

УДК 539.3

Д-р техн. наук А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина
Государственная инженерная академия, г. Запорожье

ВЫВОД УТОЧНЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИЗГИБА БАЛКИ ПРИ ПОМОЩИ АСИМПТОТИКО- ГРУППОВОГО АНАЛИЗА УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

При помощи метода асимптотико-группового анализа из трехмерных динамических уравнений теории упругости получены уточненные одномерные динамические уравнения изгиба балки, более точные, чем известные. В частности найденные уравнения описывают распространение двух типов волн, причем фронты этих волн движутся с теми же скоростями, как у продольных и поперечных волн в трехмерной упругой среде. Отметим, что классические уравнения изгиба балки имеют параболический тип, т.е. не описывают фронтов волн, а уравнения типа Тимошенко задают скорости фронтов волн, не совпадающие со скоростями фронтов в трехмерной среде.

Ключевые слова: асимптотико-групповой анализ, уточненные динамические уравнения изгиба стержня, деформация, изгибающий момент, перерезывающая сила, продольные волны, поперечные волны.

В работе [1] изложена процедура получения уточненных динамических уравнений обобщенного плоского напряженного состояния и изгиба пластины на основе трехмерных уравнений теории упругости при помощи метода асимптотико-группового анализа. При этом реализовано, так называемое, минимальное уп-

рошение трехмерных уравнений, приводящее к двумерным уравнениям. В данной работе рассматривается более сильное упрощение трехмерных уравнений, которое, в результате совмещения двух минимальных упрощений приводит к уточненным одномерным уравнениям изгиба балки. Таким образом, получаются

асимптотически обоснованные уточненные уравнения, позволяющие учитывать как известные в изгибе балки эффекты, так и некоторые новые.

Параметры асимптотического интегрирования для процедуры последовательных приближений

Уравнения теории упругости в декартовых координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{13} - \rho \partial_t^2 u_1 &= 0, & E \partial_1 u_1 &= \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}); \\ \partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} + \partial_3 \sigma_{23} - \rho \partial_t^2 u_2 &= 0, & E \partial_2 u_2 &= \sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33}); \\ \partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} + \partial_3 \sigma_{33} - \rho \partial_t^2 u_3 &= 0, & E \partial_3 u_3 &= \sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}); \\ G(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) &= \sigma_{12}, & G(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) &= \sigma_{13}, & G(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) &= \sigma_{23}. \end{aligned} \quad (1)$$

В соответствии с работой [1] для оценки весов слагаемых этих уравнений применим преобразования:

$$\begin{aligned} \partial_1 &= \delta^{\alpha_1} \partial_1^*, & \partial_2 &= \delta^{\alpha_2} \partial_2^*, & \partial_3 &= \partial_3^*; \\ u_1 &= \delta^{\alpha_3} u_1^*, & u_2 &= \delta^{\alpha_4} u_2^*, & u_3 &= \delta^{\alpha_5} u_3^*; \\ \sigma_{11} &= \delta^{\alpha_6} \sigma_{11}^*, & \sigma_{22} &= \delta^{\alpha_7} \sigma_{22}^*, & \sigma_{33} &= \delta^{\alpha_8} \sigma_{33}^*; \\ \sigma_{12} &= \delta^{\alpha_9} \sigma_{12}^*, & \sigma_{13} &= \delta^{\alpha_{10}} \sigma_{13}^*, & \sigma_{23} &= \sigma_{23}^*; \\ E &= E^*, & G &= G^*, & \rho &= \rho^*, & \partial_t &= \delta^{\alpha_{11}} \partial_t^*. \end{aligned} \quad (2)$$

приводящие к соотношениям:

$$\partial_i^* \sim \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_t^*, \quad E \partial_i^* u_j^* \sim \sigma_{lm}^* \quad (i, j, l, m = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Подстановка (2) в (1) дает таблицу показателей степени:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_6, \alpha_2 + \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_3 + 2\alpha_{11}; & \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8; \\ \alpha_1 + \alpha_9, \alpha_2 + \alpha_7, 0, \alpha_4 + 2\alpha_{11}; & \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_7, \alpha_6, \alpha_8; \\ \alpha_1 + \alpha_{10}, \alpha_2, \alpha_8, \alpha_5 + 2\alpha_{11}; & \alpha_5, \alpha_8, \alpha_6, \alpha_7; \\ \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_9; & \alpha_1 + \alpha_5, \alpha_3, \alpha_{10}; \alpha_2 + \alpha_5, \alpha_4, 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для построения процедуры последовательных приближений все искомые функции представляются в виде рядов:

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} u_i^k, \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{ij}^k \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

