

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

М.В. Фролов

Наукові
дослідження
та моделювання
технічних об'єктів
в машинобудуванні
(препринт)

Навчальний та
практичний посібник

Запоріжжя - 2025

В посібнику надані основні принципи та підходи до математичного моделювання технічних об'єктів та процесів; види математичних моделей. Розглянуті питання статистичного аналізу результатів дослідження; аналізу надійності технічних об'єктів та областей застосування законів розподілу з цією метою. Розглядаються питання випробування на надійність, планування демонстраційних випробувань та аналізу їх результатів. Наведені елементи дисперсійного, кореляційного та регресійного аналізів. Дані підходи для проведення експериментальних досліджень методами однофакторного та багатфакторного експериментів; планування експерименту; аналізу та інтерпретації отриманих результатів. Дано огляд апріорного моделювання, та послідовність обробки результатів дослідження, що базується на експертних оцінках. Розглянуті основні принципи, методика планування експерименту, обробки та оцінки його даних за концепцією Тагучі при оптимізації та оцінці якості виробів. Усі розділи супроводжуються поясненнями та прикладами в основному з дослідження металорізального інструменту. Наряду з поданням теоретичних відомостей, призначений для вирішення суто практичних задач, пов'язаних з постановкою експериментів, математичною обробкою та аналізом їх результатів, забезпеченням надійності технічних об'єктів.

Посібник орієнтовано перш за все на здобувачів освіти спеціальностей G9 Прикладна механіка, G11 Машинобудування, G12 Авіаційна та ракетно-космічна техніка будь яких освітніх програм які вивчають дисципліни «Методологія наукових досліджень», «Математичне моделювання процесу різання та металорізального інструменту», «Математична статистика в наукових дослідженнях» та ін.

Затверджено на засіданні кафедри «Металорізальні верстати та інструменти. Протокол №1 від 21.08.2025

Рекомендовано до видання НМК Машинобудівного факультету. Протокол № 1 від 26.08.2025 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	8
1. ПРИНЦИПИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ. РІЗНОВИДИ МОДЕЛЕЙ ТА ЇХ ЕЛЕМЕНТИ.	11
2. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ДО ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ	17
2.1. Загальні положення	17
2.2. Деякі особливості побудови оптимізаційних моделей	22
3. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ В ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ	25
3.1. Загальні положення	25
3.2. Імовірність випадкової події	28
3.3. Математичне очікування та середнє арифметичне	29
3.4. Розмах вибірки	31
3.5. Дисперсія та середнє квадратичне (стандартне) відхилення	32
3.6. Коефіцієнт варіації	33
3.7. Довірчий інтервал, довірча імовірність та рівень значущості	36
3.8. Визначення необхідної кількості випробувань	39
3.9. Визначення грубих помилок за результатами вимірів	40

3.10. Особливості визначення середнього арифметичного, дисперсії та стандартного відхилення для безперервних випадкових величин.....	42
4. ЕЛЕМЕНТИ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ. ПОРІВНЯННЯ ДИСПЕРСІЙ.....	44
5. ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ РІЗЦІВ З МЕХАНІЧНИМ КРІПЛЕННЯМ БАГАТОГРАННИХ ПЛАСТИНОК МЕТОДОМ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ (ПРИКЛАД)	51
6. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ТЕОРЕТИЧНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ВАРІАЦІЙНІ РЯДИ	56
6.1. Теоретичні закони розподілу та їх властивості. Центри розподілу	56
6.2. Побудова варіаційного ряду	59
6.3. Показники форми законів розподілу.....	62
7. ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ НА ОСНОВІ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ	65
7.1. Поняття про надійність технічних об'єктів.....	65
7.2. Інтенсивність відмов.....	70
7.3. Теоретичні та емпіричні (вибіркові) закони розподілу в контексті надійності технічних об'єктів	75
7.3.1. Нормальний розподіл	77
7.3.2. Експоненціальний розподіл.....	84

7.3.3. Гамма-розподіл	88
7.3.4. Розподіл Вейбулла	94
7.3.5. Розподіл Пуассона та потік відмов	104
7.4. Критерії відповідності емпіричного та теоретичного розподілів.....	107
7.4.1. Критерій згоди Пірсона χ^2	108
7.4.2. Критерій типу Колмогорова – Смірнова.....	110
7.5. Випробування на надійність та планування демонстраційних випробувань.....	113
8. ВИДИ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ МІЖ ВИПАДКОВИМИ ВЕЛИЧИНАМИ. ЕЛЕМЕНТИ КОРЕЛЯЦІЙНОГО АНАЛІЗУ .	125
9. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ЕКСПЕРИМЕНТ ТА РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ. ОДНОФАКТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ	136
9.1. Експеримент, однофакторний експеримент та рівняння регресії.....	136
9.2. Формулювання методу найменших квадратів.....	139
9.3. Перевірка адекватності моделі.....	143
9.4. Паралельні досліди (повтори) та умови їх проведення.	148
10. БАГАТОФАКТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ. ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ	149
10.1. Загальні положення	149

10.2. Вибір виду моделі.....	152
10.3. Прийняття рішень перед плануванням експерименту.....	154
10.4. Повний факторний експеримент (ПФЕ).....	157
10.5. Властивості матриці повного факторного експерименту.	162
10.6. Рандомізація	164
10.7. Прийняття рішень після побудови моделі. Інтерпретація отриманих результатів	166
10.8. Дробовий факторний експеримент. Дробова репліка.....	171
11. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ СТІЙКОСТІ КІНЦЕВИХ ФРЕЗ ВІД ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ (ПРИКЛАД)	174
12. ПЛАНИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	178
12.1. Загальні положення	178
12.2. Ортогональні центральні композиційні плани.....	180
13. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ СТІЙКОСТІ ЦЕНТРУВАЛЬНИХ СВЕРДЕЛ ЗА ДОПОМОГОЮ ОРТОГОНАЛЬНИХ ЦЕНТРАЛЬНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ ПЛАНІВ (ПРИКЛАД)	187
14. АПРІОРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ: ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ТА МЕТОД ЕКСПЕРТНИХ ОЦІНОК.....	193
14.1. Загальні положення	193
14.2. Метод експертних оцінок	195
14.3. Визначення вагових коефіцієнтів	206

14.3.1. Метод Уея.....	206
14.3.2. Метод середніх рангів.....	209
15. ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ ЗА КОНЦЕПЦІЄЮ ТАГУЧІ В ЗАБЕЗПЕЧЕННІ ЯКОСТІ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ	212
15.1. Основні принципи	212
15.2. Результуючі показники.....	219
15.3. Приклади ортогональних масивів.....	220
15.4. Аналіз результатів: розрахунок середнього ефекту факторів, побудова діаграм ефектів та визначення оптимального рішення. ANOVA	224
15.5. Підсумки	232
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	234

... Не кажи нічого незрозумілого [учневі, покладаючись на те], що врешті-решт це буде [ним] зрозуміло, і не кажи: «Коли буде у мене вільний час, я стану вчитися», - бо може статися, що вільного часу в тебе не буде.

*Талмуд, Трактат «Піркей Авот»
(2:4)*

ВСТУП

Вивчення технічно-складних систем та/або об'єктів до яких відносяться виробничі процеси взагалі та процеси обробки металів різанням зокрема, в натурних умовах у багатьох випадках є складним, неможливим або просто дуже дорогим. У таких випадках використовується моделювання як метод наукового пізнання. У широкому сенсі, *моделювання, це дослідження об'єктів на їх моделях; побудова та вивчення моделей реально існуючих об'єктів, процесів або явищ з метою отримання пояснень цих явищ, а також для передбачення явищ, що цікавлять дослідника.* Під терміном «модель» треба розуміти матеріальний або уявний об'єкт який у процесі дослідження заміщує об'єкт-оригінал. Шляхом вивчення моделей можна з'ясувати як оригінал буде поводити себе в натурних умовах. Крім цього, застосування моделей дає можливість прогнозувати поведінку оригіналу, так би мовити, зазирнути у майбутнє та побачити наслідки прийнятих рішень.

Загалом можна розрізнити декілька видів моделей [1]:

Уявні або інтуїтивні моделі. Для їх реалізації потрібна людина (експерт), який на основі наявних знань та досвіду проводить уявні експерименти з об'єктом або процесом з метою виявити відповідність вимогам або вибрати найкращий варіант з декількох за визначеним показником якості. Наприклад, вивчаючи креслення декількох конструкцій вузла, експерт може визначити чи витримає конструкція задане навантаження; яка конструкція

забезпечує меншу трудомісткість виготовлення або меншу витрату матеріалів та ін.

Фізичні моделі. За їх допомогою можна оцінити різні аспекти функціонування об'єкту-оригіналу шляхом реалізації та випробування самого об'єкту або його зменшеної (іноді збільшеної) і часто спрощеної копії. Так дослідження оброблюваності матеріалів, фізико-механічних характеристик процесу різання, стійкості металорізального інструменту тощо. здебільшого виконуються у спрощених умовах, найчастіше при поздовжньому точінні циліндричних деталей.

Математичні моделі. Це сукупність математичних об'єктів та співвідношень між ними (розрахункових формул, систем рівнянь, нерівностей, матриць, графів, алгоритмів та ін.), що адекватно відображають властивості та поведінку процесу або об'єкту що досліджується. Математична модель також визначається як відображення реальної ситуації мовою математики. До загальної математичної моделі можуть входити один або декілька елементів (наприклад рівнянь) кожен з яких відображає один з аспектів функціонування об'єкту або явища і математична модель включає не тільки вищезазначені елементи, а й відношення між ними. Так, широко відома залежність головної складової сили різання P_z від режимів різання: глибини різання t , подачі S та швидкості V

$$P_z = C_p t^x S^y V^z \quad (1)$$

є одним з різновидів математичної моделі але відображає саме цю сторону процесу різання і безумовно не є відображенням процесу в цілому. Доповнення цієї залежності іншими: для температури, стійкості, зносу та ін. буде поступово малювати все більш повну картину процесу. Проілюструвати це можна за допомогою Рис. 1, де відображено співвідношення між об'єктом та його моделями.

Домовимося, що об'єкти (під якими перш за все розуміємо технічні об'єкти), процеси або явища, що досліджуються та описуються математичними моделями можуть надалі називатися «система» і міркування, що відносяться до одного з цих термінів у рівному ступені відносяться і до інших.

Для більшої ясності дамо визначення терміну «технічний об'єкт» (ТО) [1]: *Створений людиною або автоматом, реально існуючий пристрій, призначений для задоволення певної потреби.*



Рисунок 1 — Кожна модель відображає тільки одну зі сторін об'єкту, разом створюючи цілісну картину

Технічний об'єкт або система складаються з елементів: найпростіших частин, які не представляють самостійного інтересу в рамках конкретного розгляду.

Впровадження автоматизації виробничих та інших процесів за допомогою цифрових технологій та комп'ютерної техніки, яка «розуміє» виключно язык математики, потребує математичних моделей для наступних цілей: дослідження та проектування систем; створення оптимальних алгоритмів керування системами; прогнозування поведінки системи при зміні умов її функціонування; пошуку умов за яких система буде функціонувати найкращим способом - оптимізації; визначення чітких критеріїв для прийняття обґрунтованих рішень у тому числі і в сфері керування. Саме на цих аспектах математичного моделювання ми зосередимо нашу увагу у подальшому.

Хотілося б зазначити, що оскільки мова математики є мовою універсальною, викладений матеріал не відноситься виключно до процесів різання металів та металорізального інструменту.

1. ПРИНЦИПИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ. РІЗНОВИДИ МОДЕЛЕЙ ТА ЇХ ЕЛЕМЕНТИ.

Математичне моделювання - метод кількісного та (або) якісного описання системи за допомогою математичної моделі, при побудові якої реальний процес, об'єкт чи явище описується за допомогою того чи іншого адекватного математичного апарату. Математичне моделювання є невід'ємною частиною сучасного дослідження.

Математичне моделювання, як таке, включає дві самостійні задачі: побудова математичної моделі та її дослідження. Різні види математичних моделей можуть бути побудовані на основі двох принципів моделювання [2].

Математичне моделювання систем на основі принципу імітації, що дозволяє виявити закономірності функціонування системи та її динаміки; вплив кожного окремого фактору на результат функціонування системи та визначити кількісно цей результат. Якщо подивитись на рівняння (1), то це типова модель, побудована за принципом імітації, бо вона дозволяє кількісно визначити один з результатів процесу різання та вплив на нього декількох факторів – t , S , V хоч і не відображає динаміку процесу – його протікання у часі. За допомогою такої моделі можна визначати головну складову сили різання P_z не виконуючи експериментальні дослідження.

Такі моделі включають наступні елементи:

Незалежні змінні або фактори - елементи, значення яких характеризують умови функціонування системи / об'єкту або їх динаміку та можуть змінюватися відносно довільно. Відносно, тому що на модель завжди накладаються обмеження, пов'язані з технічними, технологічними, безпековими та іншими міркуваннями – виходячи з цього, кожен фактор має свою область визначення. Сукупність факторів у межах їх областей визначення утворюють так званий *факторний простір*. У рівнянні (1) факторами є t , S та V .

Параметри – постійні величини моделі, що характеризують умови у яких модель отримана. Та сама модель (1) отримана для певних оброблюваного та інструментального матеріалів, геометрії інструменту, умов охолодження та змащування та ін. Характеристики всіх цих елементів і є параметрами, сукупність яких кількісно відображаються у значенні коефіцієнту C_p

Головний фактор – змінна величина моделі, що залежить від факторів та параметрів. У нашому випадку це буде складова P_z .

Функція – рівняння, що зв'язує головний фактор, фактори та параметри. Треба зазначити, що цей елемент моделі може бути і відсутнім, бо не всі математичні моделі можуть мати вигляд функції, про що ми скажемо нижче.

Математичне моделювання на основі принципу оптимізації, що передбачає можливість та необхідність цілеспрямованого регулювання умов функціонування системи з метою пошуку таких, у яких система буде функціонувати найкращим чином – оптимальних умов. І тут вочевидь перш за все треба домовитись – які умови вважати найкращими. Звідси маємо і дещо інші складові елементи таких моделей до яких належать:

Критерій оптимальності – прийнятий показник міри ефективності системи що досліджується. Максимальне або мінімальне значення критерію оптимальності і визначає умови у яких система працює найкращим чином тобто оптимальні умови. Треба наголосити, що зазвичай критеріями оптимальності не є фізичні величини, наприклад сила різання, температура, стійкість інструменту та ін., а показники тим чи іншим чином пов'язані з грошима: собівартість обробки, прибуток, якість, час виготовлення та ін., що і відображає міру ефективності системи. У якості прикладу критерію оптимальності візьмемо собівартість обробки C , що залежить від режимів різання:

$$C = f(t, S, V) \quad (1.1)$$

Незалежні змінні або фактори – величини, оптимальні значення яких треба знайти. У даному випадку це будуть режими різання t , S , V бо саме за їх допомогою можна цілеспрямовано змінювати умови функціонування системи.

Параметри – як і для принципу імітації це постійні величини моделі, що характеризують незмінні умови в яких модель була отримана. Відображаються у значеннях постійних коефіцієнтів моделі.

Цільова функція – функція, що пов’язує критерій оптимальності, фактори та параметри. Сама назва функції показує, що в неї є ціль. У нашому випадку це є мінімальна собівартість, тобто

$$C = f(t, S, V) \rightarrow \min \quad (1.2)$$

Звертаємо увагу, що тут перш за все цікавлять умови (режими різання) за яких собівартість буде мінімальною, а не значення собівартості як такої. Це означає, що з метою пошуку найкращих умов функціонування системи, цільова функція може спростуватися і не включати елементи собівартості, що не залежать від режимів різання в даному випадку, або від факторів, якщо говорити взагалі.

Обмеження – області можливих значень факторів, у межах яких відбувається пошук оптимальних рішень. При вирішенні реальних виробничих задач обмеження існують завжди і вони можуть бути пов’язані з технічними можливостями обладнання (обмеження по швидкості різання, потужності верстату); з якістю обробленої поверхні (обмеження подачі); з умовами безпеки праці та ін.

Загальне уявлення про класифікацію математичних моделей за різними критеріями можна отримати з Табл.2.1. Ми не ставимо метою детальний розгляд цієї класифікації, але на деяких з цих критеріїв зупинимось при розгляді подальшого матеріалу. Виходячи з викладених положень та використовуючи наведену класифікацію, можна сказати, що модель представлена рівнянням (1) є моделлю мікрорівня, функціональна, аналітична, емпірична та детермінована.

Таблиця 2.1 — Класифікація математичних моделей

Признаки класифікації	Види математичних моделей	Призначення
1. Приналежність до ієрархічного рівня	Моделі мікрорівня	Відображають фізичні процеси, що проходять, наприклад, при різанні металів, описують процеси на рівні переходу (проходу)
	Моделі макрорівня	Описують технологічні процеси
	Моделі метарівня	Описують технологічні системи (дільниці, цехи, підприємства в цілому)
2. Характер властивостей об'єкту, що відображаються	Структурні або структурно-логічні	Призначені для відображення структурних властивостей об'єктів (наприклад, в САПР ТП для відображення структури технологічного процесу)
	Функціональні	Призначені для відображення інформаційних, фізичних, часових процесів, що протікають в працюючому обладнанні в ході виконання технологічних процесів та ін.
3. Спосіб представлення властивостей об'єкту	Аналітичні (статичні)	Представляють собою явні математичні вираження головного фактору або критерію оптимальності як функцій від факторів (наприклад наведений

Признаки класифікації	Види математичних моделей	Призначення
		вираз (1) для складової сили різання)
	Алгоритмічні	Виражають зв'язки між головним фактором або критерієм оптимальності та факторами у вигляді алгоритму
	Імітаційні (динамічні)	Моделі, що відображають розвиток процесу (поводження системи, що досліджується) у часі при заданих зовнішніх впливах на систему. Можуть не включати явних аналітичних залежностей але обов'язково включають розгорнуту логічну структуру системи та детальний опис поведження елементів системи та їх взаємодії.
4. Спосіб отримання моделі	Теоретичні	Створюються в результаті дослідження об'єктів (процесів) на теоретичному рівні на основі загальнофізичного підходу.
	Емпіричні	Створюються в результаті проведення експериментів (дослідження зовнішніх

Признаки класифікації	Види математичних моделей	Призначення
		проявів властивостей системи за допомогою вимірів значень факторів) та обробки їх результатів методами математичної статистики.
5. Особливості поведження системи	Детерміновані	Описують поведження системи з позицій повної визначеності у теперішньому часі та в майбутньому (наприклад структура технологічних процесів обробки деталей, формули фізичних законів)
	Імовірнісні (стохастичні)	Враховують вплив випадкових факторів на поведження системи тобто оцінює його поведження з точки зору імовірності тих чи інших подій

2. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ДО ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

2.1. Загальні положення

Математичне моделювання повинно виконуватися на основі системного підходу, що дозволяє розглядати систему як цілісну сукупність пов'язаних елементів, об'єднаних для досягнення єдиної цілі, а також у її зв'язку з оточуючою середою. Схема взаємодії системи, її елементів ($E1$, $E2$, $E3$) та оточуючої середою показана на Рис. 2.1.



Рисунок 2.1 — Взаємодія системи, її елементів та зовнішнього середовища

Взаємодія між елементами системи називається *внутрішніми зв'язками*, а взаємодія між системою та зовнішнім середовищем – *зовнішніми*. При цьому вплив зовнішнього середовища на систему (X) носить назву *вхід*, а системи на зовнішнє середовище (Y) – *вихід* або *відгук* бо так система «відгукується» на зовнішній вплив. Під зовнішньою середою слід розуміти комплекс всіх об'єктів які впливають на зміну системи, а також ті, що змінюються під

впливом системи [2]. У ролі входу можуть виступати незалежні змінні (фактори), а у ролі виходу, наприклад, головний фактор. Змінюючи режими різання, які по відношенню до технологічної системи є зовнішнім середовищем, ми впливаємо на неї, а вона «віддукується» зміною сили різання, стійкістю інструменту, температурою в зоні різання і т.д.

У створенні математичної моделі можна виділити наступні етапи:

1. **Постановка завдання.** Тут повинно бути чітко сформульовані: мета дослідження; які залежності мають бути досліджені; які фактори є основними; план дослідження. Значну роль тут відіграє аналіз так званої «апріорної інформації» - опублікованих іншими дослідниками результатів аналогічних досліджень. З аналізу апріорної інформації повинні бути отримані наступні відповіді [3]:
 - ✓ Які фактори досліджувалися;
 - ✓ Області існування факторів;
 - ✓ Які досліджувались виходи;
 - ✓ Які «найкращі» значення виходів були досягнені;
 - ✓ Які рівні якості для виходів можна вважати «відмінними», «добрими», «задовільними»;
 - ✓ Форми взаємозв'язку між факторами, входами – виходами відомі з експериментальних та теоретичних досліджень.
2. **Змістовний опис.** Аналіз системи що досліджується, якій включає: якісну та кількісну характеристики явищ, що відбуваються; характер та ступінь взаємодії між елементами системи та ступінь їх важливості у функціонуванні системи
3. **Складання формалізованої схеми.** Застосовується зазвичай тоді, коли перехід від змістовного опису до безпосередньої розробки моделі є складним або неможливим. Цей етап є логічним завершенням і формалізацією змістовного опису.
4. **Розробка математичної моделі,** включаючи формули, рівняння, обмеження, таблиці, графіки та ін.
5. **Дослідження системи на моделі.** Виконується методами математичного аналізу або чисельними методами з метою

виявлення закономірностей функціонування системи або пошуку оптимальних рішень. На цьому етапі мають бути отримані достовірні практичні результати.

6. **Аналіз отриманих результатів** та розробка рекомендацій.

Математичні моделі можуть бути отримані двома способами: теоретичним та емпіричним [4]. Ці способи слід розглянути більш детально.

Теоретичний або загально фізичний спосіб полягає в тому, що досліджується механізм процесу на основі якого розробляється його теорія на рівні фізичних законів. Математична модель в цьому випадку відображає ці закони. Але якщо метою наукових досліджень є вивчення законів природи у тому числі фізичні, що мають об'єктивний характер, то метою інженерних досліджень є пізнання закономірностей, притаманних продуктам діяльності людини [5]. Останні відносяться до так званих *«погано організованих систем»* де буває дуже важко відокремити різні фізичні явища одне від одного. Це відображається на характері математичних моделей, отриманих за результатами інженерних досліджень і тут можливість використання теоретичного способу дуже обмежена, хоч і не виключена. Для ілюстрації цього, можна спробувати уявити розробку загальної «теорії борщу» заради створення ідеальної страви. Ця теорія повинна описувати всі фізичні та хімічні процеси що там відбуваються. Але ми розуміємо, що це навряд можливо - і з причини неможливості відокремлення різних явищ одне від одного і в зв'язку з широким діапазоном фізичних та хімічних характеристик складових продуктів. Складність розробки математичної моделі теоретичним способом не є перешкодою для вивчення технічних об'єктів, тому що в інженерних дослідженнях моделі здебільшого розробляються емпіричним способом.

Емпіричний спосіб полягає в отриманні математичної моделі базуючись на результатах експериментів. До основи цього способу покладено кібернетичний принцип «чорної скрині» - системи зв'язків недоступної для спостереження, тому що про її зміст, структуру та механізми процесу нічого не відомо або відомо лише частково. Відомі тільки входи «скрині» - змінні величини процесу,

та виходи – відгук процесу або його результати (див. рис.2.2) [4]. Функцію, що так би мовити, «захована» в чорній скрині і насправді описує закономірності процесу що досліджується будемо вважати *функцією відгуку*, а її графічне зображення – *поверхнею відгуку*.

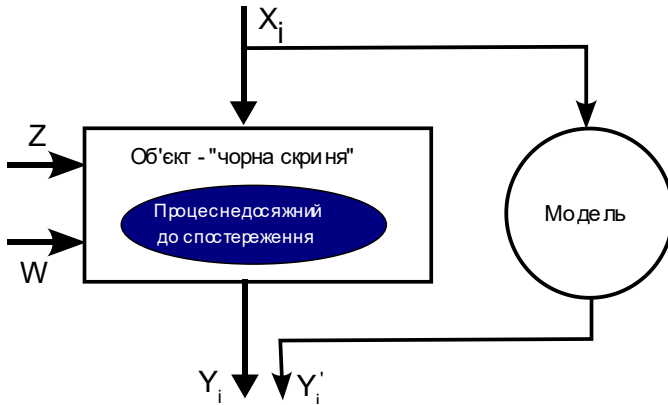


Рисунок 2.2 — Схема побудови математичної моделі емпіричним способом

Пошук та аналіз поверхні відгуку нагадує рух в приміщенні в цілковитій темряві: ми знаємо, що вона там є, але не бачимо її; можемо до неї доторкнутися в окремих місцях (провести експерименти в окремих точках) і на основі цього спробувати скласти уявлення про поверхню в цілому. Наше уявлення і буде моделлю поверхні, її образом але не самою поверхнею відгуку.

Це схоже на китайську казку, в якій сліпці доторкуються до слона. Той, хто чіпав хобот, був переконаний, що слон - це якийсь довгий предмет, подібний трубі, в той час як у іншої людини, що доторкалась до бивнів, виникало враження, що слон, щось тверде і гостре. Загальну картину про об'єкт можна скласти поступово «обмацуючи слона».

Наприклад, процес обробки різанням можна вважати «чорною скринєю» бо фізичні процеси, що відбуваються у технологічній системі не доступні для спостереження, про них відомо тільки взагалі. Входи системи X_i відомі та ними можна керувати, це можуть бути режими різання, геометричні параметри інструменту

та ін. Водночас діють фактори які важко або неможливо контролювати (Z, W): деякі властивості оброблюваного та інструментального матеріалів в тому числі в зоні різання; зміни властивостей інструменту в результаті зносу; зміни властивостей інструментального та оброблюваного матеріалів в зоні різання в процесі нагріву; властивості змащувально-охолоджуючого середовища та ін. Водночас є можливість контролювати виходи системи Y_i (її відгук на зовнішній вплив): стійкість інструменту; сила різання; температура в зоні різання; шорсткість поверхні та ін. Змінюючи вхід X_i , можна спостерігати як змінюється вихід – Y_i . На основі обробки отриманих даних (про що буде сказано нижче) можна підібрати наприклад функціональну модель у вигляді

$$Y'_i = f_i(X_1, X_2, \dots, X_j, \dots) \quad (2.1)$$

Основною вимогою до такої моделі є те, щоб вона найбільш точно описувала існуючий процес - $Y'_i \approx Y_i$. Тобто можна сказати, що функція (2.1) є приблизним зображенням невідомої функції відгуку, що описує об'єктивно існуючий та недоступний для спостереження фізичний процес. Відбувається заміна функції відгуку на модель і називається це *апроксимація*, що в широкому сенсі є заміна однієї функції іншою. При такому підході нас не цікавлять ні механізм процесу різання, ні взаємодія факторів у процесі, ні закономірності зносу інструменту і т.д. Ми тільки спостерігаємо і описуємо мовою математики результати цих спостережень. Іншими словами – отримана модель не є фізичною моделлю процесу, а тільки математичним описом зовнішніх проявів цього процесу за результатами спостережень.

Дослідження «чорної скрині» відбувається не хаотично, а за певними правилами, що складають основу математичної теорії експерименту.

У багатьох випадках отримана модель дозволяє і розкрити механізм процесу, тобто внутрішній склад «чорної скрині».

У якості висновку: *математична модель це не абсолютно точний опис об'єкта або явища, а приблизний вираз невідомого закону, який задовільно характеризує явище у деякій локальній частині факторного простору. Для приблизного описання одного й того-ж явища може бути запропоновано декілька моделей.*

2.2. Деякі особливості побудови оптимізаційних моделей

Як зазначалося вище, метою оптимізаційного моделювання є пошук умов в яких система функціонує найкращим образом згідно з прийнятим критерієм оптимальності. Процес отримання цільової функції не можна формалізувати – це результат аналізу процесу в якому використовується попередній досвід та здоровий глузд. Але для ефективного пошуку оптимальних умов, оптимізаційна модель у формі цільової функції повинна відповідати деяким основним принципам.

1. **Принцип однозначності.** Полягає в тому, що оптимізуватись повинна тільки одна цільова функція. Якщо ж за умовами задачі таких функцій повинно бути декілька, то вони все одно мають бути зведені до одної, наприклад за допомогою лінійної згортки:

$$F = \sum_{i=1}^k a_i f_i(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.2)$$

Тут a_i – масштабний або ваговий коефіцієнт, що відображає ступінь важливості кожної з функцій, що входить до згортки і повинен відповідати наступним умовам:

$$a_i \geq 0 \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^k a_i = 1$$

У виборі вагових коефіцієнтів присутня велика доля суб'єктивізму, але за допомогою деяких підходів їм можна придати об'єктивний характер: експертні оцінки, функція бажаності та ін.

Згортка за рівнянням (2.2) може бути використана коли всі функції f_i мають однакову фізичну природу, тобто розмірність. А якщо розмірності різні, то замість функцій в натуральному вигляді

слід використовувати їх нормалізований – безрозмірний варіант \tilde{f}_i . Наприклад для нормалізації в межах $[0;1]$ може бути використаний наступний спосіб природної нормалізації:

$$\tilde{f}_i = \frac{f_i - f_{i \max}}{f_{i \max} - f_{i \min}} \quad (2.4)$$

2. Принцип відповідності. Бажано, щоб цільова функція мала один екстремум. Функції, що мають розриви та неоднозначності не мають використовуватися в якості цільових. Наявність локальних екстремумів ускладнює пошук оптимального рішення. На Рис. 2.3 функція а) має підходящу форму, а ось функції б) та в) в якості цільових використовувати не бажано.

Особливо вирізняються цільові функції, що зовсім не мають екстремумів, наприклад лінійні цільові функції. При цьому вони повинні бути доповнені обмеженнями. В іншому разі оптимізаційна задача в цьому випадку не має сенсу.

Взагалі, обмеження цільової функції можуть бути двох типів: *жорсткі та нежорсткі*. Для жорстких обмежень – вихід за їх межі неприпустимий при будь яких умовах. Це можуть бути обмеження пов'язані з фізичними константами, безпекою, технічними характеристиками обладнання тощо. Якщо індексом « L » позначити нижню межу, а « U » - верхню, то жорсткі обмеження будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} X_i < X_i^U \\ X_i > X_i^L \\ Y_i = f_i(X_1, X_2, \dots, X_n) < Y_i^U \\ Y_i = f_i(X_1, X_2, \dots, X_n) > Y_i^L \end{cases} \quad (2.5)$$

Нежорсткі обмеження дозволяють вихід за їх межі, але треба розуміти що якість функціонування системи при цьому істотно погіршиться. Враховуються нежорсткі обмеження зазвичай за допомогою «штрафних» функцій $F' = \sum F'_i$ які додаються до цільової функції – в результаті отримуємо модифіковану цільову функцію Z :

$$\text{При } F \rightarrow \min : Z = F + F' \rightarrow \min \quad (2.6)$$

$$\text{При } F \rightarrow \max : Z = F - F' \rightarrow \max$$

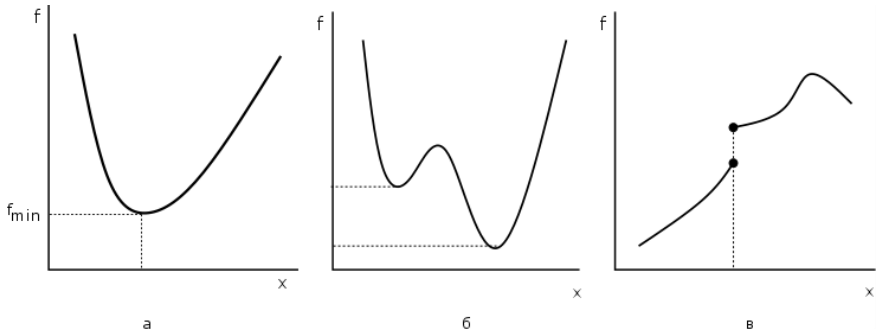
З рівнянь (2.6) видно, що значення «штрафної» функції повинно прагнути до нуля в границях обмежень і стрімко зростати при виході за них. Наприклад при наявності верхнього обмеження може бути прийнятий наступний вид штрафної функції:

$$F'_i = M_i \left(\frac{X_i^U}{X_i} \right)^{K_i} \quad (2.7)$$

В рівнянні (2.7) $M_i > 0, K_i > 0$ та великі за значенням. З вигляду наведеної «штрафної функції» - рівняння (2.7) очевидно, що вона поводить себе саме так, як зазначалося вище.

3. Принцип керованості. Функція повинна виражатися через змінні на які можна впливати і якими можна керувати.

4. Принцип орієнтації на прибуток. Цільові функції зазвичай виражають не фізичні величини, а такі що зв'язані з грошима: дохід, прибуток, собівартість, якість та ін.



а – функція з одним екстремумом; б – функція з локальним екстремумом; в – функція з розривом

Рисунок 2.3 — Деякі види функцій

3. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ В ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

3.1. Загальні положення

Усі події, пов'язані з оточуючими явищами, процесами та об'єктами можна поділити на детерміновані та випадкові або імовірнісні. Детермінованою подією вважається така, яка безумовно відбудеться якщо виконано певний комплекс умов. Але переважна кількість подій взагалі та пов'язаних з процесами в технічних системах зокрема не є детермінованими, а імовірнісними. У цьому випадку, при виконанні певного комплексу умов можна говорити лише про певну імовірність того, що подія відбудеться. Наприклад, для того щоб автомобіль пройшов відстань 60 км. між пунктами A і B за 1 годину повинна бути виконана умова – швидкість автомобіля повинна бути 60 км/год. З цієї позиції подія прибуття автомобіля в пункт B за умови дотримання зазначеної швидкості є детермінованою, але враховуючи інші події, пов'язані з рухом автомобіля, які можуть відбутися але навіть не завжди залежні від нього: стан дороги та дорожнього руху, прокол шини, поломка самого автомобіля і т.д. можна говорити лише про певну імовірність цієї події. При проведенні експериментальних досліджень під *подією слід розуміти будь який результат виміру.*

Під час експериментального дослідженні умовного «основного процесу», що знаходиться всередині «чорної скрині», змінюючи вхід X_i , спостерігаємо за виходом Y_i за допомогою вимірювальних приладів (див. Рис. 3.1). Приймаючи до уваги: що цей основний процес супроводжується іншими, які неможливо відокремити (W); деякими випадковими подіями (Z) – наприклад випадковими коливаннями властивостей оброблюваного матеріалу; що між об'єктом та вимірювальним пристроєм можуть бути проміжні елементи, які вносять похибку у виміри (E); що вимірювальний пристрій має свою похибку (D); наявний людський фактор – можна зробити висновок, що результат виміру

завжди буде величиною випадковою. Сукупність усіх сторонніх факторів, що впливають на результат іноді називають «шумом». Але не дивлячись на випадкові коливання результатів, вони відображають об'єктивно існуючий процес, інше питання наскільки точно та достовірно. Тобто всі явища і процеси можна поділити на основні та випадкові і завдяки останнім – результати вимірів є величиною випадковою. Виходячи з цього – отримані в ході експериментальних досліджень результати завжди повинні бути предметом статистичного аналізу, який дасть відповідь в тому числі і на наступні питання: чи є отримані значення виходу Y_i відображенням основного процесу, або вони сформовані виключно шумом і ніяк не пов'язані ні з основним процесом ні зі зміною входу X_i ; яке значення і з якою імовірністю прийме Y_i ; чи отримані дані є достовірними і яка ступінь цієї достовірності.



Рисунок 3.1 — Схема впливу випадкових та супутніх процесів на «вихід»

Випадкова величина може бути *дискретною* або *безперечною* [6].

Дискретна випадкова величина – випадкова величина яка може приймати значення тільки з кінцевої кількості дійсних чисел.

Безперевна випадкова величина – та яка може приймати будь яке значення з безкінечного або кінцевого інтервалу.

Всі елементи стосовно яких дослідник має намір робити висновок називаються генеральна сукупність і описується вона так званими *генеральними характеристиками*. Наприклад, якщо треба отримати абсолютно точні характеристики зерна, що зберігається на елеваторі, треба дослідити все це зерно яке і буде у даному випадку генеральною сукупністю. Чи можна мати таку генеральну сукупність на практиці? Неможливо дослідити і всі підшипники, що випускає підприємство для того щоб отримати їх генеральні характеристики. Тому в ході дослідів завжди мають справу з вибіркою – кінцевою кількістю дискретних випадкових елементів з генеральної сукупності (див. Рис. 3.2). Або так – всю сукупність знань студента по дисципліні вважатимемо генеральною сукупністю, але його знання оцінюються викладачем за вибіркою – обмеженою кількістю питань на основі яких робиться висновок про генеральну сукупність. І у випадках з зерном та підшипниками і випадку зі знаннями - чи є абсолютна тотожність між генеральною сукупністю та вибіркою – безумовно ні, а чи відображає вибірка властивості генеральної сукупності – так. *Числові характеристики вибірки на відміну від генеральних називають вибірковими або статистичними. Вони є оцінками відповідних генеральних числових характеристик*, тому аналіз вибірки дозволяє робити висновки про усю генеральну сукупність. Схематично, співвідношення між генеральною сукупністю, вибіркою та їх характеристиками показано на Рис. 3.2. ***Для позначення деяких оцінок генеральних характеристик будемо використовувати знак « \wedge » над символом характеристики.***

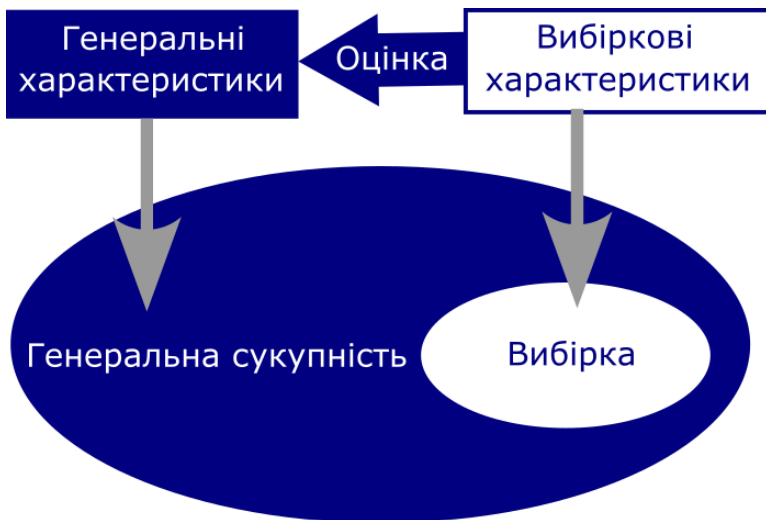


Рисунок 3.2 — Співвідношення між генеральними та вибірковими характеристиками

Отже, результатом експериментальних досліджень та основою для будь якого статистичного аналізу є вибірка об'ємом N : $\{Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_i, \dots, Y_N\}$ – частина генеральної сукупності. При дослідженні технічних систем, вибірку отримують з результатів досліджень при одних і тих самих умовах. Ці дослідження мають назву *паралельні дослід* або *повтори*. Дослідження при різних умовах будемо називати *незалежні дослід* або *серія паралельних дослідів*. Умовно, вибірки поділяються на *малі* – при $N \leq 30$, та *великі* – якщо $N > 30$.

Розглянемо основні числові характеристики випадкових величин.

3.2. Імовірність випадкової події

Якщо при N випробуваннях, подія A фактично відбулася m_A раз, то m_A – частота події A , а відношення

$$p_A = \frac{m_A}{N} \quad (3.1)$$

є відносною частотою або частістю події A .

Досвід показує, що при многократному повторенні випробувань відносна частота випадкової події має сталість. У різних досить тривалих серіях випробувань відносні частоти групуються навколо декотрого визначеного числа. Це може бути пояснено як прояв об'єктивної властивості випадкової події. Таким чином, ступінь можливості випадкової події можна описати числом - імовірністю випадкової події. Відносна частота та імовірність є безрозмірними величинами, які можуть приймати значення від 0 до 1. Відносна частота – це і є вибіркова характеристика або оцінка імовірності події A .

Приклад. За результатами випробувань стійкості різців у кількості $N = 68$ на операції кінцевої обточки [4], вони були розподілені на 7 груп в залежності від отриманого значення стійкості (див. Табл. 3.1).

Тут сім груп представлені інтервалами стійкості – у цьому разі вважається, що значення всіх випадкових величин, які потрапили в певний інтервал представляються значенням середини інтервалу. Таким чином середина – центр інтервалу якби навантажується всіма частотами. Такий спосіб називається способом «навантажених ординат».

Результати розрахунку відносної частоти p_u (u – номер інтервалу) появи кожного зі значень стійкості наведені в Табл. 3.1.

