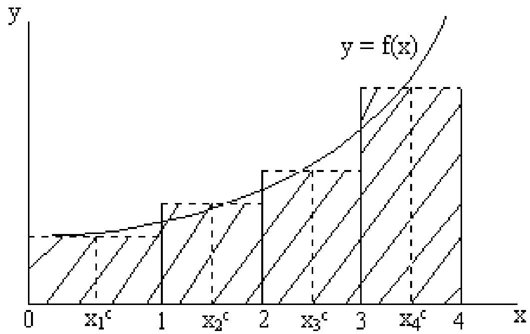


Рисунок 2.3 - Інтегрування методом середніх прямокутників

Метод трапецій

Метод трапецій заснований на апроксимації функції $y=f(x)$ на кожному частковому інтервалі $[x_i, x_{i+1}]$ інтерполяційним поліном першого ступеня, тобто графічно апроксимуюча функція є кусочно-лінійною

$$y = P_1(x) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \qquad (2.10)$$

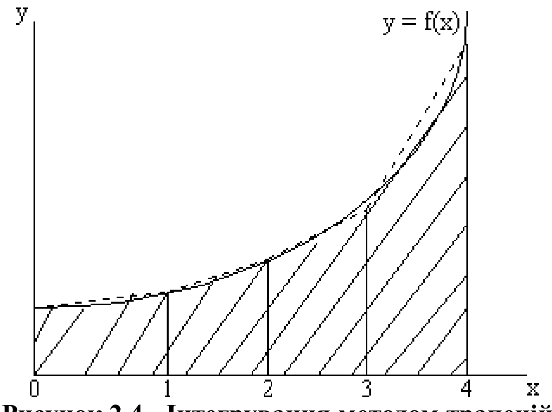


Рисунок 2.4 - Інтегрування методом трапецій

Геометричний смисл інтеграла – площа під кривою *y=f(x)*. Приблизно її можна обчислити як суму заштрихованих трапецій $h_x\left(\dfrac{y_{i-1}+y_i}{2}\right)$,

$$I = h_x\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right) \quad (2.11)$$

Похибка формули (2.11) визначається виразенням:

$$|\psi| \le \frac{1}{12} h_i^3 f''(x_i)\,. \quad (2.12)$$

Таким чином, похибка методу трапецій $\Psi \sim O(h^3)$, але вона в два рази більше, ніж для формули середніх прямокутників.

Метод парабол (Сімпсона)

Метод парабол заснований на апроксимації функції *y=f(x)* на парі сусідніх часткових інтервалів [x_{i-1}, x_i], [x_i, x_{i+1}] інтерполяційним поліномом другого ступеня, тобто параболою $y=P_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$.

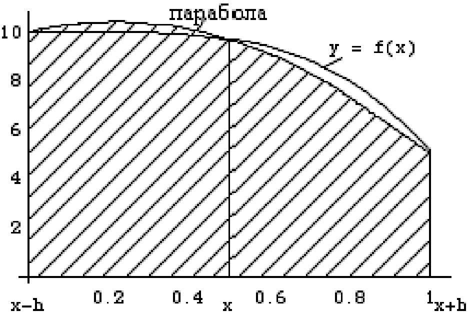


Рисунок 2.5 - Інтегрування методом Сімпсона

Тоді виявляється, що частковий інтеграл

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_2(x)dx = \frac{h_x}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1})\,.$$

Обираючи число часткових інтервалів “n” парним, одержимо формулу для наближеного обчислення інтеграла методом парабол:

$$I = \frac{h_x}{3}(f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + ... + f(x_{n-1})) + \\ +2(f(x_2) + f(x_4) + ... + f(x_{n-2})) + f(x_n)) \quad (2.13)$$

Похибка формули (2.13) оцінюється таким виразенням:

$$|\psi| \le \frac{1}{180} h_i^4 f^{IV}(x_i)$$

Таким чином, похибка формули Сімпсона пропорційна $O(h^4)$.

Зауваження. Слід зазначити, що у формулі Сімпсона відрізок інтегрування обов'язково розбивається на *парне* число інтервалів.

2.2 Порядок виконання лабораторної роботи

1 Визначити функцію $f(x)$ як таблицю, вирахувавши $y_i = f(x_i)$ в точках $x_i = a + h \cdot i$, при $i = 0, 1, ..., n$, $h=(b - a)/n$ на відрізку $[a, b]$, де $n=10$.

2 Обчислити приблизно значення інтеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

по кожному з наступних методів: лівих прямокутників, правих прямокутників, середніх прямокутників, трапецій, парабол.

3 Вирішити задачу за допомогою вбудованого оператора системи MathCAD і порівняти результати. Варіанти індивідуальних завдань надані в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 - Варіанти індивідуальних завдань

№ вар.	f(x)	[a;b]	№ вар.	f(x)	[a;b]
1	$1/\sqrt{2x^2+1}$	[0.8; 1.6]	16	$\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}$	[0;8]
2	$\frac{\lg(x+2)}{x}$	[1.2;2]	17	$\sqrt{x+1}$	[3;8]
3	$\sin(2x)/x^2$	[0.8;1.2]	18	$\frac{\cos(x)}{x^2+1}$	[0.8;1.2]
4	$\frac{tg(x^2)}{x^2+1}$	[0.2;1]	19	$\frac{\sqrt{x}+1}{ctg(2x)}$	[0.1;0.7]
5	$\frac{\cos(x)}{x+1}$	[0.6;1.4]	20	$\frac{\sqrt{x}}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$	[1.2;2.8]
6	$1/\sqrt{0.5x^2+2}$	[0.4;1.2]	21	$\frac{x^2}{1+x^6}$	[1; $\sqrt{3}$]
7	$\frac{\sin(x^2-1)}{2\sqrt{x}}$	[1.3;2.1]	22	$2x+\frac{3}{\sqrt{x}}$	[1;4]
8	$\frac{\sin(x)}{x+1}$	[0.18;0.98]	23	$2x^2-4x$	[0;2]
9	$1/\sqrt{x^2+2}$	[0.5;1.3]	24	$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$	[0.4;1.4]
10	$\frac{tg(x^2+0.5)}{2x^2+1}$	[0.4;0.8]	25	$1/x^2(x-1)$	[4;5]
11	$\frac{\lg(x^2+2)}{x+1}$	[1.4;2.2]	26	$\ln^2 x/x$	[1;e]
12	$1/\sqrt{2x^2+0.3}$	[0.8;1.7]	27	$x^2/\sqrt{x+1}$	[2.2;3.4]
13	$\frac{x}{2}\lg\left(\frac{x^2}{2}\right)$	[1.6;3.2]	28	$\frac{x^2+0.5}{\sqrt{x^2+1}}$	[0.5;1.6]
14	$x^3\sqrt{4+5x^4}$	[0;1]	29	$\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+2}$	[0.2;2.5]
15	$3(x-1)^2$	[1;2]	30	$\frac{2x-1}{x^3+x}$	[1;2]