и вместо преобразований (2) выполняются преобразования:

$$\begin{aligned} \partial_1 &= \delta^{\alpha_1} \partial_1^*, & \partial_2 &= \delta^{\alpha_2} \partial_2^*, & \partial_3 &= \partial_3^*, & u_1^k &= \delta^{\alpha_3+k-1} u_1^{k*}, & u_2^k &= \delta^{\alpha_4+k-1} u_2^{k*}, \\ u_3^k &= \delta^{\alpha_5+k-1} u_3^{k*}, & \sigma_{11}^k &= \delta^{\alpha_6+k-1} \sigma_{11}^{k*}, & \sigma_{22}^k &= \delta^{\alpha_7+k-1} \sigma_{22}^{k*}, \\ \sigma_{33}^k &= \delta^{\alpha_8+k-1} \sigma_{33}^{k*}, & \sigma_{12}^k &= \delta^{\alpha_9+k-1} \sigma_{12}^{k*}, & \sigma_{13}^k &= \delta^{\alpha_{10}+k-1} \sigma_{13}^{k*}, \\ \sigma_{23}^k &= \delta^{k-1} \sigma_{23}^{k*}, & E &= E^*, & G &= G^*, & \rho &= \rho^*, & \partial_t &= \delta^{\alpha_{11}} \partial_t^*, \quad (k=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

приводящие вместо соотношений (3) к соотношениям:

$$\partial_i^* \sim \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_t^*, \quad E \partial_i^* u_j^{k*} \sim \sigma_{lm}^{k*} \sim \sigma_{23}^{k*} \quad (i, j, l, m = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, \dots).$$

Изгиб пластины

Параметры асимптотического интегрирования, отвечающие уточненным уравнениям изгиба пластины со срединной плоскостью $x_1 x_2$ имеют значения:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 0,5, \alpha_2 = 0,5, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = -0,5, \alpha_6 = 0,5, \\ \alpha_7 = 0,5, \alpha_8 = 0,5, \alpha_9 = 0,5, \alpha_{10} = 0, \alpha_{11} = 0,5. \end{aligned} \quad (5)$$

В работе [1] показано, что этим параметрам отвечают следующие зависимости искомых величин в первом и, частично, втором приближениях от x_3 :

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^1 &= \sigma_{13,1}^1, \sigma_{23}^1 = \sigma_{23,1}^1, u_3^1 = u_{3,1}^1, \sigma_{33}^1 = x_3 \sigma_{33,1}^1, u_1^1 = x_3 u_{1,1}^1, \\ u_2^1 &= x_3 u_{2,1}^1, \sigma_{11}^1 = x_3 \sigma_{11,1}^1, \sigma_{22}^1 = x_3 \sigma_{22,1}^1, \sigma_{12}^1 = x_3 \sigma_{12,1}^1, \\ \sigma_{13}^2 &= \frac{1}{2} x_3^2 \sigma_{13,1}^2, \sigma_{23}^2 = \frac{1}{2} x_3^2 \sigma_{23,1}^2, u_3^2 = \frac{1}{2} x_3^2 u_{3,1}^2, \sigma_{33}^2 = \frac{1}{6} x_3^3 \sigma_{33,1}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Все функции в правых частях соотношений (6) зависят только от x_1, x_2, t .

Уточненное плоское напряженное состояние

В работе [3] приведены значения параметров асимптотического интегрирования, отвечающие уточненному плоскому напряженному состоянию в плоскости $x_1 x_3$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -0,5, \alpha_3 = -0,5, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = -0,5, \alpha_6 = -0,5, \\ \alpha_7 = -0,5, \alpha_8 = -0,5, \alpha_9 = 0, \alpha_{10} = -0,5, \alpha_{11} = 0. \end{aligned}$$

В этом случае зависимость решения уравнений первого и, частично, второго приближений от x_2 будет иметь вид:

$$\begin{aligned} u_1^1 &= u_{1,1}^1, u_3^1 = u_{3,1}^1, \sigma_{22}^1 = \sigma_{22,1}^1, \sigma_{11}^1 = \sigma_{11,1}^1, \sigma_{33}^1 = \sigma_{33,1}^1, \sigma_{13}^1 = \sigma_{13,1}^1; \\ \sigma_{12}^1 &= x_2 \sigma_{12,1}^1, \sigma_{13}^2 = x_2 \sigma_{13,1}^2, u_2^1 = x_2 u_{2,1}^1, \sigma_{22}^2 = \frac{1}{2} x_2^2 \sigma_{22,1}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Все функции в правых частях соотношений (8) являются аргументами x_1, x_3, t .