3.3. Математичне очікування та середнє арифметичне

Математичне очікування дискретної випадкової величини Y – $M[Y]$ визначається як сума добутків усіх значень випадкової величини Y_i на ймовірність цих значень p_i :

$$M[Y] = \sum_{i=1}^N p_i Y_i \quad (3.2)$$

Таблиця 3.1 — Вихідні дані та результати розрахунку відносних частот значень стійкості різців

<i>и</i>	Інтервал стійкості <i>T</i> , мін	Значення стійкості <i>Y_i</i> , мін	Середина інтервалу, мін.	Частота <i>m_и</i>	Відносна частота, <i>p_и</i> (оцінка імовірності отримання)
1	68 – 124	68; 97	96	2	0,029
2	124 – 180	124; 148; 174; 141; 148; 173; 153	152	7	0,103
3	180 – 236	230; 225; 234; 222; 200; 227; 216; 211; 186; 208; 197; 223; 211; 182; 191; 215; 234; 209; 218; 181; 200; 187; 231; 191	208	24	0,353
4	236 – 292	285; 252; 278; 261; 261; 239; 257; 268; 270; 241; 262; 238; 239; 277; 274; 266; 248; 251; 238; 285; 290	264	21	0,309
5	292 – 348	337; 347; 344; 293; 298; 348; 343; 346; 333	320	9	0,133
6	348 – 404	383; 377; 397	376	3	0,044
7	404 – 460	460; 418	432	2	0,029
ЗАГАЛОМ		$\sum Y_i = 16759$		68	1

що вважати, що випадкова величина Y кожне значення приймає з однаковою ймовірністю, то тоді визначається середнє арифметичне значення Y - \bar{Y} , або незміщене математичне очікування:

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \quad (3.3)$$

У разі коли випадкова величина Y кожне значення Y_i приймає m_i разів і таких значень k – як наприклад при способі навантажених ординат (див. приклад в п. 3.1), то визначається зважене середнє арифметичне:

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k m_i Y_i \quad (3.4)$$

Можна вважати, що математичне очікування приблизно дорівнює середньому арифметичному і чим більша кількість спостережень N тим ближче їх значення будуть одне до одного. *Середнє арифметичне є найкращою статистичною оцінкою математичного очікування генеральної сукупності.*

Приклад. Середнє арифметичне для даних, наведених в Табл.3.1 визначається за рівнянням (3.3) де $N = 68$, а сума значень Y_i також вказана в Табл. 3.1: $\bar{Y} = 16759/68 = 246,46$ мін.

3.4. Розмах вибірки

Визначається як різниця між максимальним та мінімальним елементами вибірки:

$$R = Y_{max} - Y_{min} \quad (3.5)$$

Приклад. Для даних, наведених в Табл.3.1:

$$R = 460 - 68 = 392 \text{ мін.}$$

3.5. Дисперсія та середнє квадратичне (стандартне) відхилення

Розсіювання випадкової величини відносно її середнього арифметичного оцінюється за допомогою дисперсії:

$$S^2 = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2 \quad (3.6)$$

де f – кількість ступенів свободи

Дисперсія є сумою квадратів відхилень випадкової величини Y_i від її середнього арифметичного, віднесена до однієї ступені свободи f та має розмірність квадрату характеристики, що досліджується. Зверніть увагу, що дисперсія є оцінкою – характеристикою розсіювання а не величиною розсіювання як такого.

Під кількістю ступенів свободи у статистиці розуміється кількість незалежних спостережень, що дорівнює кількості N визначень характеристики, мінус кількість статистичних параметрів що оцінюється. У даному випадку статистично за вибіркою оцінюється один параметр – середнє арифметичне, тому кількість ступенів свободи буде визначатися як:

$$f = N - 1 \quad (3.7)$$

Оскільки дисперсія визначена з рівняння (3.6) отримана для вибірки, її називають ще вибірковою дисперсією і вона є оцінкою генеральної (теоретичної) дисперсії, яка зазвичай позначається як σ^2 . В подальшому ми будемо мати справу здебільшого з вибірковою дисперсією яку будемо називати просто дисперсія

З дисперсією пов'язана ще одна характеристика – середнє квадратичне або стандартне відхилення (ці два терміни є абсолютно ідентичними). Взагалі то дисперсія дорівнює квадрату стандартного відхилення S , яке буде визначатися наступним чином:

$$S = \sqrt{\frac{1}{f} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (3.8)$$

Розмірність стандартного відхилення така ж як у характеристики, що досліджується. Характеризує воно *ступінь надійності середнього* - чим менше стандартне відхилення тим більш надійно середнє арифметичне репрезентує усю вибірку.

Приклад. Для вибірки наведеної в Табл. 3.1, за формулами (3.7), (3.8) отримано:

$$f = 68 - 1 = 67; S^2 = 5547,18; S = 74,48$$

Значення дисперсії та стандартного відхилення може розраховуватися відповідно за допомогою вбудованих функцій *Microsoft Excel* $\{S^2\} = \text{VAR.S}(\langle Y_1 \rangle; \langle Y_2 \rangle; \langle Y_3 \rangle \dots)$ та $\{S\} = \text{STDEV.S}(\langle Y_1 \rangle; \langle Y_2 \rangle; \langle Y_3 \rangle \dots)$.

Тут і далі формула Excel починається зі знаку «=» та міститься в клітинці де має бути результат розрахунку (позначено фігурними дужками {}). На місті кутових дужок (< >) має міститься посилання на клітинку де знаходиться значення, вказаного в дужках фактору або параметру.

3.6. Коефіцієнт варіації

Дисперсія та середнє квадратичне відхилення є показниками абсолютними але теж-саме значення дисперсії може бути при зовсім різних значеннях середнього арифметичного, тому для якісної характеристики розсіювання прийнято відносний показник - коефіцієнт варіації:

$$V = \frac{S}{\bar{Y}} \quad (3.9)$$

Характеризує коефіцієнт варіації стабільність або ступінь змінності випадкової величини, а також однорідність вибірки. С точки зору однорідності вибірки отриманий коефіцієнт варіації якісно можна охарактеризувати наступним чином:

- При $V \leq 0,17$ - вибірка абсолютно однорідна;
- При $0,17 < V \leq 0,33$ – однорідність достатня;
- При $0,33 < V \leq 0,4$ – однорідність недостатня
- При $0,4 < V \leq 0,6$ – коливання значень вибірки вважаються великими, а вибірка неоднорідною.

Якщо розглядати коефіцієнт варіації відносно стійкості металорізального інструменту, то ми маємо один з найважливіших показників, що характеризує якість інструменту з точки зору однорідності його властивостей. В умовах автоматичного виробництва, коли один оператор обслуговує декілька верстатів і не має можливості безперервно спостерігати за станом інструменту, однорідність властивостей інструменту стає чи не більш важливим питанням ніж абсолютне значення стійкості, бо тільки при стабільній якості можна розуміти що очікувати від інструменту в процесі роботи. В роботах [4], [7] наведені наступні орієнтовні дані по значенням коефіцієнту варіації стійкості металорізального інструменту стосовно його використання у масовому та автоматизованому виробництві:

- Якщо $V \leq 0,2$ то такий інструмент можна вважати гарної якості;
- При $0,2 < V \leq 0,3$ – якість інструменту можна вважати задовільною;
- При $V > 0,35$ – інструмент поганої якості, а при $V > 0,5$ його взагалі не можна використовувати у масовому та автоматизованому виробництві.

Треба враховувати, що ці значення коефіцієнту варіації є середніми – його граничні значення залежать від виду інструменту: складно-ріжучий інструмент такий як протяжки

черв'ячні фрези та т.п. повинен мати менше значення коефіцієнту варіації ніж простий інструмент. Величина коефіцієнту залежить не тільки від якості інструменту але й від умов експлуатації (жорсткості технологічної системи, точності та стабільності встановлення та закріплення інструменту на верстаті, стабільності якості заготовок і т.п.); точності встановлення моменту затуплення [4]. Деякі дослідники [8] фіксують більш високі значення коефіцієнту варіації, отримані в ході досліджень – від 0,3 до 0,9 але без оцінки якості інструменту або стану технологічного процесу за цим показником. Додатковими факторами для визначення граничних рівнів варіації є можливість контролювати стан інструменту, та наслідки його раптового виходу зі строю. Але у якості відправної точки та орієнтиру при оцінці стабільності стійкості інструменту у виробничих умовах, наведені вище значення цілком можуть бути використані. Необхідно враховувати і те, що коефіцієнт варіації не несе в собі вичерпної інформації про стан технологічного процесу бо його значення істотно знижується зі збільшенням швидкості різання на що вказують багато дослідників (наприклад [9], [10]). Це пов'язано із суттєвим зниженням стійкості інструменту у відповідності з відомою формулою Тейлора:

$$v \cdot T^m = C_v \quad (3.10)$$

де v – швидкість різання;

T – стійкість інструменту;

C_v, m – постійний коефіцієнт та показник ступеню відповідно.

Значення показнику ступеню $m \approx 0.2$, що означає - зі збільшенням швидкості різання стійкість зменшується приблизно у 5-му ступені, тому неоднорідність якості інструменту буде мати все менший вплив на причини відмов інструменту. Отже відмови будуть наступати по причині більш інтенсивного зношування при зменшенні кількості раптових відмов. Крім того, при аналізі відмов інструменту або іншого об'єкту в період припрацювання, коефіцієнт варіації скоріш за все виявиться більше за 1, про що більш докладно буде викладно в Розділі 7. Виходячи з цього, можна зробити висновок, що коефіцієнт варіації є не єдиним, хоч

і дуже важливим показником на шляху оцінки стабільності процесу виробництва.

Приклад. Для вибірки з Табл.3.1:

$V = 74,48/246,46 = 0,30$. Таким чином, однорідність вибірки достатня та якість інструменту можна визнати задовільною за цим показником.

3.7. Довірчий інтервал, довірча імовірність та рівень значущості

Наведені вище вибіркові оцінки мають назву «точкових». У ряді випадків їх визначення не є достатнім – треба не тільки знайти числове значення характеристики, але й оцінити його точність та надійність, оцінити в яких межах може знаходитися генеральна характеристика відносно її точкової оцінки або з яким ступенем впевненості можна очікувати, що помилка визначення генеральної характеристики не вийде за певну межу. Щоби дати уявлення про точність та надійність статистичних оцінок в математичній статистиці використовуються інтервальні оцінки у вигляді довірчих інтервалів. Довірчий інтервал задає граничні значення статистичної характеристики як діапазон, що покриває відповідну генеральну характеристику з заданою надійністю q , та розташовується симетрично відносно відповідної точкової оцінки. На відміну від точкової оцінки – довірчий інтервал означає, що генеральна характеристика знаходиться «десь тут» в середині інтервалу. Граничні точки довірчого інтервалу називаються довірчими межами

Визначатися довірчий інтервал може для будь якої генеральної характеристики. Одним з таких, що використовується найчастіше при дослідженні технічних об'єктів, є довірчий інтервал математичного очікування ΔY який показано на Рис. 3.3 і який задається симетрично відносно середнього арифметичного.

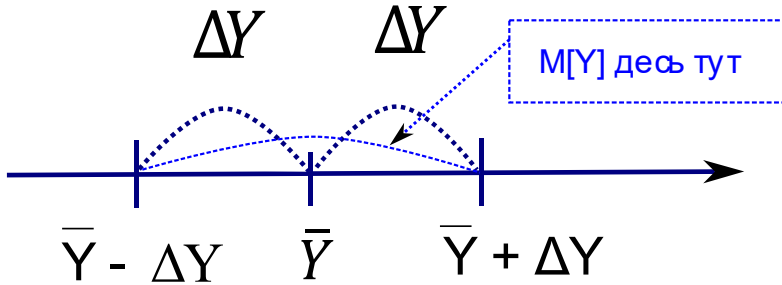


Рисунок 3.3 — Довірчий інтервал математичного очікування на цифровій шкалі.

Надійність q в даному випадку означає, що гіпотеза про знаходження математичного очікування генеральної сукупності $M[Y]$ в межах довірчого інтервалу (3.11) не відвертається з імовірністю q . Така імовірність називається *довірчою імовірністю*.

$$\bar{Y} - \Delta Y \leq M[Y] \leq \bar{Y} + \Delta Y \quad (3.11)$$

В більш широкому сенсі, довірча імовірність це *ступінь довіри до результатів отриманих за статистичними характеристиками та критеріями*, в тому числі при підтвердженні або спростуванні будь яких статистичних гіпотез – це як довіра до людини, чиїхось суджень та висновків. При високій довірчій імовірності є високий ризик прийняття невірних рішень, а при низькій – відхилення вірних. Для інженерних досліджень довірчу імовірність зазвичай приймають на рівні 0,95 (рідше 0,9 або 0,99). На ряду з довірчою імовірністю q використовують рівень значущості α . Ці характеристики пов'язані співвідношенням:

$$\alpha = 1 - q \quad (3.12)$$

Отже, при довірчій імовірності 0,95 рівень значущості буде складати 0,05.

Що стосується самого довірчого інтервалу математичного очікування ΔY , то він визначається зі співвідношення:

$$\Delta Y = t_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{N}} \quad 3.13)$$

Тут S – середнє квадратичне відхилення;
 t_{α} – коефіцієнт або критерій Стьюдента для рівня значущості α .

Значення t_{α} може бути визначено зі статистичних таблиць в залежності від кількості ступенів свободи f та рівня значущості α (або довірчої імовірності q). Користувачами програми *Microsoft Excel* коефіцієнт Стьюдента може бути визначений за вбудованою статистичною функцією: $\{t_{\alpha}\} = T.INV.2T(\langle\alpha\rangle; \langle f\rangle)$.

Довірчий інтервал ΔY також можна вважати похибкою визначення середнього арифметичного випадкової величини Y : $\bar{Y} \pm \Delta Y$. Довірчі межі знаходяться на відстані $2\Delta Y$ одна від одної.

Приклад. Для вибірки з Табл. 3.1 кількістю $N = 68$ ($f = 67$), та рівня значущості $\alpha = 0,05$ ($q = 0,95$) результат розрахунку t_{α} показано на Рис.3.4. Значення коефіцієнту Стьюдента записується: $t_{0.05} = 1,996$. Довірчий інтервал буде складати: $\Delta Y = 1,996 \cdot 74,48 / \sqrt{68} = 18,03$. Математичне очікування можна записати, що знаходиться у межах: $246,46 \pm 18,03$

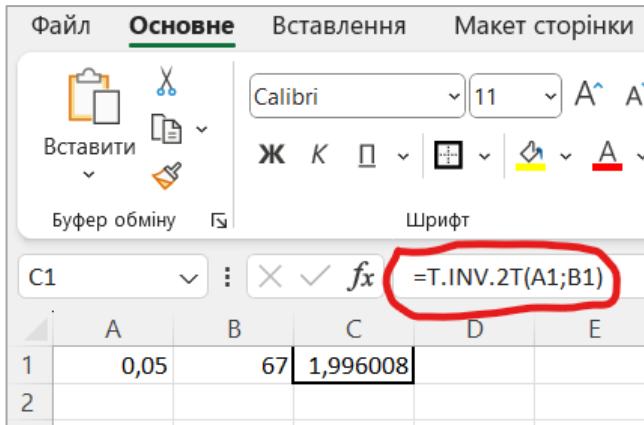


Рисунок 3.4 — Приклад розрахунку коефіцієнта Стьюдента за допомогою вбудованої функції *Microsoft Excel*

3.8. Визначення необхідної кількості випробувань

Збільшення кількості випробувань, як видно з рівняння (3.13) зменшує довірчий інтервал, а отже збільшує точність визначення середнього арифметичного. При необхідності забезпечити похибку середнього арифметичного у певних межах, виникає задача з визначення кількості випробувань [4]. Якщо задати цю похибку в процентах від середнього арифметичного - k , то :

$$\Delta Y = \frac{k\bar{Y}}{100} \quad (3.14)$$

Тоді з рівняння (3.13) можна отримати залежність для визначення N

$$N = \left(t_{\alpha} \frac{100 \cdot V}{k} \right)^2 \quad (3.15)$$

Оскільки t_{α} залежить від кількості N , рівняння (3.15) треба вирішувати послідовними приближеннями. При цьому треба орієнтовно знати коефіцієнт варіації вибірки. Результати розрахунків кількості випробувань в залежності від проценту похибки та коефіцієнту варіації для рівня значущості 0,05 наведено в Таблиці 3.2. Похибка в цьому разі буде не більше ніж вказано в таблиці.

Таблиця 3.2 — Кількість необхідних випробувань в залежності від похибки та коефіцієнту варіації при $\alpha = 0,05$

Похибка k, % Коефіцієнт варіації <i>V</i>	5	10	15	20	25	30	40	50
0,1	18	7	5	4	3	3	3	3
0,2	64	18	10	7	5	5	4	3
0,3	141	37	18	12	9	7	5	4
0,4	249	64	30	18	13	10	7	5
0,5	387	99	46	27	18	14	9	7
0,6	556	141	64	37	25	18	12	9
0,7	756	191	86	50	33	24	15	11

3.9. Визначення грубих помилок за результатами вимірів

Під час проведення експериментальних досліджень деякі отримані в результаті вимірів дані можуть викликати сумніви бо їх значення, на думку дослідника, суттєво відрізняються від інших елементів вибірки. Таке відхилення могло виникнути внаслідок впливу людського фактору та технічних проблем у тому числі з вимірювальними приладами. В цьому випадку можемо говорити про наявність грубих помилок саме вимірювання. Наявність таких даних спотворює результати досліджень. Але це не єдина можлива причина – відхилення може бути викликане різкою відмінністю («викидом») властивостей зразка або його частини від інших. Тобто це не буде помилковим результатом, саме так іноді поведуть себе «погано-організовані системи».

Розглянемо критерій для оцінки наявності помилки або «викиду». Критерій може застосовуватися якщо елементи вибірки розподілені нормально або близько до цього (закони розподілу розглянемо далі) і вважається надійним при об'ємі вибірки $N \geq 20$. Критерій базується на оцінці імовірності виникнення результату, що викликає сумнів. Якщо імовірність дуже низька, але результат

все ж таки виник – то його при певних обставинах можна вважати отриманим з грубою помилкою та обґрунтовано виключити з подальшого розгляду.

За результатами повторних дослідів, дослідник має впевнитися, що це не є результат, викликаний хоч і малоімовірним, але природнім та повторюваним відхиленням властивостей. В цьому випадку такі результати відкидати не можна. Саме вони можуть в подальшому становити інтерес для дослідника.

Для того, щоб якось виділити грубі помилки, за цим критерієм встановлюється дуже низька імовірність виникнення значень, що викликають сумніви – не більше ніж 0,008%. Тому у багатьох випадках його буде достатньо для оцінки (або попередньої оцінки) помилок при різного роду вимірах.

Якщо у вибірці $Y \{Y_1, Y_2, \dots, Y_C, \dots, Y_i, \dots, Y_N\}$ об'ємом N значення Y_C викликає сумніви, то за формулами (3.3) або (3.4) та (3.8) треба вирахувати, без урахування Y_C , значення середнього арифметичного та середнього квадратичного відхилення – \bar{Y}_X та S_X . Відповідно середнє арифметичне треба визначати серед $N - 1$ елементів вибірки, а кількість ступенів свободи буде дорівнювати $f = N - 2$.

Відхилення сумнівного результату від середнього:

$$\varepsilon = |Y_C - \bar{Y}_X| \quad (3.16)$$

При цьому, якщо виявиться, що:

- $\varepsilon > 4S_X$ при $N \leq 100$,
- $\varepsilon > 4,5S_X$ при $100 < N \leq 1000$,
- $\varepsilon > 5S_X$ при $N > 1000$,

то Y_C можна вважати безумовно помилковим [3] бо імовірність такого результату дуже і дуже мала.

Застосування будь-яких критеріїв відсіву потребує уваги та урахування об'єктивних умов вимірювання. Безумовно, дослідник повинен виключити результат з явною грубою помилкою та виконати нове дослідження. Але він не має права відкидати результати більш-менш відмінні один від одного. У сумнівних

випадках краще зробити додаткові досліді (не замість тих що викликають сумніви, а на додачу до них) і тільки після цього застосовувати статистичні критерії.

3.10. Особливості визначення середнього арифметичного, дисперсії та стандартного відхилення для безперервних випадкових величин

Усі викладені вище характеристики стосуються дискретних випадкових величин, що складають вибірку, отриману під час досліджень технічних об'єктів та процесів. Але при вимірюванні деяких характеристик процесу різання таких як складові сили різання різного роду динамометрами, або температури штучною або природньою терморпарами – маємо практично безперервний потік даних, що поступає на записуючий пристрій (наприклад комп'ютер) та відображається на ньому у вигляді осцилограми (Див. Рис. 3.5)

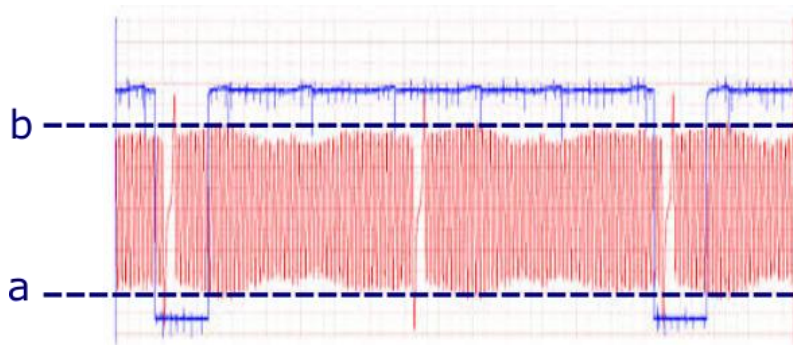


Рисунок 3.5 — Відображення результатів вимірювання у вигляді осцилограми

При сталому процесі результати вимірювання коливаються у межах $a - b$. Якщо є підстави припустити, що ймовірність прийняття виходом будь якого значення в межах від a до b однакова, то наступні характеристики можуть бути визначені як

для безперервної функції [11]. Не зупиняючись на теорії питання, відзначимо, що в цьому разі будемо мати не вибірккові а генеральні (теоретичні) характеристики:

- Середнє арифметичне

$$\bar{Y} = \frac{b + a}{2} \quad (3.17)$$

- Дисперсія

$$S^2 \approx \sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12} \quad (3.18)$$

- Середнє квадратичне (стандартне) відхилення

$$S \approx \sigma = \frac{|b - a|}{2\sqrt{3}} \quad (3.19)$$

4. ЕЛЕМЕНТИ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ. ПОРІВНЯННЯ ДИСПЕРСІЙ

При проведенні досліджень технічних об'єктів, систем та процесів, до вибірки можуть включатися елементи, що належать до різних груп. Наприклад: однотипні деталі, вироблені на різних верстатах однієї моделі або в різні зміни; це можуть бути заготовки з різних партій або інструмент абсолютно однакової конструкції але придбаний у різних постачальників. В такому разі, інтерес представляє аналіз впливу саме цього групового признаку (класифікуючого критерію) на отриманий результат. Приналежність до різних груп позначається на значеннях дисперсій отриманих як для груп так і для вибірки в цілому. Порівнюючи дисперсії можна робити висновки про наявність або відсутність впливу класифікуючого фактору. Це і є предметом дисперсійного аналізу.

Розглянемо вибірку відгуків (виходів) Y об'ємом N , яку згідно з критерієм A поділено на m груп, кожна з яких має об'єм n_i . Кількість елементів в кожній з груп може бути різним, і наведені нижче розрахункові формули виходять саме з цього. Якщо кількість елементів в групах однакова, то формули можуть бути дещо спрощенні.

Загальний об'єм вибірки буде визначатися як:

$$N = \sum_{i=1}^m n_i \quad (4.1)$$

Якщо позначити Y_{ij} – j -й елемент i -ї групи, то середнє арифметичне групи буде дорівнювати:

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \quad (4.2)$$

Загальне зважене середнє арифметичне з усіх груп:

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m n_i \bar{Y}_i \quad (4.3)$$

У дисперсійному аналізі розраховують так звані «суми квадратів» та значення дисперсії в залежності від джерела розсіювання (дисперсії як такої). Відповідно при наявності одного класифікуючого критерію A (однофакторна класифікація) розрахунки ведуться як зазначено в Таблиці 4.1 [12].

Наявність або відсутність впливу класифікуючого критерію на відгук Y визначається через відповідь на питання: чи суттєво середні груп \bar{Y}_i відрізняються одна від одної. Якщо суттєвої відмінності нема, то кажуть що вони статистично рівні, а звідси і класифікуючий критерій не має ніякого впливу.

Таблиця 4.1 — Таблиця дисперсійного аналізу при однофакторній класифікації

Джерело дисперсії	Сума квадратів	Кількість ступенів свободи	Дисперсія
Між групами	$Q_A = \sum_{i=1}^m n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$	$f_A = m - 1$	$S_A^2 = \frac{Q_A}{f_A}$
Всередині груп	$Q_W = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$	$f_W = N - m$	$S_W^2 = \frac{Q_W}{f_W}$
Повна сума квадратів	$Q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y})^2$ або $Q = Q_A + Q_W$	$f = N - 1$	$S^2 = \frac{Q}{f}$

Гіпотеза про рівність середніх перевіряється за критерієм Фішера, порівнюючи дисперсії S_A^2 та S_W^2 [12]. Вона не відхиляється з довірчою імовірністю q якщо виконується умова:

$$F = \frac{S_A^2}{S_W^2} \leq F_q \quad (4.4)$$

Де F_q – критичне значення критерію Фішера, яке визначається в залежності від довірчої імовірності q та кількості ступенів свободи f_A та f_W . Якщо критерій Фішера пов'язують не з довірчою імовірністю, а ступенем значущості α то позначають його відповідно $F_{1-\alpha}$

У разі якщо умова (4.4) не виконується, то між середніми є суттєва різниця і класифікуючий критерій має суттєвий вплив на отриманий результат.

Визначити критичне значення критерію Фішера можна за допомогою вбудованої функції **F.INV** програми *Microsoft Excel* як показано на Рис. 4.1. У цьому прикладі у клітинці *B1* – кількість ступенів свободи дисперсії що стоїть у чисельнику формули (4.4): f_A , а у *C1* – кількість ступенів свободи дисперсії у знаменнику формули (4.4): f_W .

За критерієм Фішера порівнюються і самі дисперсії, значення яких, як і будь яких випадкових величин формується під впливом випадкових факторів. Така перевірка називається *перевірка однорідності дисперсій*. Якщо вибіркові дисперсії S_1^2 та S_2^2 є характеристиками двох вибірок *B1* та *B2* – див. Рис. 4.2а, що належать однієї генеральній сукупності (ГС), то вони оцінюють одну й туж саму генеральну дисперсію – у цьому випадку кажуть що дисперсії є однорідними або статистично рівними – зі статистичної точки зору між ними нема різниці, бо вона не є суттєвою. Коли ж вибірки *B1* та *B2* належать різним генеральним сукупностям – відповідно ГС1 та ГС2 (див. Рис.4.2б), то вони є статистичними оцінками різних генеральних дисперсій, отже між ними є суттєва різниця і такі дисперсії не рівні або не однорідні. Для перевірки однорідності критерій Фішера визначають діленням більшої дисперсії на меншу:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad \text{якщо } S_1^2 > S_2^2 \quad (4.5)$$

$$F = \frac{S_2^2}{S_1^2} \quad \text{якщо } S_2^2 > S_1^2$$

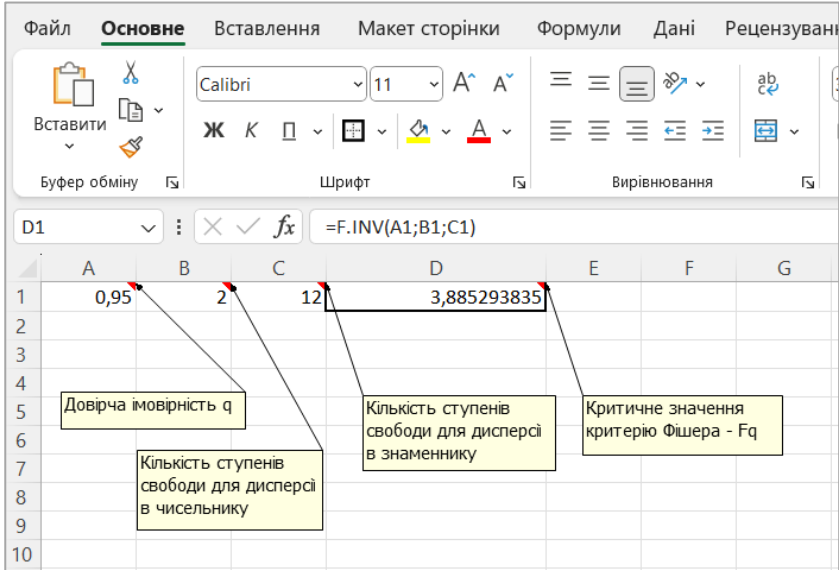
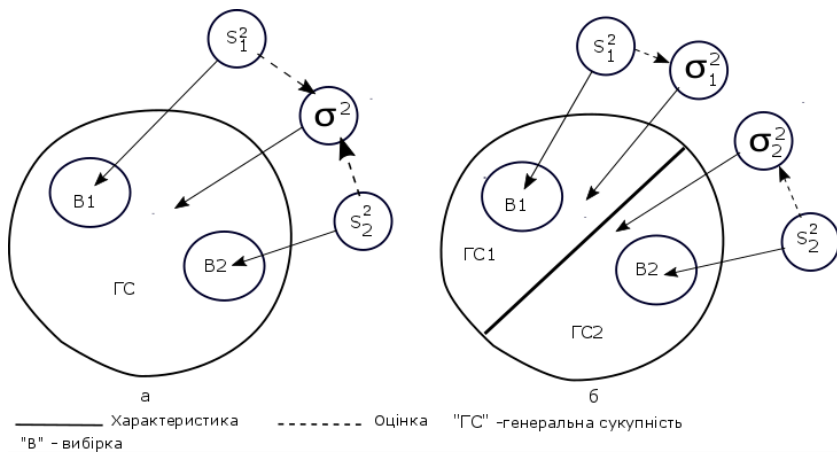


Рисунок 4.1 — Результат розрахунку критерію Фішера за вбудованою функцією *Microsoft Excel*

Отримане значення F порівнюється з критичним, яке визначається так як було показано раніше (див. Рис.4.1). При цьому треба звернути увагу при підстановці в розрахункову формулу кількості ступенів свободи: яка з дисперсій знаходиться в чисельнику, а яка в знаменнику.



а – Однорідні дисперсії, б – не однорідні дисперсії

Рисунок 4.2 — Схема до перевірки однорідності дисперсій

Якщо виконується умова:

$$F \leq F_q \quad (4.6)$$

то гіпотеза про однорідність дисперсій не відхиляється (дисперсії можна вважати однорідними з імовірністю q), різниця між ними не суттєва, а тому їх можна вважати такими, що належать одній генеральній сукупності. Якщо умова (4.6) не виконується – то дисперсії не однорідні і між ними є суттєва різниця.

При наявності більшої кількості дисперсій: $\{S_1^2, S_2^2, \dots, S_i^2, \dots, S_m^2\}$, які належать до m вибірок або груп, треба використовувати інші критерії. При однаковому об'єму вибірок n це може бути критерій Кокрена [4] який визначається діленням максимальної дисперсії на суму всіх дисперсій:

$$G = \frac{\max \{S_i^2\}}{\sum_{i=1}^m (S_i^2)} \leq G_{q,m,f} \quad (4.7)$$

де $G_{q,m,f}$ – критичне значення критерію Кокрена, що вибирається зі статистичних таблиць в залежності від довірчої імовірності q ,

кількості груп або серій незалежних дослідів - m та кількості ступенів свободи кожного дослідів $f = n - 1$.

У тому разі, коли кожна група має свій об'єм n_i використовується критерій Бартлетта W . Для цього треба знати середньозважену дисперсію, якою по суті є дисперсія S_W^2 , (див. Табл.4.1). Сам критерій Бартлетта розраховується за рівняннями (4.8):

$$W = \frac{M}{C}$$

$$M = f_W \ln(S_W^2) - \sum_{i=1}^m f_i \ln(S_i^2) \quad (4.8)$$

$$C = 1 + \frac{1}{3f_A} \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{f_i} \right) - \frac{1}{f_W} \right)$$

тут $f_i = n_i - 1$ – кількість ступенів свободи кожної з вибірок.

Отримане значення W порівнюється з критичним значенням критерію Пірсона χ_q^2 , яке визначається в залежності від довірчої імовірності q та кількості ступенів свободи f_A . Якщо виконується умова:

$$W \leq \chi_q^2 \quad (4.9)$$

то гіпотеза про те, що дисперсії є однорідними та належать до однієї генеральної сукупності не відхиляється з імовірністю q . Якщо умова (4.9) не виконується – дисперсії не однорідні.

Для розрахунку критичного значення критерію Пірсона χ_q^2 можна скористатися вбудованою статистичною функцією *Microsoft Excel* $\{\chi_q^2\} = \mathbf{CHISQ.INV}((q); \langle f_A \rangle)$.

Результат розрахунку наведено на Рис.4.3.

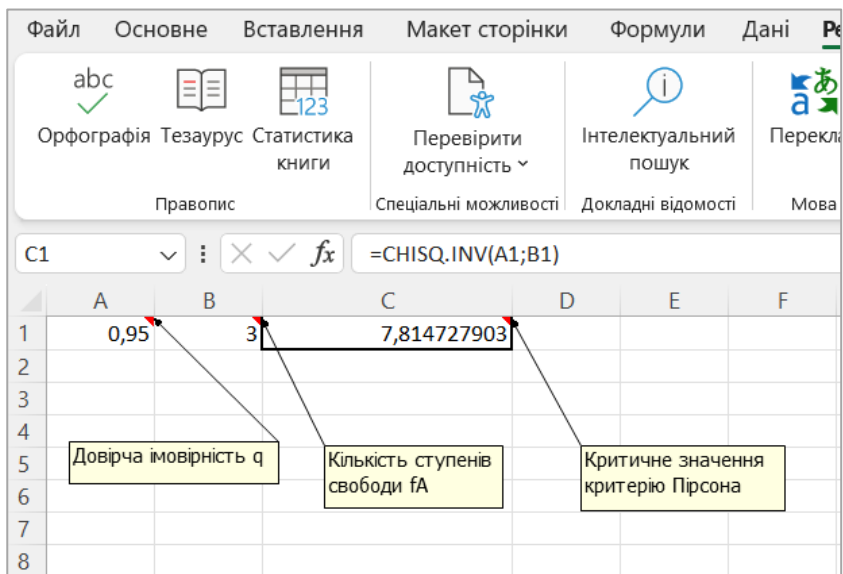


Рисунок 4.3 — Результати розрахунку критичного значення критерію Пірсона χ_q^2 в *Microsoft Excel*

5. ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ РІЗЦІВ З МЕХАНІЧНИМ КРІПЛЕННЯМ БАГАТОГРАННИХ ПЛАСТИНОК МЕТОДОМ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ (ПРИКЛАД)

У якості комплексного прикладу практичного використання в інженерній діяльності матеріалу викладеного у розділах 3 - 4, розглянемо дослідження впливу повороту або зміни багатогранної твердосплавної пластинки на точність обробки різцями, оснащеними такими пластинами.

Згідно зі стандартом *ISO1832:2014* багатогранні пластинки мають декілька ступенів точності, що позначаються *A, C, E, F, G, H, J, K, L, M, N, U*. Відхилення розмірів пластини встановлюються також в залежності від її форми та розміру і можуть становити досить широкий діапазон. Так наприклад відхилення діаметру вписаного кола може знаходитися в межах від 0,013 до 0,25 мм.

Різальні властивості різців з механічним кріпленням багатогранних твердосплавних пластинок відновлюються шляхом повороту пластини або її заміни. При чому відхилення положення вершини від початкового повинно зберігатися в межах допуску. Тільки в цьому випадку можна забезпечити обробку деталей без додаткового налагодження верстату, що є однією з основних умов економії часу.

Виміри відхилення положення вершини відносно початкового здійснювалися на пристрої мод. БВ2012М який забезпечує точність виміру до 0,0005 мм з використанням пристосування що імітує базування багатогранної пластини отвором на штифт (тип W у відповідності з *ISO1832*, див. Рис.5.1). Вимірювання проводились по трьох п'ятигранних пластинах: $m = 3$, $n = 5$. Загальна кількість спостережень $N = n \cdot m = 5 \cdot 3 = 15$

Позначимо δ_{ij} відхилення j -ї вершини i -ї пластини. Положення вершини «1» першої пластини приймемо за вихідне, та вирахуємо відхилення від нього: $\delta_{ij} = |l_{ij} - l_{11}|$. Результати вимірів та розрахунків наведені у таблиці дисперсійного аналізу (Див. Табл. 5.1) в якій: $\bar{\delta}_i$, S_i^2 , f_i - середнє відхилення, дисперсія та

кількість ступенів свободи по кожній пластині; $\bar{\delta}$ - загальне середнє відхилення

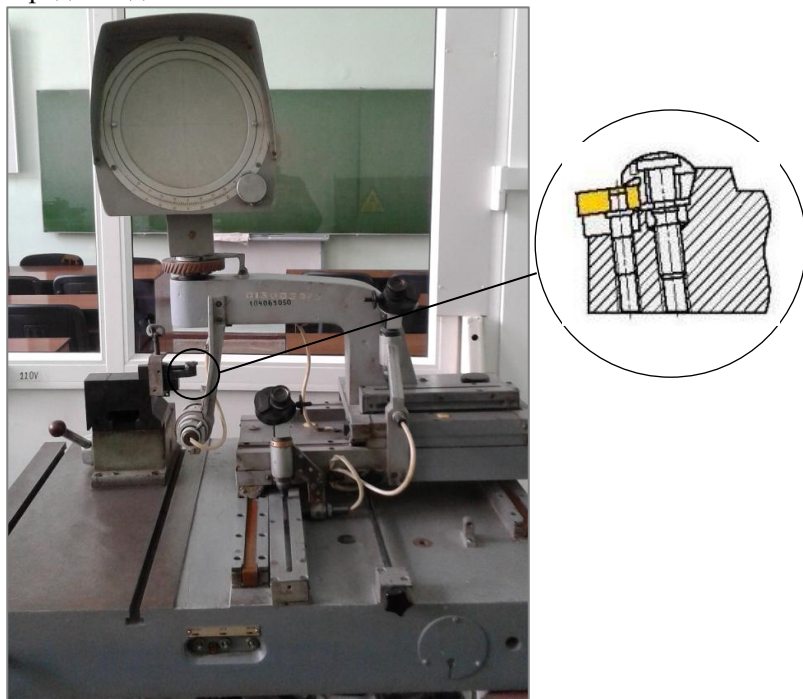


Рисунок 5.1 — Вимірювальний пристрій та схема базування пластинки.

Порівнюємо середні за рівнянням (4.4):

$$F = \frac{S_A^2}{S_W^2} = \frac{0,00499}{0,00069} = 7.23$$

Критичне значення критерію Фішера для довірчої імовірності $q = 0,95$, кількості ступенів свободи для S_A^2 та S_W^2 відповідно 2 та 12 (див. Табл.5.1) дорівнює $F_{0.95} = 3,88$. Оскільки $F > F_{0.95}$ -

Таблиця 5.1 — Дисперсійний аналіз результатів вимірювання

№ пластини	№ вершини	Покази приладу I_{ij}	δ_{ij}	δ_i	S_i^2	δ	S_W^2	S_A^2	S^2
					f_i		f_W	f_A	f
1	1	181,491	0,000	0,0118	0,0001157	0,04827	0,00069	0,00499	0,00130
	2	181,464	0,027						
	3	181,473	0,018						
	4	181,496	0,005						
	5	181,482	0,009						
2	1	181,533	0,042	0,0676	0,0006133				
	2	181,545	0,054						
	3	181,598	0,107						
	4	181,564	0,073						
	5	181,553	0,062						
3	1	181,523	0,032	0,0654	0,0013318		12	2	14
	2	181,551	0,06						
	3	181,553	0,062						
	4	181,618	0,127						
	5	181,537	0,046						

середні не рівні, тобто поворот та зміна пластин забезпечують різну точність.

Визначимо довірчий інтервал з урахуванням дисперсії між групами - S_A^2 , що буде характеризувати точність при зміні пластини. Для рівня значущості $\alpha = 0,05$ та кількості ступенів

свободи $f_A = 2$ критерій Стюдента буде дорівнювати $t_{0.05} = 4,303$.
Тоді:

$$\Delta_A = t_\alpha \frac{S_A}{\sqrt{N}} = 4,303 \frac{0,0707}{\sqrt{15}} = 0,0785$$

Таким чином, при зміні пластини, положення її вершини може знаходитися в довірчих межах на максимальній відстані одне від одного:

$$\varepsilon_A = 2 \cdot 0,0785 = 0,157 \text{ мм.}$$

Довірчий інтервал, що враховує дисперсію всередині груп - S_W^2 , буде характеризувати точність при повороті пластини. Для рівня значущості $\alpha = 0,05$ та кількості ступенів свободи $f_W = 12$ критерій Стюдента дорівнює $t_{0.05} = 2,179$. Тоді:

$$\Delta_W = t_\alpha \frac{S_W}{\sqrt{N}} = 2,179 \frac{0,0262}{\sqrt{15}} = 0,0147$$

Звідси, при повороті пластини, положення її вершини може знаходитися в довірчих межах на максимальній відстані одне від одного:

$$\varepsilon_W = 2 \cdot 0,0147 = 0,029 \text{ мм}$$

Перевіримо однорідність дисперсій кожної з пластин S_i^2 (див. табл. 5.1) за критерієм Бартлетта за формулами (4.9):

$$\begin{aligned} M &= \\ &= 12 \cdot \ln(0,00069) - \\ &- 4 \times \\ &\times (\ln(0,0001157) + \ln(0,0006133) + \ln(0,0013318)) = 4,930 \end{aligned}$$

$$C = 1 + \frac{1}{3 \cdot 2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12} \right) = 1,111$$

$$W = \frac{4,930}{1,111} = 4,438$$

Для довірчої імовірності $q = 0,95$ та кількості ступенів свободи $f_A = 2$ значення критерію Пірсона складає $\chi_{0,95}^2 = 5,99$.

Оскільки $4,438 < 5,99$ - дисперсії є однорідними, та можна вважати, що пластини належать до однієї партії та мають однаковий ступінь точності.

Точності налаштування при повороті за зміні пластини досить відмінні одна від одної і відрізняються більш ніж в 5 разів, що має бути предметом уваги в ході технологічного процесу та при налаштуванні обладнання. З отриманих результатів можна припустити, що ця різниця викликана скоріш за все особливостями конструкції механізму кріплення та базування пластини.

6. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ТЕОРЕТИЧНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ВАРІАЦІЙНІ РЯДИ

6.1. Теоретичні закони розподілу та їх властивості. Центри розподілу

Найбільш повну характеристику випадкової величини можна отримати з її закону розподілу, який встановлює зв'язок між значенням y та ймовірністю F того, що випадкова величина Y буде відповідати умові $Y < y$:

$$F(y) = P\{Y < y\} \quad (6.1)$$

Тут символом « $P\{A\}$ » позначено імовірність події A . Рівняння (6.1) називається *інтегральним законом* або *функцією розподілу ймовірностей* [13]. Функція (6.1) має наступні властивості:

- 1) $0 \leq F(y) \leq 1$ для будь якого y
- 2) $F(y_1) > F(y_2)$ якщо $y_1 > y_2$
- 3) $F(0) = 0$ або $F(-\infty) = 0$ в залежності від виду закону розподілу. Якщо при аналізі технічних систем в якості аргументу виступає час, функцію розподілу обирають таким чином щоб $y > 0$ або $F(y) \rightarrow 0$ при $y < 0$.
- 4) $F(+\infty) = 1$

Відповідно, ймовірність того, що $Y \geq y$ буде визначатися:

$$R(y) = P\{Y \geq y\} = 1 - F(y) \quad (6.2)$$

Для випадкової величини, що має безперервну функцію розподілу $F(y)$, що диференціюється, можна знайти диференційний закон розподілу ймовірностей, що виражається як похідна функції $F(y)$, або:

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} \quad (6.3)$$

Ця функція називається *щільністю розподілу імовірностей* і відображає вона імовірність виникнення кожного окремого значення y . В залежності від характеру функції $f(y)$ розрізняють різні *види розподілу*, а сама функція має наступні загальні властивості:

$$1) f(y) \geq 0 \text{ для будь якого } y$$

$$2) F(y) \equiv P\{Y < y\} = \int_0^y f(z) dz$$

$$3) P\{a \leq Y < b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(z) dz$$

$$4) \int_0^{+\infty} f(z) dz = 1$$

У відповідності з п.2 властивостей щільності розподілу, ймовірність події $Y < y$ кількісно буде дорівнювати (див. Рис. 6.1) площі зліва, обмеженої кривою розподілу та ординатою y (на рисунку заштрихована область). А за п.4 тих-же властивостей, площа під всією кривою дорівнює 1.

Важливими характеристиками будь якого розподілу є центри та моменти розподілу. До центрів розподілу відносяться (Див. Рис.6.1):

- **Математичне очікування $M[y]$** – детально розглядалося у розділі 3. Найбільш часто використовується для оцінки центру розподілу, бо це єдина оцінка центру, що може бути виражена аналітично [13]
- **Медіана Me** – є найбільш фундаментальним центром розподілу бо розподіляє випадкові величини за принципом симетрії. Медіана є такою точкою на осі y що імовірність

появи будь яких випадкових величин зліва та справа від неї є однаковою і дорівнює 0,5. Отже площа під кривою щільності розподілу зліва та справа від медіани є також однаковою і дорівнює 0,5. Медіана існує у будь якого розподілу.

- **Мода M_o** – точка на осі y , що відповідає максимуму функції щільності розподілу. Тобто мода є найбільш імовірним значенням випадкової величини. На відміну від медіани – мода існує не у всіх розподілах.

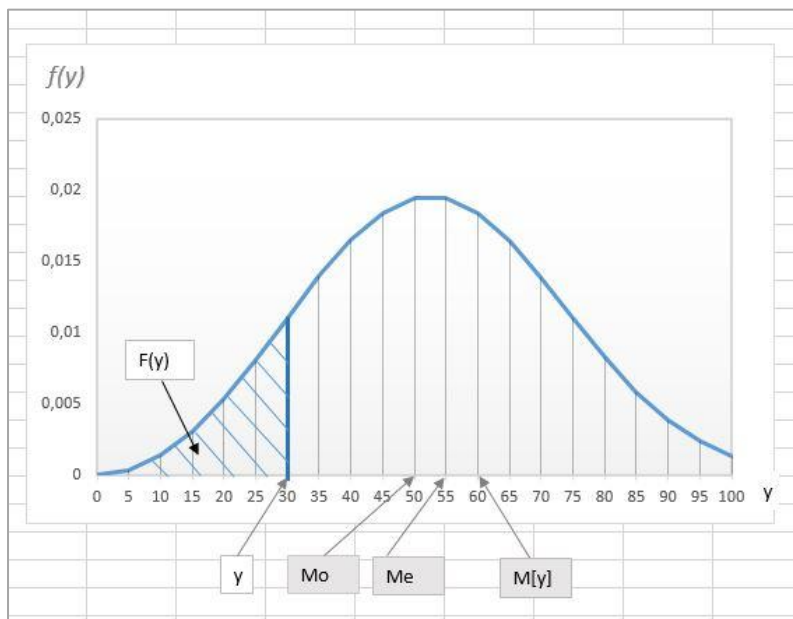


Рисунок 6.1 — Щільності розподілу та його центри

Вершину кривої щільності розподілу називають «пік», а лінії, що підходять до вершини зліва та справа – «хвости» розподілу

6.2. Побудова варіаційного ряду

Теоретичні закони розподілу відносяться до безперервних випадкових величин. Для виявлення характеру розподілу дискретних випадкових величин виконується *розбиття вибірки* або як ще кажуть побудова *варіаційного ряду*.

Для побудови варіаційного ряду розмах R вибірки об'ємом N розбивається на k рівних інтервалів та підраховується кількість елементів вибірки що потрапили в кожний з інтервалів. Є багато підходів до визначення кількості цих інтервалів k [14], які здебільшого встановлюють її зв'язок з об'ємом вибірки. Серед них наприклад формула Старджеса, яка використовується найчастіше:

$$k = 1 + 3,32 \cdot \lg(N) \quad (6.4)$$

На кількість інтервалів також рекомендується накладати наступне обмеження [15]:

$$0.5 \cdot N^{0.4} \leq k \leq 1.25 \cdot N^{0.4} \quad (6.5)$$

Кількість інтервалів, вибрана з урахуванням обмеження (6.5), при об'ємі вибірки до 1000 елементів не має відчутного впливу на результати. Помітний вплив взагалі виникає при об'ємі вибірки більше 5000 шт. [16]. Також за рекомендаціями [13, 15] *бажано, щоб кількість інтервалів була не менше 5 та непарним* для коректного визначення центрів розподілу. Крім того, рекомендується щоб по можливості в кожному з інтервалів за виключенням крайніх було б не менше 5 елементів, але виконання цієї рекомендації перш за все пов'язане з об'ємом вибірки.

Довжина інтервалу при цьому буде складати:

$$\Delta t = \frac{R}{k} \quad (6.6)$$

Границі інтервалу u позначимо: ліва – Y_{u-1} та права - Y_u (див. Рис.6.2), тоді як $Y_0 = Y_{min}$:

$$Y_u = Y_{u-1} + u \cdot \Delta t \quad (6.7)$$

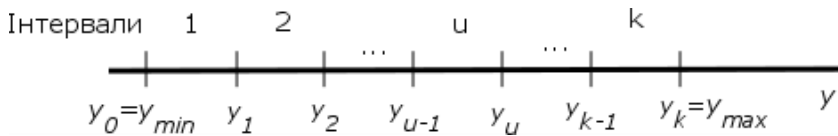


Рисунок 6.2 — Інтервали розбиття вибірки

Після цього підраховується кількість елементів вибірки, що потрапили в кожний з інтервалів – n_u . При цьому вважається, що в середині інтервалу імовірність появи кожного зі значень однакова, тобто розподілу імовірностей всередині інтервалу рівномірне і центром цього розподілу є середина інтервалу \hat{Y}_u :

$$\hat{Y}_u = \frac{Y_{u-1} + Y_u}{2} \quad (6.8)$$

Виходячи з цього, середина інтервалу умовно «навантажується» частотою потрапляння в інтервал (спосіб «навантажених ординат») з метою визначення відносних частот та деяких характеристик розподілу. За отриманими результатами будується гістограма, що відображає щільність розподілу: над кожним інтервалом будується прямокутник, площа якого пропорційна відносній частоті для цього інтервалу [17]. Тоді оцінкою теоретичної щільності розподілу $f(Y)$ буде відносна частота для кожного з інтервалів поділена на довжину інтервалу. Ця оцінка буде тим ближче до теоретичного значення, чим більша кількість спостережень:

$$\hat{f}(\hat{Y}_u) = \frac{p_u}{\Delta t} = \frac{n_u}{N \cdot \Delta t} \quad (6.9)$$

Приклад. Дані наведені в табл.3.1 отримані розбиттям вибірки об'ємом $N = 68$. Згідно (6.4) кількість інтервалів:

$$k = 1 + 3,32 \cdot \lg(68) \approx 7.$$

З урахуванням обмеження (6.5):

$$2,7 \leq k \leq 7.$$

Приймаючи до уваги також і інші вищенаведені рекомендації, прийнято $k = 7$. Довжина інтервалу:

$$\Delta t = 392/7 = 56$$

Границі інтервалів; кількість елементів, що попали в кожний з інтервалів; відносні частоти та середини для кожного з інтервалів наведено в табл. 3.1. Тоді висота прямокутників гістограми буде визначатися з рівняння (6.9): $\hat{f}(\hat{Y}_u) = p_u/\Delta t = p_u/56$. Гістограма варіаційного ряду, отримана по цих даних наведена на Рис. 6.3.

Характер гістограми є одним з чинників при висуненні припущення про вид закону розподілу

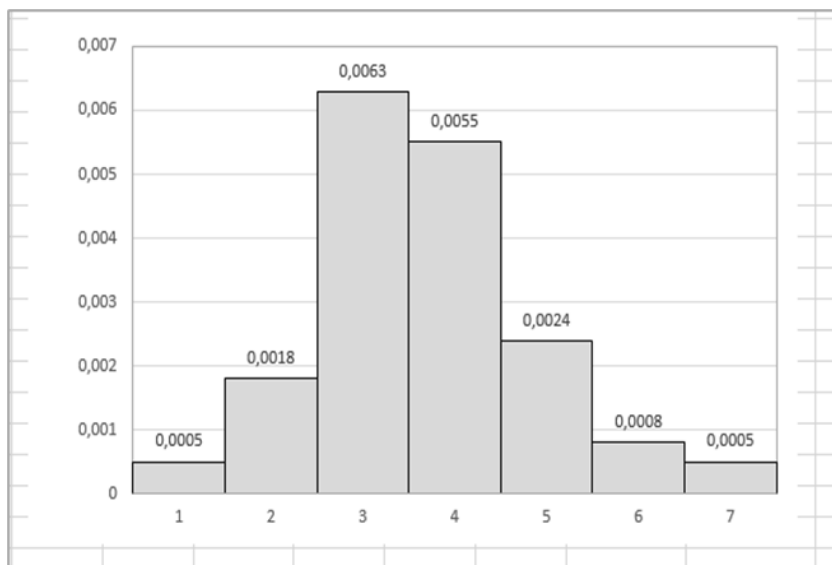


Рисунок 6.3 — Гістограма варіаційного ряду

6.3. Показники форми законів розподілу.

Для характеристики законів розподілу нам знадобиться поняття *центрального моменту розподілу k -го порядку*, який найчастіше визначається відносно математичного очікування і для дискретних випадкових величин розраховується за формулою [13]:

$$m_k = \sum_{i=1}^N (Y_i - M[Y])^k \cdot f(Y_i) \quad (6.10)$$

При визначенні форми розподілу важно виявити, чи симетрична крива щільності розподілу відносно його центру. Показником ступеня несиметричності цієї кривої є безрозмірна величина, що називається коефіцієнтом асиметрії. Коефіцієнт асиметрії позначається як γ або As . На якісному рівні поняття асиметрії означає: якщо крива щільності імовірності має крутий лівий та пологий правий спад, кажуть, що розподіл має *позитивну асиметрію*. У цьому випадку координати показників центру розподілу розташовуються на осі абсцис, як правило, наступним чином: *мода < медіана < математичне очікування*. Якщо крива щільності імовірності має пологий лівий та крутий правий спад, розподіл має *негативну асиметрію*. В цьому випадку для показників центру розподілу маємо: *математичне очікування < медіана < мода*. [13]

Зі збільшенням коефіцієнту асиметрії числові значення центрів розподілу будуть зміщуватися в сторону менших значень елементів вибірки.

В кінці кінців, у симетричних розподілень, медіана, мода та математичне очікування співпадають, а коефіцієнт асиметрії дорівнює нулю. Природньо, усе вищесказане о співвідношенні показників центру, справедливо тільки для тих розподілень, у яких існує мода та/чи математичне очікування.

Для дискретного розподілу коефіцієнт асиметрії визначається через центральний момент третього порядку, та третю ступінь стандартного відхилення S :

$$A_s = \frac{m_3}{S^3} \quad (6.11)$$

При визначенні оцінки коефіцієнта асиметрії за вибіркою, з середнім арифметичним у якості центру розподілу, використовується наступна залежність [13]:

$$\hat{A}_s = \frac{1}{S^3} \cdot \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^3 \quad (6.12)$$

Надзвичайно важливим показником форми розподілу є безрозмірний показник, що називається *ексцес* і позначається як ϵ або E_x . Ексцес характеризує:

- По перше, гостроту «піку» розподілу;
- По друге, крутизну спаду «хвостів» розподілу;

Визначається ексцес через центральний момент четвертого порядку та четверту ступінь стандартного відхилення. Часто ексцес модернізують віднімаючи 3:

$$E_x = \frac{m_4}{S^4} \quad \text{або} \quad E_x = \frac{m_4}{S^4} - 3 \quad (6.13)$$

Виходячи з модернізованого ексцесу, розподіл щільності імовірності умовно можна розподілити на 3 групи:

- Острровершинні – з вираженим піком та з полого спадаючими «важкими» хвостами. Значення ексцесу $E_x > 0$
- Середньовершинні – пік виражено середньо та $E_x \approx 0$
- Плосковершинні розподіли мають слабо виражений пік, $E_x < 0$

Оцінка модернізованого ексцесу за вибіркою розраховується за наступною залежністю:

$$\hat{E}_x = \frac{1}{S^4} \cdot \frac{N \cdot (N+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^4 - \frac{3 \cdot (N-1)^2}{(N-2)(N-3)} \quad (6.14)$$

Далі будуть наводитись значення саме модернізованого ексцесу.

Приклад. Для вибірки, наведеної в табл. 3.1, при $N=68$, $\bar{Y} = 246,46$ - коефіцієнт асиметрії складає: $As = 0,48$, а ексцес $Ex = 0,57$, що відповідає формі закону розподілу, яку можна бачити на гістограмі Рис.6.3

7. ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ НА ОСНОВІ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ

7.1. Поняття про надійність технічних об'єктів

Надійність – це властивість об'єкту зберігати в часі у встановлених межах значення усіх параметрів, що характеризують здатність виконувати необхідні функції у встановлених режимах та умовах використання, технічного обслуговування, зберігання та транспортування. [18].

Перед тим, як перейти до розгляду питань пов'язаних з надійністю технічних об'єктів треба визначитися з одним з ключових термінів теорії надійності [18]: перехід з одного стану об'єкта в інше зазвичай відбувається в наслідок пошкодження або відмови. **Відмова** – означає порушення працеспроможності об'єкта при якому система або елемент перестав виконувати цілком або частково свої функції.

Одним з центральних понять теорії надійності є напрацювання – тривалість або об'єм роботи об'єкту. Час від початку експлуатації об'єкту до виникнення першої відмови називається напрацюванням до відмови, а середній час між двома відмовами – напрацювання на відмову. При аналізі відмов неремонтопридатного виробу кажуть про середнє напрацювання до відмови (або на відмову) як про еквівалентний параметр, що означає просто середній час який пропрацює виріб до того моменту як відмовить. Металорізальний інструмент є неремонтопридатним якщо розглядати його функціонування від встановлення до відмови – за цей період він не ремонтується, але відновлюється (наприклад шляхом повороту або заміни багатогранної пластини) після відмови або досягнення деякого граничного стану. Але у будь якому випадку це вже інший інструмент.

Розглянемо деякі класифікаційні признаки відмов:

1. Типи відмов:

- Функціональна – виконання основних функцій об'єктів припиняється (поломка зубців шестерні);
- Параметрична – деякі параметри об'єкту змінюються в неприпустимих межах (наприклад втрата точності верстата).

2. Природа відмов:

- Випадкова, обумовлена непередбачуваними перевантаженнями (дефектами матеріалу, помилками персоналу, збоями системи керування та ін.);
- Систематична, обумовлена закономірними та неминучими явищами, що викликають поступове накоплення пошкоджень : втома, знос, старіння, корозія та ін.

3. Характер відмови:

- Раптова – відмова, що характеризується швидким (скачкоподібним) змінням значень одного чи декількох параметрів об'єкта, що визначають його якість;
- Поступова (деградаційна, зносова) – відмова, що характеризує повільними (поступовим) змінням параметрів об'єкту в результаті втоми, зносу, старіння та ін.

4. Причини виникнення:

- Конструкційна, що викликана недоліками та недосконалою конструкцією об'єкту;
- Виробнича, пов'язана з помилками при виготовленні об'єкту з причини недосконалості або порушення технології;
- Експлуатаційна, що виникла в процесі експлуатації об'єкта природньо або як результат порушень правил експлуатації.

5. Час виникнення:

- Відмови в процесі припрацювання, що виникли у початковий період експлуатації
- Відмови при нормальній експлуатації

- Зносів відмови, що викликані незворотними процесами зносу деталей, старіння матеріалів та ін.

Якщо розглядаючи закони розподілу в контексті відмов, прийняти в якості аргументу час t , та позначити час безвідмовної роботи технічного об'єкту як T , то умова $T < t$ буде означати подію відмови технічного об'єкту на протязі часу t . Тоді ймовірність цієї події буде записана (див. п.6.1): $P\{T < t\}$. Таким чином, інтегральний закон розподілу випадкової величини (6.1) може бути записано відносно часу безвідмовної роботи:

$$F(t) = P\{T < t\} \quad (7.1)$$

Отже зміст інтегрального закону розподілу буде полягати у встановленні зв'язку між часом t та ймовірністю того, що об'єкт вийде з ладу (відмовить) на протязі цього часу. Відносно металорізального інструменту, часом безвідмовної роботи T буде його фактична стійкість, визначена за прийнятим критерієм.

Диференційний закон розподілу відповідно буде записано:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{d(t)} \quad (7.2)$$

Однією з найважливіших властивостей надійності об'єктів є *безвідмовність – властивість зберігати працеспроможний стан на протязі деякого часу або деякого напрацювання*. Зазвичай безвідмовність розглядається на протязі експлуатації об'єкту, будь які перерви в його роботі не враховуються. Кількісно безвідмовність характеризується імовірністю безвідмовної роботи на протязі певного часу (надійністю), що може бути визначена як:

$$R(t) = 1 - F(t) = P\{T \geq t\} \quad (7.3)$$

Також безвідмовність можна характеризувати часом T_γ на протязі якого забезпечується імовірність безвідмовної роботи γ . T_γ називається гамма-процентне напрацювання до відмови (бо імовірність безвідмовної роботи при цьому найчастіше вказується в процентах).

Безвідмовність є лише однією зі складових надійності. Надійність же є комплексним поняттям і окрім безвідмовності включає [18]:

- *Довговічність або ресурс* – здатність об'єкту зберігати працеспроможний стан до настання граничного стану при встановленій системі технічного обслуговування та ремонту (зазвичай встановлюється для об'єктів що ремонтуються. При цьому розуміємо, що на протязі періоду довговічності може наступати декілька відмов). Під граничним станом розуміється такий стан об'єкту коли його експлуатація стає неможливою або недоцільною
- *Ремонтпридатність* – пристосованість об'єкту до попередження та виявлення причин відмов; відновлення працеспроможного стану шляхом проведення технічного обслуговування та ремонту;
- *Зберігаємість* – здатність об'єкту зберігати значення показників безвідмовності на протязі чи після зберігання та/або транспортування

Зі всіх властивостей надійності, безвідмовність є така, що перш за все розглядається стосовно надійності металорізального інструменту.

Виходячи з викладеного, можна заключити, що **кількісно надійність** будь якого технічного об'єкту взагалі та металорізального інструменту зокрема, може бути визначена як час на протязі якого буде забезпечена певна імовірність його безвідмовної роботи γ (Гамма-процентне напрацювання до відмови), або як імовірність R того, що час безвідмовної роботи або стійкість не буде нижчою за певну величину. Тобто при розгляді питань надійності в розрізі законів розподілу – два параметри: час та імовірність є нероздільно зв'язані і не можуть розглядатися окремо.

Якщо послідовно задавати різні значення часу t (напрацювання), то базуючись на властивостях інтегрального закону розподілу отримуємо: при $t = 0$, $F(t) = 0$; а при $t \rightarrow \infty$, $F(t) \rightarrow 1$. Що цілком природньо та зрозуміло: зі збільшенням часу, імовірність відмови на протязі цього часу буде

збільшуватися, імовірність же безвідмовної роботи $R(t)$ - зменшуватися. (див. Рис. 7.1)

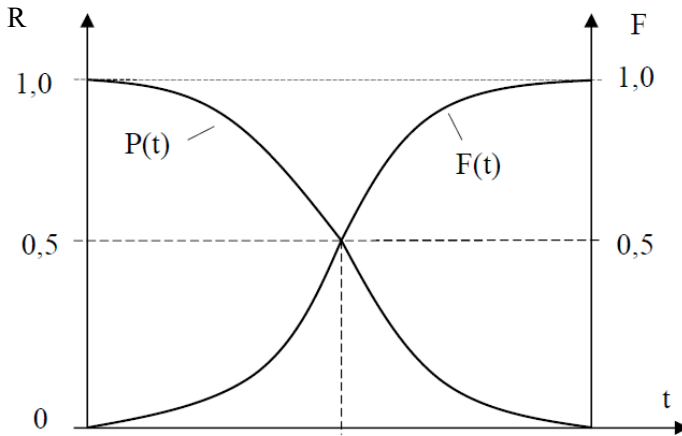


Рисунок 7.1 — Залежність імовірності безвідмовної роботи (P) та імовірності відмови (F) від напрацювання t

Розглядаючи з викладених позицій графік щільності розподілу (Рис. 6.1) зрозуміло, що імовірність відмови кількісно буде дорівнювати площі під кривою щільності розподілу зліва від певного значення часу, а імовірність безвідмовної роботи – справа (зі збільшенням часу площа зліва збільшується, а справа – зменшується).

Час та імовірність є важливими але не єдиними показниками довговічності. Повний перелік цих показників наступний:

- Імовірність безвідмовної роботи;
- Гамма-процентне напрацювання до відмови;
- Середнє напрацювання до відмови;
- Інтенсивність відмов;
- Параметр потоку відмов.

7.2. Інтенсивність відмов

Інтенсивність відмов один з найважливіших показників надійності об'єктів, що не ремонтуються. До таких відноситься і металорізальний інструмент, бо відновлення ріжучих властивостей не відбувається під час роботи інструменту. Визначається інтенсивність відмов як умовна щільність імовірності виникнення відмови в певний момент часу при умові що до цього моменту відмов не було.

Розраховується інтенсивність відмов $\lambda(t)$ як кількість відмов в одиницю часу на певному часовому інтервалі, віднесене до середньої кількості об'єктів що були справні на цьому інтервалі [18]. Для безперервних функцій виражається як відношення щільності імовірності $f(t)$ до імовірності безвідмовної роботи $P(t)$, або через імовірність відмови $F(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (7.4)$$

Для статистичної оцінки інтенсивності відмов задається проміжок часу Δt , симетричний відносно моменту часу t [18]: від $t - \Delta t/2$ до $t + \Delta t/2$ для якого позначається:

$K(t - \Delta t/2)$ – кількість об'єктів що не відмовили на момент часу $t - \Delta t/2$;

$K(t + \Delta t/2)$ – кількість об'єктів що не відмовили на момент $t + \Delta t/2$;

$m(\Delta t)$ – кількість відмов на протязі часу Δt ;

$K_m(t)$ – середня кількість об'єктів, що була справна на проміжку часу від $t - \Delta t/2$ до $t + \Delta t/2$

Тоді, статистично інтенсивність відмов буде визначатися [18, 19]:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{m(\Delta t)}{K_m(t) \cdot \Delta t} \quad (7.5)$$
$$K_m(t) = \frac{K(t - \Delta t/2) + K(t + \Delta t/2)}{2}$$

Якщо вважати, що при розбитті вибірки на k рівних інтервалів Δt – довжина інтервалу розбиття вибірки (див. розділ 6.2), то тоді: момент часу $t = \hat{t}_u$ – середина інтервалу u ; K_{u-1} – кількість об'єктів, що не відмовили на початку інтервалу u ; K_u – кількість об'єктів що не відмовили на кінець інтервалу u ; n_u – кількість об'єктів що відмовили на протязі інтервалу u . Також приймаємо $K_0 = N$ – загальна кількість елементів вибірки.

Оскільки $K_u = K_{u-1} - n_u$, то вираз (7.5) для статистичної оцінки інтенсивності відмов буде записано:

$$\hat{\lambda}(\hat{t}_u) = \frac{1}{\left(\frac{K_{u-1}}{n_u} - \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta t} \quad (7.6)$$

Можна вважати, що інтенсивність відмов показує яка частина об'єктів виходить з ладу в одиницю часу по відношенню до середньої кількості об'єктів що справно працювали на протязі цього часу.

Отриманими значеннями інтенсивності відмов «навантажується» середина відповідного інтервалу. В загальному випадку, інтенсивність відмов є функцією часу і на Рис.7.2 показана ця типова залежність – «крива життя системи», яка в англійській літературі отримала назву “*bath-tub curve*” бо схожа на ванну. На цю криву цілком логічно накладається типова крива зносу металорізального інструменту.

Крива інтенсивності відмов має три виразні періоди:

- I. Від 0 до t_1 – ділянка припрацювання щодо якої в англійській літературі іноді використовується термін *period of child mortality* тобто «період дитячої смертності». Характеризується високою інтенсивністю відмов, що має тенденцію до зниження. У цей період проявляються відмови внаслідок помилок при проектуванні та виробництві в тому числі із-зі порушення технології виготовлення та складання; виходу з ладу деяких неякісних комплектуючих; проявів скритих внутрішніх дефектів та ін. Тобто в цей час відмовляють свідомо слабкі елементи, звідси і наведене вище найменування періоду. Чим вища якість об'єкту, тим менш вираженим є період припрацювання. На кривій зносу

металорізального інструменту період I також відповідає ділянці припрацювання інструменту.

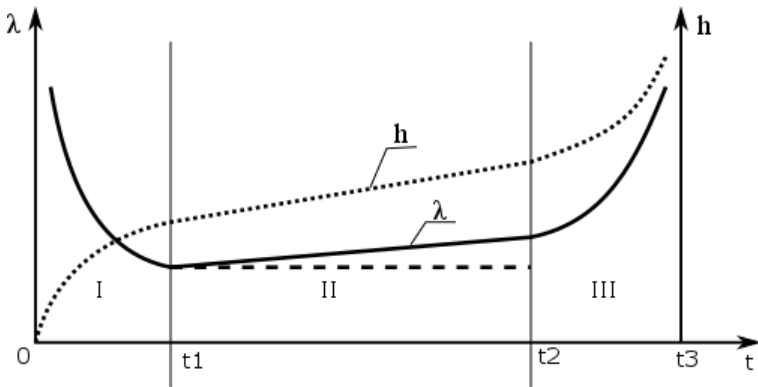


Рисунок 7.2 — Залежність інтенсивності відмов (λ) та зносу інструменту (h) від наробітки

II. Від t_1 до t_2 – період нормальної експлуатації. Характеризується відносно низькою та майже постійною інтенсивністю відмов. Постійна інтенсивність відмов може мати місце тільки тоді, коли в об'єкті не відбувається ніяких процесів зносу, втоми та старіння, а відмови стаються раптово (про що буде сказано далі). Для деяких технічних об'єктів так і можна вважати, відмови стаються раптово з причин не пов'язаних з самим об'єктом (наприклад як прокол автомобільної шини), тому лінію на цій ділянці зображують горизонтальною. Це допущення можна прийняти коли процеси зносу, старіння або втоми відбуваються дуже повільно на протязі довгого часу – тоді дійсно ділянка кривої λ буде розташована майже горизонтально. По такій схемі працюють наприклад підшипники кочення [19]. Відносно металорізального інструменту – ділянці II кривої інтенсивності умовно відповідає ділянка нормального зносу, але оскільки тут процеси тертя та зношування не припиняються і вони відносно швидкоплинні, постійної інтенсивності відмов там

бути не може за визначенням, хоч вона тут і буде меншою по відношенню до інших періодів, але все одно зростаючою. В загальному випадку, у відповідності з класифікацією відмов – це період поступових, систематичних відмов.

III. Від t_2 до t_3 – період прискореного зносу та старіння. Для інструменту – ділянка катастрофічного зносу. Інтенсивність відмов та зносу внаслідок накопичених ушкоджень в цей період мають такий рівень, що експлуатація об'єкту стає неможливою або не доцільною.

У тих випадках, коли для ефективної експлуатації інструменту велике значення мають підвищені рівні відмов в періоди припрацювання та прискореного (катастрофічного) зносу, оптимізувати роботу інструменту можна шляхом початкового припрацювання (тренування) інструменту поза технологічної лінії (інструмент що відмовить буде виключено з технологічного процесу), а також його заміни до настання періоду III [4].

Важливість аналізу інтенсивності відмов полягає ще й в тому, що імовірність безвідмовної роботи об'єкту при будь якому законі розподілу може бути виражено через відповідну інтенсивність відмов [18]:

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right) \quad (7.7)$$

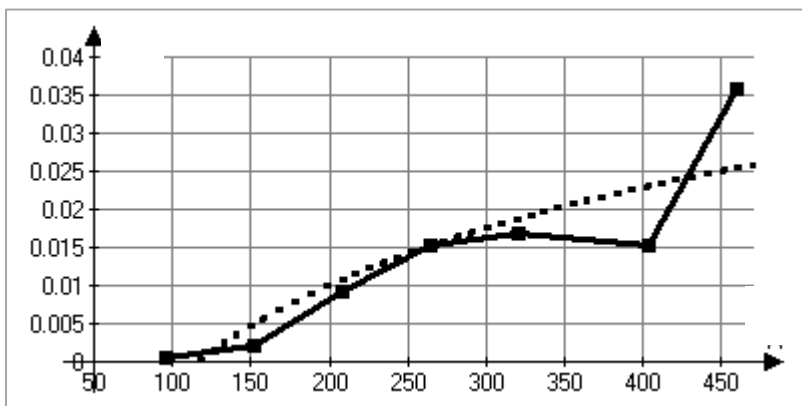
Приклад. Статистичний аналіз інтенсивності відмов різців у кількості $N=68$ для вибірки з табл. 3.1 наведено в табл. 7.1. Наприклад, за формулою (7.6) для 4-го інтервалу:

$$\hat{\lambda}(264) = \frac{1}{\left(\frac{35}{21} - \frac{1}{2}\right) \cdot 56} = 0,015306$$

Таблиця 7.1 — Статистичний аналіз інтенсивності відмов

Інтервал	Початок інтервалу	Кінець інтервалу	Довжина інтервалу Δt	Середина інтервалу	Кількість об'єктів, що не відмовили на початок інтервалу: K_{u-1}	Кількість об'єктів, що відмовили на інтервалі: n_u	Кількість об'єктів що не відмовили на кінець інтервалу: K_u	Статистична оцінка інтенсивності відмов $\hat{\lambda}(t)$
1	68	124	56	96	68	2	66	0,000533
2	124	180	56	152	66	7	59	0,002000
3	180	236	56	208	59	24	35	0,009119
4	236	292	56	264	35	21	14	0,015306
5	292	348	56	320	14	9	5	0,016917
6	348	404	56	376	5	3	2	0,015306
7	404	460	56	432	2	2	0	0,035714

Графік залежності інтенсивності відмов від часу, побудований за отриманими даними наведено на Рис. 7.3. Як видно з графіку – відстежується загальна тенденція до збільшення інтенсивності відмов з часом.



Експериментальна _____ , апроксимована

Рисунок 7.3 — Залежність інтенсивності відмов від часу

7.3. Теоретичні та емпіричні (вибіркові) закони розподілу в контексті надійності технічних об'єктів

Вид теоретичного закону розподілу визначається видом рівняння, що описує інтегральний або диференціальний закони розподілу (див. рівняння 6.1, 6.3, 7.1). Отримана в ході експериментальних досліджень гістограма варіаційного ряду є відображенням вибіркового (отриманого за вибіркою) або як кажуть емпіричного закону розподілу. Вона є основою для підбору теоретичного закону такого, який би найкращим чином описував би характер та залежність ймовірності відмов від часу. Так на Рис. 7.4 зображена та сама гістограма з Рис. 6.3 на яку накладено графік одного з теоретичних диференційних законів розподілу, який досить близько відображає її характер (критерії оцінки близькості вибіркового та теоретичного законів розподілу будуть розглянуті далі). Треба зауважити, що в цьому процесі важливим є не тільки і не стільки формальна сторона, коли теоретичний закон відповідає формі отриманої гістограми, але й фізична інтерпретація теоретичного закону та його параметрів - розуміння

фізичних чинників, факторів та процесів, що призводять саме до такого закону розподілу. На цьому треба зайвий раз зосередити увагу – виникнення того чи іншого закону розподілу відмов чітко обумовлене процесами, що відбуваються в технічному об'єкті. Тому вибір теоретичного закону розподілу не є довільним. Крім того, інтерес представляють ті закони розподілу, параметри яких можна просто та достовірно оцінити виходячи з вибірки. Тому в подальшому розглянемо деякі теоретичні закони розподілу та чинники, що їх обумовлюють.

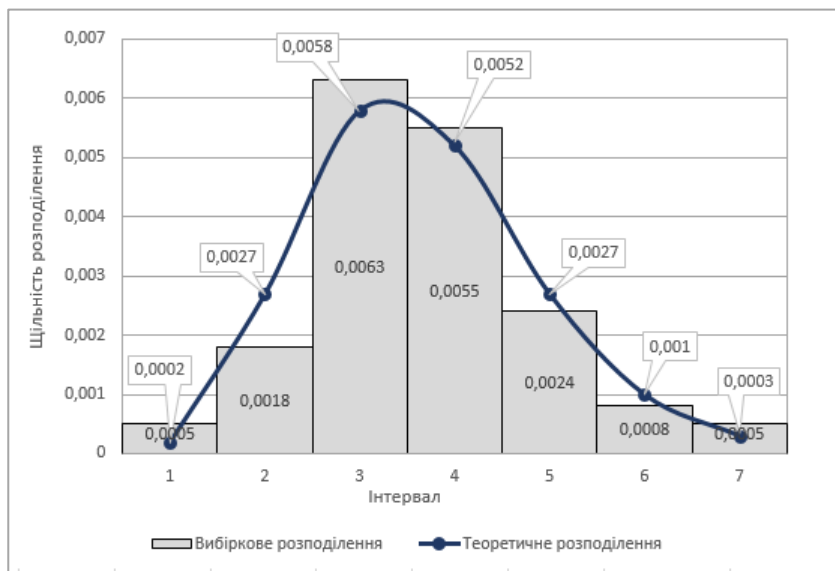


Рисунок 7.4 — Щільність вибіркового та теоретичного розподілень

7.3.1. Нормальний розподіл

Одним з важливіших розподілень, що зустрічаються в статистиці, є нормальний розподіл (розподіл Гауса), що відноситься до класу експоненціальних розподілень. Його важливість полягає не тільки в тому, що він є найбільш поширеним, але і в тому, що він є граничним законом до якого наближаються ряд інших законів розподілу [11]. Щільність імовірності цього розподілу:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot S} \exp\left(-\frac{(t - \bar{T})^2}{2S^2}\right) \quad (7.8)$$

Де S – середнє квадратичне (стандартне) відхилення часу напрацювання до відмови;

\bar{T} – середнє напрацювання до відмови, для інструменту – середня стійкість.

Графік функції (7.8) зображено на Рис. 7.5. Розподіл має вигляд симетричної колоколоподібної кривої. Є двопараметричним розподілом бо залежить від двох параметрів: S та \bar{T} . Середнє арифметичне визначає положення вершини, а стандартне відхилення – пологість «хвостів» або гостроту вершини. При нормальному розподіленні, імовірність того, що випадкова величина буде розташована біля центру значно вище, ніж те, що вона суттєво відхилиться від середини: у діапазоні $\pm 2S$ відносно центру зосереджено 95% вибірки, у діапазоні $\pm 3S$ – 99,7%, а у діапазоні $\pm 4S$ – вже 99,992%. Функція має наступні властивості:

- крива нормального розподілу має «хвости», що йдуть у безкінечність та асимптотично наближаються до осі Ot ;
- $-\infty \leq t \leq +\infty$
- функція є парною, тобто симетричною відносно \bar{T} ;
- функція має максимум при $t = \bar{T}$. Величина цього максимуму: $f_{max} = 1/(\sqrt{2\pi} \cdot S)$;
- при $t = \pm S$ функція має точки перегину.

Отже, математичне очікування, медіана та мода розподілу співпадають та дорівнюють \bar{T} . Це означає, що площа під кривою розподілу зліва та справа від середнього арифметичного дорівнює 0,5. Тобто на протязі часу \bar{T} імовірність відмови та безвідмовної роботи однакові та дорівнюють 0,5. Коефіцієнт асиметрії та ексцес відповідно дорівнюють: $A_s = 0$, $E_x = 0$ – в цьому сенсі нормальний розподіл є свосередним еталоном і всі інші розподіли порівнюють з ним.

Інтегральна функція розподілу – імовірність відмови за час t визначається:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{(\tau - \bar{T})^2}{2S^2}\right) d\tau \quad (7.9)$$

Щільність імовірності розподілу Гауса (7.9) не можна проінтегрувати для отримання інтегральної функції розподілу імовірностей $F(t)$ в явному вигляді. Функцію $F(t)$, можна знайти використовуючи:

- чисельні методи інтегрування функції $f(t)$;
- розкладання функції $f(t)$ в ряд з подальшим аналітичним інтегруванням ряду.
- вбудовану функцію *Microsoft Excel* $\{F(t) \text{ або } f(t)\} = \mathbf{NORM.DIST}(\langle t \rangle; \langle \bar{T} \rangle; \langle S \rangle; \langle I \rangle)$. Тут I – інтегральна логічна змінна яка приймає значення «TRUE» для інтегрального закону, та «FALSE» - для диференційного.

Приклад. Розрахунок значення інтегральної функції розподілу при $\bar{T} = 350$ та $S = 68,83$ наведено на Рис. 7.6

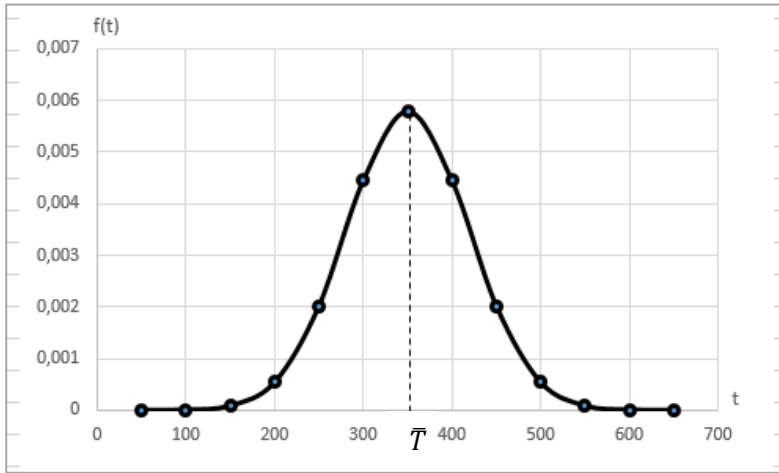


Рисунок 7.5 — Графік диференційного закону нормального розподілу

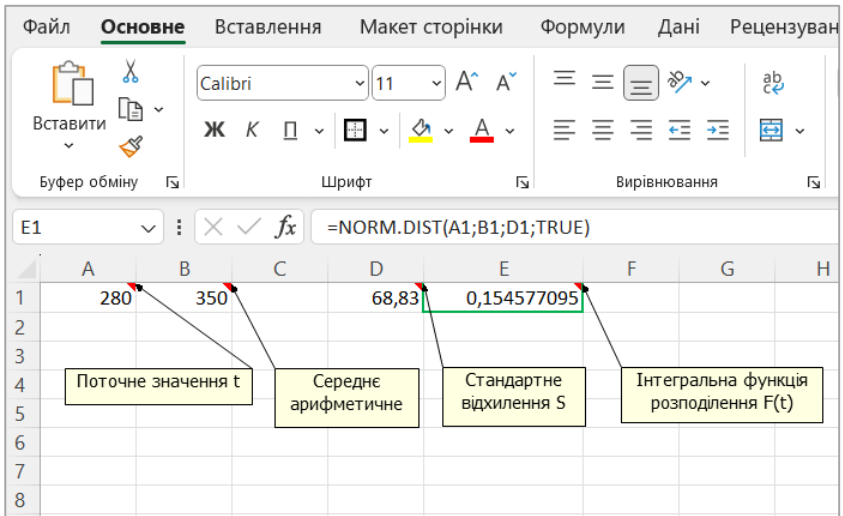


Рисунок 7.6 — Приклад розрахунку інтегральної функції нормального розподілу в *Microsoft Excel*

Широке застосування розподілу Гауса засновано на доказаному ствердженні [13], що випадкова величина, яка є результатом впливу великої кількості незалежних або слабо залежних випадкових величин з кінцевими дисперсіями та практично довільними законами розподілу, розподіляється нормально. Підпорядкованість нормальному розподіленню тим точніша, чим більше випадкових факторів діють разом. Основна умова формування нормального розподілу полягає в тому, щоб усі фактори, що діють разом грали у загальному результаті приблизно однакову роль. Якщо одна з випадкових величин буде різко відрізнятися від інших по своєму впливу, то закон розподілу буде залежати саме від неї. Тобто умовою використання нормального розподілу є ситуації коли величину, що досліджується можна представити як суму досить великої кількості незалежних складових, кожна з яких незначно впливає на суму.