Продовження таблиці 2.1

№ вар.	*f(x)*	[a;b]	№ вар.	*f(x)*	[a;b]
31	$3\left(x^2 + x^2 e^{x^3}\right)$	[0;1]	36	$1/\left(x^2+1\right)$	[3/4;4/3]
32	$\sqrt{x}$	[1;4]	37	$x^3/\sqrt{x^4+4}$	[0;2]
33	$1/\left(x^4-1\right)$	[2;3]	38	$x/\sqrt{1-x^2}$	[0;1/2]
34	$1/\left(x^3+1\right)$	[1;2]	39	$e^{1/2}/x^2$	[1;2]
35	$x/\left(x^2+3x+2\right)$	[0;1]	40	$1/\sqrt{5+4x-x^2}$	[2;4]

2.3 Приклад виконання лабораторної роботи

Завдання функції $f(x) := 2^{3x} - 3x$

Завдання відрізка $a := 0 \quad b := 1$

Завдання кроку $n := 10$

$$h_x := \frac{b-a}{n}$$

Завдання циклу зміни *i* $i := 0..n$

Обчислення *x* та *f(x)* $x_i := a + h_x \cdot i$

$$y_i := f(x_i)$$

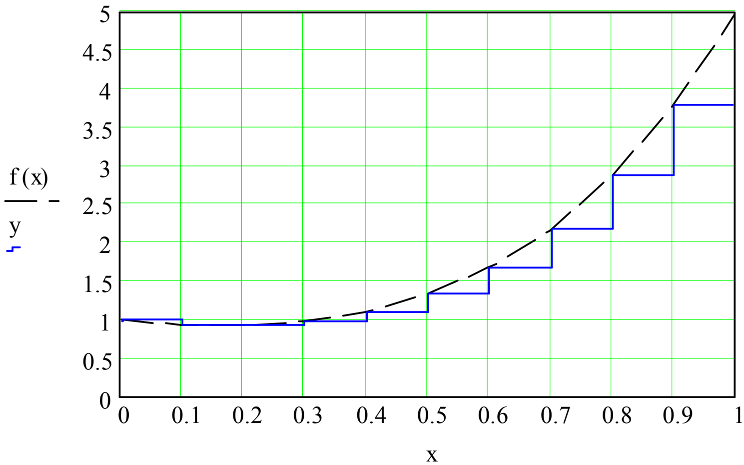
Печатка таблиці *x* та значень функції

$\text{augment}(x, y)^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	1	0.931	0.916	0.966	1.097	1.328	1.682	2.187	2.878	3.798	5

Метод лівих прямокутників

Завдання циклу зміни *i* $\quad i := 0 .. n - 1$



Печатка таблиці *x* та значень функції

$\text{augment}(x, y)^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	1	0.931	0.916	0.966	1.097	1.328	1.682	2.187	2.878	3.798

Обчислення інтеграла $\quad I_{лп} := h_x \cdot \sum_i f(x_i)$

Отримане значення $\quad I_{лп} = 1.67841$

Метод правих прямокутників

Завдання циклу зміни *i* $\quad i := 1 .. n$

Печатка таблиці *x* та значень функції

$\text{augment}(x, y)^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	0.931	0.916	0.966	1.097	1.328	1.682	2.187	2.878	3.798	5

Обчислення інтеграла $I_{пп} := h_x \cdot \sum_i f(x_i)$

Отримане значення $I_{пп} = 2.07841$

Метод середніх прямокутників

Завдання циклу зміни *i* $i := 0 .. n-1$

Обчислення *x* та *f(x)* $xc_i := a + \frac{h_x}{2} + h_x \cdot i$

$yc_i := f(xc_i)$

Печатка таблиці *x* та значень функції

$\text{augment}(x_c, y_c)^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
1	0.96	0.916	0.932	1.021	1.199	1.488	1.914	2.507	3.306	4.36

Обчислення інтеграла $I_{сп} := h_x \cdot \sum_i f(xc_i)$

Отримане значення $I_{сп} = 1.86023$

Метод трапецій

Завдання циклу зміни *i* $i := 1 .. n$

Обчислення інтеграла $I_T := h_x \cdot \left[\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$

Отримане значення $I_T = 1.87841$

Метод парабол (Сімпсона)

Завдання циклу зміни *i* по непарним вузлам $i := 1, 3 .. n-1$

Завдання циклу зміни *j* по парним вузлам $j := 2, 4 .. n-1$

Обчислення *x* $x_i := a + i \cdot Hx$

Обчислення S1 $S1 := \sum_i f(x_i)$

Завдання циклу зміни *i* по парним вузлам $i := 2,4..n-2$

Обчислення *x* $x_i := a + i \cdot Hx$

Обчислення S2 $S2 := \sum_i f(x_i)$

Обчислення інтеграла

$$I_{\text{пар}} := \frac{h_x}{3} \cdot \left(f(x_0) + 4 \cdot \sum_i f(x_i) + 2 \cdot \sum_j f(x_j) + f(x_n) \right)$$

Отримане значення $I_{\text{пар}} = 1.86632$

Знаходження точного рішення по методу Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1.86629$$

2.4 Контрольні запитання

1 Сформулюйте задачу чисельного інтегрування.

2 Опишить методи середніх, лівих і правих прямокутників. Що можна сказати про їхню похибку, трудомісткість?

3 Задача чисельного інтегрування вирішена методом трапецій. Запропонуєте й обгрунтуйте шляхи підвищення точності (зменшення похибки) розрахунків.

4 Порівняйте метод трапецій і метод Симпсона.

5 Необхідно обчислити інтеграл методами трапецій, Симпсона, розбивши область інтегрування на 27 інтервалів. Що можна сказати про точність і придатність цих методів?

2.5 Література

Цегелик Г.Г. Чисельні методи. – Львів: Видавничий центр Львівського національного університету, 2004. – 408с.

3 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3
РІШЕННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Мета: засвоїти методи рішення систем лінійних рівнянь та способи їх реалізації за допомогою системи MathCAD

3.1 Загальні відомості

Засоби рішення систем лінійних рівнянь діляться на дві групи:

- *точні (прямі) методи*, що використовують кінцеві алгоритми для обчислення коренів системи (рішення систем за допомогою зворотної матриці, правило Крамера, метод Гауса та ін.),
- *ітераційні методи*, що дозволяють одержати рішення системи з заданою точністю шляхом збіжних ітераційних процесів (метод ітерації, метод Зейделя та ін.).

Внаслідок неминучих округлень результати навіть точних методів є наближеними. При використанні ітераційних методів, поверх того, добавляється похибка методу. Ефективне застосування ітераційних методів істотно залежить від вдалого вибору початкового наближення й швидкості збіжності процесу.

Рішення матричних рівнянь

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь щодо n невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Відповідно до правила множення матриць розглянута система лінійних рівнянь може бути записана в матричному виді

$$Ax = b, \tag{3.2}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Матриця A, стовпчиками якої є коефіцієнти при відповідних невідомих, а рядками – коефіцієнти при невідомих у відповідному рівнянні, називається *матрицею системи*; матриця-стовпчик b, елементами якої є праві частини рівнянь системи, називається *матрицею правої частини* або просто *правою частиною системи*. Матриця-стовпчик x, елементи якої – шукані невідомі, називається *рішенням системи*.