Двойное упрощение уравнений теории упругости

Выполним теперь одновременно упрощения описанные выше. Складывая с этой целью параметры (5) и (7), получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 0,5, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -0,5, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = -1, \alpha_6 = 0, \\ \alpha_7 = 0, \alpha_8 = 0, \alpha_9 = 0,5, \alpha_{10} = -0,5, \alpha_{11} = 0,5. \end{aligned}$$

Таблица показателей степени (4) примет при этом вид:

$$\begin{aligned} 0,5, 0,5, -0,5, 0,5; & \quad 0, 0, 0, 0 \\ 1, 0, 0, 1; & \quad 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0; & \quad -1, 0, 0, 0 \\ 0,5, -0,5, 0,5; & \quad -0,5, -0,5, -0,5; \quad -1, 0, 0. \end{aligned}$$

Выполнив процедуру последовательных приближений с удержанием всех уравнений первого приближения и четырех уравнения второго приближения, будем иметь:

$$\begin{aligned} \partial_3 \sigma_{13}^1 &= 0; E \partial_1 u_1^1 = \sigma_{11}^1 - v(\sigma_{22}^1 + \sigma_{33}^1) \\ \partial_2 \sigma_{22}^1 + \partial_3 \sigma_{23}^1 &= 0; E \partial_2 u_2^1 = \sigma_{22}^1 - v(\sigma_{11}^1 + \sigma_{33}^1) \\ \partial_1 \sigma_{13}^1 + \partial_2 \sigma_{23}^1 + \partial_3 \sigma_{33}^1 - \rho \partial_t^2 u_3^1 &= 0; \partial_3 u_3^1 = 0; \\ \partial_2 u_1^1 &= 0; G(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) = \sigma_{13}^1; \partial_2 u_3^1 = 0; \\ \partial_1 \sigma_{11}^1 + \partial_2 \sigma_{12}^1 + \partial_3 \sigma_{13}^1 - \rho \partial_t^2 u_1^1 &= 0; \\ \partial_1 \sigma_{12}^1 + \partial_2 \sigma_{22}^1 + \partial_3 \sigma_{23}^1 - \rho \partial_t^2 u_2^1 &= 0; \\ \partial_1 \sigma_{13}^1 + \partial_2 \sigma_{23}^1 + \partial_3 \sigma_{33}^1 - \rho \partial_t^2 u_3^1 &= 0; \\ E \partial_3 u_3^2 &= \sigma_{33}^2 - v(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Зависимость решения этих уравнений от x_2 и x_3 получаем путем комбинирования зависимостей (6) и (8):

$$\begin{aligned} u_1^1 &= x_3 u_{1,1}^1, u_2^1 = x_2 x_3 u_{2,1}^1, u_3^1 = u_{3,1}^1, \\ \sigma_{11}^1 &= x_3 \sigma_{11,1}^1, \sigma_{22}^1 = x_3 \sigma_{22,1}^1, \sigma_{33}^1 = x_3 \sigma_{33,1}^1; \\ \sigma_{12}^1 &= x_2 x_3 \sigma_{12,1}^1, \sigma_{13}^1 = \sigma_{13,1}^1, \sigma_{23}^1 = x_2 \sigma_{23,1}^1, \\ u_3^2 &= \frac{1}{2} (x_3)^2 u_{3,1}^2, \sigma_{22}^2 = \frac{1}{2} (x_2)^2 x_3 \sigma_{22,1}^2; \\ \sigma_{13}^2 &= \frac{1}{2} (x_3)^2 \sigma_{13,1}^2, \sigma_{23}^2 = \frac{1}{2} x_2 (x_3)^2 \sigma_{23,1}^2, \\ \sigma_{33}^2 &= \frac{1}{6} (x_3)^3 \sigma_{33,1}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь все функции в правых частях соотношений зависят только от x_1 и t . Зависимости от x_2 и x_3 выписаны явно.

Подстановка (10) в (9) дает:

$$\begin{aligned} E \partial_1 u_{1,1}^1 &= \sigma_{11,1}^1 - v(\sigma_{22,1}^1 + \sigma_{33,1}^1); \\ E u_{2,1}^1 &= \sigma_{22,1}^1 - v(\sigma_{11,1}^1 + \sigma_{33,1}^1); \\ \partial_1 \sigma_{13,1}^1 + \sigma_{23,1}^1 + \sigma_{33,1}^1 - \rho \partial_t^2 u_{3,1}^1 &= 0; \\ G(\partial_1 u_{3,1}^1 + u_{1,1}^1) &= \sigma_{13,1}^1; \\ \partial_1 \sigma_{11,1}^1 + \sigma_{12,1}^1 + \sigma_{13,1}^1 - \rho \partial_t^2 u_{1,1}^1 &= 0; \\ \partial_1 \sigma_{12,1}^1 + \sigma_{22,1}^1 + \sigma_{23,1}^1 - \rho \partial_t^2 u_{2,1}^1 &= 0; \\ \partial_1 \sigma_{13,1}^1 + \sigma_{23,1}^1 + \sigma_{33,1}^1 - \rho \partial_t^2 u_{3,1}^1 &= 0, \\ E u_{3,1}^2 &= \sigma_{33,1}^2 - v(\sigma_{11,1}^2 + \sigma_{22,1}^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Получилось восемь уравнений относительно четырнадцати неизвестных функций от x_1, t , входящих в (10). Недостающие уравнения берем из граничных

условий на боковых сторонах бруса.