Нормальному закону розподілу підпорядковуються результати вимірів, та розміри деталей, що отримують в процесі обробки.

У практиці експлуатації технічних об'єктів нормальний розподіл характерний для систематичних відмов, що відбуваються з постійною або майже постійною швидкістю розвитку [21]. Такими пошкодженнями можуть бути зноси, старіння матеріалів, наклеп які відбуваються з постійною швидкістю в рамках штатного функціонування об'єкту. Таким чином нормальний розподіл описує відмови елементів що «старіють» природнім для них шляхом, коли раптові відмови відсутні або їх доля мала, коли не можна виділити переважний вплив окремого фактору або групи факторів на відмову.

Зверніть увагу: оскільки аргумент функцій розподілу t може приймати негативні значення, а час не може бути негативним, то нормальний розподіл може бути використано для аналізу надійності за умови $S \ll \bar{T}$. У цьому випадку площа під кривою $f(t)$, що припадає на область $t < 0$, є настільки мала, що її можна вважати такою, що наближається до 0 і ніякого суттєвого впливу на результат вона не матиме. Виходячи з властивостей нормального розподілу, а саме з факту що 99,8% значень зосереджується в діапазоні $\pm 3S$, використовувати нормальний розподіл в аналізі надійності є сенс при $S \leq \bar{T}/3$, або при

коефіцієнти варіації $V \leq 0,33$, що з точки зору стійкості металорізального інструменту відповідає його гарній або задовільній якості (див. п.3.6) – в комплексі це є відображенням «нормальності» функціонування об'єкту. У іншому випадку використовуються інші закони розподілу або усічений нормальний розподіл (тут не розглядається) – нормальний розподіл від якого відсікається область, що припадає на негативні значення t . Для нього область визначення аргументу складає: $0 \leq t \leq +\infty$.

Зростання імовірності $F(t)$ та інтенсивності відмов $\lambda(t)$ з часом для наведених вище вихідних даних показано на Рис 7.7. З графіків видно, що інтенсивність відмов має тенденцію до прискореного зростання з часом, що свідчить про старіння елементів та настання поступових відмов.

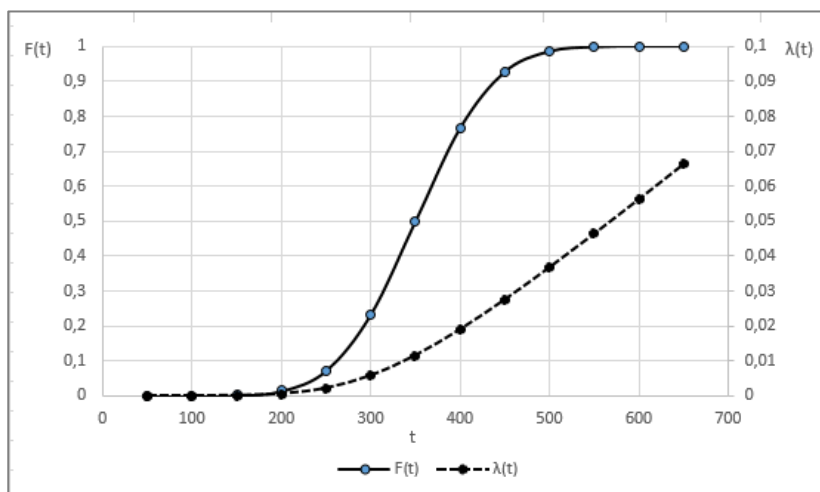


Рисунок 7.7 — Залежність імовірності відмов $F(t)$ та інтенсивності відмов $\lambda(t)$ при нормальному розподілі

В області малих значень t старіння елементів має незначний вплив на відмови, тому імовірність відмов зі зростанням часу збільшується несуттєво, але з наближенням часу до середнього арифметичного, зростання стає помітним.

При визначенні гамма-процентного напрацювання до відмови T_γ (див. п.7.1) при нормальному розподіленні нас буде цікавити час менший середнього арифметичного \bar{T} – бо тільки в цьому випадку, виходячи з властивостей нормального розподілу, імовірність безвідмовної роботи буде складати більше 50%. Визначається T_γ з наступного рівняння [4]:

$$T_\gamma = \bar{T} \cdot (1 - V \cdot U_\gamma) \quad (7.10)$$

Де U_γ – квантіль нормального розподілу. Це табульована функція, що залежить від імовірності безвідмовної роботи γ . Деякі значення U_γ наведені у Табл. 7.2.

V – Коефіцієнт варіації напрацювання до відмови або стійкості різального інструменту.

Таблиця 7.2 — Деякі значення квантілі нормального розподілу

γ	U_γ	γ	U_γ
0.50	0.0000	0.80	0.8116
0.55	0.1257	0.85	1.0364
0.60	0.2533	0.90	1.2816
0.65	0.3853	0.95	1.6449
0.70	0.5244	0.98	2.0537
0.75	0.6744	0.99	2.3263

З рівняння (7.10) видно, що гамма-процентне напрацювання до відмови напряму залежить від коефіцієнта варіації. Введемо показник k_γ , що виражає час T_γ в процентах від середнього напрацювання до відмови \bar{T} : $k_\gamma = (1 - V \cdot U_\gamma) \cdot 100\%$. Значення цього показника в залежності від коефіцієнту варіації та імовірності безвідмовної роботи γ наведено в таблиці 7.3

Таблиця 7.3 — Залежність показника $k\gamma$ (% від середнього напрацювання до відмови) від коефіцієнту варіації та імовірності безвідмовної роботи для нормального розподілу

Коефіцієнт варіації V	Імовірність безвідмовної роботи γ	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
	0,1		94,5	93,3	91,9	89,6	87,2
0,2		89,0	86,5	83,8	79,2	74,4	67,1
0,3		83,4	79,8	75,7	68,8	61,5	50,7
0,4		77,9	73,0	67,6	58,4	48,7	34,2

Зі збільшенням коефіцієнту варіації, час що забезпечує ту саму імовірність безвідмовної роботи значно зменшується – з 83,6% (для $V = 0,1$) до 34,2% (для $V = 0,4$) при імовірності безвідмовної роботи 0,95. Зазвичай імовірність безвідмовної роботи не приймають менше ніж 0,8. Тоді, виходячи з таблиці 7.3 при нормальному розподіленні, час безвідмовної роботи буде складати не менше 2/3 від середнього напрацювання до відмови.

Гамма-процентне напрацювання до відмови може також бути визначено за допомогою вбудованої функції *Microsoft Excel* $\{T_\gamma\} = \mathbf{NORM.INV}((1 - \gamma); \langle T \rangle; \langle S \rangle)$.

Розрахунок T_γ для $\gamma = 0,9$ за вихідними даними з прикладу, наведеного на рис. 7.6, показано на Рис. 7.8

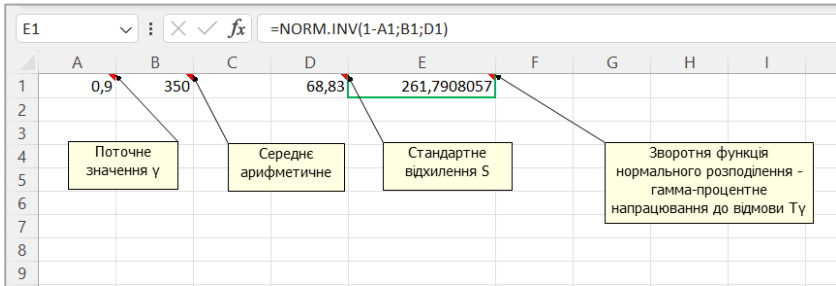


Рисунок 7.8 — Використання зворотної функції нормального розподілу Microsoft Excel для розрахунку гамма-процентного напрацювання до відмови при нормальному розподіленні

7.3.2. Експоненціальний розподіл

Займає особливе місце серед законів розподілу, що використовуються в аналізі надійності. Іноді його називають головним законом теорії надійності. Щільність розподілу імовірності має вигляд:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \quad (7.11)$$

Експоненціальний розподіл відноситься до однопараметричних розподілень, в якому параметр λ оцінюється наступним чином:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{T}} \quad (7.12)$$

Цей параметр є інтенсивністю відмов яка для експоненціального закону величина постійна. Саме цей закон розподілу забезпечує горизонтальну ділянку періоду II «кривої життя системи», зображеної на Рис. 7.2. Тобто перш за все експоненціальний розподіл відноситься до періоду нормальної експлуатації об'єкту, коли зносом можна знехтувати і поступові відмови ще не проявляються, а відмови настають раптово. Крім того експоненціальним розподілом описується час між відмовами.

На відміну від нормального розподілу, імовірності відмови та безвідмовної роботи для експоненціального розподілу можуть бути виражені явно. Відповідно:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (7.13)$$

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

Аргумент експоненціального розподілу приймає значення: $0 \leq t \leq +\infty$. Для $\bar{T} = 350$ хв. графіки щільності розподілу $f(t)$, інтенсивності відмов $\lambda(t)$ та імовірності відмов $F(t)$ зображені на Рис. 7.9

Генеральні дисперсія та середнє квадратичне відхилення теоретичного експоненціального розподілу відповідно визначаються:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda} \quad (7.14)$$

Використовуючи вибіркве середнє квадратичне відхилення S як оцінку генерального σ , отримаємо: $\hat{\sigma} = S = \bar{T}$, а отже коефіцієнт варіації $V = 1$. Наближення коефіцієнту варіації до 1 при вибірковій оцінці є однією з ознак експоненціального розподілу. При $t = \bar{T}$ імовірність відмови та безвідмовної роботи відповідно будуть складати: $F(\bar{T}) = 0.632$ та $R(\bar{T}) = 0.368$. Мода експоненціального розподілу дорівнює 0, а медіана - $Me = \ln 2/\lambda$. Коефіцієнти асиметрії та ексцес відповідно дорівнюють: $As = 2$, $Ex = 6$.

Оскільки інтенсивність відмов при експоненціальному розподіленні є величиною постійною, це означає що воно описує процеси де знос, втома або старіння елементів не відбуваються зовсім або можна вважати що вони не відбуваються, бо проходять дуже повільно на протязі довгого часу.

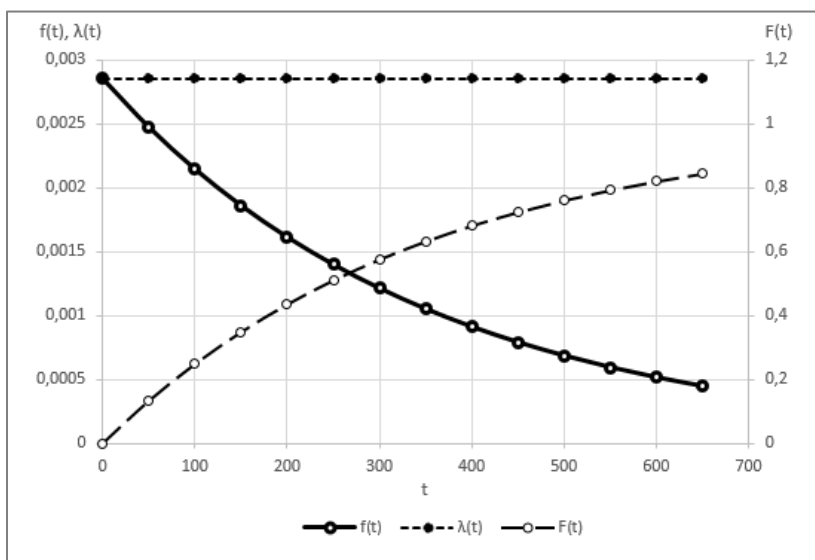


Рисунок 7.9 — Характеристики експоненціального розподілу

Для об'єктів у яких явища зносу та старіння явно виражені, **використання експоненціального розподілу неприпустимо** [18]. Єдиним виключенням з цього правила є системи, елементи яких миттєво відновлюються в процесі роботи – для таких систем час між відмовами може бути прийнято *приблизно експоненціальним* [20]. Зважаючи на те, що після відмови ріжучі властивості металорізального інструменту відновлюються шляхом заміни ріжучого елементу, експоненціальний розподіл може бути використано для аналізу його відмов - а саме тоді, коли відмови наступають не в наслідок зносу, втоми або старіння. Які ж це відмови? А такі, що відбуваються внаслідок раптової концентрації навантаження в об'єкті або поза ним [21] та причини яких, так би мовити, лежать за межами об'єкту та не пов'язані або слабо пов'язані з процесами старіння. Вочевидь, що в такому разі інтенсивність відмов не залежить від напрацювання. Такий розподіл характерне для більшості раптових відмов, що мають відношення тільки до поточного часу експлуатації об'єкту від моменту його «ввімкнення» та не залежать від часу, який об'єкт

пропрацював до цього і який його стан. В таких випадках кажуть про відсутність ефекту післядії, або «відсутність пам'яті». Класичним прикладом є прокол автомобільної шини на дорозі. Так відбуваються також поломки тонких стерженьових інструментів [4].

Згадана вище раптова концентрація навантаження, що призводить до відмови об'єкту, може виникнути:

- в об'єкті - внаслідок наявності дефектів або критичних відхилень у частини елементів вибірки, що є результатом неоднорідності їх початкової якості. Цей факт демонструється високим коефіцієнтом варіації експоненціального розподілу.
- поза об'єктом - з причин не пов'язаних з ним. Наприклад відмова якісного інструменту як результат: неналежної експлуатації; поломки верстата або його поганого технічного стану; аварії в електромережі; помилки оператора; потрапляння стороннього предмету в зону обробки; дефекту матеріалу заготовки (тверді включення, порожнини і т.д.) та ін.

Гамма-процентне напрацювання до відмови при експоненціальному розподіленні визначається:

$$T_{\gamma} = -\bar{T} \cdot \ln \gamma \quad (7.15)$$

При тому що експоненціальний розподіл здебільшого описує відмови внаслідок причин не пов'язаних з об'єктом, а також виходячи з інших властивостей розподілу, визначення гамма-процентного напрацювання до відмови за формулою (7.17) з метою наприклад примусової заміни інструменту не має практичного сенсу. У будь якому разі, час отриманий за формулою (7.17) буде дуже низький. Так при $\gamma = 0,9$ він складе всього 10,5% від середнього напрацювання. І якщо наявність експоненціального розподілу пов'язане з неоднорідністю якості інструменту, то єдине рішення - інструмент такої якості не повинен використовуватися в автоматизованому виробництві. При належній якості інструменту треба зосередитися на пошуку та усуненні зовнішніх чинників, що призводять до раптових відмов – перевірка стану обладнання, дій оператора, режимів обробки, якості оброблюваного матеріалу та ін.

Окрім вищезгаданого, експоненціальний розподіл описує також час між двома послідовними здійсненнями однієї й тієї-ж події.

7.3.3. Гамма-розподіл

Гамма-розподіл є двопараметричним розподілом і займає досить важливе місце в теорії та практиці надійності технічних систем завдяки загальному характеру – в залежності від значень параметрів приймає форму багатьох інших законів розподілу (Паскаля, Ерланга, Пуассона та ін.). Щільність розподілу має вигляд:

$$f(t) = \frac{\lambda_0^r}{\Gamma(r)} t^{r-1} \cdot \exp(-\lambda_0 t) \quad (7.16)$$

В цьому рівнянні:

- $\Gamma(r)$ – повна Гамма-функція. Одною з форм її представлення є інтеграл другого роду Ейлера: $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$ який розраховується чисельними методами або розкладанням в ряд і зазвичай подається як табульована функція. Корисно знати: $\Gamma(1) = 1$ та $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. У *Microsoft Excel* розраховується використовуючи комбінацію функцій: $\{\Gamma(x)\} = \mathbf{GAMMA}(x)$.
- λ_0 та r – параметри розподілу, які відповідно називаються параметром масштабу та параметром форми.
Деякі властивості гамма-розподілу наведені в таблиці 7.4

Інтегральний закон розподілу – імовірність відмов визначається:

$$F(t) = \frac{\lambda_0^r}{\Gamma(r)} \int_0^t \tau^{r-1} \cdot \exp(-\lambda_0 \tau) d\tau \quad (7.17)$$

Таблиця 7.4 — Деякі властивості теоретичного закону гамма-розподілу

Назва	Значення
Аргумент t	$0 \leq t \leq +\infty$
Параметр масштабу	$\lambda_0 > 0$
Параметр форми	$r > 0$
Дисперсія	$\sigma^2 = r/\lambda_0^2$
Математичне очікування	$M\{t\} = r/\lambda_0$
Коефіцієнт варіації	$V = 1/\sqrt{r}$
Мода (при $r \geq 1$)	$M_0 = (r - 1)/\lambda_0$
Коефіцієнт асиметрії	$As = 2/\sqrt{r}$
Ексцес	$Ex = 6/r$

Тут інтеграл в рівнянні (7.19), як і у випадку з нормальним законом не може бути виражений у явному вигляді, тому вирішується чисельними методами, розкладанням в ряд, за допомогою статистичних таблиць або вбудованої функції *Microsoft Excel* – застосування останньої буде показано далі.

Базуючись на формулах, наведених в Табл. 7.4 можна розрахувати оцінки параметрів розподілу (відповідно \hat{r} та $\hat{\lambda}_0$), базуючись на статистичних оцінках вибірки: середньому арифметичному (\bar{T}), вибірковій дисперсії (S^2) та коефіцієнті варіації (V), вважаючи що $M\{T\} \approx \bar{T}$ та $\sigma^2 \approx S^2$:

$$\hat{r} = \frac{\bar{T}^2}{S^2} = \frac{1}{V^2} \quad (7.18)$$

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{r}{\bar{T}}$$

Як бачимо, обидва параметри залежать перш за все від коефіцієнта варіації. Фізичний зміст зазначених параметрів полягає в наступному:

- відмова настає не раніше появи $r \geq 0$ пікових викидів [20], навантажень або пошкоджень;

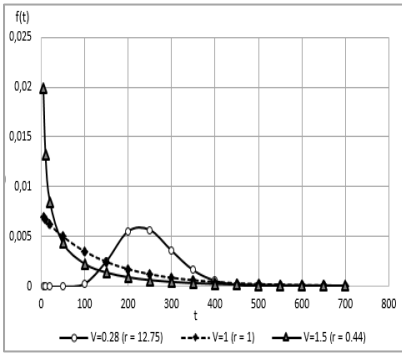
- λ_0 – обмежує максимальне значення інтенсивності відмов і дорівнює кількості пошкоджень, що призводять до відмови в одиницю часу.

Які-ж відмови описуються гамма розподілом? Перш за все це зносіві відмови; відмови в наслідок накопичення ушкоджень. Ці відмови є найбільш цікавими при аналізі надійності ріжучого інструменту. Використовується також для опису напрацювання складної технічної системи з резервними елементами яка продовжує функціонувати після декількох ушкоджень – якщо відмови елементів такої системи настають відповідно до експоненціального розподілу, то відмови системи в цілому будуть підпорядковані гамма-розподіленню; при розгляді довговічності (ресурсу) деяких технічних об'єктів [22]; при визначені граничного стану при корозії та ін. В медицині гамма-розподілом описують тривалість життя хворих хронічними захворюваннями.

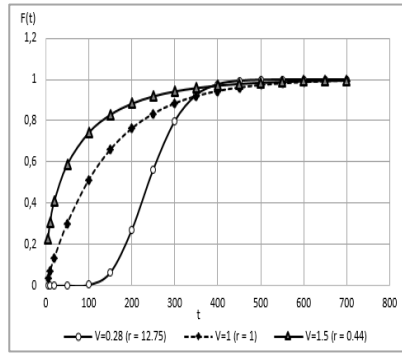
Аналіз впливу параметрів на характер гамма-розподілу цікаво провести враховуючи їх вплив на інтенсивність відмов. Перш за все треба відзначити, що виходячи з первинності характеристик вибіркового розподілу (S, \bar{T}) , параметри теоретичного розподілу (r, λ_0) є взаємозалежними. Зі зміною коефіцієнту варіації V змінюється параметр форми r (див. Рис. 7.10 а, б), що має вплив і на параметр масштабу.

При коефіцієнті варіації $V < 1$ ($r > 1$) щільність розподілу має характерний максимум (моду) який зміщується в сторону більших значень часу напрацювання до відмови з його зменшенням (збільшенням r) – див. Рис.7.10 г. Це впливає з формули розрахунку моди, наведеної в табл. 7.3. При цьому з часом інтенсивність відмов зростає (Рис.7.10 в) – відбувається поступовий знос та старіння об'єкту.

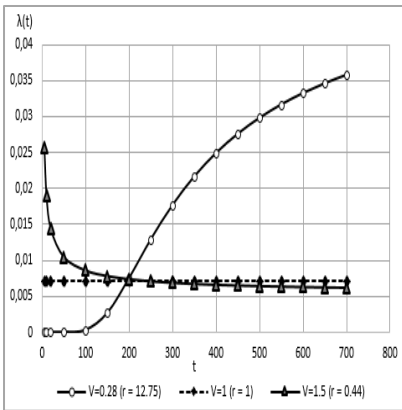
Зі збільшенням середньоквадратичного відхилення S (зменшенням λ_0) форма кривої щільності розподілу стає більш витягнутою та пласкою (Рис. 7.10г).



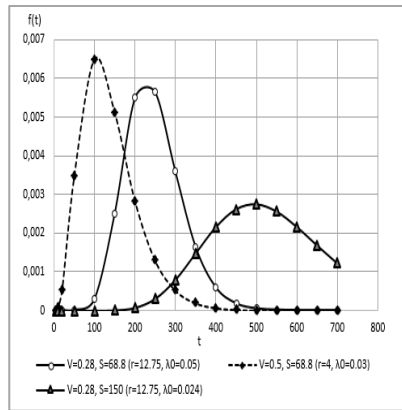
а



б



в



г

а – Щільність розподілу; б – Імовірність відмов; в – Інтенсивність відмов; г – Щільність розподілу при зміні параметрів форми та масштабу.

Рисунок 7.10 — Залежність характеристик теоретичного гамма-розподілу від його параметрів

Але є дещо принципово відмінне що не дозволяє використовувати ці закони як конкуруючі – це характер залежності інтенсивності відмов від часу. Якщо при нормальному законі розподілу це зростаюча увігнута функція нічим не обмежена зверху (Рис. 7.7), то при гамма-розподіленні – зростаюча

опукла, обмежена зверху величиною λ_0 (Рис. 7.10в). При $V < 1$ гамма-розподіл може бути використаний перш за все у період нормальної роботи з поступовими систематичними відмовами. Використання у період прискороного зносу можливе з урахуванням особливості характеру інтенсивності відмов.

При $V = 1$ ($r = 1$) гамма-розподіл співпадає з експоненціальним. Параметр λ_0 також співпадає з інтенсивністю відмов експоненціального розподілу: $\lambda_0 = 1/\bar{T}$ – яка є постійною (Рис. 7.10в). В цьому випадку гамма-розподіл використовується для описання відмов в період нормальної роботи технічної системи або її елементів, коли для цього є підстави пов’язані з характером та швидкістю зносу – детально це розглядалося в п.7.2.

При коефіцієнті варіації $V > 1$ ($r < 1$) інтенсивність відмов з часом монотонно зменшується (див. Рис. 7.10в), що відповідає «вигорянню» ненадійних елементів у період припрацювання. Закон розподілу за цієї умови відповідає періоду I кривої життєвого циклу об’єкту (див. п.7.2, Рис.7.2)

Таким чином гамма-розподіл може використовуватися для аналізу надійності на всіх етапах життєвого циклу технічного об’єкту і воно є зручним інструментом для аналізу надійності широкого кола технічних систем. Але у будь якому випадку, зростання інтенсивності відмов з часом при гамма розподіленні є обмеженим величиною λ_0 , що вже зазначалося вище і це обмежує сферу використання закону.

Якщо параметр r є цілим позитивним числом, то гамма-розподіл носить назву розподілу Ерланга, і цей параметр є кількістю ушкоджень після яких настає відмова технічної системи.

Розрахунок значень диференціальної та інтегральної функцій гамма-розподілу може бути виконано за допомогою вбудованої функції *Microsoft Excel*

$\{F(t) \text{ або } f(t)\} = \mathbf{GAMMA.DIST}((t); (\alpha); (\beta); I)$, де I – інтегральна логічна змінна, яка приймає значення «TRUE» для інтегрального закону розподілу та «FALSE» - для диференціального. Інші аргументи визначаються:

$$\alpha = r \quad (7.19)$$

$$\beta = \frac{1}{\lambda_0}$$

Приклад. На Рис. 6.3 гистограма апроксимована саме гамма-розподілом з наступними параметрами:

$$\hat{r} = 1/0.30^2 = 11,11; \widehat{\lambda}_0 = 1/(0,30 \cdot 74,48) = 0,045.$$

Мода розподілу:

$$Mo = (11,11 - 1)/0.045 = 224,67 \text{ хв.}$$

Коефіцієнт асиметрії та ексцес відповідно:

$$As = 2/\sqrt{11,11} = 0,60; Ex = 6/11,11 = 0,54$$

Приклад розрахунку диференційної функції розподілу в *Microsoft Excel* наведено на Рис. 7.11.

Гамма-процентне напрацювання до відмови з імовірністю γ також може бути визначено в *Microsoft Excel* за допомогою зворотної функції $\{T_\gamma\} = \text{GAMMA.INV}(\langle 1 - \gamma \rangle; \langle \alpha \rangle; \langle \beta \rangle)$ з аргументами згідно формул (7.21). Приклад розрахунку див. на Рис.7.12

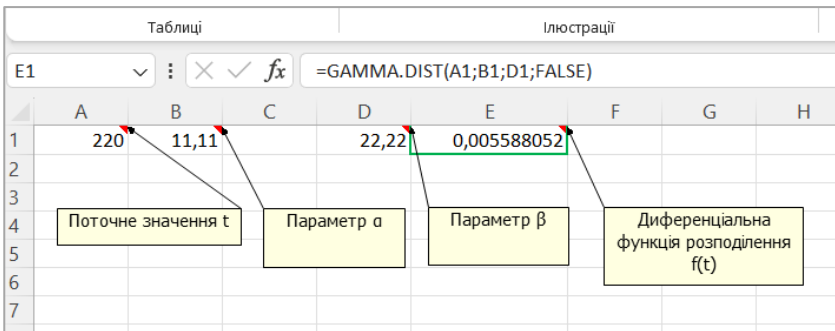


Рисунок 7.11 — Приклад розрахунку диференційної функції гамма-розподілу в *Microsoft Excel*

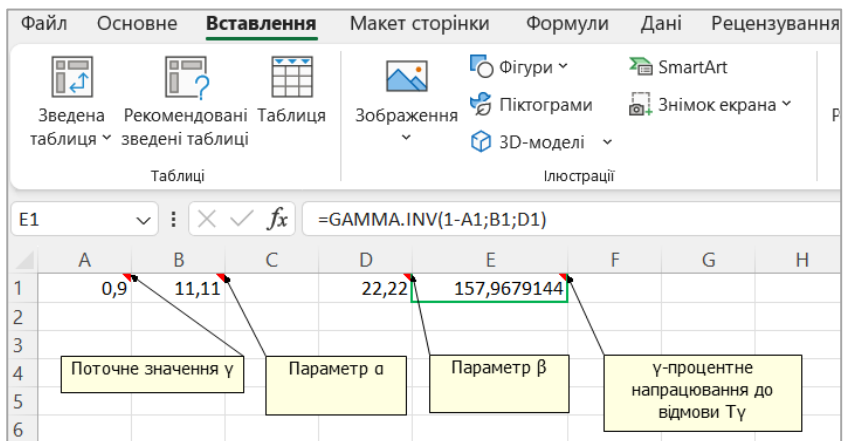


Рисунок 7.12 — Використання зворотної функції гамма-розподілу *Microsoft Excel* для розрахунку гамма-процентного напрацювання до відмови

7.3.4. Розподіл Вейбулла

Розподіл Вейбулла посідає особливе місце в аналізі надійності технічних об'єктів – бо репрезентує ціле сімейство розподілень. Сам його автор – Валодді Вейбулл (Waloddi Weibull), що запропонував закон у 1951 р. проілюстрував його використання для аналізу широкого діапазону явищ: від розподілу межі текучості сталі до розподілу кількості дорослих чоловіків, що народилися на Британських островах [23], та вказував що закон можна використовувати в будь-якій області. Цей розподіл також відомий як Вейбулла – Гнеденко.

Розподіл є двопараметричним, та щільність розподілу описується рівнянням:

$$f(t) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1} \exp \left[-\left(\frac{t}{\beta} \right)^\alpha \right] \quad (7.20)$$

Тут α та β – відповідно параметри форми та масштабу. Параметр масштабу іноді називають «характеристична стійкість». На форму розподілу вони впливають аналогічно гамма-розподіленню.

Деякі властивості розподілу Вейбулла наведені в Табл. 7.5

Інтегральний закон розподілу Вейбулла, що виражає імовірність відмов $F(t)$ та безвідмовної роботи $R(t)$ за час t записується:

$$F(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\beta} \right)^\alpha \right] \quad (7.21)$$

$$R(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{\beta} \right)^\alpha \right]$$

Відповідно, γ – процентне напрацювання до відмови (або на відмову) з рівняння (7.21) буде мати вигляд:

$$T_\gamma = \beta \cdot [-\ln \gamma]^{1/\alpha} = \beta \cdot \left[\ln \frac{1}{\gamma} \right]^{1/\alpha} \quad (7.22)$$

Аналізуючи залежність від часу інтенсивності відмов з таблиці 7.5 можна переконатися, що розподіл Вейбулла дійсно описує дуже широкий спектр процесів:

Таблиця 7.5 — Деякі основні властивості закону розподілу Вейбулла

Назва	Значення
Аргумент t	$0 \leq t \leq +\infty$
Параметр масштабу	$\beta > 0$
Параметр форми	$\alpha > 0$
Математичне очікування	$\mu = \beta \cdot \Gamma(1 + 1/\alpha)$
Дисперсія	$\sigma^2 = \beta^2 \cdot \Gamma(1 + 2/\alpha) - \mu^2$
Інтенсивність відмов	$\lambda(t) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1}$
Медіана	$Me = \beta \ln(2)^{1/\alpha}$
Мода	$Mo = \beta \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right)^{1/\alpha}$

- При $\alpha < 1$ – інтенсивність відмов функція убиваюча, і закон розподілу описує етап припрацювання;
- При $\alpha = 1$ – інтенсивність відмов постійна величина, розподілу Вейбулла переходить в експоненціальне та описує раптові відмови. В цьому випадку воно повністю співпадає і з гамма-розподілом;
- При $\alpha > 1$ – інтенсивність відмов зростаюча функція і закон розподілу описує відмови, зв'язані зі зносом. Але тут розподіл Вейбулла пропонує значно більше різноманіття ніж гамма:
 - Якщо $1 < \alpha < 2$ – інтенсивність відмов опукла функція, обмежена зверху, як і для гамма-розподілу – тут вони дуже схожі;
 - Якщо $\alpha = 2$ – інтенсивність відмов - пряма лінія і обмеження зверху вже немає;
 - Якщо $\alpha > 2$ – інтенсивність відмов увігнута зростаюча функція нічим не обмежена зверху;

Приймаючи середнє арифметичне напрацювання до відмови \bar{T} як емпіричну оцінку математичного очікування, можна записати умову, коли розподіл Вейбулла наблизиться до нормального: $M_e = M_o = \bar{T}$. Звідси отримуємо:

$$\alpha = \frac{1}{1 - \ln 2} = 3.26 \quad (7.23)$$

$$\beta = 1.12 \cdot \bar{T} \quad (7.24)$$

Якщо прийняти $\alpha = 2$ та $\beta = \sqrt{2}\sigma$ отримаємо однопараметричний розподіл Релея або закон ексцентриситету. В цьому випадку, якщо дві величини X та Y мають нормальні розподіли з однаковими дисперсіями та нульовими математичними очікуваннями, то величина $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ буде мати саме такий розподіл. Сама назва говорить, що такому закону буде підпорядковуватися, наприклад, розподіл розмірів ексцентриситетів тіл обертання, які можуть утворюватися при

обробці деталей різанням, коли положення номінальної вісі прийнято за нуль.

В залежності від параметру форми α , з роботи [23] умовно можна узагальнити процеси, що описує розподіл Вейбулла. Це узагальнення наведено в Табл. 7.6

Розрахунок значень інтегрального та диференційного законів розподілу можна виконувати за допомогою вбудованої функції *Microsoft Excel* де ІНТЕГРАЛЬНА змінна I буде приймати відповідно значення TRUE та FALSE:

$$\{F(t) \text{ або } f(t)\} = \text{WEIBULL.DIST}((t); (\alpha); (\beta); I).$$

Важливим питанням при використанні розподілу Вейбулла є оцінка параметрів розподілу виходячи з емпіричних даних тобто на основі вибірки. Розглянемо один з методів оцінки, що заснований на використанні методу найменших квадратів (МНК) – про сутність самого методу поговоримо в подальших розділах.

Таблиця 7.6 — Процеси що описуються розподілом Вейбулла в залежності від параметру форми α

α	Характер відмов
0.5	Припрацювання: неадекватний запуск; помилки при складанні; проблеми з якістю
1	Раптові відмови: незалежні від часу, зв'язані із зовнішньою дією; при неналежному обслуговуванні; при збігу декількох проблем. Відмови електронних компонентів.
1,5 2 2,5	Поступовий знос
3	Утомне руйнування під впливом циклічних навантажень з низькою частотою
3.26	<i>Розподіл близький до нормального</i>
4 4,5 5	Швидкий знос
6	Відмови як результат довгострокової експлуатації: відмови підшипників; відмови в результаті корозії

Розглянемо **визначення оцінок параметрів закону розподілу** за наявними статистичними даними. Емпіричною оцінкою інтегрального закону розподілу $F(t)$ є накопичена відносна частота для інтервалу u :

$$\hat{F}(t_u) = \hat{F}(t_{u-1}) + p_u = \sum_{i=0}^u p_i \quad (7.25)$$

У виразі (7.25): p_u – відносна частота потрапляння в інтервал u ; $\hat{F}(t_0) = p_0 = 0$; $0 \leq u \leq k$. При $u = k$ отримаємо: $\hat{F}(t_k) = 1$

Перепишемо рівняння (7.21), використовуючи емпіричні оцінки $\hat{F}(t_u), \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ з рівняння (7.25) замість відповідних теоретичних значень $F(t), \alpha, \beta$:

$$1 - \hat{F}(t_u) = \exp \left[- \left(\frac{t_u}{\hat{\beta}} \right)^{\hat{\alpha}} \right] \quad (7.26)$$

Прологарифмувавши вираз (7.26) двічі, отримаємо:

$$\hat{\alpha} \cdot \ln(t_u) - \hat{\alpha} \cdot \ln(\hat{\beta}) = \ln \left[\ln \left(\frac{1}{1 - \hat{F}(t_u)} \right) \right] \quad (7.27)$$

Позначимо:

$$\begin{aligned} X &= \ln(t_u) \\ b_o &= -\hat{\alpha} \cdot \ln(\hat{\beta}) \\ Y &= \ln \left[\ln \left(\frac{1}{1 - \hat{F}(t_u)} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.28)$$

З урахуванням (7.28) вираз (7.27) буде являти собою рівняння прямої лінії:

$$Y = b_o + \hat{\alpha} \cdot X \quad (7.29)$$

З цього також робиться висновок, що якщо експериментальні точки дійсно розташовуються близько до прямої лінії (7.29), то ми

маємо справу з розподілом Вейбулла. Оскільки, як ми знаємо, при проведенні експериментів завжди діють випадкові фактори, то лінію (7.29) треба проводити як середню до експериментальних точок – або якщо бути точним: за МНК сума квадратів відстаней від експериментальних точок до теоретичної прямої повинна бути мінімальною, але про це буде викладено пізніше.

Розташування експериментальних точок і прямої лінії (7.29) зображено на Рис.7.13.

Виходячи з Рис.7.13 та рівняння (7.29) оцінкою параметру форми α буде тангенс кута нахилу прямої лінії до осі X - $\hat{\alpha}$, а b_0 – координата точки перетину прямої лінії та осі Y. Визначити ці параметри також можна за допомогою вбудованих функцій *Microsoft Excel*, відповідно:

$$\{\alpha\} = \text{SLOPE}(\langle Y_0 \rangle; \langle Y_{k-1} \rangle; \langle X_0 \rangle; \langle X_{k-1} \rangle)$$

$$\{b_0\} = \text{INTERCEPT}(\langle Y_0 \rangle; \langle Y_{k-1} \rangle; \langle X_0 \rangle; \langle X_{k-1} \rangle)$$

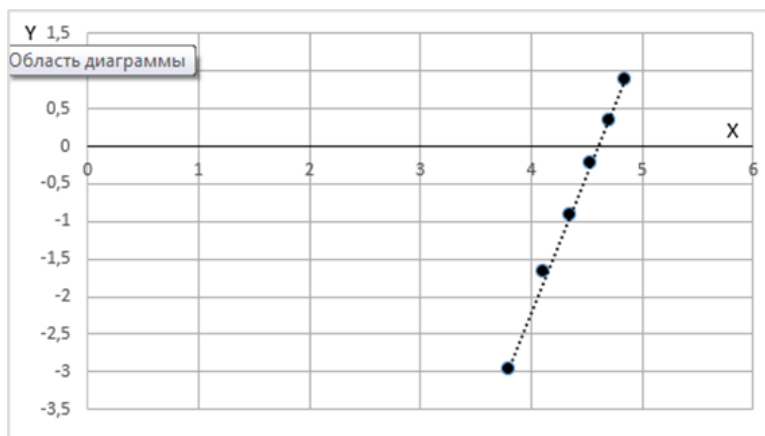


Рисунок 7.13 — До визначення параметрів розподілу Вейбулла

Де значення Y та X задаються для $k-1$ інтервалів, тому що при $u = k$ знаменник виразу для Y з (7.28) буде дорівнювати 0. Знайшовши b_0 , оцінку параметру масштабу β може бути визначено як:

$$\hat{\beta} = \exp\left(-\frac{b_0}{\hat{\alpha}}\right) \quad (7.30)$$

Розглянемо ще один підхід для оцінки параметрів розподілу: дещо спрощений, але такий, що дає цілком прийнятні оцінки особливо для $\alpha \leq 6.5$ [24], тобто практично для всього діапазону параметрів форми, що зустрічається при аналізі надійності технічних об'єктів згідно Табл. 7.6.

Використовуючи рівняння з Табл. 7.5 отримаємо вираз для визначення коефіцієнту варіації V :

$$V = \sqrt{\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} - 1} \quad (7.31)$$

Рівняння (7.31) з високим ступенем відповідності може бути виражено наступною емпіричною залежністю відносно оцінки параметру форми:

$$\hat{\alpha} = V^{-1.09} \quad (7.32)$$

А для $V \geq 0,4$ ($\alpha \leq 2.5$) рівняння (7.32) може бути ще спрощене:

$$\hat{\alpha} \approx \frac{1}{V} \quad (7.33)$$

Використовуючи рівняння для математичного очікування з Табл. 7.5 можна отримати вираз і для оцінки параметру форми, вважаючи середнє арифметичне \bar{T} оцінкою математичного очікування μ :

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{T}}{\Gamma(1 + V)} \quad (7.34)$$

З практичної точки зору важливо з'ясувати наскільки близько визначені параметри розподілу знаходяться відносно їх дійсного значення. Як вже зазначалося, це можна зробити за допомогою інтервальних оцінок, а саме довірчого інтервалу. Границі довірчих інтервалів параметрів розподілу Вейбулла визначаються з наступних залежностей [23]:

$$\begin{aligned}\alpha_L &= \hat{\alpha} \cdot \exp\left(-\frac{0.78 \cdot Z_{(1+q)/2}}{\sqrt{N}}\right) \\ \alpha_U &= \hat{\alpha} \cdot \exp\left(\frac{0.78 \cdot Z_{(1+q)/2}}{\sqrt{N}}\right) \\ \beta_L &= \hat{\beta} \cdot \exp\left(-\frac{1.05 \cdot Z_{(1+q)/2}}{\hat{\alpha} \cdot \sqrt{N}}\right) \\ \beta_U &= \hat{\beta} \cdot \exp\left(\frac{1.05 \cdot Z_{(1+q)/2}}{\hat{\alpha} \cdot \sqrt{N}}\right)\end{aligned}\quad (7.35)$$

У рівняннях (7.35) N – об'єм вибірки; індекси L відносяться до нижньої границі довірчого інтервалу, а U – до верхньої. Значення $Z_{(1+q)/2}$ – зворотна функція Лапласа визначається в залежності від довірчої імовірності q :

$$Z_{(1+0.9)/2} = 1,645; \quad Z_{(1+0.95)/2} = 1,960; \quad Z_{(1+0.99)/2} = 2,576$$

Приклад. Розрахувати оцінки параметрів розподілу Вейбулла за сгенерованою вибіркою. Об'єм вибірки $N = 100$. Дійсні значення параметрів, встановлені при генеруванні вибірки складають: $\alpha = 4$; $\beta = 100$. Довірча імовірність $q = 0,95$.