Якщо матриця A – неособлива, тобто $\det A \neq 0$, то система (3.1), або еквівалентне їй матричне рівняння (3.2), має єдине рішення.

Справді, за умови $\det A \neq 0$ існує обернена матриця A^{-1}. Домножуючи обидві частини рівняння (3.2) на матрицю A^{-1} одержимо:

$$\begin{aligned} A^{-1}Ax &= A^{-1}b, \\ x &= A^{-1}b. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Формула (3.4) дає рішення рівняння (3.2) і воно єдине.

Системи лінійних рівнянь зручно вирішувати за допомогою функції *lsolve*.

lsolve(A, b)	Повертає вектор рішення x такий, що $Ax = b$. ***Аргументи: A*** – квадратна, не сінгулярна матриця; ***b*** – вектор, що має стільки ж рядів, скільки рядів у матриці ***A***.

Метод Гауса

Метод Гауса складається в тому, що систему (3.1) призводять послідовним виключенням невідомих до еквівалентної системи з трикутною матрицею:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \qquad\quad x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_n = \beta_n, \end{cases}$$

рішення якої знаходять за рекурентними формулами:

$$x_n = \beta_n, \; x_i = \beta_i - \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{i\,j} x_j, \; (i = n-1, n-2, \; \ldots, \; 1). \tag{3.5}$$

У матричному записі це означає, що спочатку (прямий хід методу Гауса) елементарними операціями над рядками приводять розширену матрицю системи до ступінчастого виду:

$$A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \beta_n \end{bmatrix},$$

а потім (зворотний хід методу Гауса) цю ступінчасту матрицю перетворюють так, щоб у перших n стовпчиках утворилася одинична матриця:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_n \end{bmatrix}.$$

Останній ($n + 1$) стовпчик цієї матриці містить рішення системи.

У MathCAD прямий і зворотний ходи методу Гауса виконує функція *rref*(*A*).

rref(A)	Повертає ступінчасту форму матриці *A*.

При рішенні системи лінійних рівнянь методом Гауса рекомендується використовувати наступні функції MathCAD:

augment(A,B,…)	Повертає масив, сформований розташуванням ***A*** і ***B*** зліва праворуч. Масиви ***A*** і ***B*** повинні бути скалярами та мати однакове число рядків.
submatrix(A, ir, jr, ic, jc)	Повертається субматриця, що складається з всіх елементів, що знаходяться в рядках з ***ir*** по ***jr*** і стовпчиках з ***ic*** по ***jc*** матриці ***A***.

Для витягу одного стовпчика використовуйте оператор верхнього індексу.

$\boldsymbol{M}^{\langle n \rangle}$	Повертає ***n***-ний стовпчик масиву ***M***.

Метод ітерації

Нехай дана лінійна система (3.1). Приведемо її до матриць (3.3) та представимо у виді краткого матричного рівняння (3.2). Припускаючи, що діагональні коефіцієнти

$$a_{ij} \neq 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

вирішимо перше рівняння системи (3.1) щодо x_1, друге – щодо x_2 і т. д. Тоді получимо еквівалентну систему

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases}, \tag{3.6}$$

де $\beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$; $\alpha_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$ при $i \neq j$ і $\alpha_{ij} = 0$ при $i = j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$).

Ввівши матриці

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \text{ та } \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

систему (3.6) можна записати в матричній формі $\boldsymbol{x} = \beta + \alpha\boldsymbol{x}$, а будь-яке ($k + 1$) наближення обчислити за формулою:

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)}. \tag{3.7}$$

Напишемо формули наближень у розгорнутому виді:

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \beta_i, \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i\,j} x_i^{(k)} \\ \left(\alpha_{i\,i} = 0;\ i = 1,\ \ldots,\ n; k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\right). \end{cases} \tag{3.8}$$

Приведемо *достатню умову збіжності методу ітерацій.*

Теорема: Процес ітерації для приведеної лінійної системи (3.6) сходиться до єдиного її рішення, якщо будь-яка канонічна норма матриці α менше одиниці, тобто для ітераційного процесу (3.7) достатнєю є умова, що

$$\| \alpha \| < 1. \qquad (3.9)$$

Наслідок 1. Процес ітерації для системи (3.6) сходиться, якщо:

1) $\| \alpha \|_m = \max\limits_i \sum\limits_j \left| \alpha_{ij} \right| < 1$ (*m*-норма або невизначена норма);

2) $\| \alpha \|_l = \max\limits_j \sum\limits_i \left| \alpha_{ij} \right| < 1$ (*l*-норма або норма *L*1);

3) $\| \alpha \|_k = \sqrt{\sum\limits_{i,j} \left| \alpha_{ij} \right|^2} < 1$ (*k*-норма або Евклідова норма).

Наслідок 2. Для системи (3.1) процес ітерації сходиться, якщо виконуються нерівності:

1) $\left| a_{ii} \right| > \sum\limits_{j=1}^{n}{}' \left| a_{ij} \right| \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$,

2) $\left| a_{jj} \right| > \sum\limits_{i=1}^{n}{}' \left| a_{ij} \right| \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$,

де штрих у знака суми означає, що при підсумовуванні пропускаються значення $i = j$, тобто збіжність має місце, якщо модулі діагональних елементів матриці A системи (3.1) або для кожного рядка перевищують суму модулів недіагональних елементів цього рядка, або ж для кожного стовпчика перевищують суму модулів недіагональних елементів цього стовпчика.

У MathCAD існують спеціальні функції для обчислення норм матриць:

normi(*A*)	Повертає невизначену норму матриці *A*.
norml(*A*)	Повертає *L1* норму матриці *A*.
norme(*A*)	Повертає Евклідову норму матриці *A*.

У якості *умови закінчення* ітераційного процесу можна прийняти:

$$\frac{\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|}{\left\| x^{(k+1)} \right\|} \le \varepsilon,$$

де ε - задана похибка наближеного рішення $x \approx x^{(k+1)}$.

Метод Зейделя

Метод Зейделя являє собою модифікацію методу ітерацій. Основна його ідея полягає в тому, що при обчисленні (k + 1)-го наближення невідомої x_i враховуються вже обчислені раніше (k + 1)-е наближення невідомих x_1, x_2, …, x_{i-1}.

Нехай отримана еквівалентна система (3.6). Виберемо довільно початкові наближення коренів $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. Далі, припускаючи, що k-i наближення $x_n^{(k)}$ коренів відомі, відповідно до методу Зейделя будемо будувати (k + 1)-і наближення коренів за формулами:

$$\begin{aligned}
&x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \alpha_{13}x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(k)},\\
&x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(k+1)} + \alpha_{23}x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(k)},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&x_n^{(k+1)} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{(k+1)} + \alpha_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + \alpha_{nn}x_n^{(k)} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Зауважимо, що зазначені вище умови збіжності для простої ітерації залишається вірними для ітерації за методом Зейделя. Звичайно метод Зейделя дає кращу збіжність, чим метод простої ітерації, але призводить до більш громіздких обчислень.