Нахождение недостающих уравнений для двойного упрощения теории упругости

Пусть поперечное сечение балки является прямоугольником со сторонами: $x_2 = \pm h_2$; $x_3 = \pm h_3$.

В соответствии (10) задаем:

$$\begin{aligned} x_3 = h_3 &\Rightarrow \sigma_{33} = \frac{1}{6} (h_3)^3 \sigma_{33,1}^2 + h_3 \sigma_{33,1}^1 = q^+; \\ \sigma_{13} &= \frac{1}{2} (h_3)^2 \sigma_{13,1}^2 + \sigma_{13,1}^1 = \tau_{31}^+; \\ \sigma_{23} &= x_2 \left[\frac{1}{2} (h_3)^2 \sigma_{23,1}^2 + \sigma_{23,1}^1 \right] = x_2 \tau_{32}^+; \\ x_3 = -h_3 &\Rightarrow \sigma_{33} = q^- = -q^+; \\ \sigma_{13} &= \tau_{31}^- = \tau_{31}^+; \sigma_{23} = x_2 \tau_{32}^- = x_2 \tau_{32}^+; \\ x_2 = h_2 &\Rightarrow \sigma_{22} = x_3 \left[\frac{1}{2} (h_2)^2 \sigma_{22,1}^2 + \sigma_{22,1}^1 \right] = x_3 p^+; \\ \sigma_{12} &= x_3 h_2 \sigma_{12,1}^1 = x_3 \tau_{12}^+; \\ \sigma_{23} &= \frac{1}{2} (x_3)^2 h_2 \sigma_{23,1}^2 + h_2 \sigma_{23,1}^1 = \frac{1}{2} (x_3)^2 \tau_{23,2}^+ + \tau_{23,1}^+; \\ x_2 = -h_2 &\Rightarrow \sigma_{22} = x_3 p^- = -x_3 p^+, \sigma_{12} = x_3 \tau_{12}^- = -x_3 \tau_{12}^+; \\ \sigma_{23} &= \frac{1}{2} (x_3)^2 \tau_{23,2}^- + \tau_{23,1}^- = -\frac{1}{2} (x_3)^2 \tau_{23,2}^+ - \tau_{23,1}^+. \end{aligned} \quad (12)$$

Мы видим, что достаточно рассмотреть граничные условия на гранях $x_3 = h_3, x_2 = h_2$; условия на противоположных гранях повторяются симметрично или антисимметрично.

Остановимся подробнее на касательных напряжениях σ_{23} (рис. 1). Они задаются на обеих гранях $x_3 = h_2$ и $x_2 = h_2$ и связаны законом парности касательных напряжений.

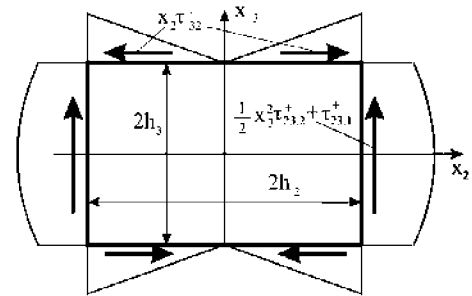


Рис. 1. Направление действия на стержень напряжения σ_{23} . Поперечное сечение

В угловой точке будет:

$$\begin{aligned} \sigma_{23} &= h_2 \left[\frac{1}{2} (h_3)^2 \sigma_{23,1}^2 + \sigma_{23,1}^1 \right] = \\ &= h_2 \tau_{32}^+ = \frac{1}{2} (h_3)^2 \tau_{23,2}^+ + \tau_{23,1}^+. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, величины $\tau_{32}^+, \tau_{23,1}^+, \tau_{23,2}^+$, задающие касательные напряжения σ_{23} на смежных пер-

пендикулярных гранях, не могут выбираться произвольно, поскольку связаны соотношением (13). Можно произвольно задать любые две из этих величин, а третья определяется из (13).