Приклад розрахунку за допомогою *Microsoft Excel* наведено на Рис. 7.14. Послідовність розрахунку цілком зрозуміла з наведеного рисунку, але зверніть увагу на наступне:

- Вихідні данні, отримані за результатами дослідження, та побудови варіаційного ряду як у п.6.2, наведені в стовбцях A , B , C ;
- Сума значень у стовбці C є об'єм вибірки $N = 100$;

- Максимальне значення накопиченої частоти завжди дорівнює 1 (*E9*)
- Формули для деяких клітинок, окрім *C18*, показані в примітках. Для *C18* – як і належить, в командному рядку;
- В табличній частині розрахунку (*D2 – I9*) формули показані вибірково. Треба розуміти, що у всіх клітинках відповідного стовбця формули будуть аналогічні з урахуванням номеру рядку.
- У клітинках *I2* та *I9* (виділені чорним кольором) розрахунок не виконується і у подальших розрахунках вони також не приймають участь.

Буфер обміну		Шрифт		Вирівнювання		Число		Стилі	
C18		=EXP(-(C16/C14))							
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Інтервал	Границі інтервалів	Кількість елементів вибірки в інтервалі	Відносна частота	Накопичена відносна частота		X		Y	
1									
2	0	0	0	0		3,346487			
3	1	5	0,05	0,05		3,802778		-2,9702	
4	2	12	0,12	0,17		4,114936		-1,68024	
5	3	16	0,16	0,33		4,352482		-0,9151	
6	4	22	0,22	0,55		4,544292		-0,22501	
7	5	20	0,2	0,75		4,705165		0,326634	
8	6	16	0,16	0,91		4,843709		0,878774	
9	7	9	0,09	1		4,965373			
10									
11									
12									
13									
14	Параметр форми								
15		3,630101813							
16	bo								
17		-16,71446936							
18	Параметр масштабу								
19		99,92379759							

=SLOPE(I3:I8;G3:G8)
=LN(B3)
=E2+D3
=LN(LN(1/(1-E4)))
=C2/100
=INTERCEPT(I3:I8;G3:G8)

Рисунок 7.14 — Розрахунок параметрів розподілу Вейбулла за допомогою програми *Microsoft Excel*

Довірчі інтервали для параметрів:

$$\alpha_L = 3,63 \cdot \exp\left(-\frac{0,78 \cdot 1,960}{\sqrt{100}}\right) = 3,12$$

$$\alpha_U = 3,63 \cdot \exp\left(\frac{0,78 \cdot 1,960}{\sqrt{100}}\right) = 4,23$$

$$\beta_L = 99,92 \cdot \exp\left(-\frac{1,05 \cdot 1,960}{3,63 \cdot \sqrt{100}}\right) = 94,41$$

$$\beta_U = 99,92 \cdot \exp\left(\frac{1,05 \cdot 1,960}{3,63 \cdot \sqrt{100}}\right) = 105,75$$

Таким чином оцінка дійсного значення параметру форми, визначене як $\hat{\alpha} = 3,63$ буде знаходитися в межах 3,12 ... 4,23, а масштабу $\hat{\beta} = 99,92$ - відповідно 94,41 ... 105,75.

Для зазначеної в умовах прикладу вибірки коефіцієнт варіації складає $V=0,298$. Використовуючи спрощені залежності (7.33) та (7.34) отримуємо наступні оцінки: $\hat{\alpha} = 3,36$; $\hat{\beta} = 100$, які також знаходяться в межах визначених довірчих інтервалів.

7.3.5. Розподіл Пуассона та потік відмов

Процес експлуатації будь якого технічного об'єкта можна уявити як послідовне чергування випадкових подій – часу працеспроможного стану t_{pi} і часу відновлення t_{ei} . Це і є потік подій: моменти відмов t_{i0} створюють потік подій відмов, а моменти відновлення працеспроможного стану t_{iB} – потік подій відновлення. Тобто має місце чергування працеспроможного стану та його відновлення після відмови (див. Рис. 7.15)

Ці потоки є випадковими подіями, вони підпорядковуються експоненціальному закону і називаються пуассонівськими та мають наступні властивості:

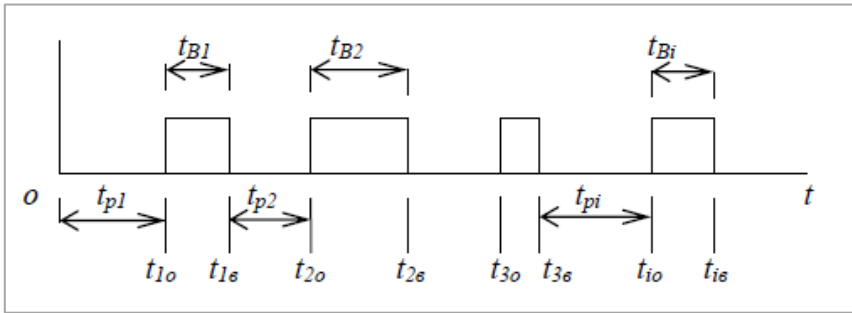


Рисунок 7.15 — Потік відмов

1. Стационарність – імовірність будь якої події в потоці на будь якому інтервалі часу Δt залежить тільки від тривалості інтервалу та не залежить від моменту його початку.
2. Ординарність – імовірність появи двох або більше подій на безкінечно малому інтервалі безкінечно мала. Тобто поява в один момент часу декількох відмов неможлива
3. Відсутність післядії – імовірність появи відмови в деякий інтервал часу не залежить від кількості відмов що були до цього.

Описуються пуассонівські потоки відмов відповідно законом розподілу Пуассона, який на відміну від розглянутих вище законів розподілу що відносились до безперервних випадкових величин, описує імовірність появи цілих дискретних величин $m = 1, 2, 3 \dots$. Сенс цього закону полягає у визначенні імовірності P_m появи деякої події m разів при деякій кількості випробувань M , при тому, що імовірність появи події при одному випробуванні складає Q .

Імовірність m подій за законом Пуассона записується [11]:

$$P_m = \frac{(M \cdot Q)^m}{m!} \cdot \exp(-M \cdot Q) \quad (7.36)$$

Якщо позначити Δt – час одного випробування, а t – час на протязі якого ці випробування відбуваються, то можна записати: $M \cdot Q = t \cdot Q / \Delta t = t \cdot \omega = \bar{n}$. В цьому виразі ω – параметр потоку відмов, а \bar{n} – середня кількість відмов за час t :

$$\omega = \omega(t) = \frac{Q}{\Delta t} \quad (7.37)$$

Параметр потоку відмов – імовірність відмови в одиницю часу і в загальному випадку є функцією часу. Цей параметр має відношення до відновлюваних об'єктів – щодо яких після відмови, згідно нормативної документації, працеспроможний стан має бути відновлено.

Приклад: Для розподілу з п.7.3.3 розрахуємо імовірність кількості відмов 10 інструментів. Імовірність відмови одного інструмента складає $Q=0.1$ на протязі $T_{\gamma}=162,33$ хв. (Рис. 7.12)

Параметр потоку відмов складає:

$$\omega = 0,1/162,33 = 6,16 \cdot 10^{-4} \text{ 1/хв.}$$

Десять інструментів взагалі працюють 1623,3 хв. Середня кількість відмов на протязі цього часу:

$$\bar{n} = 1623,3 \cdot 6,16 \cdot 10^{-4} = 1$$

На Рис. 7.16 показано графік залежності імовірності відмов від їх кількості: імовірність того що з десяти інструментів відмовить один складає біля 0.37, те що відмовлять два – 0.18, а три – 0,06 і т.д.

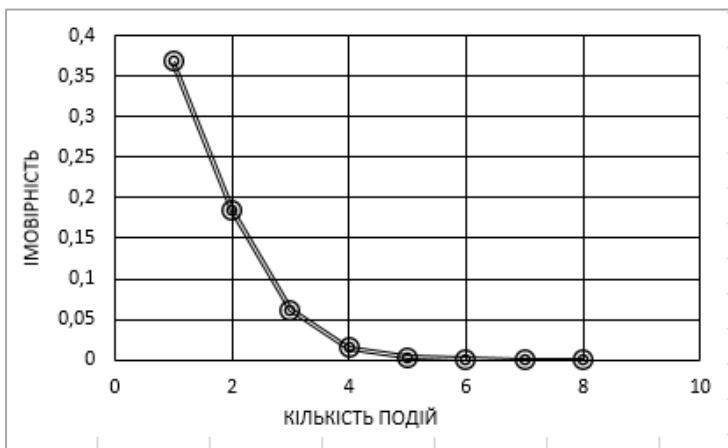


Рисунок 7.16 — Імовірності розподілу Пуассона

7.4. Критерії відповідності емпіричного та теоретичного розподілів.

Емпіричний (вибірковий) розподіл слугує для оцінки статистичних характеристик, тоді як теоретичне – для прогнозування результатів. Тому обґрунтування приналежності вибірки тому чи іншому теоретичному закону розподілу є вкрай важливим. Гіпотеза про вид закону розподілу висувається на основі деяких опосередкованих ознак, наприклад: характер та вигляд гістограми розподілу; коефіцієнт варіації; з розуміння характеру процесів в об'єкті, що обумовлюють закон розподілу. Факт приналежності вибірки теоретичному закону має бути обґрунтовано шляхом перевірки гіпотези про вид закону розподілу. Базуючись на статистичних критеріях, ця гіпотеза не відхиляється або відхиляється. Тобто мова не йде про стовідсоткове підтвердження гіпотези.

***Важливе зауваження.** Більшість статистичних критеріїв розроблені таким чином, що визначають приналежність вибірки теоретичному закону розподілу з відомими генеральними характеристиками. Але оскільки параметри теоретичних законів – генеральні характеристики зазвичай є невідомими та тільки*

оцінюються за вибірковими характеристиками, при некоректному застосуванні критеріїв, закон розподілу може бути не відхилений, тоді як насправді його повинно було відхилити. У роботі [25] наведені данні, що при помилковому застосуванні критерію, гіпотеза про нормальний розподіл була відхилена 2 рази, тоді як при правильному – 26.

Далі наведемо два найбільш розповсюджених критерія.

7.4.1. Критерій згоди Пірсона χ^2

Одним з критеріїв, який найбільш часто використовується є критерій згоди Пірсона χ^2 , що базується на порівнянні емпіричних та теоретичних частот. Він є досить універсальним, але у ряді випадків висновки за ним можуть бути не ефективними, в тому числі з вказаної вище причини. Зі збільшенням кількості елементів вибірки, вказаний недолік буде нівелюватися.

Теоретична імовірність потрапляння елементів вибірки в один з k інтервалів варіаційного ряду - u (змінюється від 0 до k) визначається виходячи зі значень теоретичної інтегральної функції розподілу на границях відповідного інтервалу $F(t_u)$:

$$p_u^0 = F(t_u) - F(t_{u-1}) \quad (7.38)$$

Статистика критерію Пірсона визначається за наступною формулою:

$$U_u^2 = \frac{(n_u - N \cdot p_u^0)^2}{N \cdot p_u^0} \quad (7.39)$$

$$\chi^2 = \sum_{u=0}^k U_u^2$$

У рівнянні (7.39) n_u – кількість елементів вибірки, що потрапили в інтервал u ; N – загальний об'єм вибірки.

Отриманий критерій порівнюється з критичним значенням χ_q^2 який отримується так як було показано в п.4, та приведено на Рис. 4.2 для довірчої імовірності q та кількості ступенів свободи f :

$$f = k - m - 1 \quad (7.40)$$

де m – кількість параметрів теоретичного розподілу, що оцінюється за вибіркою. Звідси для нормального, гамма розподілень та розподілу Вейбулла $m = 2$, а для експоненціального – $m = 1$. Якщо виконується умова

$$\chi^2 \leq \chi_q^2 \quad (7.41)$$

то гіпотеза про те, що емпіричний розподіл належить обраному теоретичному закону не відхиляється з імовірністю q , а якщо не виконується – відхиляється, та належить підбирати інший закон розподілу.

З рівнянь (7.39) та (7.41), на додаток до наведеного на початку розділу зауваження, стає очевидним ще один випадок коли критерій Пірсона є не ефективним. Оскільки p_u^0 знаходиться в знаменнику – критерій дуже чутливий до інтервалів де ця теоретична частота мала, а це крайні інтервали. При недостатньому об'ємі вибірки складова $N \cdot p_u^0$ може бути меншою за 1, а кількість елементів вибірки n_u у відповідному інтервалі буде по меншій мірі дорівнювати 1 або буде навіть більше – відповідно будемо мати велике розходження з теоретичним і як наслідок - суттєве зростання χ^2 . Тобто один інтервал з усіх, а саме останній, може створити значення критерію Пірсона більше за критичне. Зрозуміло, що в цьому випадку треба збільшувати об'єм вибірки, можливість чого при дослідженні технічних об'єктів досить часто є обмеженою.

Приклад. Для вибірки, що була наведена в Табл.3.1 та апроксимована в п.7.3.3 гамма-розподілом з параметрами $r = 11,11$; $\lambda_0 = 0.045$, проведено розрахунок критерію згоди Пірсона, результати якого показані в Табл. 7.7

Для довірчої імовірності $q = 0.95$ та кількості ступенів свободи $f = 7 - 2 - 1 = 4$ критичне значення критерію: $\chi_{0,95}^2 = 9,49$. Оскільки отримане в Табл. 7.7 значення $3.419 < 9.49$ – гіпотеза про те, що вибірка відповідає гамма-розподіленню не відхиляється.

Таблиця 7.7. — Результати розрахунку критерію згоди Пірсона для гамма-розподілу

u	Границі інтервалів стійкості t , мін	Емпірична частота	Теоретичне значення інтегральної ф-ції Гамма-розпод. $F(t)$	p_u^0	U_u^2
0	68	-	0,000297	-	-
1	124	2	0,025323	0,025026	0,052261
2	180	7	0,184620	0,159297	1,355765
3	236	24	0,480601	0,295981	0,745402
4	292	21	0,749918	0,269317	0,394078
5	348	9	0,905026	0,155108	0,226993
6	404	3	0,970206	0,065180	0,462831
7	460	2	0,991982	0,021775	0,182101
ЗАГАЛОМ		68			3,419

7.4.2. Критерій типу Колмогорова – Смірнова

Базується на визначені максимальної (*sup*) різниці між значеннями емпіричної та теоретичної інтегральних функцій розподілу для k інтервалів варіаційного ряду:

$$D = \sup (|F(t_u) - \hat{F}(t_u)|) \quad (7.42)$$

Тут $F(t_u)$ – значення теоретичної інтегральної функції розподілу для границі інтервалу u , а $\hat{F}(t)$ – значення емпіричної інтегральної функції розподілу для тієї-ж границі яким є накопичена відносна частота – формула (7.25).

Після цього розраховується статистика, що повинна для довірчої імовірності q задовольняти вимогі:

$$C = \sqrt{N} \cdot D \leq C(q) \quad (7.43)$$

Значення $C(q)$, з урахуванням наведеного на початку розділу важливого зауваження про вибіркову оцінку параметрів теоретичного розподілу, наведені в Таблиці 7.8 [25]. Ці значення суттєво нижчі, ніж ті, що традиційно використовуються для зазначеного критерію та які зазвичай можна зустріти в літературі, наприклад [11], [25]. Тобто критерій є більш суворим, а отже меншою є можливість не відхилення гіпотези про вид закону розподілу, бо за інших обставин, часто гіпотези не відхиляються там де мають бути відхилені [25]. Але тут при збільшенні об'єму вибірки імовірність відхилення гіпотези зростає, тому критерій треба використовувати з обережністю для дуже великих вибірок.

Таблиця 7.8 — Критичні значення критерію типу Колмогорова-Смірнова [25]

q	0,85	0,9	0,95	0,975	0,99
C(q)	0,775	0,819	0,895	0,955	1,035

Приклад. Результати розрахунку критерію типу Колмогорова-Смірнова для тієї-ж вибірки, що і в п.7.4.1, апроксимованої гамма-розподілом, наведені в Табл. 7.9

Максимальне значення D з Табл. 7.9 – $0,0526$ ($u = 2$). Для $q=0.95$ з Табл. 7.8 критичне значення $C(q)=0,895$. Критерій типу Колмогорова-Смірнова:

$$C = \sqrt{68} \cdot 0,0526 = 0,434 < 0,895.$$

Таким чином і за цим критерієм гіпотеза про гамма-розподіл вибірки не відхиляється.

Прийняття гіпотези про вид закону розподілу дозволяє обґрунтовано на основі теоретичного закону прогнозувати гамма-процентне напрацювання до відмови T_u та аналізувати залежність

інтенсивності відмов від часу. На Рис.7.17 показано емпіричну та теоретичну залежності для інтенсивності відмов, які демонструють однаковий характер росту з часом. Слід відзначити наявність характерної точки перегину біля 152 хв. після якої інтенсивність відмов зростає швидше.

Таблиця 7.9. — Результати розрахунку критерію типу Колмогорова-Смірнова для гамма-розподілу

u	Границі інтервалів стійкості t , мін	Емпірична відносна частота p_u	Емпірична накопичена частота $F(t)$	Теоретичне значення інтегральної функції гамма-розподілу $F(t)$	D
0	68	-	-	0,000297	-
1	124	0,029	0,029	0,025323	0,003677
2	180	0,103	0,132	0,184620	0,052620
3	236	0,353	0,485	0,480601	0,004399
4	292	0,309	0,794	0,749918	0,044082
5	348	0,133	0,927	0,905026	0,021974
6	404	0,044	0,971	0,970206	0,000794
7	460	0,029	1	0,991982	0,008018

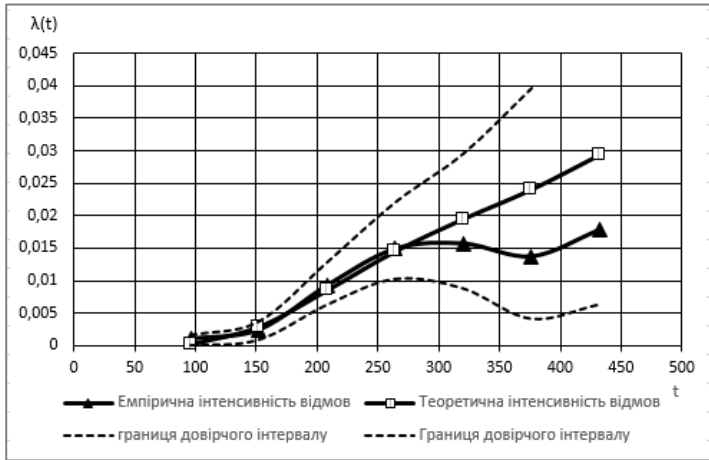


Рисунок 7.17 - Емпірична та теоретична залежності інтенсивності відмов від часу.

7.5. Випробування на надійність та планування демонстраційних випробувань

Існують дві окремі групи випробувань в межах процесу оцінки надійності технічних об'єктів: випробування для забезпечення надійності та випробування для демонстрації надійності. Перші використовуються для виявлення проблем та оцінки ефективності дій по поліпшенню конструкції та/або технології виготовлення об'єкту. Їх мета полягає більше в поліпшенні надійності ніж в її вимірюванні, при цьому фіксуються всі відмови, що виникають під час тестування та намічаються коректуючі дії. Будь-які вимірювання в цьому випадку мають на меті оцінку ефективності корегувань. Випробування для демонстрації надійності полягають в перевірці, чи відповідає об'єкт мінімально-встановленим вимогам до надійності [26]. На цій другій групі випробувань ми і зупинимось в цьому розділі.

Перш за все для аналізу надійності технічних об'єктів треба відібрати та структурувати дані. Відбір даних або їх цензурування виконується за декількома схемами [27]:

- **Цензурування типу I або цензурування за часом** – об’єкти випробовуються до моменту відмови або до закінчення певного часу;
- **Цензурування типу II або цензурування за відмовами** – відомі тільки r найнижчих періодів до відмови. Це відбувається коли випробовуються n об’єктів одночасно та випробування припиняється після відмови r перших об’єктів.
- **Цензурування за інтервалами** – результати випробувань розподіляються за інтервалами часу при цьому відомо що відмова відбулася між двома визначеними точками часу інспекції;
- **Випадкове праве цензурування** – об’єкти спостерігаються до моменту їх відмови або усунення зі спостереження за іншими обставинами;
- **Множинне праве цензурування** – об’єкти починають випробовуватися в різний час при цьому фіксується час до відмови або об’єкт виводиться з випробування по закінченні певного часу

Мета таких, проведених успішно, тестів зазвичай полягає у демонстрації відповідності вимогам або певного рівня надійності. Терміни «кваліфікаційні випробування», «сертифікаційні випробування» та «підтверджуючі випробування» також зустрічаються в цьому контексті. Такі випробування часто використовуються для «кваліфікації» матеріалів, електро-механічних компонентів, вузлів, виробів в цілому або будь-яких технічних об’єктів до яких можна застосувати поняття пройшов / відмовив. В тому числі до таких об’єктів відноситься і металорізальний інструмент.

Звичайною мірою надійності є встановлення нижньої межі довірчого інтервалу - R_L невідомої надійності R . Показник R_L є **рівнем надійності** і таким, що демонструється протягом тестування. В цьому випадку ми стверджуємо, що $R > R_L$ з довірчою імовірністю q . Зазначена довірча імовірність розглядається як впевненість дослідника в отриманих результатах випробувань, тоді величина $1 - q$ є **ризиком споживача** (при високих q ризик низький і навпаки). З метою створення

раціональної програми випробувань для високонадійних об'єктів значення q може приймати менші значення і навпаки [28, 29].

Слід зазначити, що при накопиченні даних можуть використовуватися декілька наведених схем, але важливо щоб схема цензурування не корелювала з можливим часом відмов та всі дані (цензуровані та не цензуровані) були задіяні в аналізі [27]. При цьому можуть застосовуватися різні підходи для організації прискорених випробувань, наприклад за підвищеної температури, електричної напруги та ін. [27, 28]. За результатами випробувань отримують кількість відмов r з вибірки n за час t . Імовірність r відмов (подій) з вибірки об'ємом n , що випробовується, підпорядковується біноміальному закону розподілу [29]:

$$P_{(r||n, P_f)} = \frac{n!}{r!(n-r)!} P_f^r (1 - P_f)^{n-r} \quad (7.44)$$

тут P_f - імовірність відмови одного об'єкту, що демонструється в ході випробувань.

Прийнявши:

$$P_{(r||n, P_f)} = 1 - q \quad (7.45)$$

$$R_L = 1 - P_f \quad (7.46)$$

З (7.44) отримаємо вираз, що встановлює співвідношення між характеристиками, які мають демонструватися за результатами випробувань:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} P_f^r \cdot R_L^{n-r} \leq 1 - q \quad (7.47)$$

Якщо вважати, що r є максимальна кількість відмов протягом випробування, а реальна їх кількість може бути будь яка $s \leq r$, то імовірність всіх подій $s \leq r$ буде визначатися наступним чином:

$$P_{(s \leq r || n, P_f)} = \sum_{s=0}^r \frac{n!}{s!(n-s)!} P_f^s (1 - P_f)^{n-s} \quad (7.48)$$

Прийнявши до уваги (7.45) та (7.46) з (7.48) отримаємо:

$$\sum_{s=0}^r \frac{n!}{s!(n-s)!} P_f^s \cdot R_L^{n-s} \leq 1 - q \quad (7.49)$$

Вираз (7.49) дозволяє аналізувати результати випробувань з точки зору співвідношення між P_f або R_L , q та n . Так наприклад при $q = 0,9$ для демонстрації $P_f = 0,1$ протягом часу t необхідно щоб на протязі того ж часу відмовило би не більше 5 зразків зі 100, а якщо кількість зразків зменшити до 50 – то не більше одного.

Прийнявши кількість відмов $r = 0$ ми переходимо до окремого виду випробувань, коли за час випробування не відмовляє жодний об'єкт – випробуванню з нульовими відмовами, що в англійській літературі має назву “No Failure Test” чи “Zero Failure Test”. За такою схемою випробується широке коло технічних виробів, в тому числі її застосовують передові виробники авіаційної техніки для тестування її компонентів [27, 29]. Найчастіше цей підхід знаходиться у комбінації з законом розподілу Вейбулла, коли параметр форми α є відомим. Це надає можливість скласти програму випробувань з вибором часу тестування та кількості зразків [28].

Випробування здійснюються у вигляді послідовності n тестів типу «пройшов / відмовив», що виконуються при схожих умовах. При цьому приймається допущення, що тести взаємно незалежні. Наприклад комплект з 30 пластикових деталей пройшли випробування на неруйнування під дією деякого навантаження, чи вибірка з 7 підшипників задовольнила вимогу безвідмовності протягом 1 000 000 циклів при певних умовах. Часто інтерес полягає в досягненні невідомої надійності R (імовірності безвідмовної роботи), але імовірність відмови F також може бути оцінена за тими-ж тестами, використовуючи рівняння (7.3).

Рівняння для отримання значення нижньої межі R_L виводиться з міркувань про відсутність відмов в n тестах за біноміальним розподілом з виразу (7.44):

$$R_L = (1 - q)^{1/n} \quad (7.50)$$

Важливе зауваження. Для маленької вибірки (орієнтовно до 10...12 одиниць) в показнику ступеню рекомендується замість n використовувати $n + 1$ [28, 29].

Підсумковим та ключовим виразом з цих міркувань є наступне рівняння [28]:

$$P\{R \geq (1 - q)^{1/n}\} = q \quad (7.51)$$

Тобто, імовірність того, що надійність (імовірність безвідмовної роботи) R буде вища за нижню межу її довірчого інтервалу буде дорівнювати q .

З виразу (7.50) можна отримати залежність для визначення кількості випробувань:

$$n \geq \frac{\ln(1 - q)}{\ln(R_L)} \quad (7.52)$$

Таким чином, якщо ми хочемо продемонструвати надійність кінцевих фрез $R \geq R_L = 0,95$ з довірчою імовірністю 0,9 ми повинні протестувати не менше як 45 одиниць з яких жодна не повинна відмовити протягом часу тестування:

$$n \geq \frac{\ln(1 - 0.9)}{\ln(0.95)} \approx 45$$

Рівність надійності та довірчої імовірності визначається як «гарантія». Ця ідея належить Wes Fulton [28] і досягнення 90% гарантії значить забезпечення 90% надійності при 90% довірчій імовірності. Розрахунок за формулою (7.52) з цими даними дає кількість зразків, що дорівнює 22 і цей випадок зустрічається доволі часто, тому що 90% гарантія саме те значення яке виробники стараються забезпечити для великої кількості технічних об'єктів. Якщо позначити значення гарантії як A , то визначити його при певній кількості зразків можна з рівняння:

$$A^n + A = 1 \quad (7.53)$$

Кількість зразків при різних значеннях гарантії наведено в Табл. 7.10 з якої видно стрімке зростання кількості при незначному зростанні гарантії понад 0,96.

Таблиця 7.10 Кількість зразків при різних значеннях гарантії А

A	0.5	0.7	0.9	0.92	0.94	0.96	0.98	0.99	0.992	0.996	0.998	0.999
n	1	4	22	31	47	79	194	459	602	1378	3105	6905

В багатьох випадках випробування на надійність або стійкість дають підстави вважати, що відмови підпорядковуються закону розподілу Вейбулла. Як зазначалося вище, цей розподіл дуже популярний внаслідок різноманіття його форм та широкого кола відмов який він може описувати. І як результат - може бути застосований майже у всіх випадках. При цьому ми можемо оцінити параметр форми α або з експериментальних досліджень (див. п. 7.3.4) або з наявної апріорної інформації.

Якщо є підстави припускати наявність розподілу Вейбулла, то і непогані інженерні підстави для оцінки значення параметру форми також завжди є. Наприклад добре відомо, що для підшипників параметр форми дорівнює приблизно 1,5. По відношенню до відмов металорізального інструменту внаслідок швидкого зносу, значення зазначеного параметру швидше за все буде знаходитися в межах 3 ... 5 (див. Табл. 7.6). Виходячи з рівняння (7.33) такі значення параметру форми будуть орієнтовно відповідати коефіцієнту варіації в межах 0,2 ... 0,35 менші значення якого із зазначеного діапазону, як правило, будуть спостерігатися при роботі інструменту в екстремальних умовах, а більші - при його незадовільній якості.

Розглянувши сумісно вираз для імовірності безвідмовної роботи R з рівнянь (7.21) та рівняння (7.50) отримаємо:

$$\exp \left[- \left(\frac{t}{\beta} \right)^\alpha \right] \geq (1 - q)^{1/n} \quad (7.54)$$

Рівняння (7.54) дозволяє вирішити широке коло питань, пов'язаних з аналізом надійності технічних об'єктів за даними

результатів демонстраційних випробувань з нульовими відмовами та їх плануванням. Розглянемо це докладніше.

Визначення параметру масштабу (характеристичного часу). Вирішимо рівняння (7.54) відносно β та запишемо вираз для нижньої границі параметру масштабу β_L , що демонструється за результатами випробувань:

$$\beta \geq \beta_L = t \left[\frac{n}{-\ln(1 - q)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (7.55)$$

Якщо n зразків випробовувалися кожен свій час t_i то параметр форми буде визначатися з дещо зміненого рівняння (7.55):

$$\beta \geq \beta_L = \left[\frac{\sum_{i=1}^n t_i^\alpha}{-\ln(1 - q)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (7.56)$$

Приклад. За результатами тестування кінцевих фрез у кількості 10 шт. на протязі 40 хв. жодна не вийшла з ладу. З апіорної інформації відомо, що відмови підпорядковуються закону розподілу Вейбулла з параметром форми $\alpha = 4$. Визначити оцінку значення параметру масштабу (характеристичний час), що демонструється за результатами випробувань з довірчою імовірністю 0,9. За рівнянням (7.55):

$$\beta \geq \beta_L = 40 \left[\frac{10}{-\ln(1 - 0,9)} \right]^{\frac{1}{4}} = 57,74$$

Оцінка часу напрацювання до відмови. Для багатьох технічних об'єктів регламентується час напрацювання до відмови з імовірністю відмови P , що виражена в процентах – L_P . Так для підшипників такою характеристикою є L_{10} . У ряді випадків, в тому числі для різального інструменту, частіше в якості умови задається імовірність безвідмовної роботи γ та визначається γ -процентне напрацювання до відмови яке може позначатися T_γ , та про що

зазначалося вище. Характеристики γ та P (якщо обидві виражені в процентах) між собою пов'язані залежністю:

$$\gamma = 100 - P \quad (7.57)$$

Для подальшого розгляду скористаємося позначенням L_P . Якщо у рівняння (7.21) для визначення імовірності безвідмовної роботи підставити імовірність відмови в процентах P та відповідне напрацювання L_L та після цього виразити з нього параметр форми β , який підставити в рівняння (7.55), то отримаємо вираз для оцінки напрацювання до відмови, що демонструється під час випробувань L_P :

$$L_P \geq L_L = t \left[\frac{n \cdot \ln \left(1 - \frac{P}{100} \right)}{\ln(1 - q)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (7.58)$$

При наявності n зразків, кожен з яких випробувався різний час t_i , рішення відносно L_P може бути отримано аналогічно (7.56).

Приклад. Є вибірка з 12 прохідних різців, що випробувалися протягом 60 хвилин та відмов за цей час не спостерігалось. Відомо, що імовірність відмов описується законом розподілу Вейбулла з параметром форми $\alpha = 4$. Визначити який є мінімальний час напрацювання до відмови з імовірністю 10%, що демонструється під час випробувань з довірчою імовірністю 0,9. З рівняння (7.58) отримуємо:

$$L_{10} \geq L_L = 60 \left[\frac{12 \cdot \ln \left(1 - \frac{10}{100} \right)}{\ln(1 - 0,9)} \right]^{\frac{1}{4}} \approx 52$$

Визначення часу випробування. Рівняння (7.58) дає можливість визначити час випробування зразків для забезпечення певного мінімального часу напрацювання до відмови L_P :

$$t \geq t_L = L_P \left[\frac{\ln(1 - q)}{n \cdot \ln \left(1 - \frac{P}{100} \right)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (7.59)$$

Приклад. Є комплект з 15 зразків прохідних різців. Необхідно визначити час випробувань з нульовими відмовами для забезпечення часу безвідмовної роботи протягом 60 хвилин з імовірністю відмови 10%. Довірча імовірність встановлюється на рівні 0,95. Відомо, що імовірність відмов описується законом розподілу Вейбулла з параметром форми $\alpha = 4$. З рівняння (7.59) отримуємо:

$$t \geq 60 \left[\frac{\ln(1 - 0,95)}{15 \cdot \ln\left(1 - \frac{10}{100}\right)} \right]^{\frac{1}{4}} = 70,4$$

Таким чином, для забезпечення зазначених умов, випробування 15 зразків треба проводити не менше 71 хвилини кожний – жоден не повинен відмовити.

Визначення кількості зразків. Рівняння (7.52) дає можливість визначити також кількість зразків, які потрібно випробовувати протягом певного часу t для забезпечення мінімально-припустимого напруцювання до відмови з заданою імовірністю P - L_P :

$$n \geq \frac{\ln(1 - q)}{\ln\left(1 - \frac{P}{100}\right)} \left[\frac{L_P}{t} \right]^\alpha \quad (7.60)$$

Вибір між визначенням часу випробування за рівнянням (7.59) та кількістю зразків за рівнянням (7.60) постає частіше з суто економічних питань, коли треба співставляти вартість одиниці часу випробувань та вартість зразка – більше зразків випробовувати менше часу чи менше зразків більше часу.

Приклад. Для прохідних різців треба забезпечити час безвідмовної роботи 60 хв. з імовірністю відмови 15%. Необхідно визначити кількість зразків для випробування з нульовими відмовами при тому, що час випробувань повинен складати 40 хв.. Довірча імовірність встановлюється на рівні 0,90. Відомо, що

імовірність відмов описується законом розподілу Вейбулла з параметром форми $\alpha = 3,5$. З рівняння (7.60) отримуємо:

$$n \geq \frac{\ln(1 - 0,9)}{\ln\left(1 - \frac{15}{100}\right)} \left[\frac{60}{40}\right]^{3,5} \approx 59$$

Таким чином, протягом 40 хвилин повинно бути випробувано не менше 59 зразків, жоден з яких не повинен відмовити протягом часу випробування.

Визначення надійності на протязі довільного часу τ за результатами випробування протягом часу t . Якщо n зразків були випробувані протягом часу t , то рівняння (7.60) за продемонстрованими результатами дозволяє визначити надійність (імовірність безвідмовної роботи) за час τ – $R(\tau)$. Для цього введемо в рівняння (7.60) заміну: τ замість L_P та $R(\tau) = 1 - P/100$. Тоді маємо:

$$\frac{\ln R(\tau)}{\ln(1 - q)} = \log_{1-q} R(\tau) \geq \frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{t}\right)^\alpha \quad (7.61)$$

З виразу (7.61) отримаємо:

$$R(\tau) \geq R_L = (1 - q)^{\frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{t}\right)^\alpha} \quad (7.62)$$

Приклад. Партія з $n = 20$ кінцевих фрез були випробувані протягом $t = 15$ хвилин і жодна з них не відмовила. З довірчою імовірністю $q = 0,9$ визначити надійність (імовірність безвідмовної роботи) протягом 10, 15 та 25 хвилин. З апіорної інформації відомо, що імовірність відмов описується законом розподілу Вейбулла з параметром форми $\alpha = 4$. З рівняння (7.62) отримуємо продемонстровані мінімальні імовірності безвідмовної роботи: 0,978; 0,891 та 0,411 відповідно.

Оцінка довірчої імовірності. З рівняння (7.60), аналогічно рівнянню (7.62) можна також отримати оцінку довірчої імовірності, що демонструється за результатами випробування:

$$q \geq q_L = 1 - \left(1 - \frac{P}{100}\right)^{n \left(\frac{t}{L_P}\right)^\alpha} \quad (7.63)$$

Приклад. Партія з 12 кінцевих фрез для швидкісної обробки випробовувалися протягом 20 хв. і жодна з них не відмовила. З апріорної інформації відомо, що імовірність відмов описується законом розподілу Вейбулла з параметром форми $\alpha = 4$ і імовірність відмови 5% спостерігається на протязі 15 хв. Оцінити довірчу імовірність. З рівняння (7.63) отримуємо продемонстровану мінімальну довірчу імовірність:

$$q \geq q_L = 1 - \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{12 \left(\frac{20}{15}\right)^4} = 0,86$$

Загальний час на випробування та загальні рекомендації.

Розглянемо загальний час на випробування T , що повинен бути затрачений на тестування n зразків для того, щоб продемонструвати відповідність вимогі за L_P , тобто $L_L \geq L_P$. Час тесту для кожного індивідуального зразка в рівнянні (7.59) складає t . Загальний час випробувань - $T = nt$. Рівняння (7.59) при цьому прийме вигляд:

$$T = nt \geq L_P \left[\frac{\ln(1 - q)}{\ln\left(1 - \frac{P}{100}\right)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \cdot n^{1-1/\alpha} \quad (7.64)$$

Треба зазначити, що коли $\alpha = 1$ ми маємо справу з експоненціальним розподілом, n з правої частини рівняння (7.58) зникає і T залишається незмінним при розрахунку часу тестування одиниці виробу з урахування об'єму вибірки. Наприклад, якщо ми маємо 6 зразків, що мають «вижити» протягом 20 000 циклів, ми

можемо взяти 12 зразків та тестувати їх по 10 000 циклів кожен, або 3 по 40 000, отримуючи абсолютно еквівалентні результати.

Коли $\alpha \neq 1$ такого не відбувається. Рівняння (7.64) показує, що при $\alpha < 1$ загальний час випробування зменшується зі зростанням кількості зразків. Таким чином при $\alpha < 1$ є сенс використовувати більшу кількість зразків. Якщо ж $\alpha > 1$, загальний час випробувань буде зростати зі зростанням кількості зразків, звідси в цьому випадку більш раціонально використовувати меншу кількість зразків.

8. ВИДИ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ МІЖ ВИПАДКОВИМИ ВЕЛИЧИНАМИ. ЕЛЕМЕНТИ КОРЕЛЯЦІЙНОГО АНАЛІЗУ

Вивчаючи технічну систему як «чорну скриню», ми змінюємо входи системи X_i та спостерігаємо за змінами її виходів Y_i . Оскільки значення «виходу» залежить не тільки від «входу» але й від дії випадкових факторів, виникає питання: наскільки сильно «вихід» залежить від «входу» та чи залежить взагалі, бо зміни «виходу» можуть відбуватися виключно під впливом випадкових факторів. Для цього спочатку треба розібратися про які види залежностей може йти мова при вивченні технічних об'єктів. Складні залежності від багатьох факторів завжди можна звести до ряду простих, де фактор один – це нами і буде прийнято для більшої наочності.

Найпростішою формою зв'язку буде функціональна – де одному значенню X_i (аргументу) буде відповідати одне значення Y_i (функції) і яка буде записуватися у вигляді функції $Y_i = f_i(X_i)$. Така залежність можлива тоді коли функція залежить тільки від аргументу і випадкові фактори відсутні. Але на практиці так не буває - як було вже з'ясовано, під впливом випадкових процесів в технічному об'єкті результат його функціонування буде величиною випадковою, розподіл якої відповідає одному з теоретичних законів. Тому тут може йти мова про більш складну та одночасно більш загальну залежність, коли одному значенню аргументу, під впливом випадкових факторів, буде відповідати певний розподіл функції. Така *залежність між випадковими величинами, коли під впливом однієї змінюється розподіл іншої, називається стохастичною.*

Якщо при зміні аргументу закономірним чином змінюється одна зі статистичних характеристик функції (математичне очікування або середнє арифметичне, дисперсія, асиметрія, ексцес та ін.), то такий зв'язок називається *статистичним*, що є одним з варіантів стохастичної залежності.

Окремим випадком статистичної залежності є залежність *кореляційна*. Для кореляційної залежності є характерним зміна математичного очікування (середнього арифметичного значення)

як результат зміни розподілу однієї випадкової величини під впливом іншої. Взагалі, *кореляційна залежність це статистична взаємозалежність двох або більшої кількості випадкових величин, така що зміна однієї або декількох супроводжується закономірною зміною іншої або інших.*

Важливо розуміти, що кореляційна залежність відображає тільки зв'язок між змінними та не завжди є відображенням причинно-наслідкових зв'язків. Наприклад, якщо є зв'язок між вагою та зростом людини, то це не значить що вага є причиною зросту, бо в іншому випадку скидаючи вагу – зріст також зменшувався би. Існує кореляційний зв'язок між шкодою заподіяної при пожежі та кількістю пожежників, що брали участь у її гасінні. Чи є розмір заподіяної шкоди у причинно-наслідковій залежності з кількістю пожежників? Якщо відповісти на це питання ствердно, то для зменшення шкоди, не треба пожежників взагалі залучати до гасіння... Насправді, і заподіяна шкода і кількість пожежників мають загальну причину - силу пожежі. Наявність кореляційного зв'язку має спонукати дослідника на пошук причини, яка не завжди очевидна з першого погляду і може бути загальною для обох явищ.