3.2 Порядок виконання лабораторної роботи

Вирішити систему лінійних рівнянь за допомогою матричних операцій і функції *lsolve*; методом Гауса; методом простих ітерацій; методом Зейделя.

Варіанти індивідуальних завдань надані в таблиці 3.1.

Ітераційними методами рішення задачі знайти з точністю ε=10^{-5}. Оцінити похибку обчислень.

ВКАЗІВКА. Для виконання достатньої умови збіжності скористатися перестановкою рядків у вихідній системі рівнянь.

Таблиця 3.1 - Варіанти індивідуальних завдань

№	*система рівнянь*	№	*система рівнянь*
1	$4x_1 + 20x_2 + x_3 - 24 = 0$ $16x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 13 = 0$ $-4x_1 + 4x_3 + 32x_4 = 0$ $2x_1 + 10x_3 - 7 = 0$	**9**	$4x_1 - 5x_2 + 40x_3 - 19 = 0$ $10x_1 - 4x_2 + 50x_4 = 0$ $32x_1 + 4x_3 - 4x_4 - 34 = 0$ $32x_2 - 9x_4 + 49 = 0$
2	$3x_1 + 12x_2 - x_3 - 18 = 0$ $-5x_1 + 2x_2 + 32x_4 + 15 = 0$ $2x_1 + 16x_3 - 3x_4 = 0$ $12x_1 + 3x_2 - 21 = 0$	**10**	$4x_1 + 2x_2 + 32x_3 + 19 = 0$ $2x_1 + 30x_2 - 4x_4 - 39 = 0$ $36x_1 + 4x_3 - 5x_4 - 40 = 0$ $11x_3 + 40x_4 - 31 = 0$
3	$2x_1 + 16x_2 - 3x_3 - 9 = 0$ $-8x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 98 = 0$ $25x_1 - 2x_3 - 7x_4 - 5 = 0$ $-3x_2 + 20x_3 + 7 = 0$	**11**	$9x_1 + 40x_2 + 2x_3 - 81 = 0$ $12x_1 - 4x_2 + 96x_4 - 119 = 0$ $-4x_1 + 64x_3 + 8x_4 + 15 = 0$ $36x_1 + 9x_4 - 7 = 0$
4	$5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 27 = 0$ $4x_1 + 25x_2 - 3x_4 - 34 = 0$ $20x_1 + 2x_3 - 7x_4 + 28 = 0$ $-9x_3 + 40x_4 - 5 = 0$	**12**	$7x_1 - 5x_2 + 64x_3 - 18 = 0$ $9x_1 + 50x_2 - 4x_4 = 0$ $9x_2 - 7x_3 + 80x_4 - 128 = 0$ $40x_1 + 11x_2 + 19 = 0$
5	$-7x_1 + 2x_2 + 40x_3 - 21 = 0$ $9x_1 - 5x_2 + 50x_4 + 14 = 0$ $25x_1 + 4x_3 - x_4 - 13 = 0$ $32x_2 + 9x_4 - 21 = 0$	**13**	$11x_1 + 64x_2 - 2x_3 + 34 = 0$ $50x_1 + 3x_2 - 12x_4 = 0$ $13x_2 - 9x_3 + 100x_4 - 131 = 0$ $17x_1 + 80x_3 - 85 = 0$
6	$8x_1 + 40x_2 - 3x_3 - 28 = 0$ $-7x_1 + 5x_2 + 50x_4 = 0$ $8x_1 + 64x_3 - 11x_4 - 18 = 0$ $32x_1 + 5x_4 - 12 = 0$	**14**	$15x_1 + 80x_2 - 4x_3 - 93 = 0$ $64x_1 + 7x_2 - 5x_4 - 131 = 0$ $11x_2 - 8x_3 + 128x_4 + 34 = 0$ $37x_2 + 100x_3 - 125 = 0$
7	$-9x_1 + 4x_2 + 64x_3 - 24 = 0$ $10x_1 + 50x_2 - 4x_4 + 5 = 0$ $-14x_2 + 7x_3 + 80x_4 - 14 = 0$ $40x_1 + 9x_2 - 29 = 0$	**15**	$17x_1 + 100x_2 - 9x_3 = 0$ $80x_1 - 7x_2 - 5x_4 + 79 = 0$ $21x_2 + 128x_3 - 4x_4 - 139 = 0$ $19x_3 + 256x_4 + 54 = 0$
8	$-8x_1 + 64x_2 + 5x_3 - 37 = 0$ $50x_1 - 13x_2 + 2x_4 - 38 = 0$ $17x_2 - 9x_3 + 100x_4 = 0$ $-11x_1 + 80x_3 - 115 = 0$	**16**	$4x_1 - x_2 + 20x_3 - 38 = 0$ $18x_1 + 3x_2 - 2x_4 + 14 = 0$ $10x_2 + x_3 - x_4 - 15 = 0$ $4x_2 + 20x_4 - 29 = 0$

Продовження таблиці 3.1

№	***система рівнянь***	**№**	***система рівнянь***
17	$-13x_1 + 80x_2 + 2x_3 - 64 = 0$ $64x_1 + 9x_2 - 5x_4 - 29 = 0$ $12x_2 - 9x_3 + 128x_4 = 0$ $27x_2 + 100x_3 - 231 = 0$	**26**	$3x_1 + 20x_2 - 2x_3 - 41 = 0$ $5x_1 - 4x_2 + 20x_4 + 19 = 0$ $5x_2 + 32x_3 - 3x_4 - 34 = 0$ $12x_1 + 3x_4 - 29 = 0$
18	$-13x_1 + 100x_2 + 9x_3 + 128 = 0$ $80x_1 + 10x_2 - 5x_4 - 34 = 0$ $-14x_2 + 128x_3 + 7x_4 - 95 = 0$ $31x_3 + 256x_4 + 69 = 0$	**27**	$4x_1 + 25x_2 - x_3 - 17 = 0$ $6x_1 + 5x_2 + 40x_4 = 0$ $25x_1 + 3x_3 + 4x_4 + 34 = 0$ $-5x_2 + 30x_3 - 9 = 0$
19	$x_1 - 2x_2 + 16x_3 - 31 = 0$ $10x_1 - x_2 + x_4 = 0$ $12x_2 + x_3 - x_4 + 28 = 0$ $2x_2 + 16x_4 - 29 = 0$	**28**	$9x_1 - 2x_2 + 36x_3 - 19 = 0$ $4x_1 + 25x_2 - 3x_4 + 18 = 0$ $40x_1 + 5x_3 - 4x_4 - 44 = 0$ $11x_3 + 40x_4 - 21 = 0$
20	$2x_1 + 20x_2 - 3x_3 - 39 = 0$ $4x_1 - 2x_2 + 24x_4 = 0$ $2x_2 + 16x_3 - x_4 + 25 = 0$ $12x_1 + 3x_4 - 18 = 0$	**29**	$9x_1 - 2x_2 + 40x_3 - 78 = 0$ $11x_1 - 3x_2 + 50x_4 + 114 = 0$ $30x_1 - 4x_3 + 5x_4 + 21 = 0$ $32x_2 + 8x_4 - 40 = 0$
21	$2x_1 + 16x_2 - x_3 - 32 = 0$ $3x_1 - 8x_2 + 60x_4 + 64 = 0$ $4x_1 + 24x_3 - 3x_4 = 0$ $12x_1 + 3x_2 - 45 = 0$	**30**	$2x_1 + 40x_2 + 5x_3 - 42 = 0$ $4x_1 - 9x_2 + 72x_4 - 88 = 0$ $4x_1 + 64x_3 + 8x_4 - 119 = 0$ $36x_1 + 9x_4 - 54 = 0$
22	$5x_1 - 2x_2 + 40x_3 - 39 = 0$ $4x_1 + 32x_2 - 6x_4 = 0$ $7x_1 + 3x_3 + 32x_4 - 21 = 0$ $20x_1 + 4x_3 + 19 = 0$	**31**	$8x_1 - 3x_2 + 64x_3 - 131 = 0$ $-7x_1 + 50x_2 + 5x_4 + 84 = 0$ $12x_2 - 9x_3 + 80x_4 - 52 = 0$ $40x_1 + 9x_2 - 78 = 0$
23	$5x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 17 = 0$ $-8x_1 + 5x_2 + 40x_4 - 31 = 0$ $24x_1 + 3x_3 - 4x_4 - 39 = 0$ $7x_2 + 25x_3 - 8 = 0$	**32**	$7x_1 + 64x_2 - 2x_3 - 111 = 0$ $50x_1 + 5x_2 - 8x_4 - 98 = 0$ $18x_2 + 5x_3 + 112x_4 - 219 = 0$ $15x_1 + 80x_3 + 31 = 0$
24	$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 8 = 0$ $3x_1 + 3x_3 - 6 = 0$ $2x_1 - x_2 - 4x_4 - 4 = 0$ $x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 4 = 0$	**33**	$7x_1 + 64x_2 - 2x_3 - 111 = 0$ $50x_1 + 5x_2 - 8x_4 - 98 = 0$ $18x_2 + 5x_3 + 112x_4 - 219 = 0$ $15x_1 + 80x_3 + 31 = 0$