В итоге из (13) получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(h_3)^3 \sigma_{33,1}^2 + h_3 \sigma_{33,1}^1 &= q^+; \frac{1}{2}(h_3)^2 \sigma_{13,1}^2 + \sigma_{13,1}^1 = \tau_{31}^+; \\ h_2 \sigma_{12,1}^1 &= \tau_{12}^+; \frac{1}{2}(h_2)^2 \sigma_{22,1}^2 + \sigma_{22,1}^1 = p^+; h_2 \sigma_{23,1}^2 = \tau_{23,2}^+; \\ h_2 \sigma_{23,1}^1 &= \tau_{23,1}^+. \end{aligned}$$

Эти шесть уравнений дополняют восемь уравнений (11), образуя в совокупности четырнадцать уравнений для поиска четырнадцати искомым функций x_1 и t , входящих в соотношения (10)

Вывод динамических уточненных уравнений изгиба балки

Рассмотрим подробнее граничные условия (12). На Рис. 2 изображены напряжения, отвечающие первому и девятому из условий (12).

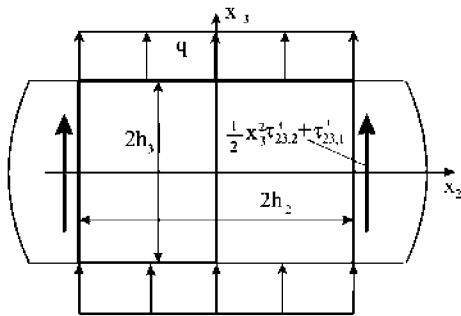


Рис. 2. Направления действия на стержень напряжений σ_{23} и σ_{33} . Поперечное сечение

На верхней грани действуют равномерно распределенные нормальные напряжения q^+ . На нижней грани аналогичное напряжение имеет противоположный знак ($q^- = -q^+$), но геометрически оно направлено в ту же сторону, что и напряжение, действующее на верхней грани. Складывая эти напряжения и умножая на ширину балки $2h_2$, получаем суммарную нагрузку:

$$q_\sigma = 4h_2 q^+.$$

В соответствии с этим первое из уравнений (12) примет вид:

$$\frac{2}{3} h_2 (h_3)^3 \sigma_{33,1}^2 + 4h_2 h_3 \sigma_{33,1}^1 = q_\sigma. \quad (14)$$

На правой и левой гранях действуют касательные напряжения, направленные так же, как и напряжение q^+ . Интегрируя по высоте и складывая, т.е. удваивая напряжения, действующие на правой грани, получаем:

$$q_\tau = \frac{2}{3} (h_3)^3 \tau_{23,2}^+ + 4h_3 \tau_{23,1}^+.$$

Умножая на два и интегрируя девятое из уравнений (12), получаем отсюда:

$$\frac{2}{3} h_2 (h_3)^3 \sigma_{23,1}^2 + 4h_2 h_3 \sigma_{23,1}^1 = q_\tau.$$

Суммарная поперечная нагрузка, действующая на балку, будет:

$$q = q_\sigma + q_\tau.$$

Рассмотрим теперь касательные напряжения на всех гранях балки, направленные вдоль оси x_1 (рис. 3).

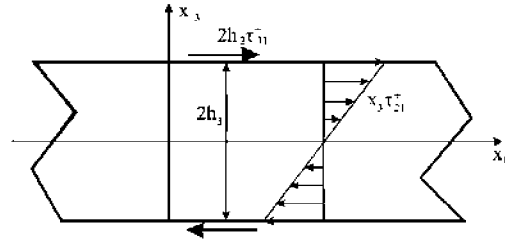


Рис. 3. Направления действия касательных напряжений σ_{13} и σ_{12} на балку. Продольное сечение

На верхней и нижней гранях действуют постоянные касательные напряжения τ_{31}^+ . На рис. 3 они изображены умноженными на ширину балки $2h_2$. Такие напряжения образуют пару сил с плечом $2h_3$. Момент этой пары равен:

$$m_1 = 4h_2 h_3 \tau_{31}^+.$$

Умножая второе из уравнений (12) на $4h_2 h_3$, получаем:

$$\frac{1}{2} (h_3)^2 \sigma_{13,1}^2 + \sigma_{13,1}^1 = \frac{m_1}{4h_2 h_3}.$$

Находим главный момент нагрузки $x_3 \tau_{21}^*$, удваивая ее с учетом действия на двух боковых гранях балки, умножая на x_3 и интегрируя по x_3 :

$$m_2 = \frac{4}{3} (h_3)^3 \tau_{21}^+.$$

Аналогично поступим с восьмым уравнением из уравнений (12):

$$\frac{4}{3} h_2 (h_3)^3 \sigma_{12,1}^2 = m_2. \quad (17)$$

Суммарный момент касательных нагрузок, изображенных на рис. 3, равен:

$$m = m_1 + m_2.$$

Рассмотренные виды нагрузок на боковых поверхностях рассматривались и ранее при изучении классического изгиба балки [2]. Рассмотрим еще и неклассические виды нагрузок, отвечающие третьему и седьмому из уравнений (12) (рис. 4, а).