Кореляційний зв'язок або просто кореляція відображає тільки зв'язок між конкретними факторами при чому у конкретній вибірці. У іншій – цієї кореляції ми можемо і не спостерігати. Узагальнюючи викладене, сформулюємо наступне твердження - випадкові величини X та Y знаходяться в кореляційному зв'язку якщо:

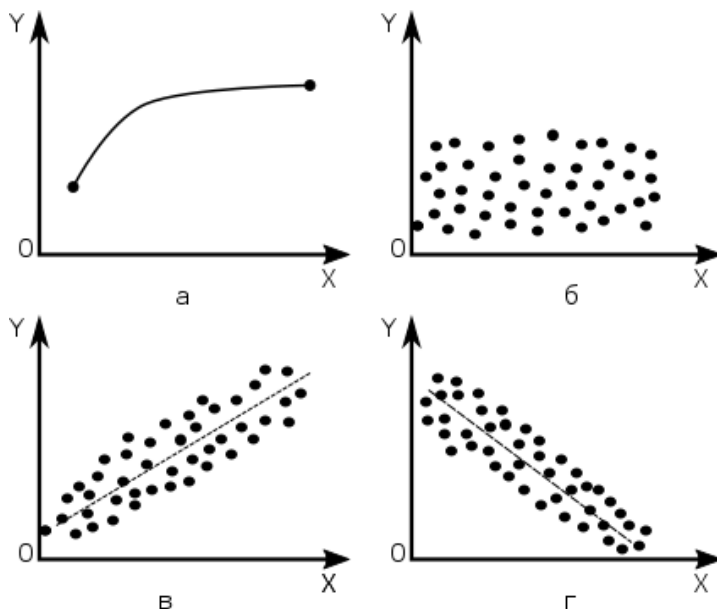
- Кожному значенню X відповідає певне значення математичного очікування Y ;
- Кожному значенню Y відповідає певне значення математичного очікування X .

Таким чином, кореляційна залежність має дві складові:

- Функціональну, яку ще називають невинуватою або трендом;
- Випадкову.

Якщо відсутня випадкова величина то маємо функціональну залежність (Рис. 8.1а), а якщо функціональна - то кажуть що фактори є незалежними бо зміна Y_i відбувається не у зв'язку з X_i ,

а під впливом виключно випадкових факторів (Рис.8.1б). При наявності обох складових – кореляційна залежність може бути позитивною (Рис. 8.1в) та негативною (Рис.8.1г) в залежності від того, в чому полягає тенденція зміни функції: в зростанні чи зменшенні.



а – функціональна залежність; б – незалежні фактори;
 в – позитивна кореляція; г-негативна кореляція.

Рис. 8.1 — Кореляційна залежність між факторами

Співвідношення між функціональною та випадковою складовими оцінюється показниками тісноти зв'язку. Одним з таких показників є *коефіцієнт лінійної кореляції*. В основному використовується тоді, коли характер функції $Y = f(X)$ можна вважати лінійним. Усі експериментальні точки з урахуванням паралельних дослідів характеризуються парою координат (X_j, Y_j) . Приймемо: m - кількість незалежних дослідів, n_i – кількість повторів в i -му незалежному досліді. Тоді, загальна кількість експериментальних точок складе:

$$N = \sum_{i=1}^m n_i \quad (8.1)$$

Середні арифметичні аргументу та функції:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_j \quad \bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j \quad (8.2)$$

Визначається коефіцієнт лінійної кореляції із співвідношення:

$$\rho = \frac{\sum_{j=1}^N [(X_j - \bar{X})(Y_j - \bar{Y})]}{\sqrt{\sum_{j=1}^N (X_j - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{j=1}^N (Y_j - \bar{Y})^2}} \quad (8.3)$$

Коефіцієнт кореляції приймає значення від -1 до +1. Якщо $\rho = 0$, то фактори незалежні, а якщо $\rho = |1|$, то залежність функціональна. При $\rho > 0$ маємо позитивну кореляцію (Рис. 8.1в), а якщо $\rho < 0$ – негативну (Рис.8.1г). Таким чином, чим ближче по абсолютному значенню коефіцієнт кореляції до 1 – тим сильніше зв’язок. Для якісного описання коефіцієнту кореляції можна використати так звані співвідношення Чеддока, що наведені в Табл. 8.1

Таблиця 8.1 Співвідношення Чеддока

Значення коефіцієнту кореляції	Сила зв’язку
До 0,1	Відсутня
0,1 – 0,3	Слабка
0,3 – 0,5	Помірна
0,5 – 0,7	Помітна
0,7 – 0,9	Висока
0,9 – 1,0	Дуже висока

Значення коефіцієнту кореляції також може бути визначено за вбудованою функцією *Microsoft Excel* $\{\rho\} = \text{CORREL}(\langle \text{Масив 1} \rangle; \langle \text{Масив 2} \rangle)$, де «Масив 1» та «Масив 2» - відповідно масиви X та Y .

Як усяка випадкова величина коефіцієнт кореляції має свою дисперсію та стандартне відхилення, що визначаються відповідно за формулами [4]:

$$S_{\rho}^2 = \frac{(1 - \rho^2)^2}{N - 1}, \quad S_{\rho} = \frac{1 - \rho^2}{\sqrt{N - 1}} \quad (8.4)$$

Статистична значущість знайденого коефіцієнту кореляції – тобто статистично суттєва його відмінність від 0 визначається за вже знайомим нам t -критерієм Стьюдента, критичне значення якого t_{α} визначається для ступню значущості α та кількості ступенів свободи $f = N - 2$:

$$t = \frac{|\rho|}{\sqrt{1 - \rho^2}} \sqrt{N - 2} \quad (8.5)$$

Гіпотеза про статистичну значущість коефіцієнту кореляції не відхиляється при $t > t_{\alpha}$.

Для коефіцієнту кореляції може бути визначений довірчий інтервал, який для довірчої імовірності 0,95 складає приблизно [17] $\Delta\rho \approx 2S_{\rho}$. Таким чином, дійсне значення коефіцієнту кореляції з імовірністю 0,95 достовірно буде знаходитись в інтервалі від $\rho - 2S_{\rho}$ до $\rho + 2S_{\rho}$.

Приклад. Визначити коефіцієнт кореляції між кутом нахилу поперечної кромки Y свердла діаметром 4,2 мм та його заднім кутом X за даними наведеними в [4] – дивись табл. 8.2

За формулами (8.1) та (8.2) Загальна кількість свердл $N = 49$. Середні значення X та Y : $\bar{X} = 13.1, \bar{Y} = 39.9$.

На Рис. 8.2 показано розподіл експериментальних точок на координатній площі з чого можна висунути припущення про наявність негативної кореляції. Для розрахунку коефіцієнту кореляції в програмі *Microsoft Excel* дані з Табл.8.2 записані у

вигляді двох масивів, що формують пари координат - фрагмент розрахунку показано на Рис.8.3. З розрахунку отримано: $\rho = -0.607$ – негативна кореляція, сила зв'язку в середньому згідно Табл. 8.1 – помітна. Критерій Стьюдента за формулою (8.5):

Таблиця 8.2 — Залежність між кутом нахилу поперечної ріжучої кромки (Y) та заднім кутом (X) для свердл діаметром 4,2мм (за [4])

m	Задній кут X	Кут нахилу поперечної ріжучої кромки Y	Кількість свердл nj	Групове середнє арифметичне \bar{Y}_j
1	6	51	1	51,00
2	7	51	1	51,00
3	8	54	1	54,00
4	9	54; 41; 51; 47	4	48,25
5	10	47; 49	2	43,00
6	11	46; 32; 46; 48; 36	5	41,60
7	12	47; 30; 46; 40; 40; 45; 50	7	42,57
8	13	38; 40; 44; 32; 45; 42	6	40,17
9	14	49; 34; 35; 35; 36; 26	6	35,83
10	15	35; 29; 37; 46	4	36,75
11	16	28; 34; 45; 30; 31; 40	6	34,57
12	17	37; 30	2	33,50
13	18	41; 28; 36	3	35,00
14	20	30	1	30,00
N			49	

$$t = \frac{0.607}{\sqrt{1 - 0.607^2}} \sqrt{49 - 1} = 5.3$$

Для рівня значущості $\alpha = 0,05$ та $f = 49 - 2 = 47$ критичне значення $t_{0,05} = 2,01$. Оскільки $5,3 > 2,01$ – отримане значення є статистично значущим.

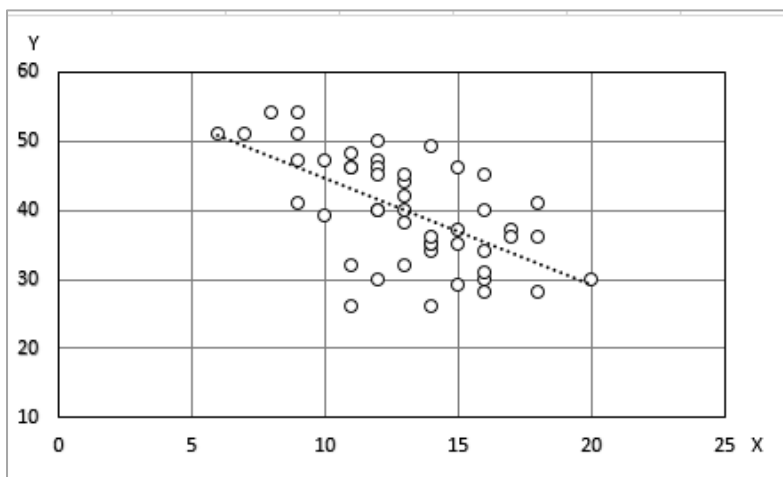


Рисунок 8.2 — Залежність між кутом нахилу поперечної кромки Y свердла діаметром 4,2 мм та його заднім кутом X (за даними [4])

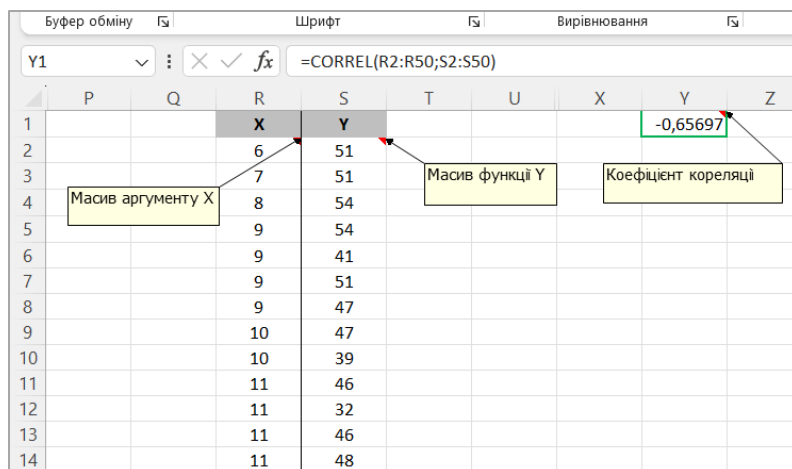


Рисунок 8.3 - Фрагмент розрахунку коефіцієнту кореляції в програмі *Microsoft Excel*

Середнє квадратичне відхилення за формулою (8.4):

$$S_{\rho} = (1 - 0.607^2) / \sqrt{49 - 1} = 0.091$$

Звідси довірчий інтервал $\Delta\rho = 2 \cdot 0,091 = 0,182$ та дійсне значення коефіцієнту кореляції гарантовано знаходиться в межах від -0,79 до -0,43. За цим показником силу зв'язку можна охарактеризувати в діапазоні від помірної до високої, тобто кореляція однозначно присутня.

Як було показано вище, коефіцієнт лінійної кореляції використовується в основному для залежностей, що наближаються до лінійних. Як же оцінити тісноту зв'язку довільної залежності? Це робиться за допомогою *вибіркового кореляційного відношення*. Наявність паралельних дослідів (повторів) в кожному з незалежних дослідів при цьому є обов'язковим. Експеримент i ($1 \leq i \leq m$) розглядається як група в яку входить n_i елементів і для кожної визначається групове середнє арифметичне \bar{Y}_i за формулою (4.2) – див. Рис.8.4. І далі весь розрахунок ведеться як для дисперсійного аналізу (див. п.4 та Табл.4.1) : визначається міжгрупова та повна сума квадратів - відповідно Q_A та Q . Після чого визначається вибіркове кореляційне відношення:

$$\eta = \sqrt{\frac{Q_A}{Q}} \quad (8.6)$$

Значення η знаходяться між 0 та 1. Інтерпретація отриманих результатів така ж як і для коефіцієнту кореляції за винятком того, що відмінної кореляції тут бути не може – бо це відношення вказує тільки на силу зв'язку та не дозволяє судити наскільки близько розташовані точки до кривої визначеного виду, наприклад до параболи, гіперболи і т.д.

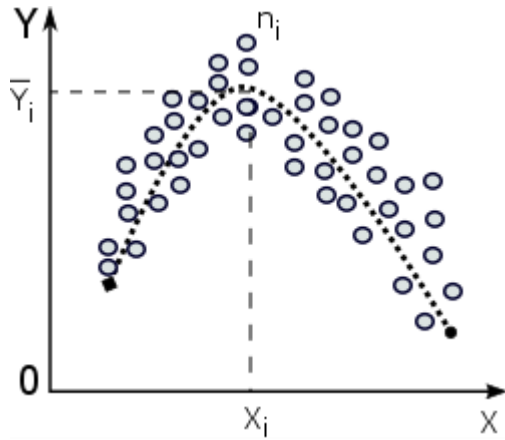


Рисунок 8.4 — Кореляційний зв'язок при довільній залежності

При визначенні кореляційного відношення форма кривої до уваги не приймається – в цьому його деякий недолік. З іншого боку зазначений показник може бути використаний для аналізу тісноти зв'язку будь якої залежності включаючи лінійну. Вибіркове кореляційне відношення η не може бути менше за абсолютне значення вибіркового коефіцієнту кореляції ρ . Тобто якщо коефіцієнт кореляції для нелінійної функції показує високу ступінь зв'язку, то вибіркове кореляційне відношення покаже не меншу. Але якщо для нелінійної функції коефіцієнт кореляції має низьке значення, то це не значить, що зв'язку не існує бо це може бути пов'язано саме з нелінійністю функції і значення кореляційного відношення буде більше. Величина R^2 що дорівнює квадрату кореляційного відношення називається *коефіцієнтом детермінації*, і показує яку частину не випадкова (функціональна) складова займає у впливі на Y :

$$R^2 = \frac{Q_A}{Q} \quad (8.7)$$

У випадку лінійної залежності коефіцієнт кореляції та кореляційне відношення співпадають – це дозволяє

використовувати різницю η та ρ в якості міри відхилення залежності від лінійного виду. В якості одного з найпростіших критеріїв для оцінки нелінійності можна використати наступний:

$$K_x = \frac{\sqrt{N}}{0,67449} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\eta^2 - \rho^2} \quad (8.8)$$

Якщо $K_x > 2,5$ то функцію можна вважати нелінійною.

Статистична значущість (відмінність від 0) отриманого вибіркового відношення може бути перевірена за критерієм Фішера:

$$F = \frac{\eta^2(N - m)}{(1 - \eta)(m - 1)} \quad (8.9)$$

Гіпотеза про статистичну значущість не відхиляється при дотриманні умови: $F > F_q$. Де F_q – критичне значення критерію Фішера, що визначається для довірчої імовірності q та ступенів свободи $f_1 = m - 1$ та $f_2 = N - m$.

Для кореляційного відношення також може бути визначено довірчий інтервал $\Delta\eta$. Одним з варіантів є розрахунок за допомогою зворотної інтегральної функції Лапласа $L\alpha$, що залежить тільки від рівня значущості α :

$$\Delta\eta = L_\alpha \cdot \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{N - 3}} \quad (8.10)$$

В програмі *Microsoft Excel* $L\alpha$ визначається за вбудованою функцією $\{L_\alpha\} = \mathbf{NORM.S.INV}(1 - \alpha/2)$

Таким чином дійсне значення кореляційного відношення буде знаходитися в інтервалі: $\tilde{\eta} \in [\eta - \Delta\eta; \eta + \Delta\eta]$

Приклад. Розрахуємо вибіркве кореляційне відношення для даних наведених в Табл.8.2 – $N = 49$, $m = 14$. За формулами з Табл. 4.2 визначимо: $Q = 2913.96$; $Q_A = 1290.05$. Тоді, вибіркве кореляційне відношення:

$$\eta = \sqrt{1290,05/2913,96} = 0,665.$$

Отримане значення не значно відрізняється від модулю отриманого раніше коефіцієнту кореляції (0,607), та як і очікувалось має більше значення. Коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,44$ – це значить, що змінення Y на 44% здійснюється за рахунок не випадкової складової, і випадкова складова має дещо переважаючий вплив.

Перевіримо, чи є залежність близькою до лінійної (формула 8.8):

$$K_x = \frac{\sqrt{49}}{0,67449} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0,667^2 - 0,607^2} = 1,41$$

Оскільки $1,41 < 2,5$ – залежність можна вважати лінійною.

Визначимо статистичну значущість отриманого результату за формулою (8.9):

$$F = \frac{0,665^2(49 - 14)}{(1 - 0,665)(14 - 1)} = 3,55$$

Для $q = 0,95$, $f_1 = 14 - 1 = 13$, $f_2 = 49 - 14 = 35$ критичне значення $F_{0,95} = 2,01$. Оскільки $3,55 > 2,01$ – отриманий результат є статистично значущим.

Для рівня значущості 0,05:

$$L_{0,05} = \text{НОРМ.СТ.ОБР}(1-0,05/2) = 1,96.$$

Довірчий інтервал відповідно буде визначено:

$$\Delta\eta = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{1 - 0,665^2}{49 - 3}} = 0,216$$

Таким чином дійсне значення кореляційного відношення буде знаходитися в діапазоні від 0,449 до 0,881 що відповідає діапазону коефіцієнту кореляції.

9. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ЕКСПЕРИМЕНТ ТА РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ. ОДНОФАКТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

9.1. Експеримент, однофакторний експеримент та рівняння регресії

Як було вже зазначено, моделювання технічних об'єктів здебільшого відбувається базуючись на емпіричному підході, який потребує організації експериментальних досліджень. Для початку дамо визначення терміну «експеримент»: це *сукупність операцій, що виконуються над об'єктом дослідження з метою отримання інформації про його властивості*. Експерименти бувають *якісними*, які встановлюють тільки сам факт того чи іншого явища та *кількісними*, що встановлюють кількісне співвідношення між характеристиками об'єкта чи явища. Кожний експеримент передбачає проведення *дослідів* – відтворення явища що досліджується у певних умовах та реєстрація його результатів. Досліди, що проводяться в різних умовах будемо називати *незалежними дослідями* або *незалежними серіями дослідів*, а ті, що повторюються при тих самих умовах – *повторами* або *паралельними дослідями*. Повтори проводяться для отримання статистичної оцінки результатів дослідження.

Експеримент в якому дослідник на свій розсуд може змінювати умови його проведення називається активним експериментом. Якщо дослідник не може самостійно змінювати умови його проведення, а лише реєструє їх - називається пасивним. Крім того експерименти поділяються на *лабораторні* - де можна забезпечити менший вплив випадкових помилок та є більше можливостей змінювати значення факторів та *промислові* – де є можливість на реальному виробничому об'єкті отримати більш достовірний результат.

Будь який експеримент, яким би складним він не був, завжди закінчується представленням його результатів, формулюванням висновків, виданням рекомендацій. Ця інформація може бути

викладена у вигляді графіків, таблиць, креслень формул, статистичних даних або словесного опису [27].

Головний фактор – вихід або відгук Y , у контексті експериментальних досліджень, це випадкова змінна яка за уявленням дослідника залежить від факторів. При дослідженні його зв'язку від декількох факторів X_i (вхід) - встановлення форми такого зв'язку у вигляді функції $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_m)$ і є предметом регресійного аналізу. Взагалі, *регресія* – це будь яка функція, що приблизно встановлює статистичний зв'язок між «входом» та «виходом» на відміну від кореляції що встановлює тільки силу такого зв'язку. Безумовно регресійний та кореляційний аналізи пов'язані один з одним, бо встановлення сили зв'язку потребує прийняття принципового рішення про його лінійність або нелінійність. Отримане рівняння називається *рівнянням регресії*, а його графічне представлення – *лінією регресії*; коефіцієнти, що входять до рівняння – відповідно *коефіцієнти регресії*. Якщо експериментальні дослідження такого зв'язку організуються таким чином, що одночасно змінюється (варіюється) тільки один фактор, а всі інші залишаються постійними – то такий експеримент називається *однофакторним* і загальне рівняння від декількох факторів представляється у вигляді сукупності рівнянь від одного фактору (кожне від свого). Тобто, за результатами дослідження перш за все встановлюється ряд окремих залежностей (по кількості факторів m):

$$\begin{aligned} Y &= f_1(X_1) \text{ при } X_2, X_3 \dots - const \\ Y &= f_2(X_2) \text{ при } X_1, X_3 \dots - const \\ Y &= f_i(X_i) \text{ при } X_1, X_2 \dots - const \end{aligned} \quad (9.1)$$

від яких потім можна перейти знову до загальної залежності – аналіз та синтез як прийоми наукового пізнання в чистому вигляді.

При такому підході реалізується моделювання на основі принципу імітації – отримані залежності відображають якісний характер зв'язку між факторами. При великій кількості факторів, враховуючи що для отримання статистично достовірного результату треба проводити паралельні досліди, загальна кількість дослідів буде дуже великою. Крім того, при однофакторному

експерименті як правило не враховується можлива зміна якісного характеру залежності $Y = f_i(X_i)$ при зміні значень постійних факторів (це дуже складно з чисто технічних міркувань), або, як кажуть, *взаємодія факторів*. Тому однофакторний експеримент зазвичай використовується для побудови функціональних (регресійних) моделей за принципом імітації при невеликій кількості факторів.

Вигляд рівняння регресії вибирають з теоретичних міркувань або з міркувань аналітичного описання емпіричного матеріалу, приймаючи до уваги найбільш просту його форму. Особливість цієї задачі полягає в наявності випадкових факторів («шуму») які супроводжують процес що досліджується (Див. Рис.8.2, 8.5). Тому підбір функції, що буде проходити через всі експериментальні точки є нерозумним [31] бо в цьому разі функція буде відображати саме «шум», включаючи похибки експерименту, а не процес. Іншими словами, функція повинна згладжувати вплив сторонніх факторів та процесів. Згладжування «шуму» буде тим краще і надійніше, рівняння регресії буде тим точніше відображати процес або об'єкт чим більша кількість експериментів буде проведена, тобто чим більшу кількість надмірної інформації будемо мати. Так для побудови лінійної залежності треба мати дві точки але при наявності «шуму» таких точок знадобиться більше. Зазвичай в якості рівняння регресії приймають: лінійну функцію (поліном 1-го ступеню) та поліноми 2-3-го ступенів (більш високі ступені використовуються рідше); статичну функцію та ін. Наприклад:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x, \quad y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2, \quad y = b_0 \cdot x^{b_1},$$

$$y = b_0 \cdot e^{b_1 x} \text{ та ін.}$$

Зазначимо, що задача вибору виду функції не формалізується, так як одна й та-ж крива на певній ділянці приблизно з однаковою точністю може бути описана зовсім різними аналітичними виразами. Звідси йде важливий практичний висновок – навіть в наш вік комп'ютерів прийняття рішення про вибір тієї чи іншої математичної моделі залишається за дослідником. Тільки експериментатор знає для чого буде в подальшому використовуватися ця модель та на основі яких понять будуть інтерпретуватися отримані результати та параметри моделі [30].

В загальному вигляді, з урахуванням коефіцієнтів регресії b_i , рівняння регресії має вигляд:

$$y = f(x, b_0, b_1, b_2, \dots, b_l) \quad (9.2)$$

Одним з результатів регресійного аналізу є визначення коефіцієнтів регресії b_i , базуючись на результатах експериментів. Крім того тут вирішуються задачі перевірки значущості коефіцієнтів регресії та адекватності отриманої моделі.

Значення коефіцієнтів регресії рівняння (9.2) не можна точно визначити за емпіричними значеннями функції y , оскільки вони мають випадкову складову. Без випадкової складової, точки на рисунках 8.2 та 8.5 розташовувалися б точно на лінії регресії. Тому мова йде тільки про отримання достатньо гарних оцінок коефіцієнтів регресії. Додатково зазначимо, що одним з умов регресійного аналізу є рівність (однорідність) дисперсій функції y , що відповідає рівній точності вимірювань [32]. Окремим випадком є залежність дисперсії від значення x , який тут ми розглядати не будемо.

9.2. Формулювання методу найменших квадратів.

Якщо всі вимірювання значень функції y : y_1, y_2, \dots, y_m виконані з однаковою точністю, то оцінки параметрів b_0, b_1, \dots, b_l визначаються з умови, щоб сума квадратів відхилень вимірених значень y_k від розрахункових $f(x_k, b_0, b_1, b_2, \dots, b_l)$ була б найменшою:

$$U = \sum_{k=1}^m \Delta y_k^2 = \sum_{k=1}^m [y_k - f(x_k, b_0, b_1, b_2, \dots, b_l)]^2 \rightarrow \min \quad (9.3)$$

тут m – кількість незалежних серій дослідів. Відхилення вимірених та розрахованих значень Δy_k має назву *нев'язність*. Якщо для кожного x_k проводиться серія з n_k паралельних дослідів (повторів), то в якості y_k береться середнє арифметичне за цими

дослідами: $y_k = \bar{y}_k$, і до виразу (9.3) вводиться ваговий коефіцієнт ω_k . Вираз (9.3) при цьому приймає вигляд [31]:

$$U = \sum_{k=1}^m \Delta y_k^2 = \sum_{k=1}^m [y_k - f(x_k, b_0, b_1, b_2, \dots, b_l)]^2 \cdot \omega_k \rightarrow \min \quad (9.4)$$

Прийнявши, що всі виміри проводяться з однаковою точністю, маємо наступний ваговий коефіцієнт: $\omega_k = n_k$ [31].

Сформульовані вище умови зберігаються і для визначення оцінок коефіцієнтів регресії функції декількох змінних.

Пошук коефіцієнтів $b_0, b_1, b_2, \dots, b_l$, що забезпечують мінімум функції U здійснюється шляхом вирішення системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial b_0} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial b_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial U}{\partial b_l} = 0 \end{cases} \quad (9.5)$$

Якщо до формули (9.2) параметри входять лінійно, то система рівнянь (9.5) також буде лінійною. Оскільки вирішення лінійної системи значно простіше, то рівняння регресії, при можливості треба перетворювати до лінійного вигляду. Наприклад, статична функція $y = b_0 \cdot x^{b_1}$, що найчастіше використовується при моделюванні процесів різання та інструменту, приймає лінійний вигляд в результаті логарифмування:

$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln(b_0 \cdot x^{b_1}) = \ln(b_0) + b_1 \ln(x) \\ Y &= \ln(y); B_0 = \ln(b_0); X = \ln(x) \\ Y &= B_0 + b_1 \cdot X \end{aligned}$$

Таким чином, система (9.5) для лінійної функції

$$y = b_0 + b_1 \cdot x \quad (9.6)$$

після деяких перетворювань буде мати вигляд:

$$\begin{cases} N \cdot b_0 + B \cdot b_1 = A \\ B \cdot b_0 + C \cdot b_1 = G \end{cases} \quad (9.7)$$

У системі (9.7) N – загальна кількість дослідів з урахуванням повторів n_k в m незалежних дослідах, а коефіцієнти мають наступні значення:

$$N = \sum_{k=1}^m (n_k)$$

$$A = \sum_{k=1}^m (y_k \cdot \omega_k); \quad B = \sum_{k=1}^m (x_k \cdot \omega_k); \quad C = \sum_{k=1}^m (x_k^2 \cdot \omega_k);$$

$$G = \sum_{k=1}^m (x_k \cdot y_k \cdot \omega_k)$$

Приклад. Визначити рівняння лінійної регресії для прикладу, наведеного в п.8, табл. 8.2. Точність вимірювань при різних x будемо вважати однаковою, критерієм чого є рівність або однорідність дисперсій (Див. п. 4). Для цього прикладу: кількість незалежних дослідів при різних x : $m = 14$, загальна кількість дослідів $N = 49$, $\omega_k = n_k$, $y_k = \bar{y}_k$. Система (9.7) приймає вигляд:

$$\begin{cases} 49 \cdot b_0 + 642 \cdot b_1 = 1955 \\ 642 \cdot b_0 + 8862 \cdot b_1 = 24868 \end{cases}$$

Розв'язавши систему відносно b_0 та b_1 отримаємо:

$$b_0 = 61.609, \quad b_1 = -1.657.$$

Рівняння регресії таким чином буде мати вигляд:

$$y = 61.609 - 1.657 \cdot x$$

Графік рівняння, відносно експериментальних точок показано на рис. 9.1:

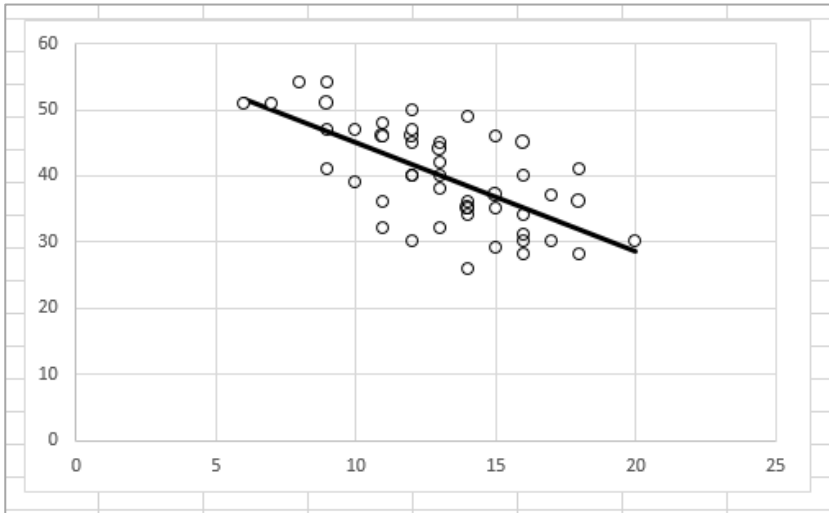


Рисунок 9.1 — Розташування графіку рівняння регресії відносно експериментальних точок.

При однорідних дисперсіях, визначити коефіцієнти регресії b_0 та b_1 можна за допомогою вбудованих функцій *Microsoft Excel*, відповідно:

$$\{b_0\} = \text{SLOPE}(\langle Y_1 \rangle; \langle Y_m \rangle; \langle X_1 \rangle; \langle X_m \rangle)$$

$$\{b_1\} = \text{INTERCEPT}(\langle Y_1 \rangle; \langle Y_m \rangle; \langle X_1 \rangle; \langle X_m \rangle)$$

Приклад розрахунку (фрагмент) наведено на Рис. 9.2. Результати вимірювань розташовуються у вигляді таблиці де кожному значенню x відповідає одне значення y . У разі коли виконуються паралельні досліди при тому самому x , то x повторюється відповідну кількість разів. На рисунку формула для b_1 показана у примітці, а для b_0 – там де вона і є, в командній строчці. Як бачимо з Рис.9.2, отримані дуже близькі результати.

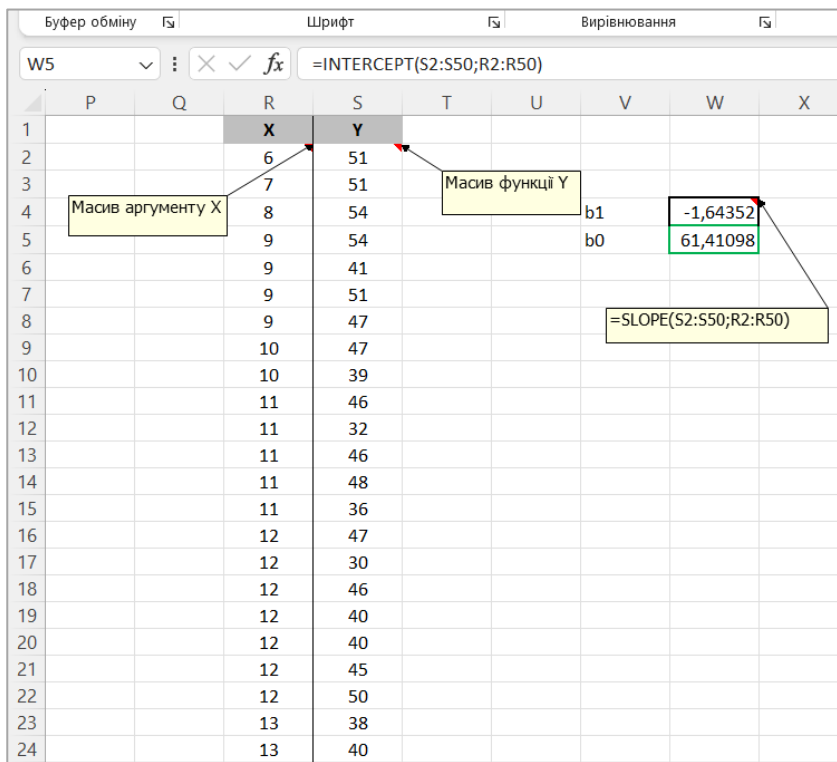


Рисунок 9.2 — Фрагмент розрахунку коефіцієнтів лінійного рівняння регресії за допомогою *Microsoft Excel*

9.3. Перевірка адекватності моделі

Перевірка адекватності моделі у вигляді рівняння регресії полягає у визначенні узгодженості моделі з результатами дослідів або здатності моделі описувати процес або об'єкт, що досліджується. Перевірка адекватності моделі полягає в співставленні дисперсії, пов'язаної з помилкою визначення відгуку – дисперсії відтворення або досліду, та дисперсії, що характеризує відхилення експериментальних значень від розрахункових по рівнянню регресії – дисперсії адекватності [3].

Отже для перевірки адекватності кожний незалежний дослід повинен включати декілька паралельних.

Дисперсія відтворення визначається наступним чином:

$$S_e^2 = \frac{RSS_e}{f_e} \quad (9.8)$$

В рівнянні (9.8): RSS_e – залишкова сума квадратів (Residual sum of squares), f_e – кількість ступенів свободи.

$$RSS_e = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} (y_{kj} - \bar{y}_k)^2 \quad (9.9)$$

$$f_e = N - m \quad (9.10)$$

У рівняннях (9.9), (9.10) y_{kj} – значення j -го повтору в k -му досліді; \bar{y}_k – середнє значення відгуку в k -му досліді; n_k – кількість паралельних дослідів в кожному з m незалежних дослідів; N – загальна кількість дослідів з урахуванням повторів - $N = \sum n_k$

$$\bar{y}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} y_{kj} \quad (9.11)$$

Дисперсія адекватності визначається наступним чином:

$$S_a^2 = \frac{RSS_a}{f_a} \quad (9.12)$$

У рівнянні (9.12) - RSS_a - залишкова сума квадратів відносно відгуку, розрахованого за рівнянням регресії - \hat{y}_k ; f_a – кількість ступенів свободи.

$$RSS_a = \sum_{k=1}^m n_k \cdot (\hat{y}_k - \bar{y}_k)^2 \quad (9.13)$$

$$f_a = m - l \quad (9.14)$$

Тут l – кількість значущих коефіцієнтів в рівнянні регресії.

Порівняння дисперсій (9.8) та (9.13) виконується за F-критерієм Фішера.

$$F = \frac{S_a^2}{S_e^2} \quad (9.15)$$

Розрахунковий критерій F порівнюється з критичним значенням F_q яке визначається для довірчої імовірності q та ступенів свободи чисельника – f_a та знаменника – f_e (див. п.4). Якщо виконується умова $F \leq F_q$, то модель вважається адекватною, а якщо умова не виконується, то модель не адекватна і використовувати її не можна, тому що вона незадовільно описує експериментальні дані. Розглянемо імовірні причини неадекватності моделі:

1. Некоректно визначена дисперсія відтворення – її значення занижене;
2. Наявність викидів – значень які погано описуються моделлю. Видалення цих викидів може значно понизити дисперсію адекватності та зробити модель адекватною;
3. Невірно вибрано вид моделі – рівняння регресії. Треба спробувати інші види рівнянь;
4. Априорно не враховані важливі фактори, що мають суттєвий вплив на відгук.

Зазвичай критерій F , розрахований за рівнянням (9.15), відповідає умові $F \geq 1$, але коли дисперсія адекватності менша за дисперсію відтворення маємо $F < 1$ - випадок коли $S_a^2 \ll S_e^2$ є небажаним хоч модель в цьому разі і буде однозначно адекватною, оскільки $F_q > 1$. Причина цього випадку полягає або в завищеній дисперсії відтворення – низькій точності експерименту або в перевизначеності моделі [3] - тобто модель має зайві члени які відображають не вплив факторів, а випадкові помилки експерименту. Слід зазначити, що перевизначеність моделі може бути характерною для рівняння регресії у вигляді поліномів другої

та більш високих ступенів. Таким чином, якщо за формулою (9.15) $F < I$ визначаємо ще один критерій - F_l :

$$F_1 = \frac{S_e^2}{S_a^2} \quad (9.16)$$

F_l порівнюється з критичним F_q який визначається для довірчої імовірності q та ступенів свободи чисельника - f_e та знаменника - f_a (див. п.4) і якщо $F_1 \leq F_q$ то точність експерименту не занижена та / або модель не є перевизначеною.

Приклад. Визначити адекватність моделі, отриманої в прикладі п.9.2 – вихідні дані наведені в табл. 8.2. В цьому прикладі: кількість незалежних серій дослідів $m = 14$; загальна кількість дослідів з урахуванням повторів $N = 49$; кількість коефіцієнтів регресії $l = 2$.

Кількість ступенів свободи:

$$f_e = 49 - 14 = 35; \quad f_a = 14 - 2 = 12$$

Дані до розрахунку адекватності моделі наведені в Табл.9.1.

Залишкова сума квадратів за повторами кожного експерименту $RSS_e = 1455.91$.

Дисперсія відтворення за рівнянням (9.8):

$$S_e^2 = 1455.91/35 = 41.60.$$

Залишкова сума квадратів відносно відгуку за результатами розрахунків за рівнянням регресії (Див. п.9.2):

$$y = 61.41 - 1.64 \cdot x$$

буде дорівнювати: $RSS_a = 149,70$.

Дисперсія адекватності за рівнянням (9.12):

$$S_a^2 = 149.70/12 = 12,47$$

Критерій Фішера за рівнянням (9.15):

$$F = 12.47/41,6 = 0,3$$

Для $q = 0.99$ та відповідних ступенів свободи для чисельника і знаменника ($f_a = 12, f_e = 35$) з допомогою вбудованої функції *Microsoft Excel* ($= F. \text{ОБР}(0,99; 12; 35)$) визначимо критичне значення критерію Фішера: $F_{0,99} = 2.74$

Таблиця 9.1. — До розрахунку адекватності моделі за даними табл.8.2

k	Фактор (аргумент) x	Функція Y_{kj}	n_k	Середнє значення за n_k повторами \bar{Y}_k	Значення, розраховане за рівнянням регресії \hat{Y}_k
1	6	51	1	51,00	51,54988
2	7	51	1	51,00	49,90636
3	8	54	1	54,00	48,26284
4	9	54; 41; 51; 47	4	48,25	46,61933
5	10	47; 49	2	43,00	44,97581
6	11	46; 32; 46; 48; 36	5	41,60	43,33229
7	12	47; 30; 46; 40; 40; 45; 50	7	42,57	41,68877
8	13	38; 40; 44; 32; 45; 42	6	40,17	40,04526
9	14	49; 34; 35; 35; 36; 26	6	35,83	38,40174
10	15	35; 29; 37; 46	4	36,75	36,75822
11	16	28; 34; 45; 30; 31; 40	6	34,57	35,11471
12	17	37; 30	2	33,50	33,47119
13	18	41; 28; 36	3	35,00	31,82767
14	20	30	1	30,00	28,54064

Оскільки $0,3 < 2.74$ то модель можна вважати адекватною, але значення розрахованого критерію Фішера $0,3 < 1$ тому що дисперсія адекватності менша за дисперсію відтворення, що не є бажаною ситуацією і може бути пов'язано з перевизначеністю моделі або низькою точністю експерименту. Тому визначимо критерій Фішера за рівнянням (9.16): $F_1 = 41,6/12,4 = 3,33$.

Для $q = 0,99$ та відповідних ступенів свободи чисельника і знаменника ($f_e = 35$, $f_a = 12$), за допомогою вбудованої функції *Microsoft Excel* ($= F.ОБР(0,99; 35; 12)$) визначимо критичне значення критерію Фішера: $F_{0,99} = 3,65$.

Порівняння F_1 з його критичним значенням $3,33 < 3.65$, вказує, що для довірчої імовірності $q = 0,99$ модель не є перевизначеною та точність експерименту для цілей визначення адекватності достатня.

9.4. Паралельні досліді (повтори) та умови їх проведення.

Для статистичної оцінки результатів дослідження має бути визначена дисперсія відтворення S_e^2 (див. п.9.3), що характеризує помилку експерименту. Отримана вона може бути за вищенаведеними рівняннями наступними способами:

- Кожен з N незалежних дослідів повторюється n_k раз. Ця кількість може бути однаковою або різною для кожного з незалежних дослідів (див. приклад п.9.3);
- Кожен з N незалежних дослідів проводиться тільки один раз, тобто $n_k = 1$. В цьому випадку для визначення дисперсії відтворення має бути проведений додатковий дослід з повторами при значеннях факторів відмінних від N незалежних дослідів. Результати такого додаткового досліді використовуються виключно для визначення дисперсії відтворення та не використовуються для визначення коефіцієнтів рівняння регресії. Вони також не враховуються при визначенні кількості ступенів свободи [33].

10. БАГАТОФАКТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ. ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

10.1. Загальні положення

Вибір виду функції при однофакторному експерименті, як зазначалось в п.9, досить таки вільний. Це обумовлює його використання для моделювання на основі принципу імітації. Але тут є і суттєві обмеження, основними з яких є:

- велика кількість потрібних дослідів що стрімко зростає зі зростанням кількості факторів;
- неврахування взаємодії факторів або прийняття припущення, що така взаємодія відсутня.