Продовження таблиці 3.1

№	*система рівнянь*	№	*система рівнянь*
25	$2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 + 4 = 0$ $x_1 - 3x_2 - 6x_4 + 7 = 0$ $2x_1 - x_3 + 2x_4 - 2 = 0$ $x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 + 2 = 0$	**34**	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 26 = 0$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 - 34 = 0$ $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - 26 = 0$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 26 = 0$
35	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 22 = 0$ $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 17 = 0$ $x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 - 8 = 0$ $x_1 - 2x_3 - 3x_4 - 7 = 0$	**38**	$2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 - 66 = 0$ $2x_2 - 6x_3 + x_4 + 63 = 0$ $8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 - 146 = 0$ $2x_1 - 7x_2 + 6x_3 - x_4 - 80 = 0$
36	$2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 18 = 0$ $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 28 = 0$ $x_2 + x_3 + 2x_4 - 10 = 0$ $11x_2 + x_3 + 2x_4 - 21 = 0$	**39**	$6x_1 - x_2 + 10x_3 - 4x_4 - 158 = 0$ $2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 - 128 = 0$ $3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 - 7 = 0$ $x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 - 17 = 0$
37	$9x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 - 23 = 0$ $7x_1 - x_3 - 5x_4 - 37 = 0$ $5x_1 - 2x_3 + x_4 - 22 = 0$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 26 = 0$	**40**	$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 - 15 = 0$ $-x_2 + 2x_3 + x_4 - 18 = 0$ $4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 - 37 = 0$ $3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 - 30 = 0$

3.3 Приклад виконання лабораторної роботи

Рішення систем лінійних рівнянь

Нумерація елементів масивів починається з одиниці ORIGIN := 1

Дана система рівнянь

$$5x1 + 30x2 - 3x3 - 17 = 0$$
$$-8x1 + 5x2 + 40x4 - 31 = 0$$
$$24x1 + 3x3 - 4x4 - 39 = 0$$
$$7x2 + 25x3 - 8 = 0$$

Перетворимо її до матричного виду, враховуючи те, що діагональні коефіцієнти не повинні дорівнювати нулю ($a_{i,j} \neq 0$):

матриця системи

$$A := \begin{pmatrix} 24 & 0 & 3 & -4 \\ 5 & 30 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 25 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

матриця правої частини

$$b := \begin{pmatrix} 39 \\ 17 \\ 8 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Рішення системи *Ax=b* за допомогою матричних операцій: $x := A^{-1} \cdot b$

$$x = \begin{pmatrix} 1.7775869089 \\ 0.2941655466 \\ 0.237633647 \\ 1.0937466885 \end{pmatrix}$$

Рішення системи *Ax=b*, яке отримане за допомогою убудованої функції *lsolve*: $x := \mathrm{lsolve}(A, b)$

$$x = \begin{pmatrix} 1.7775869089 \\ 0.2941655466 \\ 0.237633647 \\ 1.0937466885 \end{pmatrix}$$

Перевірка правильності рішення:

$$y := A \cdot x - b$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3.5527136788 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Метод Гауса

Рішення системи лінійних рівнянь методом Гауса за допомогою убудованих функцій MathCAD.

Формування розширеної матриці системи: $Ab := \mathrm{augment}(A, b)$

$$Ab = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 3 & -4 & 39 \\ 5 & 30 & -3 & 0 & 17 \\ 0 & 7 & 25 & 0 & 8 \\ -8 & 5 & 0 & 40 & 31 \end{pmatrix}$$

Приведення розширеної матриці системи до ступінчастого виду (прямий і зворотний ходи метода Гауса): $Ag := \mathrm{rref}(Ab)$

$$Ag = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1.7775869089 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.2941655466 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.237633647 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1.0937466885 \end{pmatrix}$$

Формування стовпця рішення системи: $x := Ag^{\langle 5 \rangle}$

$$x = \begin{pmatrix} 1.7775869089 \\ 0.2941655466 \\ 0.237633647 \\ 1.0937466885 \end{pmatrix}$$

$x := \text{submatrix}(Ag, 1, 4, 5, 5)$

$$x = \begin{pmatrix} 1.7775869089 \\ 0.2941655466 \\ 0.237633647 \\ 1.0937466885 \end{pmatrix}$$

Перевірка правильності рішення: $y := A \cdot x - b$

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.7763568394 \times 10^{-15} \\ 3.5527136788 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Метод простої ітерації

Визначення кількості ітерацій: $k := 1..10$

Визначення початкового наближення:

$X1_1 := 0 \qquad X2_1 := 0 \qquad X3_1 := 0 \qquad X4_1 := 0$

Розрахункові формули ітераційного процесу знаходження коренів системи

$$\begin{pmatrix} X1_{k+1} \\ X2_{k+1} \\ X3_{k+1} \\ X4_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \dfrac{b_1 - \left(X2_k \cdot A_{1,2} + X3_k \cdot A_{1,3} + X4_k \cdot A_{1,4}\right)}{A_{1,1}} \\ \dfrac{b_2 - \left(X1_k \cdot A_{2,1} + X3_k \cdot A_{2,3} + X4_k \cdot A_{2,4}\right)}{A_{2,2}} \\ \dfrac{b_3 - \left(X1_k \cdot A_{3,1} + X2_k \cdot A_{3,2} + X4_k \cdot A_{3,4}\right)}{A_{3,3}} \\ \dfrac{b_4 - \left(X1_k \cdot A_{4,1} + X2_k \cdot A_{4,2} + X3_k \cdot A_{4,3}\right)}{A_{4,4}} \end{bmatrix}$$