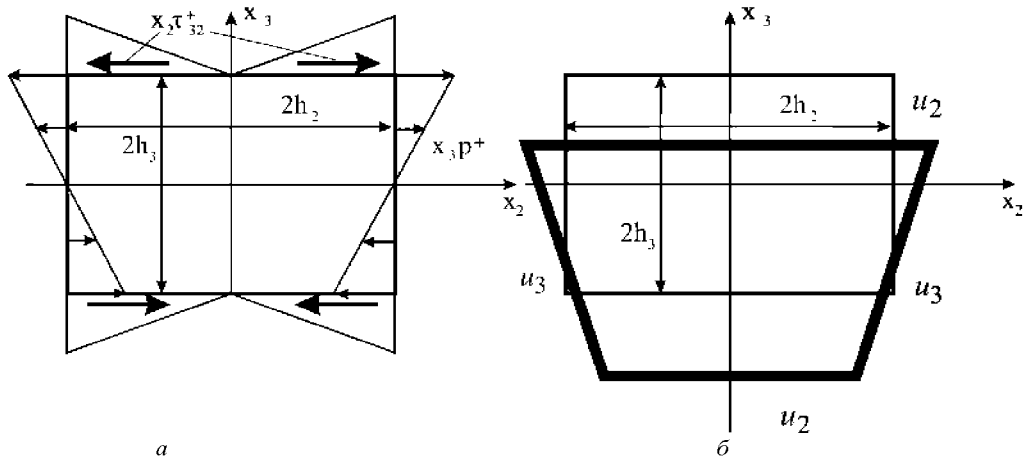


Рис. 4. Неклассические виды нагрузок. Поперечное сечение стержня:

a – направления действия напряжений σ_{22} и σ_{23} ; *б* – перемещения u_2 и u_3 , вызванные действием на балку данных нагрузок

Умножая нормальную нагрузку на боковой поверхности на x_3 и интегрируя по x_3 получаем:

$$p = \frac{2}{3} (h_3)^3 p^+.$$

В соответствии с этим из седьмого уравнения (12) имеем:

$$\frac{1}{2} (h_2)^2 \sigma_{22,1}^2 + \sigma_{22,1}^1 = \frac{3p}{2(h_3)^3}. \quad (18)$$

Касательные усилия на верхней и нижней гранях образуют пары с плечом $2h_3$. Умножая эти усилия на плечо, а также на x_2 и интегрируя по x_2 получаем:

$$r = \frac{4}{3} (h_2)^3 h_3 \tau_{32}^+.$$

В соответствии с этим третье из уравнений (12) дает:

$$\frac{1}{2} (h_3)^2 \sigma_{23,1}^2 + \sigma_{23,1}^1 = \frac{3r}{2(h_2)^3}.$$

Таким образом, шесть уравнений (12) заменены шестью эквивалентными уравнениями (14), (15), (16), (17), (18) и (19). Из уравнения (14) выражаем $\sigma_{33,1}^2$; решая совместно систему двух уравнений (15) и (19), находим $\sigma_{23,1}^2$ и $\sigma_{23,1}^1$; из уравнения (16) выражаем $\sigma_{13,1}^2$; из (17) находим $\sigma_{12,1}^1$; из (18) выражаем $\sigma_{22,1}^2$:

$$\sigma_{33,1}^2 = \frac{3}{2h_2(h_3)^3} q_\sigma - \frac{6}{(h_3)^2} \sigma_{33,1}^1;$$

$$\sigma_{23,1}^2 = \frac{3}{(h_3)^2} \left(\frac{3r}{2(h_2)^3} - \frac{q_\tau}{4h_2h_3} \right);$$

$$\sigma_{23,1}^1 = \frac{3}{2} \left(\frac{q_\tau}{4h_2h_3} - \frac{r}{2(h_2)^3} \right);$$

$$\sigma_{13,1}^2 = \frac{m_1}{2h_2(h_3)^3} - \frac{2}{(h_3)^2} \sigma_{13,1}^1;$$

$$\sigma_{12,1}^1 = \frac{3m_2}{4h_2(h_3)^3}; \sigma_{22,1}^2 = \frac{3p}{(h_2)^2(h_3)^3} - \frac{2}{(h_2)^2} \sigma_{22,1}^1. \quad (20)$$