Матриця наближених рішень $x := \text{augment}(X1, X2, X3, X4)$

x =

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	1.625	0.56667	0.32	0.775
3	1.71417	0.32783	0.16133	1.02917
4	1.77636	0.29711	0.22821	1.07685
5	1.77595	0.29343	0.23681	1.09313
6	1.77759	0.29436	0.23784	1.09351
7	1.77752	0.29419	0.23758	1.09372
8	1.77759	0.29417	0.23763	1.09373
9	1.77759	0.29416	0.23763	1.09375
10	1.77759	0.29417	0.23763	1.09375
11	1.77759	0.29417	0.23763	1.09375

Метод Зейделя

$$A := \begin{pmatrix} 24 & 0 & 3 & -4 \\ 5 & 30 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 25 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & 40 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 39 \\ 17 \\ 8 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Завдання матриці А и стовпця В

Визначення кількості ітерацій: $k := 2..10$

Визначення початкового наближення:

$$X1_1 := 0 \qquad X2_1 := 0 \qquad X3_1 := 0 \qquad X4_1 := 0$$

Розрахункові формули ітераційного процесу знаходження коренів системи

$$\begin{pmatrix} X1_k \\ X2_k \\ X3_k \\ X4_k \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \dfrac{b_1 - \left(X2_{k-1} \cdot A_{1,2} + X3_{k-1} \cdot A_{1,3} + X4_{k-1} \cdot A_{1,4}\right)}{A_{1,1}} \\ \dfrac{b_2 - \left(X1_k \cdot A_{2,1} + X3_{k-1} \cdot A_{2,3} + X4_{k-1} \cdot A_{2,4}\right)}{A_{2,2}} \\ \dfrac{b_3 - \left(X1_k \cdot A_{3,1} + X2_k \cdot A_{3,2} + X4_{k-1} \cdot A_{3,4}\right)}{A_{3,3}} \\ \dfrac{b_4 - \left(X1_k \cdot A_{4,1} + X2_k \cdot A_{4,2} + X3_k \cdot A_{4,3}\right)}{A_{4,4}} \end{bmatrix}$$

Матриця наближених рішень $x := \mathrm{augment}(X1, X2, X3, X4)$

x =

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	1.625	0.29583	0.16133	1.02917
3	1.77636	0.29711	0.22821	1.07685
4	1.77595	0.29343	0.23681	1.09313
5	1.77759	0.29436	0.23784	1.09351
6	1.77752	0.29419	0.23758	1.09372
7	1.77759	0.29417	0.23763	1.09373
8	1.77759	0.29416	0.23763	1.09375
9	1.77759	0.29417	0.23763	1.09375
10	1.77759	0.29417	0.23763	1.09375
11	1.77759	0.29417	0.23763	1.09375

$$B1 := A\cdot\begin{pmatrix}1.77759\\0.29416\\0.23763\\1.09374\end{pmatrix} \qquad B1 = \begin{pmatrix}39.00009\\16.99986\\7.99987\\30.99968\end{pmatrix}$$ Перевірка знайдених коренів

3.4 Контрольні запитання

1 Назвіть точні методи рішення систем лінійних рівнянь.

2 Які функції MathCAD використовують для їх реалізації?

3 Сформулюйте достатні умови збіжності методу ітерації для систем лінійних рівнянь.

4 Які види норм матриць вам відомі та як їх обчислити?

5 Назвіть особливості методу Зейделя.

6 Назвіть функції для рішення систем рівнянь у MathCAD і особливості їхнього застосування.

3.5 Література

Цегелик Г.Г. Чисельні методи. – Львів: Видавничий центр Львівського національного університету, 2004. – 408с.

4 КОНТРОЛЬНА РОБОТА

4.1 Завдання на контрольну роботу й вибір варіанту. Вказівки щодо оформлення та захисту контрольної роботи

При вивченні дисципліни студенти відповідно до програми самостійно вивчають рекомендовану літературу, виконують контрольну роботу, яка складається з двох теоретичних питань та одного практичного завдання.

До виконання контрольної роботи варто приступати тільки після засвоєння відповідної частини курсу.

Номер варіанта контрольної роботи задається викладачем.

Пояснювальна записка контрольної роботи виконується на комп’ютері на стандартних аркушах формату А4 (297 х 210 мм) з ілюстраціями і брошурується або виконується рукописно в окремому зошиті. Робота оформлюється згідно СТП 15-96.

Текст необхідно розміщувати так, щоб залишалися поля у 40 мм для поміток викладача. При необхідності виправлення контрольної роботи із зауваженнями викладача, витирати або заклеювати зауваження не дозволяється. Виправлену роботу необхідно надавати для повторної перевірки з первісним варіантом роботи із зауваженнями. При виправленні за окремими зауваженнями дозволяється вклеювати аркуші з новим (виправленим) текстом.

Матеріал контрольної роботи виконується відповідно до вимог [6,7] і розташовується в наступному порядку:

- титульний лист (додаток А);
- основна частина
- перелік посилань.

Таблиця 4.1- Вихідні дані до контрольної роботи

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
№№ теор пит.	1 80	2 79	3 78	4 77	5 76	6 75	7 74	8 73	9 72	10 71	11 70	12 69	13 68	14 67
№ завд	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Продовження таблиці 4.1

№ вар.	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
№№ теор пит.	15 66	16 65	17 64	18 63	19 62	20 61	21 41	22 42	23 43	24 44	25 45	26 46	27 47
№ завд	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	13	14
№ вар.	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
№№ теор пит.	28 48	29 49	30 50	31 51	32 52	33 53	34 54	35 55	36 56	37 57	38 58	39 59	40 60
№ завд	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Перелік теоретичних питань

1 Математичні моделі та методи їх реалізації.

2 Побудування математичної моделі об'єкта, що досліджується.

3 Побудування обчислювального алгоритму.

4 Програмування алгоритму на ЕОМ і його тестування.

5 Проведення серії розрахунків з варіюванням визначених параметрів вихідної задачі та алгоритму. Аналіз одержаних результатів.

6 Джерела й класифікація погрішностей.

7 Погрішності даних, методу й обчислень.

8 Абсолютна й відносна погрішності обчислення.

9 Погрішності арифметичних операцій.

10 Зворотне завдання оцінки погрішності.

11 Математичні моделі електромагнітного поля. Загальна модель Максвелла.

12 Математичні моделі електромагнітного поля. Електростатична модель.

13 Математичні моделі електромагнітного поля. Скалярна магнітостатична модель.

14 Математичні моделі електромагнітного поля. Векторна магнітостатична модель.

15 Математичні моделі електромагнітного поля. Електродинамічна модель.

16 Математичні моделі електромагнітного поля. Магнітодинамічна модель.

17 Ітераційні методи рішення нелінійних рівнянь. Відділення коренів.

18 Метод простого перебору.

19 Метод бісекції.

20 Метод простих ітерацій.

21 Метод січних.

22 Метод Ньютона (метод дотичних).

23 Метод хорд (метод лінійної інтерполяції).

24 Чисельне рішення систем нелінійних рівнянь стандартним і спрощеним методами Ньютона.

25 Метод ділення відрізку навпіл.

26 Метод хорд.

27 Метод Ньютона (дотичних).

28 Метод простої ітерації.

29 Комбінований метод рішення нелінійних рівнянь.

30 Точні методи рішення нелінійних рівнянь.

31 Метод Ньютона для систем нелінійних рівнянь.

32 Метод простої ітерації для систем нелінійних рівнянь.

33 Знаходження коренів поліноміальних рівнянь методами Ньютона та Лагерра.

34 Знаходження коренів рівнянь QR–розкладом.

35 Знаходження коренів рівнянь методами Сіменса та Якобі.

36 Чисельні методи знаходження конструкційних параметрів із рішення СЛАР.

37 Прямі методи рішення СЛАР. Метод Гауса.

38 LU-розклад матриці системи рівняннь та методи Холецького й Жордана.

39 Метод ортогоналізації матриць.

40 Рішення СЛАР методами, які засновані на розбивці матриці.

41 Ітераційні методи рішення СЛАР. Методи Гауса-Зейделя, Якобі та верхньої релаксації.

42 Методи симетричної релаксації та спряжених градієнтів.

43 Методи неповного розкладу й передобумовленості.

44 Математичні формулювання задач інтерполяції, згладжування та апроксимації.

45 Інтерполяційні поліноми Лагранжа, Ньютона та Ерміта.

46 Базисні поліноми Ньютона.

47 Шматково-поліноміальна інтерполяція.

48 Інтерполяція сплайнами. Кубічні сплайни.

49 Інтерполяція поліноміальними сплайнами.

50 Інтерполяція сплайнами загального типу.

51 Згладжування. Згладжування даних за методом найменших квадратів.

52 Згладжувальні сплайни. Згладжування даних функціями Безьє, B-сплайни.

53 Апроксимація масивів даних.

54 Рівномірна апроксимація.

55 Апроксимація за методом найменших квадратів.

56 Апроксимуючі функції Бєзьє й сплайни.

57 Особливості задач інтерполяції, згладжування та апроксимації.

58 Криві на поверхні та в просторі. Обробка поверхонь у САПР.

59 Апроксимація похідних.

60 Метод невизначених коефіцієнтів.

61 Часткові похідні.

62 Методи чисельного інтегрування. Методи прямокутників.

63 Методи чисельного інтегрування. Метод трапецій.

64 Методи чисельного інтегрування. Метод парабол (метод Сімпсона).

65 Методи чисельного інтегрування. Метод Монте-Карло.

66 Основи метода кінцевих елементів. Приклади варіаційного формулювання диференційних рівнянь з межовими умовами.

67 Варіаційне формулювання однорідної задачі Діріхлє.

68 Варіаційне формулювання однорідної і неоднорідної задачі Неймана.

69 Метод Ріцца-Гальоркіна.

70 Метод конформних кінцевих елементів.

71 Типи кінцевих елементів.

72 Класифікація диференційних рівнянь в часткових похідних.

73 Загальне формулювання задачі Коши для звичайних диференційних рівнянь.

74 Інтегрування звичайних диференційних рівнянь методом послідовних наближень.

75 Інтегрування звичайних диференційних рівнянь за допомогою ступеневих рядів.

76 Чисельне інтегрування звичайних диференційних рівнянь стандартним методом Ейлера.

77 Чисельне інтегрування звичайних диференційних рівнянь модифікованим методом Ейлера.

78 Чисельне інтегрування звичайних диференційних рівнянь методом Ейлера-Коші.

79 Чисельне інтегрування звичайних диференційних рівнянь методом Рунге-Кутта.

80 Чисельне інтегрування систем звичайних диференційних рівнянь методом Рунге-Кутта.

4.2 Методика розрахунку системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Дана система чотирьох рівнянь з чотирма невідомими (номери варіантів надані в лабораторній роботі № 3 табл. 3.1).

Вирішити систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса (прямий і зворотний ходи)

$$
\begin{aligned}
17x1 + 2x3 + 3x4 &= 1 \\
3x1 + 15x2 + 2x3 + x4 &= -1 \\
-2x1 - 4x2 + 12x3 &= 1 \\
x1 - 3x2 + 5x3 + 13x4 &= 1
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

При вирішенні системи рівнянь методом Гауса необхідно, щоб діагональні елементи системи (4.1) не дорівнювали нулю. В противному разі необхідно переставити рівняння місцями.

Метод Гауса засновано на приведенні матриці системи до трикутного виду. Це робиться послідовним виключенням невідомих із рівнянь системи.

Спочатку за допомогою першого рівняння виключається $x1$ з усіх наступних рівнянь системи. Для цього перше рівняння ділять на 17, щоб одержати $a_{11} = 1$ й отримують першу головну строку:

$$x1 + 0.118x3 + 0.176x4 = 0.059. \tag{4.2}$$

Користуючись рівнянням (4.2), можна виключити невідомі $x1$ з 2-го, 3-го, та 4-го рівняння системи (4.1). Для цього необхідно домножити рівняння (4.2) на a_{21}=3, a_{31}=-2, a_{41}=1 та відняти результат із 2-го, 3-го й 4-го рівнянь системи (4.1) відповідно.

В результаті отримаємо систему з трьох рівнянь:

$$\begin{aligned} 15x2 + 1.647x3 + 0.471x4 &= 0.824 \\ -4x2 + 13.882x3 + 0.124x4 &= -1.118 \\ -3x2 + 4.882x3 + 12.824x4 &= 0.941 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Далі перше рівняння системи (4.3) необхідно поділити на ведучий елемент a_{22}=15 й отримати:

$$x2 + 0.11x3 + 0.031x4 = 0.055. \tag{4.4}$$

Аналогічно попередньому кроку, виключимо $x2$,так саме, як і $x1$, отримаємо систему з двох рівнянь:

$$\begin{aligned} 12.675x3 - 0.477x4 &= -0.662 \\ 5.212x3 + 12.917x4 &= 1.106 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Поділимо перше рівняння системи (4.5) на ведучий елемент a_{33}=12.675 й отримаємо

$$x3 + 0.017x4 = -0.063. \tag{4.6}$$

Тепер за допомогою рівняння (4.6) виключимо $x3$ з другого рівняння системи (4.5) та отримаємо

$$12.828x4 = 1.434. \tag{4.7}$$

Звідки получимо

$$x4=0.112.$$

Таким чином висхідну систему (4.1) приводять до еквівалентної системи з трикутною матрицею (4.8), яка складена з головних строк (4.2), (4.4) і (4.6):

$$x1 + 0.118x3 + 0.176x4 = 0.059$$

$$x2 + 0.11x3 + 0.031x4 = 0.055$$
$$x3 + 0.017x4 = -0.063 \quad (4.8)$$
$$x4 = 0.112$$

На цьому закінчується прямий хід метода Гауса.