Завершив переход к интегральным величинам в граничных условиях, выполним аналогичный переход для искомых функций. Вначале рассмотрим общепринятую для балок величину – перерезывающую силу. Она равна:

$$Q = \frac{2}{3} h_2 (h_3)^3 \sigma_{13,1}^2 + 4h_2h_3 \sigma_{13,1}^1.$$

Подставляя сюда выражение для $\sigma_{13,1}^2$ из (20) получаем:

$$Q = \frac{m_1 + 8h_2h_3 \sigma_{13,1}^1}{3}.$$

Отсюда:

$$\sigma_{13,1}^1 = \frac{3Q - m_1}{8h_2h_3}, \sigma_{13,1}^2 = \frac{3(m_1 - Q)}{4h_2(h_3)^3}. \quad (21)$$

Другой важной интегральной силовой величиной является изгибающий момент:

$$M = \frac{4h_2(h_3)^3}{3} \sigma_{11,1}^1 \Rightarrow \sigma_{11,1}^1 = \frac{3}{4h_2(h_3)^3} M. \quad (22)$$

По аналогии вводим не имеющие общепризнанных названий величины:

$$K = 2h_2 \sigma_{22,1}^1 \int_{-h_3}^{h_3} (x_3)^2 dx_3 \Rightarrow \sigma_{22,1}^1 = \frac{3}{4h_2(h_3)^3} K. \quad (23)$$

$$N = 2h_2 \sigma_{33,1}^1 \int_{-h_3}^{h_3} (x_3)^2 dx_3 \Rightarrow \sigma_{33,1}^1 = \frac{3}{4h_2(h_3)^3} N. \quad (24)$$

Собирая воедино результаты из (20), (21), (22), (23) и (24), и подставляя их в (11), а также, вводя обозначения для перемещений

$$w = u_{3,1}^1, \quad W = u_{2,1}^2, \quad V = u_{2,1}^1, \quad \varphi = u_{1,1}^1.$$

Получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_1 \varphi &= \frac{3}{4Eh_2(h_3)^3} (M - v(K + N)), \\ V &= \frac{3}{4Eh_2(h_3)^3} (K - v(M + N)), \\ W &= \frac{3}{4Eh_2(h_3)^3} (N - v(M + K)), \\ \partial_1 w + \varphi &= \frac{3Q - m_1}{8Gh_2h_3}, \\ \partial_t^2 \varphi &= \frac{3}{4\rho h_2(h_3)^3} (\partial_1 M + m_2 + m_1 - Q), \\ \partial_1 Q + \frac{2}{(h_3)^2} N - \frac{8h_2h_3\rho}{3} \partial_t^2 w &= \frac{1}{3} \partial_1 m_1 - q_\tau + \frac{2h_3}{(h_2)^2} r, \\ \partial_t^2 V &= \frac{3}{\rho h_2(h_3)^2} \left(\frac{\partial_1 m_2}{4h_3} + \frac{p}{h_2h_3} - \frac{K}{2(h_2)^2 h_3} + \frac{3r}{2(h_2)^2} - \frac{q_\tau}{4h_3} \right), \\ \partial_t^2 W &= \frac{3}{2\rho h_2(h_3)^2} \left(\frac{\partial_1 m_1}{2h_3} - \frac{\partial_1 Q}{2h_3} + \frac{3r}{(h_2)^2} - \frac{q_\tau}{2h_3} + \frac{q_\sigma}{h_3} - \frac{3N}{(h_3)^3} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Решая систему из первых трех уравнений (25) найдем величины M, K, N :

$$\begin{aligned} M &= \frac{4Eh_2(h_3)^3}{3(1+v)(1-2v)} ((1-v)\partial_1 \varphi + v(W + V)), \\ K &= \frac{4Eh_2(h_3)^3}{3(1+v)(1-2v)} ((1-v)V + v(W + \partial_1 \varphi)), \\ N &= \frac{4Eh_2(h_3)^3}{3(1+v)(1-2v)} ((1-v)W + v(\partial_1 \varphi + V)). \end{aligned} \quad (26)$$

Из четвертого уравнения выразим величину Q :