Далі з системи (4.8) послідовно знаходимо $x3$, $x2$ та $x1$:

$$x3 = -0.063 - 0.017 \cdot 0.112 = -0.065$$
$$x2 = 0.055 - 0.11 \cdot (-0.065) - 0.031 \cdot 0.112 = -0.059$$
$$x1 = 0.059 - 0.118 \cdot (-0.065) - 0.176 \cdot 0.112 = 0.047$$

На цьому закінчується зворотний хід метода Гауса.

При підстановці рішення до системи рівнянь (4.1) різниця між лівими та правими частинами буде нев'язкою (**r**). Це зумовлено округленням результатів обчислень.

ЛІТЕРАТУРА

1 Дзісь В.Г.,Левчук О.В., Дячинська О.М. Прикладна математика на основі MathCAD: Навчальний посібник. Вінниця: ВНАУ, 2020. 378с.

2 Задачин В.М., Конюшенко І.Г. Чисельні методи: Навчальний посібник. Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с.

3 Копча-Горячкіна Г.Е. Чисельні методи в інформатиці. Навчальнометодичний посібник. Частина 1. Ужгород: Видавництво Закарпатського державного університету. 2011. 76 с.

4 Лазарєв Ю.Ф. Моделювання на ЕОМ. Навчальний посібник. К.: Політехніка, 2007. 290с.

5 Ляшенко Б.М., Кривонос О.М., Вакалюк Т.А. Методи обчислень: навчально-методичний посібник. Житомир: идавництво ДЖУ, 2014. 228 с.

6 Лященко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи: Підручник. К.:Либідь. 1996. 288с.

7 Шевчук О. Ф., Найко Д.А. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Вінниця: ВНАУ, 2020. 382 с.

8 Жалдак М.І., Рамський Ю.С. Чисельні методи математики. -К.:Радянська школа, 1984. -206 с.

9 Бігун Я.Й. Числові методи. Інтерполювання. Числове інтегрування та диференціювання: Навчальний посібник / Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича. – Чернівці: Рута, 2005. – 80с.

10 .Окуненко В.М., Ясинський В.К. Чисельні методи в моделюванні систем. – Чернівці: Золоті литаври, 2006. – 592с.

11 .Цегелик Г.Г. Чисельні методи. – Львів: Видавничий центр Львівського національного університету, 2004. – 408с.

12 Числові методи / П.П.Овчинников, В.М.Михайленко: За заг. ред. П.П.Овчинникова. – 3-тє видання, виправлене. – К.: Техніка, 2004. – 792с.

13 Ясинський В.К. Основи обчислювальних методів. Навч. посіб. – Чернівці: Золоті литаври, 2005. – 396с.

Херхагер М. MathCad 2000: полное руководство / М. Херхагер. Х. Партолль ; пер. с нем. ; под ред. К. Ю. Королькова. – Киев : ВНУ, 2000. – 416 с.

ПЕРЕЛІК НАОЧНИХ ТА ІНШИХ ПОСІБНИКІВ, МЕТОДИЧНИХ ВКАЗІВОК

1. Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни «Математичні моделі та обчислювальні методи досліджень» для студентів спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка (освітня програма «Електричні машини і апарати») усіх форм навчання / Укл.: С.Т. Яримбаш, Ю.С. Безверхня - Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2023. - 58 с.

Додаток А
Приклад титульного листа контрольної роботи

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

Кафедра «Електричні машини»

КОНТРОЛЬНА РОБОТА
з дисципліни «Математичні моделі та обчислювальні методи досліджень»

Виконав
ст. гр. _________ Ім’я ПРІЗВИЩЕ

Перевірив ______ Ім’я ПРІЗВИЩЕ

2023

Додаток Б
Убудовані оператори

У таблиці Б.1 використовуються такі позначення: ***X*** і ***Y*** - змінні або вираження будь-якого типу; ***x*** і ***y*** - речовинне число; ***z*** і ***w*** - речовинне або комплексне число; ***m*** і ***n*** - ціле число; **A** і **B** - масиви (вектори або матриці); ***i*** - дискретний аргумент; ***t*** - будь-яка змінна; ***f*** - будь-яка функція.

Таблиця Б.1 – Убудовані оператори

Оператор	Клавіші	Призначення оператора
$X := Y$	$X : Y$	Локальне присвоювання X значення Y
$X \equiv Y$	$X \sim Y$	Глобальне присвоювання X значення Y
$X =$	$X =$	Виведення значення X
$X + Y$	$X + Y$	Додавання X та Y
$X +$ $+ Y$	X **[Ctrl][↵]** Y	Те ж, що і додавання. Перенос чисто косметичний для великих за форматом формул
$X - Y$	$X - Y$	Вирахування з X значення Y
$X \cdot Y$	$X * Y$	Множення X на Y
$\frac{X}{z}$	X / z	Ділення X на z
z^w	z ^ w	Зведення z у ступінь w
$\sqrt{z}$	z \	Обчислення квадратного кореня із z
$\sqrt[n]{z}$	n **[Ctrl]**\ z	Обчислення кореня *n-го* ступеня із z
$n!$	n !	Обчислення факторіала
B_n	B [n	Введення нижнього індексу n
$A_{n,m}$	A [n , m	Введення подвійного індексу
$A^{<n>}$	A **[Ctrl]6** n	Введення верхнього індексу

Продовження таблиці Б.1

$\sum_{i=m}^{n} X$	**[Ctrl][Shift]4**	Підсумовування *X* по $i = m, m + 1, \ldots n$
$\sum_{i} X$	$	Підсумовування *X* по дискретному аргументу *i*
$\prod_{i=m}^{n} X$	**[Ctrl][Shift]3**	Перемножування *X* по $i = m, m + 1, \ldots n$
$\prod_{i} X$	#	Перемножування *X* по дискретному аргументу *i*
$\sum_{i} X$	$	Підсумовування *X* по дискретному аргументу *i*
$\int_a^b f(t)dt$	&	Обчислення визначеного інтеграла *f(t)* на інтервалі [*a, b*]
$\frac{d}{dt} f(t)$	?	Обчислення похідної *f(t)* по *t*
$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	**[Ctrl]?**	Обчислення похідної *n-го* порядку функції *f(t)* по *t*
(▪)	‘	Введення пари круглих скобок із шаблоном
$x > y$	$x > y$	Більше ніж
$x < y$	$x < y$	Менше ніж
$x \geq y$	*x* **[Ctrl]0** *y*	Більше або дорівнює
$x \leq y$	*x* **[Ctrl]9** *y*	Менше або дорівнює
$z = w$	*z* **[Ctrl]=** *w*	Логічна рівність повертає 1, якщо операнди рівні, інакше 0
$z \neq w$	*z* **[Ctrl]3** *w*	Не дорівнює
$\|z\|$	| *z*	Обчислення модуля комплексного *z*