$$Q = \frac{8}{3} Gh_2h_3 (\partial_1 w + \varphi) + \frac{1}{3} m_1.$$

Подставляя величины из (26) и (27) в остальные уравнения (25), после произведения некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} &\frac{E(1-v)}{\rho(1+v)(1-2v)} \partial_t^2 \varphi - \partial_t^2 \varphi - \frac{2G}{\rho(h_3)^2} \varphi + \\ &+ \frac{Ev}{\rho(1+v)(1-2v)} (\partial_1 W + \partial_1 V) - \\ &- \frac{2G}{\rho(h_3)^2} \partial_1 w = -\frac{3}{4\rho h_2(h_3)^3} \left(\frac{2}{3} m_1 + m_2 \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{G}{\rho} \partial_t^2 w - \partial_t^2 w + \frac{1}{\rho} \partial_1 \varphi \left(G + \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \right) + \\ &+ \frac{E}{\rho(1+v)(1-2v)} ((1-v)W + vV) = \\ &\frac{3}{8h_2h_3\rho} \left(\frac{2h_3}{(h_2)^2} r - q_\tau \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} (\partial_1 \varphi + W) + \frac{\rho(h_2)^2}{2} \partial_t^2 V + \\ &+ \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} V = \frac{3h_2}{2(h_3)^2} \times \\ &\times \left(\frac{\partial_1 m_2}{4h_3} + \frac{p}{h_2h_3} + \frac{3r}{2(h_2)^2} - \frac{q_\tau}{4h_3} \right); \\ &\partial_1 \varphi \left(G + \frac{3Ev}{(1+v)(1-2v)} \right) + \frac{\rho(h_3)^2}{2} \partial_t^2 W + \\ &+ \frac{3E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} W + \frac{3Ev}{(1+v)(1-2v)} V + \\ &+ G\partial_t^2 w = \frac{3}{4h_2} \left(\frac{1}{3h_3} \partial_1 m_1 + \frac{3r}{(h_2)^2} - \frac{q_\tau}{2h_3} + \frac{1}{h_3} q_\sigma \right). \end{aligned}$$

Коэффициент, который остался в первом из уравнений при $\partial_t^2 \varphi$ – это скорость распространения продольных волн, а коэффициент, который остался во втором уравнении при $\partial_t^2 w$ – это скорость распространения сдвиговых волн.

Таким образом, наши уравнения описывают распространение двух типов волн, причем в точности с теми же скоростями, как и уравнения теории упругости. Третье и четвертое уравнения описывают искажения поперечного сечения балки. Перемещение V описывает симметричную деформацию в направлении x_2 , а перемещение W антисимметричную деформацию в направлении x_3 .

Выводы

Получены уточненные динамические уравнения изгиба стержня на основе асимптотико-группового анализа дифференциальных уравнений теории упругости, описывающие распространение двух типов волн, причем в точности с теми же скоростями, как и уравнения теории упругости.

Перечень ссылок

1. Шамровский А. Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости / А. Д. Шамровский. – Запорожье: Изд-во ЗГИА, 1997. – 169 с.

2. Шамровский А. Д. Вывод динамических уравнений изгиба балки прямоугольного поперечного профиля при помощи асимптотико-группового анализа уравнений теории упругости / А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла. – Дніпропетровськ : Наука і освіта, 2010. – Вип. 11. – С. 306–317.
3. Шамровский А. Д. Вывод динамических уравнений продольной деформации стержня при помощи двойного упрощения уравнений теории упругости / А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2009. – № 2. – С. 111–115.

Одержано 14.10.2010

Шамровський О.Д., Егарміна Л.М. Виведення уточнених динамічних рівнянь вигину балки за допомогою асимптотико-групового аналізу рівнянь теорії пружності

За допомогою методу асимптотико-групового аналізу отримані із тривимірних динамічних рівнянь теорії пружності уточнені одновимірні динамічні рівняння вигину балки, більш точні, ніж загальновідомі. Зокрема, знайдені рівняння описують розповсюдження двох типів хвиль, при чому фронти цих хвиль рухаються із тими ж швидкостями, як у повздожніх та поперечних хвиль у тривимірному пружному середовищі. Зауважимо, що класичні рівняння вигину балки мають параболічний тип, тобто не описують фронтів хвиль, а рівняння типу Тимошенко задають швидкості фронтів хвиль такі, що не співпадають зі швидкостями фронтів у тривимірному середовищі.

Ключові слова: асимптотико-груповий аналіз, уточнені динамічні рівняння вигину стержня, деформація, момент що вигинає, сила що перерізує, повздожні хвилі, поперечні хвилі.

Shamrovskiy A., Egarmina L. Conclusion of the bar bending specified dynamic equations through the asymptotic-group analysis of resiliency theory equations

Through the method of asymptotic-group analysis the threedimensional dynamic equations of longitudinal bar deformation given from precise one-dimensional dynamic theory equations, more exact, than known. In particular equations describe distribution of two waves types are found, thus fronts of these waves move with the same speeds, as the longitudinal and transversal waves in a three-dimensional resilient environment. We will mark that classic equations of bar bending have a parabolic type, i.e. does not describe wave fronts, and equation of Timoshenko type set fronts of waves speeds, not consilient with speeds of fronts in a three-dimensional environment.

Key words: asymptotic-group analysis, specified dynamic equations of bar bending, deformation, bending moment, an intersecting force, the longitudinal waves, the transversal waves.