На відміну від однофакторного експерименту де одночасно змінюється (варіюється) тільки один фактор при багатофакторному експерименті одночасно змінюються всі фактори, що зменшує кількість дослідів. Безумовно така постановка експерименту має свої обмеження які відносяться до виду функції (про що поговоримо далі) та до області застосування – здебільшого для моделювання на основі принципу оптимізації, про що ми і будемо переважно говорити в подальшому. Зміна факторів тут відбувається не хаотично а за певними правилами. Сукупність даних, що визначають число, умови та порядок реалізації дослідів називається *план експерименту* [27]. А вибір плану експерименту що відповідає поставленим завданням носить назву *планування експерименту*. Таким чином багатофакторний експеримент використовується тільки в поєднанні з плануванням. Цей експеримент є активним, бо передбачає активну зміну факторів. При цьому суттєвим є наступне [33]:

1. Прагнення до мінімізації загальної кількості дослідів;
2. Одночасне варіювання усіма змінними, що визначають процес, за спеціальними правилами;
3. Використання спеціального математичного апарату, що формалізує дії дослідника;
4. Вибір чіткої стратегії, що дозволяє приймати обґрунтовані рішення після кожної серії дослідів;

5. Обмеження у виборі виду моделі.

Для наочності, деякі основні терміни та визначення розглянемо на прикладі залежності з двома факторами:

$$y = f(x_1, x_2) \quad (10.1)$$

Сукупність факторів формує *факторний простір* – у даному прикладі це площина. Кожен з факторів має свою область визначення що знаходиться в межах $x_{imin} \dots x_{imax}$ (див. Рис. 10.1). Ці області визначення формують *сумісну область визначення* всіх факторів. Кожна точка в середині сумісної області визначення характеризує один з можливих станів системи. Значення яке приймає кожен з факторів всередині області визначення прийнято називати *рівень*.

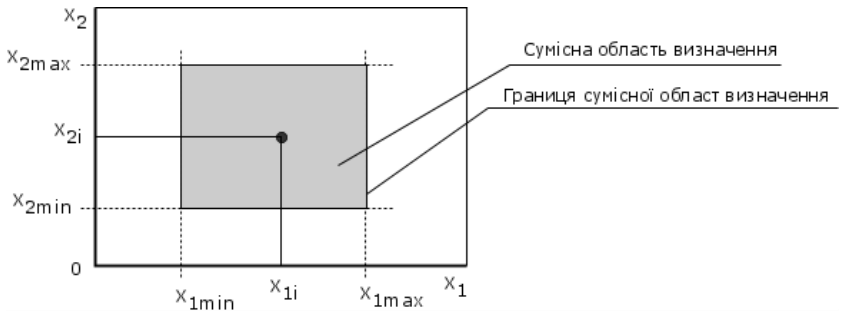


Рисунок 10.1. — Области визначення факторів

Якщо до двох факторів додати відгук y то отримаємо тривимірну поверхню відгуку (Рис.10.2) . Для її графічного відображення не обов'язково переходити до тривимірного простору – можна зробити перетини поверхні відгуку площинами паралельними x_1Ox_2 , а отримані лінії спроектувати на цю ж площину – Рис.10.3. Так отримаємо *лінії рівного відгуку*, бо значення функції y вздовж певної лінії будуть однаковими. Таким способом зображають гори та западини на географічних картах.

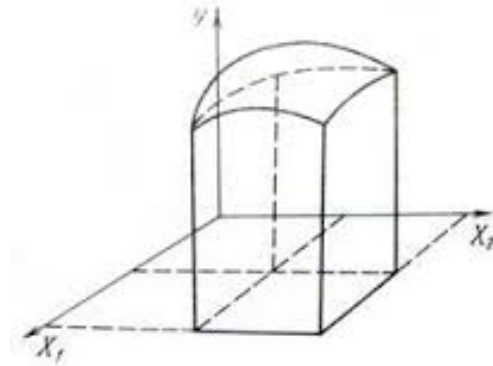


Рисунок 10.2 Поверхня відгуку

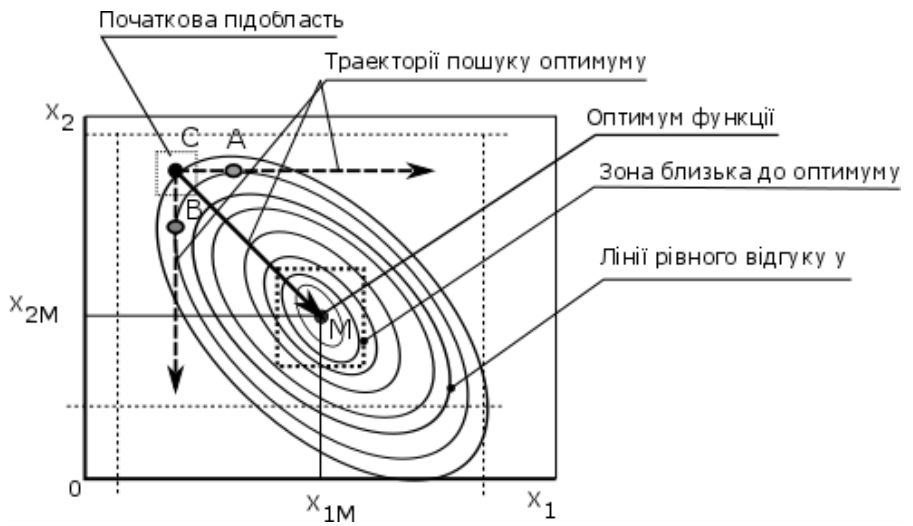


Рисунок 10.3 Лінії рівного відгуку та пошук оптимального рішення.

10.2. Вибір виду моделі

Виходячи з попередніх розділів можна зробити висновок, що головна вимога до математичної моделі це передбачати поведінку об'єкту з певною точністю. А якщо цю вимогу конкретизувати для оптимізаційних моделей – то це передбачати напрям руху до тих умов де об'єкт буде функціонувати найкращим чином, безумовно якщо є підстави вважати що такі умови існують. У будь якому випадку ми приймаємо наступні допущення: *поверхня відгуку безперервна, вона гладка та має єдиний екстремум (по меншій мірі в межах області визначення).*

Зазвичай при пошуку оптимального рішення в факторному просторі вибирається якась точка C та розглядається декілька симетричних відносно неї точок, що разом формують деяку підобласть (див. Рис.10.3). Тут проводиться експеримент за результатами якого будується перша модель. Ця модель використовується для передбачення поведінки об'єкта в точках, що не входили до експерименту. Якщо точки знаходяться всередині підобласті, то таке передбачення носить назву *інтерполяція*, а якщо за її межами – *екстраполяція*. Чим далі від області експерименту лежить точка тим з меншою впевненістю це можна робити. Тому ми вимушені екстраполювати недалеко, а отримані результати використовувати для проведення подальших експериментів [33]. Якщо застосовувати методику однофакторного експерименту, коли змінюється тільки один з факторів - x_1 або x_2 то в якості оптимального рішення можуть бути прийняті точки A або B (Рис. 10.3) тоді як насправді воно лежить в точці M і для її пошуку потрібно змінювати одночасно обидва фактори – це і є одна зі складових, у яких полягає сенс багатофакторного експерименту.

Зі всього різноманіття можливих математичних моделей, найбільш придатною для цілей багатофакторного експерименту є модель у вигляді алгебраїчного поліному. Ця придатність полягає в простоті, зручності та можливості побудови моделі в околиці будь якої точки. Крім цього такі моделі є найбільш математично розробленим класом моделей [33]. Таким чином для двох факторів:

- поліном нульового ступеню: $y = b_0$;

- поліном першого ступеню: $y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2$;
- поліном другого ступеню:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{12} x_1 x_2;$$

- поліном третього ступеню:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{122} x_1 x_2^2 + b_{211} x_2 x_1^2 + b_{111} x_1^3 + b_{222} x_2^3$$

Тобто поліноміальні моделі можуть бути різних ступенів і постає питання – якого ступеню поліном обрати. Експеримент потрібен тільки для того, щоб визначити кількісні значення коефіцієнтів полінома – коефіцієнти регресії. Чим більше коефіцієнтів, тим більше дослідів буде потрібно. Але ми прагнемо зменшити їх кількість. Таким чином треба знайти поліном який має якомога менше коефіцієнтів але задовольняє вимогам, що висуваються до моделі.

Для оптимізаційних задач ми перш за все хочемо, щоб модель якнайкраще передрікала напрямок руху до оптимального рішення. Такий напрямок називається напрямком градієнту - \overline{CM} на Рис. 10.3. Зрозуміло, що рух в цьому напрямку призведе до успіху скоріше ніж у будь якому іншому [33]. Як видно з Рис.10.3 поліном першого ступеню задовольняє цій меті маючи в той же час мінімальну кількість коефіцієнтів. Але це буде відбуватися до тих пір, поки ми не потрапимо в зону близьку до оптимуму яка називається «*майже стаціонарною*». В цій зоні використання лінійної функції у вигляді полінома першого ступеню стає не ефективним і не призводить до покращення результатів. В цьому випадку, потрапляння в майже стаціонарну область треба вважати завершенням процесу оптимізації або є сенс переходити до поліномів більш високих ступенів. Для цієї мети цілком підходить поліном другого ступеню, бо він є функцією, що має екстремум і може адекватно описати ділянку поверхні відгуку, безумовно якщо вона такий екстремум має. Таким чином при плануванні багатофакторного експерименту обмежимося поліномами першого та другого ступенів.

План експерименту характеризується кількістю ступенів свободи:

$$f = N - l - 1 \quad (10.2)$$

де N – кількість незалежних дослідів в плані; l – кількість коефіцієнтів регресії в рівнянні (без вільного коефіцієнту).

В залежності від кількості ступенів свободи плани бувають: *ненасиченими*, коли $f > 0$, тобто кількість дослідів більша ніж потрібно для визначення коефіцієнтів; *насиченими*, коли $f = 0$ та *зверхнасиченими* при $f < 0$.

10.3. Прийняття рішень перед плануванням експерименту

Перед безпосереднім плануванням експерименту повинно бути виконано ряд дій на яких ми і зупинимось.

Аналіз апріорної інформації. Дослідження технічного об'єкту зазвичай починається в умовах, коли такий або аналогічний об'єкти деяким чином досліджувалися раніше. Інформацію яка міститься в результатах попередніх досліджень називають *апріорною* [33]. Апріорну інформацію можна використовувати для отримання відомостей про критерій оптимізації, фактори та ступінь їх впливу на результат; про найкращі умови протікання процесу або про деяку підобласть в якій процес протікає достатньо добре; про вигляд поверхні відгуку; про взаємодію факторів та ін. Для цього можуть бути використані графіки чи таблиці однофакторних експериментів, що були отримані в попередніх експериментах чи були описані в літературі. Якщо однофакторну залежність не можна апроксимувати лінійним рівнянням, то в багатомірному випадку поверхня відгуку безумовно буде мати кривизну [33]. Апріорна інформація може також містити відомості про області визначення факторів.

Оцінка границь областей визначення. Для цього повинні бути враховані обмеження декількох типів:

- ✓ принципів обмеження, такі які не можуть бути порушені при будь яких обставинах. Наприклад фізичні константи та обмеження зв'язані з безпекою;
- ✓ обмеження, зв'язані з техніко-економічними міркуваннями: вартість та доступність сировини та матеріалів, час проведення процесів;
- ✓ обмеження пов'язані з умовами проведення процесу: технічними характеристиками обладнання для вимірювання та випробування (наприклад мінімальна та максимальна частоти обертів шпинделя верстата та потужність його приводу), технологією, організацією.

Вибір основного рівня. Найкращім умовам, що отримані з апріорної інформації відповідає комбінація або декілька комбінацій рівнів факторів. Кожна така комбінація є багатомірною точкою в багатомірному факторному просторі. Її можна розглядати як початкову точку (наприклад точка *C* на Рис. 10.3) для побудови плану експерименту. Визначемо її як основний або нульовий рівень. Побудова плану експерименту зводиться до вибору експериментальних точок симетричних відносно основного (нульового) рівня. Може трапитися, що координати найкращої точки не відомі, але є відомості про деяку підобласть в якій процес йде достатньо добре. Тоді основний рівень вибирається в центрі або у випадковій точці цієї підобласті. Якщо є випадок з декількома рівнозначними точками та немає додаткових умов у вигляді обмежень – тоді вибір довільний [33]. Безумовно плани експериментів можна побудувати навколо усіх цих точок та провести їх, але це безумовно потребує більших затрат. В усякому разі нульовий рівень та симетричні відносно нього точки плану експерименту повинні знаходитись в межах області визначення. Позначимо дійсне значення основного рівня *j*-го фактору як \tilde{x}_{0j} .

Вибір інтервалів варіювання. Наступне завдання – вибрати експериментальні точки симетричні відносно основного рівня. Положення цих точок визначається інтервалом варіювання - I_j . Якщо інтервал варіювання додати до нульового рівня то

отримаємо верхній рівень (ВР), а якщо його відняти від нульового – нижній (НР), тобто відповідно:

$$\tilde{x}_{Uj} = \tilde{x}_{0j} + I_j \quad (10.3)$$

$$\tilde{x}_{Lj} = \tilde{x}_{0j} - I_j$$

Графічно це можна зобразити як показано на Рис.10.4

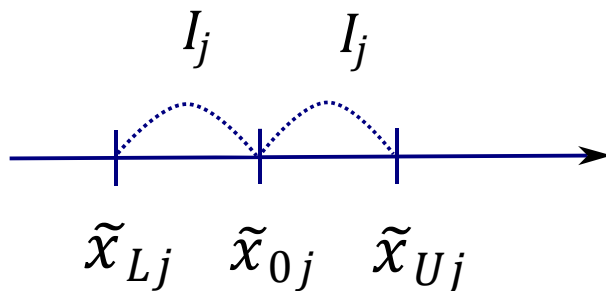


Рисунок 10.4. — Рівні факторів та інтервал варіювання

Іншими словами, інтервал варіювання це відстань від основного до верхнього та нижнього рівнів. Таким чином, задача вибору рівнів зводиться до більш простої – вибору інтервалу варіювання. На вибір інтервалів варіювання накладають обмеження як знизу так і зверху. З одного боку, інтервал варіювання не може бути менше за ту похибку з якою експериментатор фіксує значення рівня, інакше рівні не можна буде відрізнити. З іншого боку вони не повинні бути настільки великими, щоб значення рівнів опинилися за межами області визначення. В цих межах безумовно зберігається значна невизначеність, вибір інтервалу варіювання є складною задачею бо вона зв'язана з неформалізованим етапом планування експерименту тому вона повинна вирішуватися виключно за рахунок досвіду та інтуїції дослідника. Вибрана величина в ході дослідів часто має корегуватися. Орієнтовно, якщо інтервал

варіювання складає не більше 10% від області визначення – то він вважається *вузьким*; від 10% до 30% - *середнім*; більше 30% - *широким*.

При плануванні експерименту використовують не дійсні значення факторів, а кодовані, які визначаються наступним чином:

$$x_j = \frac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{0j}}{I_j} \quad (10.4)$$

З рівнянь (10.3) та (10.4) видно, що кодоване значення основного рівня дорівнює 0 – тому його і називають ще нульовим рівнем. Кодоване значення нижнього рівня - -1 (може позначатися просто « - »), а верхнього - +1 (може позначатися « + »).

10.4. Повний факторний експеримент (ПФЕ).

При повному факторному експерименті фактори варіюються на двох рівнях – верхньому та нижньому. При цьому повинні бути реалізовані *всі можливі комбінації значень факторів*. Кількість таких комбінацій, а отже і кількість незалежних дослідів визначається:

$$N = 2^k \quad (10.5)$$

тут 2 – це кількість рівнів, k – кількість факторів.

На формулі (10.4) базується і умовне позначення ПФЕ - 2^k . Так для двох факторів ПФЕ позначається 2^2 , а кількість незалежних дослідів які мають бути проведені дорівнює чотирьом. За результатами ПФЕ будується модель (рівняння регресії) у вигляді *полінома першого ступеню*. Для двох факторів ця модель має вигляд:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 \quad (10.6)$$

План 2^2 для побудови рівняння регресії (10.6) є ненасиченим, бо має $f = 1$ ступінь свободи – що це означає буде зрозуміло пізніше. Умови проведення експерименту записуються в таблицю,

що називається матрицею планування експерименту (Див. Табл. 10.1). В цю матрицю додатково вводиться стовпчик, що відповідає фіктивній змінній x_0 при вільному коефіцієнті b_0 , що у всіх експериментах має значення +1 – він буде використовуватися виключно для розрахунків, а не як умова проведення експерименту.

Таблиця 10.1 — Матриця планування експерименту 2^2

N	x_0	Умови експерименту		Результати експерименту
		x_1	x_2	y
1	+ 1	+ 1	+ 1	y_1
2	+ 1	- 1	+ 1	y_2
3	+ 1	+ 1	- 1	y_3
4	+ 1	- 1	- 1	y_4

Кожен стовбець матриці планування експерименту називається *вектор-стовбець*, а рядок – *вектор-рядок*.

Графічно ПФЕ для двох факторів можна зобразити, як показано на Рис. 10.5. З рисунку зрозуміло, що введення кодованих значень факторів рівнозначно введенню нової системи координат з центром, що має координати основного рівня та масштаби по осям в розмірі відповідних інтервалів варіювання. Точки на рисунку кореспондуються з відповідними дослідями з Табл. 10.1.

Повний факторний експеримент в поєднанні з рівнянням регресії у вигляді алгебраїчного полінома дозволяє досить легко визначати коефіцієнти регресії. **Треба пам'ятати, що фактори в такому рівнянні мають кодовані значення, а не дійсні.** У наведеній нижче формулі (10.7) j - це індекс коефіцієнта регресії:

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{ji} \cdot y_i) \quad (10.7)$$

Виходячи з рівняння (10.7), коефіцієнти регресії з рівняння (10.6) на основі матриці Табл. 10.1 будуть визначатися як сума у зі знаками відповідного x :

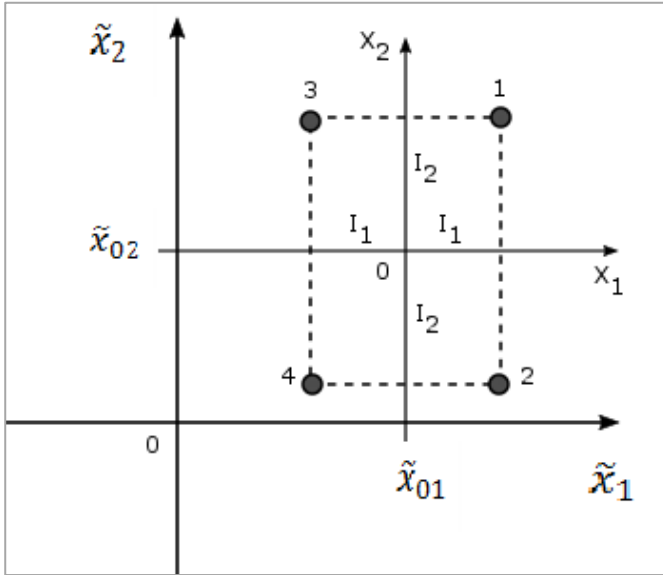


Рисунок 10.5 — Графічне зображення ПФЕ 2²

$$b_0 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

$$b_1 = \frac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)$$

$$b_2 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 - y_3 - y_4)$$

Іноді зручно оцінювати вклад фактору на відгук при переході від нижнього рівню до верхнього – цей вклад має назву *ефект фактору* і він кількісно дорівнює подвійному коефіцієнту регресії.

Наявність однієї ступені свободи дозволяє до рівняння (10.6) ввести ще один елемент – і цей елемент буде нелінійним. Рівняння (10.6) прийме вигляд:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \quad (10.8)$$

Тут елемент $b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2$ характеризує взаємодію факторів і називається ефект взаємодії. Він відображає зміну ефекту одного з факторів при зміні рівня іншого фактору. Для розрахунку коефіцієнту b_{12} до матриці планування додатково вводиться відповідний стовбець (Табл. 10.2)

Таблиця 10.2 — Матриця планування експерименту 2^2 з ефектом взаємодії

N	x_0	Умови експерименту		$x_1 x_2$	Результати експерименту
		x_1	x_2		y
1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	y_1
2	+ 1	- 1	+ 1	- 1	y_2
3	+ 1	+ 1	- 1	- 1	y_3
4	+ 1	- 1	- 1	+ 1	y_4

Коефіцієнт при ефекті взаємодії відповідно буде визначатися:

$$b_{12} = \frac{1}{4}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4)$$

При наявності двох факторів перебрати усі можливі комбінації значень рівнів не важко, але при їх збільшенні потрібні деякі правила, щоб формалізувати цю процедуру. Розглянемо два:

- 1) Чергування знаків: перший стовпчик – знаки через один; другий через два; третій через чотири і т.д. І взагалі, знаки змінюються через 2^{j-1} де j – номер стовпчика.
- 2) Домовимось, що коли $k > 2$, для плану 2^k план 2^{k-1} є вихідним. При появі нового фактору, вихідний план повторюється двічі: в поєднанні з нижнім та верхнім рівнем вихідного плану.

Виходячи з цих правил, отримаємо план ПФЕ 2^3 для побудови моделі (10.9):

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 \quad (10.9)$$

Кількість незалежних дослідів $N = 8$. Матрицю планування експерименту наведено в Табл.10.3

Таблиця 10.3 — Матриця планування експерименту 2^3

N	x_0	Умови експерименту			Результати експерименту
		x_1	x_2	x_3	y
1	+1	+1	+1	-1	y_1
2	+1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	+1	-1	-1	y_3
4	+1	-1	-1	-1	y_4
5	+1	+1	+1	+1	y_5
6	+1	-1	+1	+1	y_6
7	+1	+1	-1	+1	y_7
8	+1	-1	-1	+1	y_8

Кількість ступенів свободи плану 2^3 для отримання коефіцієнтів регресії рівняння (10.9) $f = 4$. Це означає, що до рівняння можуть бути внесені чотири додаткових нелінійних члени, і рівняння регресії буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}
 y = & \\
 = & b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + \\
 & + b_{123} x_1 x_2 x_3
 \end{aligned} \quad (10.9)$$

Зі збільшенням кількості факторів, кількість можливих взаємодій стрімко зростає. Елемент $x_1 x_2 x_3$ має назву *ефект взаємодії другого порядку*. Матриця планування експерименту з

урахуванням ефектів взаємодії буде виглядати як показано в Табл. 10.4

Таблиця 10.4 — Матриця планування експерименту 2^3 з ефектами взаємодії

N	x_0	Умови експерименту			x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	Результати експерименту
		x_1	x_2	x_3					y
1	+ 1	+ 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	- 1	- 1	y_1
2	+ 1	- 1	+ 1	- 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	y_2
3	+ 1	+ 1	- 1	- 1	- 1	- 1	+ 1	+ 1	y_3
4	+ 1	- 1	- 1	- 1	+ 1	+ 1	+ 1	- 1	y_4
5	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	y_5
6	+ 1	- 1	+ 1	+ 1	- 1	- 1	+ 1	- 1	y_6
7	+ 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	- 1	y_7
8	+ 1	- 1	- 1	+ 1	+ 1	- 1	- 1	+ 1	y_8

Принципово важливим моментом при плануванні експерименту та аналізі отриманих результатів є те, що *як правило чим більше порядок взаємодії, тим менше імовірність його виникнення* [33].

Отримана модель перевіряється на адекватність так само, як і для однофакторного експерименту, що викладено у розділі 9.3 але з деякими особливостями, про що – трохи далі.

10.5. Властивості матриці повного факторного експерименту.

Треба з'ясувати які загальні властивості мають матриці планування експерименту не залежно від кількості факторів і який вплив вони мають на якість отриманої моделі, бо сенс побудови плану експерименту полягає саме в побудові моделі. Виходячи зі статистичного характеру даних експерименту, в його ході ми

отримуємо не дійсні значення коефіцієнтів регресії, а їх статистичні оцінки, які повинні бути найкращими та забезпечувати точність передбачення, що не залежить від напрямку у факторному просторі [33]. Наведені нижче властивості дійсні для всіх стовбців матриці планування експерименту, включаючи стовбці, що відповідають ефектам взаємодії. *Нагадаємо, що перший індекс (j або u) тут не номер рядка, а індекс відповідного стовбця, тому він взятий у дужки. Крім того зазначені нижче властивості не відносяться до стовбця, що відповідає фіктивній змінній x_0* Отже...

Симетричність відносно центру експерименту. Алгебраїчна сума елементів вектор-стовбця кожного фактору дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} = 0 \quad (10.10)$$

Іншими словами, кількість +1 та -1 в стовбці однакова. Симетричність властива всім вектор-стовбцям за виключенням x_0

Умова нормування. Сума квадратів елементів кожного стовбця дорівнює кількості дослідів:

$$\sum_{i=1}^N x_{ji}^2 = N \quad (10.11)$$

Ця умова відноситься до всіх вектор-стовбців без виключення.

Ортогональність матриці планування. Сума добутків елементів одного рядка з будь-яких двох стовбців дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} x_{ui} = 0 \quad (10.12)$$

Для рівняння (10.12) $j \neq u$.

Ортогональність матриці планування дозволяє отримати незалежні один від одного оцінки коефіцієнтів регресії. Це означає, що величина будь якого коефіцієнту не залежить від значень, які приймають інші і це справедливо для всіх вектор-стовбців без виключення.

Ротатабельність. Точки матриці планування розташовані таким чином, що точність передбачення за рівнянням регресії однакова на рівних відстанях від центру планування та не залежить від напрямку. Іншими словами – дисперсія оцінки функції відгуку залежить тільки від відстані від центру плану. Доказ цього положення міститься в роботі [34].

10.6. Рандомізація

Термін «*рандомізація*» відноситься до порядку проведення експериментів, запланованих матрицею планування і походить від англійського слова *random*, що означає «випадковий». Як прийом проведення експерименту рандомізація направлена на виключення впливу систематичних похибок, що викликані зовнішніми умовами – зміна температури, вологості, сировини, лаборанта та ін. Наприклад, уявимо що експерименти, заплановані матрицею табл.10.4 проводяться два дні: в перший день експерименти з 1 по 4 та в другий - з 5 по 8. Ми не можемо бути впевненими, що ці два дні мають абсолютно однакові зовнішні умови. Отже, прийнявши умови першого дня за еталон - коли ми отримуємо дійсні значенні відгуку, результати отримані в другий день, будуть відрізнятися від дійсних на систематичну похибку ε . Але зауважте, що значення фактору x_3 в перший день були на нижньому рівні, а в другий – на верхньому, тоді при підрахунку коефіцієнту b_3 отримуємо:

$$\begin{aligned}
 b_3 &= \\
 &= \frac{1}{8}(-y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + (y_5 + \varepsilon) + (y_6 + \varepsilon) + (y_7 + \varepsilon) + \\
 &+ (y_8 + \varepsilon)) = \beta_3 + \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned}
 \tag{10.13}$$

У рівнянні (10.13) β_3 це дійсне значення коефіцієнту регресії b_3 . Таким чином імовірна відмінність зовнішніх умов змішалася зі значенням коефіцієнта регресії. У такій послідовності досліди проводити не можна. Їх треба випадковим чином розподілити у часі – рандомізувати.

Припустимо, що кожне значення відгуку отримується за результатами трьох паралельних дослідів. Позначимо досліди послідовно числами від 1 до 24. При цьому номери з 9 до 16 – повтори відповідно по відношенню до 1 – 8 дослідів; номери з 17 по 24 – ще одні (треті) повтори по відношенню до дослідів 1 – 8. Для рандомізації можемо скористуватися таблицею випадкових чисел або генератором випадкових чисел програми *Microsoft Excel*: $= \text{RANDBETWEEN}(\langle \text{Нижня межа} \rangle; \langle \text{Верхня межа} \rangle)$ де в якості оператора задаються границі чисел між якими треба сформувати випадкову послідовність. В даному випадку це буде 1 та 24. Приклад формування випадкової послідовності показано на Рис. 10.6. де фоном виділені числа з даного діапазону, що зустрічаються вперше по рядках – це і буде однією з можливих послідовностей дослідів. Зверніть увагу, що після вводу у будь-яку клітинку, послідовність буде генеруватися заново і відповідно змінюватися. В даному випадку послідовність має вигляд: 3, 4, 21, 8, 6, 23, 22, 16, 11, 14, 13, 17, 15, 2, 9, 18, 7, 19, 20, 5, 24, 1, 12, 10. Таким чином в перший день проведемо перші дванадцять дослідів в зазначеній послідовності, в другий відповідно другу дванадцятку.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	3	4	21	19	8	6	3	6
2	23	22	16	24	3	11	14	16
3	4	13	16	4	16	13	17	17
4	16	15	2	3	8	8	6	4
5	6	6	13	6	3	9	18	21
6	12	8	22	21	7	24	19	5
7	19	20	11	20	5	15	6	14
8	3	21	13	8	18	22	17	15
9	22	16	24	1	15	16	3	18
10	1	5	9	19	12	19	15	21
11	8	16	20	20	6	16	23	22
12	22	24	2	17	19	3	10	16
13	7	12	20	8	18	4	17	22

Рисунок 10.6 — Рандомізація – генерування випадкової послідовності проведення дослідів за допомогою програми *Microsoft Excel*.

10.7. Прийняття рішень після побудови моделі. Інтерпретація отриманих результатів

Отже модель у вигляді алгебраїчного поліному першого ступеню типу (10.6), або поліному з урахуванням ефектів взаємодії типу (10.8), (10.9) отримано. До цієї стадії ми використовували абстрактну математичну мову. *Переклад моделі на мову дослідника або експериментатора називається інтерпретацією моделі* [35]. Задача інтерпретації досить складна, бо вона майже не формалізується і як і підготовка до експерименту потребує знань, досвіду та інтуїції дослідника. Вирішується вона у декілька етапів.

З'ясовується в якій мірі, кожен з факторів впливає на відгук. Кількісною мірою впливу є значення коефіцієнту регресії – чим більше його значення при відповідному факторі тим більший вплив має сам фактор.

Перевірка адекватності та статистичної значущості факторів. Перевірці адекватності детально був присвячений розділ 9.3. Розрахунок при багатфакторному експерименті проводиться аналогічно, але при насиченому експерименті

дисперсія адекватності завжди буде дорівнювати 0 оскільки нулю будуть дорівнювати залишкові суми (RSS), тобто визначення адекватності в цьому випадку втрачає будь який сенс. Тому спочатку відкидаються статистично незначущі (ті, що не можна статистично достовірно відрізнити від нуля) елементи моделі – план стає ненасиченим, після чого провадиться перевірка адекватності.

Якщо говорити про статистичну значущість факторів, то мова йде про вплив факторів – або він дійсно є або знаходиться на рівні статистичної похибки (тобто фактично відсутній). Обидві характеристики повинні розглядатися у взаємозв'язку, бо за рахунок перш за все статистично незначущих факторів повинна виправлятися перевизначеність моделі, якщо вона є. І якщо методика перевірки адекватності була детально розглянута раніше, то на перевірці значущості факторів треба зупинитися. Перевірка значущості фактору проводиться через перевірку значущості відповідного коефіцієнта регресії. Для цього треба знати дисперсії коефіцієнтів регресії, які в загальному вигляді розраховуються:

$$S^2\{b_j\} = S_e^2 \cdot C_{jj} \quad (10.14)$$

Тут S_e^2 ні що інше як дисперсія відтворення, розглянута в п. 9.3, з урахуванням того, що кожен з N незалежних дослідів матриці планування повинен включати рівну кількість повторів n . В цьому випадку вона може бути розрахована також як середня з дисперсій S_i^2 , отриманих для кожної з N серій незалежних дослідів, які безумовно повинні бути однорідними:

$$S_e^2 = \frac{1}{f_e} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \quad (10.15)$$

$$f_e = N(n - 1)$$

або

$$S_e^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^2 \quad (10.16)$$

C_{jj} – j -й діагональний елемент матриці:

$$E = (X^T X)^{-1} \quad (10.17)$$

Де X – матриця перемінних. Для ПФЕ, наприклад 2^2 , матриця X має вигляд (див. табл. 10.2):

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Тоді, матриця E буде виглядати наступним чином:

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Взагалі, виходячи з властивостей матриці планування експерименту, усі діагональні коефіцієнти C_{jj} будуть однакові та дорівнювати:

$$C_{jj} = \frac{1}{N} \quad (10.18)$$

Таким чином однаковими будуть і всі дисперсії коефіцієнтів регресії [33]. Далі, розрахуємо довірчий інтервал коефіцієнтів регресії:

$$\Delta b_j = \pm t_\alpha \cdot S\{b_j\} = \pm t_\alpha \cdot \sqrt{\frac{S_e^2}{N}} \quad (10.19)$$

$$f_e = N(n - 1)$$

У рівнянні (10.19) t_α – критерій Стюдента для рівня значущості α та кількості ступенів свободи f_e .

Коефіцієнт регресії вважається статистично значущим, якщо його значення більше за похибку його ж визначення, або:

$$|b_j| > |\Delta b_j| \quad (10.20)$$

При дотриманні умови (10.20) відповідні фактори також будуть статистично значущими. Всі інші, що є незначущими, в тому числі і взаємодії факторів, мають бути видалені з рівняння регресії, як такі що впливають на відгук в межах статистичної похибки. Після видалення статистично незначущих елементів можна виконати і перевірку на адекватність.

Треба мати на увазі, що змінення інтервалів варіювання призводить до зміни коефіцієнтів регресії, а отже може впливати і на їх значущість. Таким чином, причиною незначущості факторів або їх взаємодій може бути неправильно призначеній інтервал варіювання. В цій ситуації можливо буде потреба в змінненні інтервалу та постановці нової серії дослідів, або в переносі центру плану в іншу точку факторного простору. Збільшення кількості паралельних дослідів може зменшити дисперсію, що буде мати вплив на значущість коефіцієнтів. Незмінними можуть залишатися тільки знаки коефіцієнтів, та й те, тільки в тому випадку, якщо при збільшенні інтервалу варіювання експериментальна точка не опиниться з протилежного боку від оптимуму функції. Тобто задача відсіювання незначущих факторів не є простою та однозначною. За великим рахунком, вона потребує висунення гіпотез та їх перевірки.

Аналіз характеру впливу факторів. Про характер впливу факторів свідчать знаки при відповідних коефіцієнтах регресії. Знак плюс говорить, що при збільшенні фактору буде

збільшуватися відгук, знак мінус – навпаки. При вирішенні оптимізаційних задач, інтерпретація цього положення буде залежати від того, чи ми шукаємо мінімум або максимум функції. Якщо $y \rightarrow \max$, то збільшення факторів, коефіцієнти при яких позитивні, сприятливо впливаю на відгук, а негативні – не сприятливо. При $y \rightarrow \min$ все відбувається навпаки. Не забуваємо, що фактори в описаних вище рівняннях регресії знаходяться в кодованому вигляді, який отримується з рівняння (10.4). Іноді виникає потреба виразити рівняння регресії через дійсні значення факторів, тоді за тим-же рівнянням (10.4) треба зробити зворотній перерахунок кодованих значень в дійсні. Але треба пам'ятати, що це змінить коефіцієнти регресії та позбавить нас можливості інтерпретувати вплив факторів, виходячи зі значень та знаків відповідних коефіцієнтів!

Повернення до апріорних відомостей. Джерелом апріорної інформації може бути теорія процесу, досвід роботи з аналогічними процесами або результати попередніх досліджень в тому числі описаних в літературі та наукових публікаціях. Якщо з апріорної інформації відомо, наприклад, що зі збільшенням якогось фактору відгук також збільшується, а отриманий нами коефіцієнт регресії є негативним, то тут виникає протиріччя, що потребує з'ясування. Можливі наступні причини такого протиріччя: помилка експерименту або хибні апріорні уявлення. Треба мати на увазі, з якого джерела отримані апріорні відомості – якщо з однофакторного експерименту, то він може не враховувати взаємодію факторів. Крім того, експеримент проводиться для локальної зони факторного простору, а зі зміною її розташування може змінюватися і характер впливу фактору. Тому перш за все треба впевнитися, що експеримент проведено без помилок. На цьому ж етапі шляхом висування та перевірки гіпотез можна спробувати з'ясувати і фізичний механізм впливу факторів, хоч це і не є обов'язковим.

10.8. Дробовий факторний експеримент. Дрובה репліка

Наявність «зайвих» ступенів свободи у ненасиченому плані ми використали для введення в модель – поліном першого ступеню - додаткових нелінійних елементів, що відображають взаємодію факторів. Але цей резерв можна використати і по іншому. Взаємодія факторів може бути статистично незначущою, тобто відсутньою. Крім того, на перших етапах досліджень, коли факторів може бути досить багато - треба отримати тільки принципове уявлення про поведінку системи та відібрати найбільш значущі. В цих випадках більш важливим завданням є скорочення кількості дослідів ніж урахування можливих взаємодій, яке стрімко зростає зі збільшенням кількості факторів у разі реалізації ПФЕ.

Звернемось до матриці планування експерименту 2^3 (Табл. 10.4) яка дозволяє визначити 8 коефіцієнтів регресії включаючи 4 тих, що характеризують взаємодії різних порядків. Але якщо є підстави вважати взаємодії відсутніми, то достатньо визначити тільки чотири коефіцієнти. Тоді в нас залишається ще 4 ступені свободи, що можна використати для зменшення кількості дослідів. Вектор-стовбці взаємодій можна використати для визначення коефіцієнтів нових факторів. Для самої моделі (10.9) в цьому випадку можна використати матрицю планування 2^2 , прирівнявши ефект взаємодії x_1x_2 до нового фактору x_3 . При цьому матриця планування не втрачає своїх властивостей. Позначатися такий план буде як 2^{3-1} та називатися *дробовою реплікою* ПФЕ 2^3 або *полу-реплікою* – бо складатиме половину ПФЕ 2^3 . Взагалі дробовість репліки визначається як $1/2^p$. Сам експеримент буде носити назву *дробового факторного експерименту*, загальне позначення якого 2^{k-p} де p – кількість ефектів взаємодії до яких прирівняли лінійні коефіцієнти і є *показником дробовості*.

Таким чином, щоб скоротити кількість дослідів, треба новому фактору поставити у відповідність вектор-стовбець матриці, що відповідає взаємодії якою можна знехтувати. Матриця планування експерименту 2^{3-1} буде мати вигляд що показано в Табл. 10.5:

Табл. 10.5 — Полу-репліка дробового факторного експерименту 2^{3-1}

N	x_0	Умови експерименту		$x_3 = x_1x_2$	Результати експерименту
		x_1	x_2		y
1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	y_1
2	+ 1	- 1	+ 1	- 1	y_2
3	+ 1	+ 1	- 1	- 1	y_3
4	+ 1	- 1	- 1	+ 1	y_4

Вираз $x_3 = x_1x_2$ має назву *генеруюче співвідношення*. Крім цього є ще один варіант такого співвідношення: $x_3 = -x_1x_2$ який створює другу полу-репліку ПФЕ 2^3 (другу половину Табл. 10.4 – досліди 5 – 8). Обидві полу-репліки є рівнозначними.

За скорочення кількості експериментів чимось треба платити. Для дробового факторного експерименту це змішування оцінок. Як зазначалося вище, оцінки ПФЕ є незалежними, тоді як для дробового факторного експерименту 2^{3-1} з Табл.10.5 неможна відрізнити чи то вплив фактору x_3 чи то ефект взаємодії факторів x_1 та x_2 . Але взагалі то це не є проблемою, якщо ми впевнені, що взаємодія статистично незначуща. Можуть бути і інші змішування, якщо вектор-стовбці факторів та/або ефектів взаємодії є однаковими.

Символічне позначення добутку стовбців, що дорівнює +1 або -1 називається *визначаючим контрастом*. Для нашого прикладу він буде мати вигляд: $+1 = x_1x_2x_3$ або $-1 = x_1x_2x_3$ для другої полу-репліки. Контраст допомагає визначити змішані ефекти. Для цього обидві частини визначаючого контрасту треба помножити на відповідну змінну. Наприклад:

$$x_1 = x_1x_1x_2x_3 = x_1^2x_2x_3 = x_2x_3$$

Таким чином фактор x_1 змішано з ефектом факторів x_2 та x_3 . Аналогічно x_2 з x_1x_3 , а x_3 з x_1x_2 . Кількість та характер таких змішувань носить назву *розрізняюча здатність репліки*.

При дослідженні впливу п'яти факторів можна поставити не $2^5 = 32$ досліди, а тільки 8, тобто скористатися чверть-реплікою 2^{5-2} . При цьому є 12 варіантів планування пов'язаних з присвоєнням новим факторам різних ефектів взаємодії. Наприклад, ось один з них: $x_4 = x_1x_3$ та $x_5 = x_1x_2x_3$. Для повної характеристики розрізняючої здатності репліки треба записати *узагальнюючий визначаючий контраст*. Для цього використовуються самі контрасти: $+1 = x_1x_3x_4$ та $+1 = x_1x_2x_3x_5$ та їх добуток:

$$1 = x_1x_3x_4 = x_1x_2x_3x_5 = x_2x_4x_5 \quad (10.21)$$

Помножуючи кожен частину рівняння (10.21) на відповідний фактор отримаємо характер змішування ефектів. Наприклад отримана оцінка коефіцієнта при факторі x_1 буде відображати:

$$x_1 = x_3x_4 = x_2x_3x_5 = x_1x_2x_4x_5 \quad (10.22)$$

як вплив самого фактору так і досить складні взаємодії що відображені в рівнянні (10.22). Ось з цієї причини для використання дробового факторного експерименту треба мати підстави для виключення з розгляду ефектів взаємодії, до яких дослідники досить часто мають особливий інтерес і які у ряді випадків дозволяють розкрити сутність явища

Не дивлячись на зазначені обмеження, дробовий факторний експеримент є ефективним інструментом при проведенні досліджень. Є приклад використання 1/2048 репліки від повного факторного експерименту 2^{15} , що за умови проведення ПФЕ потребувало би 32768 дослідів [4], а з зазначеною дробовою реплікою - тільки 16. Але його використання потребує досить обережного підходу.

11. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ СТІЙКОСТІ КІНЦЕВИХ ФРЕЗ ВІД ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ (ПРИКЛАД)

За даними [4], розглянемо приклад дослідження впливу геометричних параметрів на стійкість кінцевих фрез діаметром 22 мм, виготовлених зі сталі P18. За апріорною інформацією суттєвий вплив на стійкість мають: задній кут α ; передній кут γ ; ширина стрічки f_c . Тому доцільним є побудова ПФЕ 2³. За тією ж інформацією були вибрані значення основних рівнів та інтервалів варіювання, що наведено в Табл. 11.1

Таблиця 11.1 — Рівні факторів та інтервали варіювання

Рівні факторів	Позначення	α	γ	f_c
		X_1	X_2	X_3
Основний	0	14	15	0,05
Інтервал варіювання	I_j	4	6	0,03
Верхній	+ 1	18	21	0,08
Нижній	- 1	10	9	0,02

Модель будемо будувати у вигляді рівняння (10.9) з проведенням серій з трьох паралельних дослідів, послідовність яких визначається за результатами рандомізації (Див. Рис. 10.6). Матриця планування, та результати експерименту наведені в Табл. 11.2.

Оскільки експеримент складається з $N = 8$ серій по $n = 3$ паралельних дослідів, то для перевірки однорідність дисперсій S_i^2 можна скористатися критерієм Кокрена (див. п.4). Для $q = 0.95, N = 8, f = 3 - 1 = 2$ – критичне значення критерію $G_{0.95,8,2} = 0.515$, а його розрахункове значення складає

Таблиця 11.2 — Матриця планування ПФЕ 2³ та його результати

N та повторні досліді	x ₀	Умови експерименту			x ₁ /x ₂	x ₁ /x ₃	x ₂ x ₃	x ₁ /x ₂ x ₃	Результати експерименту за паралельними дослідями			\bar{y}	S _f ² {y}	\hat{y}	
		x ₁	x ₂	x ₃					y ₁	y ₂	y ₃				
1	9	17	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	48,85	58,5	50,5	52,62	26,64	47,70
2	10	18	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	48,30	32,00	29,25	36,52	106,03	36,52
3	11	19	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	43,85	47,45	40,90	44,07	10,76	47,70
4	12	20	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	41,00	34,85	34,85	36,90	12,61	36,52
5	13	21	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	30,75	29,5	38,15	32,80	21,86	32,40
6	14	22	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	17,32	30,85	28,70	25,62	52,86	21,22
7	15	23	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	31,52	24,35	36,30	30,72	36,18	32,40
8	16	24	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	26,70	15,38	12,25	18,11	57,79	21,22

$$G = \frac{\max \{S_i^2\}}{\sum(S_i^2)} = \frac{106.03}{324.72} = 0.327$$

Оскільки $0,327 < 0,515$ то дисперсії можна вважати однорідними.

За рівнянням (10.16) дисперсія відтворення $S_e^2 = 40,59$

За рівнянням (10.7) визначимо коефіцієнти регресії:

$$b_0 = 34,46; b_1 = 5,59; b_2 = 2,01; \\ b_3 = -7,65; b_{12} = 0,65; b_{13} = -0,64; b_{23} = 0,39; b_{123} = -2,0.$$

Отже рівняння регресії для факторів в кодованій формі буде мати вигляд:

$$y = \\ = 34,46 + 5,59x_1 + 2,01x_2 - 7,65x_3 + 0,65x_1x_2 - 0,64x_1x_3 + \\ + 0,39x_2x_3 - 2x_1x_2x_3$$

Коефіцієнт Стьюдента для $\alpha = 0,05$ та ступенів свободи $f_e = 8 \cdot (3 - 1) = 16$ складає $t_{0,05} = 2,11$. Звідси довірчий інтервал коефіцієнтів регресії за рівнянням (10.19):

$$\Delta b = \pm 2,11 \cdot \sqrt{40,59/8} = \pm 4,75.$$

Таким чином, статистично значущим є вплив тільки факторів x_1 (α) та x_3 (f_c). З урахуванням цього факту, рівняння регресії прийме вигляд:

$$y = 34,46 + 5,59x_1 - 7,65x_3$$

Визначимо адекватність цього рівняння, у якому кількість коефіцієнтів регресії (без вільного члена): $l = 2$. Розрахункові значення функції відгуку наведені в табл. 11.2 та позначені \hat{y} . Дисперсія адекватності за рівняннями (9.12) – (9.14), з кількістю ступенів свободи $f_a = 8 - 2 - 1 = 5$ становить: $S_a^2 = 72,34$.

Критичне значення критерію Фішера відповідно до п.4 та рівняння (9.15) для $q = 0,95$, ступенів свободи чисельника (S_a^2) – $f_a = 5$, та знаменника (S_e^2) – $f_e = 16$ становить: $F_{0,95} = 2,85$. Розрахункове значення критерію Фішера за рівнянням (9.15):

$$F = 72,34/34,27 = 2,11 < 2,85$$

Отже модель адекватна і не перевизначена.

Висновок: виходячи з отриманого рівняння, найбільший вплив на стійкість має ширина стрічки – з її зростанням стійкість падає. Дещо менший вплив має задній кут – з його зростанням зростає стійкість. Передній кут (на відміну від апріорної інформації) та взаємодії факторів не мають статистично значущого впливу на стійкість.

12. ПЛАНИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

12.1. Загальні положення

Потрапивши в майже стаціонарну зону в ході вирішення оптимізаційної задачі, поліном першого ступеню вже не дає поліпшення результату. Тепер треба або зупинитися і вважати отриманні результати найліпшими або спробувати описати відгук більш складною моделлю – поліномом другого ступеню, який на відміну від поліному першого ступеню має екстремум. Цей підхід має сенс, якщо на основі апріорної інформації, включаючи теоретичні уявлення про процес, є підстави вважати наявність такого екстремуму у функції відгуку.

Спрощено цю ситуацію можна проілюструвати, як показано на Рис. 12.1. На рисунку зображено перетин поверхні відгуку в напрямку градієнту. Дійсно, градієнт у вигляді поліному першого ступеню вірно вказує напрямок до оптимального рішення, зображеного точкою M . Але рухаючись в цьому напрямку ми потрапляємо в т. P та очікуємо відповідний результат. Тоді як насправді отримуємо результат що відповідає точці Q і який є гіршим (або не кращим) за результат в початковій точці C . Тобто, для пошуку оптимального рішення в межах нижнього та верхнього рівнів факторів (зображених відповідно точками L та U) поліному першого ступеню вже не досить і треба мати більш точний опис поверхні відгуку з відображенням наявного екстремуму. І цей опис може дати вже поліном другого ступеню, який з урахуванням можливих взаємодій факторів для двох факторів має вигляд (12.1):

$$y = \beta_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{12}x_1x_2 \quad (12.1)$$

А в загальному вигляді для k факторів:

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^k b_jx_j + \sum_{j=1}^k b_{jj}x_j^2 + \sum_{j < u}^k b_{ju}x_jx_u \quad (12.2)$$

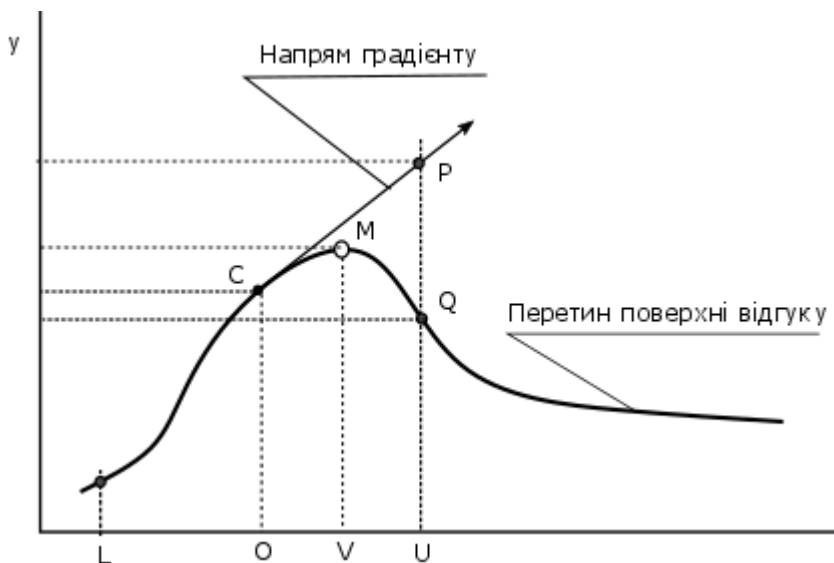


Рисунок 12.1 — Пошук оптимуму в напрямку градієнту

Для отримання моделі (12.2) змінні повинні варіюватися не менше ніж на 3 рівнях, а кількість серій незалежних дослідів без урахування повторів N повинно відповідати вимозі [4]:

$$N \geq \frac{(k + 2)(k + 1)}{2} \quad (12.3)$$

Але не все так просто. Якщо матриця ПФЕ, виходячи із властивостей викладених в п.10.5 є і ортогональною і ротатабельною, то план другого порядку не може мати цих властивостей одночасно – або одне, або інше. Що і розглянемо в наступному розділі.

Дослідження визначеної моделі на екстремум є предметом математичного аналізу та аналітичної геометрії, може виконуватися також чисельними методами і в цьому посібнику не розглядається.

12.2. Ортогональні центральні композиційні плани

Ортогональність – та сама дуже важлива властивість що забезпечує незалежність оцінок коефіцієнтів регресії, не може виконуватися для моделі (12.2) за визначенням, бо значення факторів в вектор-стовбцях матриці планування, що відповідає x_i^2 , при будь яких значеннях x_i ніколи не будуть від'ємними ($x_i^2 \geq 0$), тому ці вектор-стовбці ніколи не будуть ортогональними до стовбця x_0 та один до одного, а отже і оцінки b_{ii} будуть змішані з b_0 та один з одним.

Вирішується ця проблема використанням *ортогональних центральних композиційних планів* (ОЦКП) другого порядку – які з великої кількості можливих є одними з простіших [36], [37]. Тобто такі плани будуть ортогональними, а отже всі оцінки не будуть змішані. Центральні вони тому, що в план експерименту входять досліді на основному рівні, а композиційні бо в план входить матриця ПФЕ або його дробова репліка (при $k > 5$) що складає *ядро плану*, та декілька додаткових точок – ті з них які не є центром зветься *зіркові*. Але такий план не буде ротатабельним і нам нічого не залишається як сприйняти це. Отже для k факторів план буде складатися з наступних елементів:

1. Ядро 2^k або 2^{k-p}
2. Центр з координатами $(0,0,0, \dots, 0)$
3. Зіркові точки з координатами $(+d, 0, 0, \dots, 0)$; $(-d, 0, 0, \dots, 0)$; $(0, +d, 0, \dots, 0)$; $(0, -d, 0, \dots, 0)$ і т.д. Тут d – так зване плече (кодоване значення), причому $d \geq 1$.

Загальна кількість незалежних дослідів без урахування повторів при цьому буде визначатися:

$$N = 2^k + 1 + 2k \quad (12.4)$$

або

$$N = 2^{k-p} + 1 + 2k \quad (12.5)$$

Наприклад, для двох факторів маємо план показаний в табл. 12.1, де $N = 2^2 + 1 + 2 \cdot 2 = 9$. Неважко побачити, що рівняння (12.5) є

загальним по відношенню до (12.4) , приймаючи, що для ПФЕ $p = 0$. Графічно, наведений ОЦКП буде виглядати як на Рис.12.2.

Таблиця 12.1 — Ортогональний центральний композиційний план $2^2 + 1 + 2 \cdot 2$

N	Елементи плану	x_1	x_2	y
1	Ядро	+ 1	+ 1	y_1
2		- 1	+ 1	y_2
3		+ 1	- 1	y_3
4		- 1	- 1	y_4
5	Центр	0	0	y_5
6	Зіркові точки	+ d	0	y_6
7		- d	0	y_7
8		0	+ d	y_8
9		0	- d	y_9

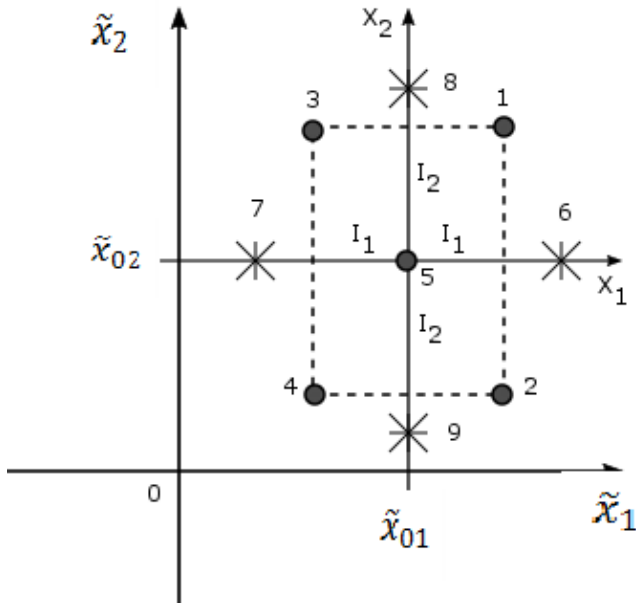


Рисунок 12.2 — Графічне зображення ОЦКП $2^2 + 1 + 2 \cdot 2$

Для забезпечення ортогональності плану треба провести перетворення рівняння (12.2) с заміною змінних. Введемо до рівняння (12.2) новий елемент $\lambda \sum_{j=1}^k b_{jj}$ двічі: один раз зі знаком « + », а другий - зі знаком « - » що не змінить його значення:

$$\begin{aligned}
 y &= \\
 &= \beta_0 + \lambda \sum_{j=1}^k b_{jj} - \lambda \sum_{j=1}^k b_{jj} + \sum_{j=1}^k b_j x_j + \sum_{j=1}^k b_{jj} x_j^2 + \\
 &+ \sum_{j < u}^k b_{ju} x_j x_u
 \end{aligned} \tag{12.6}$$

або

$$y = \left(\beta_0 + \lambda \sum_{j=1}^k b_{jj} \right) + \sum_{j=1}^k b_j x_j + \sum_{j=1}^k b_{jj} (x_j^2 - \lambda) + \sum_{j < u}^k b_{ju} x_j x_u$$

Позначимо $b_0 = (\beta_0 + \lambda \sum_{j=1}^k b_{jj})$ та $x'_j = x_j^2 - \lambda$, тоді рівняння (12.2) прийме вигляд з новою змінною:

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x_j + \sum_{j=1}^k b_{jj} x'_j + \sum_{j < u}^k b_{ju} x_j x_u \tag{12.7}$$

А матриця планування експерименту з таблиці 12.1 з урахуванням вектор-стовбців для розрахунку прийме вигляд показаний в таблиці 12.2:

Таким чином маємо дві невідомі – λ та d для знаходження яких треба скласти систему двох рівнянь. Одне з них складемо з умови ортогональності вектор-стовбців x_0 та $x'_{(j)}$ і оскільки всі значення x_0 дорівнюють +1 бачимо, що план експерименту буде ще й симетричним. Інше рівняння отримаємо з умови ортогональності стовбців $x'_{(j)}$ та $x'_{(u)}$ коли $j \neq u$:

Таблиця 12.2 — Ортогональний центральний композиційний план $2^2 + 1 + 2 \cdot 2$ в загальному вигляді з вектор-стовбцями для розрахунків

N	x_0	x_1	x_2	$x'_1 = x_1^2 - \lambda$	$x'_2 = x_2^2 - \lambda$	$x_1 x_2$	y
1	+ 1	+ 1	+ 1	$1-\lambda$	$1-\lambda$	+ 1	y_1
2	+ 1	- 1	+ 1	$1-\lambda$	$1-\lambda$	- 1	y_2
3	+ 1	+ 1	- 1	$1-\lambda$	$1-\lambda$	- 1	y_3
4	+ 1	- 1	- 1	$1-\lambda$	$1-\lambda$	+ 1	y_4
5	+ 1	0	0	$-\lambda$	$-\lambda$	0	y_5
6	+ 1	+ d	0	$d^2-\lambda$	$-\lambda$	0	y_6
7	+ 1	- d	0	$d^2-\lambda$	$-\lambda$	0	y_7
8	+ 1	0	+ d	$-\lambda$	$d^2-\lambda$	0	y_8
9	+ 1	0	- d	$-\lambda$	$d^2-\lambda$	0	y_9

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N x'_{(j)i} = 2^{k-p}(1-\lambda) + 2(d^2-\lambda) - \lambda(2k-1) = 0 & (12.8) \\ \sum_{i=1}^N x'_{(j)i} x'_{(u)i} = 2^{k-p}(1-\lambda)^2 - 4\lambda(d^2-\lambda) + \lambda^2(2k-3) = 0 \end{cases}$$

Вирішуючи систему (12.8) отримаємо формули для розрахунку d та λ :

$$d = \sqrt{\frac{1}{2}[\sqrt{N \cdot 2^{k-p}} - 2^{k-p}]}$$

$$\lambda = \frac{2^{k-p} + 2d^2}{N} \quad (12.9)$$

Деякі значення λ та d в залежності від кількості факторів та ядра експерименту наведені в Табл. 12.3

Коефіцієнти регресії перетвореного рівняння (12.7) визначаються наступним чином [36]:

$$b_j = \frac{1}{C_j} \sum_{i=1}^N (x_{ji} y_i) \quad (12.10)$$

Де C_j - сума квадратів елементів кожного вектор-стовбця:

$$C_j = \sum_{i=1}^N x_{ji}^2 \quad (12.11)$$

Виходячи з Табл. 12.3 план наведений в Табл.12.2 у загальному вигляді буде представлено як показано в Табл.12.4 в нижньому рядку якої наведена сума квадратів елементів кожного вектор-стовбця – C_j .

Таблиця 12.3 — Характеристики деяких ОЦКП

Кількість факторів k	p	Ядро плану	Кількість дослідів N	Плече експ. d	λ	$1-\lambda$	$d^2 - \lambda$
2	0	2^2	9	1	0,667	0,333	0,333
3	0	2^3	15	1,215	0,730	0,270	0,746
4	0	2^4	25	1,414	0,800	0,200	1,199
5	0	2^5	43	1,596	0,863	0,137	1,684
5	1	2^{5-1}	27	1,547	0,770	0,230	1,623
6	0	2^6	77	1,761	0,912	0,088	2,189
6	1	2^{6-1}	45	1,724	0,843	0,157	2,129
6	2	2^{6-2}	29	1,664	0,743	0,257	2,026
7	0	2^7	143	1,909	0,946	0,054	2,698
7	1	2^{7-1}	79	1,885	0,900	0,100	2,653
7	2	2^{7-2}	47	1,841	0,825	0,175	2,564
7	3	2^{7-3}	31	1,771	0,718	0,282	2,418

Таблиця 12.4 — Ортогональний центральний композиційний план

$$2^2 + 1 + 2 \cdot 2$$

N	Елементи плану	x_0	x_1	x_2	$x'_1 = x_1^2 - \lambda$	$x'_2 = x_2^2 - \lambda$	$x_1 x_2$	y
1	Ядро	+ 1	+ 1	+ 1	0,333	0,333	+ 1	y_1
2		+ 1	- 1	+ 1	0,333	0,333	- 1	y_2
3		+ 1	+ 1	- 1	0,333	0,333	- 1	y_3
4		+ 1	- 1	- 1	0,333	0,333	+ 1	y_4
5	Центр	+ 1	0	0	-0,667	-0,667	0	y_5
6	Зоряні точки	+ 1	+ 1	0	0,333	-0,667	0	y_6
7		+ 1	- 1	0	0,333	-0,667	0	y_7
8		+ 1	0	+ 1	-0,667	0,333	0	y_8
9		+ 1	0	- 1	-0,667	0,333	0	y_9
$C_j = \sum_{i=1}^N x_{ji}^2$		9	6	6	2	2	4	

Перевірка статистичної значущості визначених коефіцієнтів виконується за тим-же принципом, що вказано в п.10.7 для повного факторного експерименту з тією різницею, що діагональними елементами матриці E (див. рівняння (10.12)) будуть значення, зворотні до C_j , які визначаються за рівнянням (12.11). Наприклад, для матриці планування з Табл.12.4 матриця E за рівнянням (10.7) буде мати вигляд:

$$E = \begin{pmatrix} \mathbf{1/9} & 0 & 0 & 0,000167 & 0,000167 & 0 \\ 0 & \mathbf{1/6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1/6} & 0 & 0 & 0 \\ 0,000167 & 0 & 0 & \mathbf{1/2} & 6,7 \cdot 10^{-18} & 0 \\ 0,000167 & 0 & 0 & 6,7 \cdot 10^{-18} & \mathbf{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1/4} \end{pmatrix}$$

Отже дисперсії коефіцієнтів регресії, на відміну від повного факторного експерименту або його дробових реплік, будуть різними для різних коефіцієнтів:

$$S^2\{b_j\} = \frac{1}{C_j} S_e^2 \quad (12.12)$$

Довірчий інтервал коефіцієнтів регресії буде визначатися:

$$\Delta b_j = \pm t_\alpha \cdot S\{b_j\} = \pm t_\alpha \cdot \sqrt{\frac{S_e^2}{C_j}} \quad (12.13)$$

Легко побачити, що рівняння (12.10) та (12.12) є загальним виглядом рівняння (10.7) та (10.19) відповідно.

У рівнянні (12.13) t_α – критерій Стьюдента для рівня значущості α та кількості ступенів свободи $f_e = N(n - 1)$ з урахуванням кількості повторів n в кожному з N незалежних дослідів матриці планування.

Знайшовши коефіцієнти рівняння (12.7), які окрім вільного члена, будуть ті самі що і для вихідного рівняння (12.2), можна знайти і сам вільний член вихідного рівняння:

$$\beta_0 = b_0 - \lambda \sum_{j=1}^k b_{jj} \quad (12.14)$$

13. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ СТІЙКОСТІ ЦЕНТРУВАЛЬНИХ СВЕРДЕЛ ЗА ДОПОМОГОЮ ОРТОГОНАЛЬНИХ ЦЕНТРАЛЬНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ ПЛАНІВ (ПРИКЛАД)

Базуючись на даних наведених в роботі [4] розглянемо приклад дослідження показника стійкості центрувальних свердел діаметром 4 мм за допомогою ортогонального центрального композиційного плану. За показник стійкості було прийнято кількість просвердлених отворів. В якості факторів прийнято: кут в плані 2ϕ , задній кут α , товщина серцевини l . З аналізу апріорної інформації прийняті значення рівнів факторів та інтервалів варіювання – див. Табл. 13.1 З апріорної інформації є підстави вважати що функція відгуку має екстремум у вказаній області.

Таблиця 13.1 — Рівні факторів для центрувальних свердел

Рівні та інтервал варіювання	Фактори		
	2ϕ	α	l
	x_1	x_2	x_3
+ 1	151.5	36	1.4
0	147.5	32	1.2
- 1	143.5	28	1
I	4	4	0.2

В якості моделі прийнято поліном другого ступеню з ефектами взаємодії:

$$y = \beta_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 \quad (13.1)$$

Досліди повторювалися по 3 рази – $n = 3$. Таким чином з Табл. 12.3:

- кількість факторів $k = 3$;
- В якості ядра прийнято повний факторний експеримент 2^3 ;
- Кількість незалежних дослідів $N = 15$;
- Допоміжний параметр $\lambda = 0,73$
- Плече зіркових точок $d = 1,215$;
- Для матриці планування : $d^2 - \lambda = 0,746$, $1 - \lambda = 0,27$

Дійсні значення факторів що відповідають величині плеча зоряних точок розраховуються з рівняння (10.4):

$$\tilde{x}_j = \tilde{x}_0 + dI_j \quad (13.2)$$

та наведені в Табл. 13.2

Таблиця 13.2 — Дійсні значення факторів що відповідають плечу зоряних точок.

Фактор		2φ	α	l
Основний рівень		147,5	32	1,2
Інтервал варіювання		4	4	0,2
Плече зоряних точок	+ 1,215	154,4	27,1	1,44
	- 1,215	142,6	36,9	0,96

Матриця планування зі стовбцями для розрахунку наведена в Табл. 13.3. В якості відгуку y наведено середнє арифметичне з трьох паралельних дослідів. Дисперсії дослідів виявилися однорідні і дисперсія відтворення дорівнює: $S_e^2 = 25170$ [4].

Розрахувавши за рівняннями (12.10), (12.11) отримуємо значення коефіцієнтів (див. Табл.13.4).

За рівнянням (12.14) визначаємо:

Таблиця 13.3 — Матриця планування експерименту

N	x_0	x_1	x_2	x_3	$x'_1 = x_2^1 - \lambda$	$x'_2 = x_2^2 - \lambda$	$x'_3 = x_2^3 - \lambda$	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	y
1	+1	-1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	+1	+1	+1	1030
2	+1	+1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	+1	535
3	+1	-1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	+1	-1	942
4	+1	+1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	+1	-1	-1	521
5	+1	-1	-1	+1	0,27	0,27	0,27	+1	-1	-1	1421
6	+1	+1	-1	+1	0,27	0,27	0,27	-1	+1	-1	968
7	+1	-1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	+1	1412
8	+1	+1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	+1	+1	+1	919
9	+1	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	0	0	0	1694
10	+1	-1,215	0	0	0,746	-0,73	-0,73	0	0	0	1415
11	+1	+1,215	0	0	0,746	-0,73	-0,73	0	0	0	880
12	+1	0	-1,215	0	-0,73	0,746	-0,73	0	0	0	1145
13	+1	0	+1,215	0	-0,73	0,746	-0,73	0	0	0	855
14	+1	0	0	-1,215	-0,73	-0,73	0,746	0	0	0	1420
15	+1	0	0	+1,215	-0,73	-0,73	0,746	0	0	0	1626
C_j	15	10,95	10,95	10,95	4,36	4,36	4,36	8	8	8	8

Таблиця 13.4 — Коефіцієнти регресії, їх дисперсії та довірчі інтервали

Коефіцієнт регресії b_j	b_0	b_1	b_2	b_3	b_{11}	b_{22}	b_{33}	b_{12}	b_{13}	b_{23}
Значення коефіцієнту b_j	1192,00	-238,21	-55,64	168,48	-249,80	-349,65	4,40	16,38	8,38	17,63
Дисперсія	1678	2298	2298	2298	5771	5771	5771	3146	3146	3146
Довірчий інтервал	$\pm 83,65$	$\pm 97,9$	$\pm 97,9$	$\pm 97,9$	$\pm 155,15$	$\pm 155,15$	$\pm 155,15$	$\pm 114,55$	$\pm 114,55$	$\pm 114,55$

$$\beta_0 = 1192,00 - 0,73(-249,80 - 349,65 + 4,40) = 1559,72$$

Коефіцієнт Стьюдента для $\alpha = 0,05$ та кількості ступенів свободи $f_e = 15 \cdot (3 - 1) = 30$: $t_{0,05} = 2,04$.

За рівняннями (12.12) та (12.13), використовуючи C_j з Табл.13.3, визначаємо дисперсію та довірчий інтервал коефіцієнтів регресії. Наприклад:

$$S^2\{b_1\} = S^2\{b_2\} = S^2\{b_3\} = 25170/10,95 = 2298$$

$$\Delta b_1 = \Delta b_2 = \Delta b_3 = \pm 2,04\sqrt{2298} = \pm 97,90$$

Для інших коефіцієнтів довірчі інтервали розраховуються аналогічно, та наведені в Табл.13.4.

Виходячи з умови (10.20) статистично незначущими є коефіцієнти регресії та відповідні фактори: $b_2, b_{33}, b_{12}, b_{13}, b_{23}$. Виходячи з зазначеного, рівняння (13.1) прийме вигляд:

$$\begin{aligned} y &= \\ &= 1559,72 - 238,21x_1 + 168,48x_3 - 249,80x_1^2 - \\ &- 349,65x_2^2 \end{aligned} \quad (13.3)$$

Результати розрахунку за отриманим рівнянням наведені в Табл. 13.3 - \hat{y} . Дисперсія адекватності за рівняннями (9.12) – (9.14), з кількістю ступенів свободи $f_a = 15 - 4 - 1 = 10$ становить: $S_a^2 = 36633$.

Критичне значення критерію Фішера відповідно до п.4 та рівняння (9.15) для $q = 0,95$, ступенів свободи чисельника – 10, та знаменника – 30 складає: $F_{0,95} = 2,16$. Розрахункове значення критерію Фішера:

$$F = 36633/25170 = 1,46 < 2.16$$

Отже модель адекватна і не перевизначена. Взаємодії між факторами не спостерігається.

Отримане рівняння (13.3) не є складним, і для визначення її максимуму можна знайти окремі похідні по змінним. Слід зазначити, що x_3 впливає тільки через лінійну складову і тому стійкість зростає з її збільшенням. Тому в якості оптимального значення приймемо x_3 максимальним в межах границь плану – $x_3 = + 1,215$, бо складно передбачити як буде поводити себе поверхня відгуку при виході за межі експериментальної області. Для x_1 та x_2 отримуємо:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x_1} = -238.21 - 2 \cdot 249.80x_1 = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} = -2 \cdot 349.65x_2 = 0 \end{cases}$$

Таким чином оптимальними умовами, що забезпечують максимальну стійкість, виходячи з отриманих результатів, можна вважати:

$$x_1 = -0.48 \text{ або } 2\varphi = 145,6^\circ$$

$$x_2 = 0 \text{ або } \alpha = 32^\circ$$

$$x_3 = +1,215 \text{ або } l = 1.44$$

Стійкість при цьому буде складати $y = 1821$. Розрахунками можна показати, що при всіх інших значеннях змінних в межах області експерименту значення стійкості будуть менше.

14. АПРІОРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ: ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ТА МЕТОД ЕКСПЕРТНИХ ОЦІНОК

14.1. Загальні положення

У попередніх розділах ми розглядали побудову математичної моделі так чи інакше за результатами вимірювання. Будь яка інформація про об'єкт дослідження отримана в явному вигляді на основі експериментальних даних та представлена у вигляді чисел, графіків, формул є моделлю реальності що досліджується, тобто апроксимуюча її форма. Повнота, достовірність та корисність цієї інформації визначається як процедурою обробки експериментальних даних так і апіорними відомостями про об'єкт дослідження. Однак інформація не завжди поступає у формі придатній для безпосередньої математичної обробки. Вона може надходити у неявному вигляді у формі оцінок та суджень спеціалістів або експертів. Це може відбуватися як через якісний характер самої інформації так і через недостатність інформації про об'єкт в силу його невивченості - немає його кількісного опису не вивчені його зв'язки та фактори, що впливають на його функціонування. В той же час, оскільки об'єкт знаходиться в стадії вивчення в динаміці, накопичується досвід та якісна інформація про нього яка в статистичному плані правильно відображає його сутність. Спеціалісти можуть володіти значним досвідом прийняття рішень стосовно аналогічних об'єктів але він виявляється децентралізованим, розміщеним, так би мовити, по окремих ділянках пам'яті системи, що досліджується або проектується [38]. Цей досвід потребує концентрації та приданню йому кількісної форми з метою достовірного прогнозування та оцінки технічних об'єктів. Дослідження та впорядкування якісної інформації, що базується на досвіді, інтуїції та знаннях спеціалістів стосовно об'єкту що досліджується і є предметом апіорного моделювання або експертних оцінок.

Апіорне моделювання реалізується у декілька етапів:

- ✓ Формулювання цілі дослідження;
- ✓ Вибір експертів;

- ✓ Вибір методу опитування;
- ✓ Розробка опитувального листа (анкети);
- ✓ Обробка результатів опитування.

Існують два основних методи опитування: заочне та очне. Серед позитивів заочного опитування є: відсутність особового контакту з експертом що виключає вплив дослідника на результати опитування; низька вартість. Але при цьому існує дуже висока імовірність отримання великої кількості незаповнених або частково заповнених анкет. Очне опитування дає кращі результати але потребує більших витрат часу та коштів; дослідних попри своє бажання може вплинути на результати відповідей. Тому при очному опитуванні потрібно мати детальний план бесіди і суворо дотримуватися визначених задалегідь формулювань у запитаннях.

Достовірність оцінок групи експертів залежить від рівня знань та кількості членів. Зі збільшенням кількості членів достовірність експертизи усієї групи зростає. Характеристики групи експертів визначаються на основі індивідуальних характеристик експертів: Зазначені характеристики в основному оцінюються якісно, але для деяких є спроби ввести кількісні показники (не є предметом цієї роботи). Коротко про зазначені характеристики:

Компетентність – ступінь кваліфікації експерта.

Креативність – здатність вирішувати творчі завдання.

Конформізм – схильність до впливу авторитетів.

Відношення до експертизи – негативне чи пасивне відношення до проблеми, велика зайнятість та ін.. фактори значно впливають на здатність експерта виконувати свої функції.

Конструктивність мислення – експерт повинен видавати рішення що володіє якістю практичності.

Колективізм – повинен враховуватись при проведенні відкритих дискусій.

Самокритичність – виявляється при самооцінці ступеню своєї компетенції та при відношенні до інших експертів.

14.2. Метод експертних оцінок

Розглянемо методи отримання якісних експертних оцінок.

Парні порівняння. При цьому експерту послідовно надаються пари факторів в залежності від мети експертизи. Для кожної пари пропонується вказати який з факторів кращий.

Множинні порівняння. Являють собою розвиток та узагальнення методу парних порівнянь, коли експертам послідовно пропонуються трійки, четвірки і т.д. факторів. Експерт упорядковує фактори по важливості, розбиває їх на класи в залежності від мети експертизи. В цьому методі може бути використаний більший об'єм інформації ніж при парних порівняннях.

Безпосереднє ранжування. Достатньо розповсюджена процедура отримання експертної інформації і саме цей метод розглянемо більш детально в цьому розділі.

Думки, що отримуються від експерта часто виражаються у порядковій шкалі. Тобто експерт може сказати (та обґрунтувати): що визначений тип продукції буде більш привабливим для споживача, ніж інші; що один показник якості продукції важливіший ніж інший; перший технологічний об'єкт безпечніший ніж другий та ін. Але він не в змозі сказати, в скільки разів більш важливий або більш небезпечний. Тому експертів часто просять дати ранжирування (упорядкування) об'єктів експертизи, тобто розташувати їх у порядку зростання / зменшення (чи, точніше, не зменшення / не зростання) інтенсивності або вагомості характеристики, що цікавить організаторів опитування. Ранжирування визначаються та вивчаються за допомогою рангів. Ранг це номер об'єкта експертизи в упорядкованому ряду інших. Ранги визначаються числами – 1, 2, 3 і т.д. Ця процедура легко впроваджується коли кількість факторів складає 10 ... 12 [38] в іншому випадку використовуються різні прийоми, що полегшують процедуру оцінювання. Наприклад: експерту пред'являється частина факторів і пропонується впорядкувати їх; після цього додається новий фактор і пропонується виявити його місце у впорядкованій

послідовності; процес завершується коли весь список факторів буде вичерпано.

Гіпервпорядкування. Містить більшу інформацію про вподобання експерту. В цьому випадку експерту пропонується розглянути різницю оцінок факторів та їх ранжування. Таким чином при гіпервпорядкуванні експерт оголошує інформацію не тільки про ранжування факторів але й додаткову інформацію про співвідношення їх кількісних оцінок. Спосіб ранжування різниць подібний способу ранжування самих факторів.

Якщо n факторів / функцій / об'єктів, що мають властивість X розташовані в порядку убунання (зростання) цієї властивості, тоді: X_i^j – місце або ранг i -го елемента серед $(n-1)$ елементів в цієї послідовності що визначений j – м експертом – назвемо його *вихідний ранг*. При цьому, кількість експертів – m .

Далі наведемо послідовність обробки результатів опитування методом середніх рангів [38], [39] одночасно з прикладом його застосування.

1. Визначити суму рангів та при необхідності модифікувати їх.

Якщо j -м експертом всім n елементам присвоєні різні ранги, то сума рангів буде дорівнювати:

$$K = \sum_{i=1}^n X_i^j = \frac{n(n+1)}{2} \quad (14.1)$$

Якщо експерт декільком елементам присвоїть однакові ранги – такі ранги називаються *зв'язаними*, та їх суму неможливо буде обчислити за рівнянням (14.1), подальшу ж обробку результатів можна виконувати тільки за цієї умови. Тому ранги треба модифікувати. Якщо позначити:

r – Ранг, що визначив експерт;

q_r – кількість однакових рангів r ;

тоді модифікований ранг $\tilde{X}_i^j(r)$ визначається наступним чином:

$$Q_r = \sum_{k=1}^r q_k$$

$$\tilde{X}_i^j(r) = \frac{Q_r(Q_r + 1) - Q_{r-1}(Q_{r-1} + 1)}{2q_r} \quad (14.2)$$

$$Q_0 = q_0 = 0$$

Якщо експерт усім елементам виставить різні ранги, то модифікований ранг буде дорівнювати вихідному

Приклад

Дванадцять факторів від “А” до “L” ($n=12$) які також мають числові індекси відповідно від 1 до 12, експерти розташували в порядку зменшення значущості (ранг 1 має найбільш значущий фактор). Результати опитування експерта №1 наведені в таблиці 14.1

Таблиця 14.1 — Приклад експертної оцінки

Фактор	A (1)	B (2)	C (3)	D (4)	E (5)	F (6)	G (7)	H (8)	I (9)	J(10)	K (11)	L (12)
Ранг X_i^j	2	4	1	6	3	1	3	3	6	5	6	6

Сума рангів за рівнянням (14.1) повинна дорівнювати $K = 78$, але оскільки декілька елементів мають однакові (зв’язані) ранги, то ранги потребують модифікації (Див. Табл. 14.2). В таблицю послідовно виписуємо всі ранги які виставив експерт – згідно з Табл. 14.1 експерт виставив ранги від 1 до 6. Таким чином в Табл.14.2, наприклад маємо:

$$Q_1 = q_1 = 2$$

$$Q_2 = q_1 + q_2 = 2 + 1 = 3$$

$$Q_3 = q_1 + q_2 + q_3 = 2 + 1 + 3 = 6$$

і. т.д.

Таблиця 14.2 – Модифікація рангів експерта №1

Вихідний ранг r	Кількість однакових рангів q_r	Q_r	$\bar{X}_i^j(r)$
1	2	2	1.5
2	1	3	3
3	3	6	5
4	1	7	7
5	1	8	8
6	4	12	10.5

Для фактора «А» (числовий індекс 1), що має вихідний ранг 2, модифікований ранг визначається:

$$\bar{X}_1^1(2) = \frac{3(3 + 1) - 2(2 + 1)}{2 \cdot 1} = 3$$

Для фактора «В» (числовий індекс 2), що має вихідний ранг 4, модифікований ранг визначається:

$$\bar{X}_2^1(4) = \frac{7(7 + 1) - 6(6 + 1)}{2 \cdot 1} = 7$$

Для факторів «С», «F» (числові індекси 3, 6), що мають вихідний ранг 1, модифікований ранг визначається:

$$\bar{X}_3^1(4) = \bar{X}_6^1(4) = \frac{2(2 + 1) - 0(0 + 1)}{2 \cdot 2} = 1,5$$

і т.д., результати розрахунку наведені в Табл. 14.2 де модифіковані ранги співставленні з вихідними.

Зазначений розрахунок модифікованих рангів може бути виконаний в програмі *Microsoft Excel* за допомогою вбудованої функції:

= **RANK.AVG**(⟨Число – поточний вихідний ранг⟩; ⟨Посилання – Діапазон вихідних рангів⟩; ⟨Порядок – 0 або 1⟩)

2. Звести модифіковані ранги усіх експертів в єдину таблицю – матрицю рангів (Приклад див. Табл. 14.3¹). Та підрахувати сумарний ранг по кожному фактору - R_{si}

$$R_{si} = \sum_{j=1}^m \tilde{X}_i^j \quad (14.3)$$

3. Розрахувати середній сумарний ранг \bar{R}

$$\bar{R} = \frac{1}{2} m(n + 1) \quad (14.4)$$

Приклад.

Кількість експертів $m = 8$, отже

$$\bar{R} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (12 + 1) = 52$$

4. Розрахувати суму квадратів різниць між сумарним рангом, та середнім:

$$S = \sum_{i=1}^n (R_{si} - \bar{R})^2 \quad (14.5)$$

¹ Ранги визначені за таблицею 14.2 віднесені до експерта 1.

Приклад

$$\begin{aligned} S &= \\ &= (13 - 52)^2 + (37,5 - 52)^2 + (21 - 52)^2 + (69,5 - 52)^2 + \\ &+ (40 - 52)^2 + (15 - 52)^2 + (44 - 52)^2 + (55,5 - 52)^2 + \\ &+ (71,5 - 52)^2 + (79,5 - 52)^2 + (88 - 52)^2 + (89,5 - 52)^2 = \\ &= 8426,5 \end{aligned}$$

5. Розрахувати показники зв'язаних рангів.

Для кожного рядка (експерта), визначити кількість зв'язаних рангів у кожній групі рівних рангів - t_{jk} , та розрахувати показники зв'язаних рангів T_j , та їх суму U :

$$T_j = \sum_{k=1}^{H_j} (t_{jk}^3 - t_{jk}) \quad (14.6)$$

$$U = \sum_{j=1}^m T_j$$

У формулах (14.6): H_j - кількість груп зв'язаних рангів у рядку, що відповідає експерту j .

Якщо зв'язаних рангів в рядку j немає - $T_j = 0$

Результати розрахунку наведені у табл. 14.4

Приклад

У експерта №1 зв'язаних рангів 3 ($H_1=3$), а саме: 1,5 – 2 шт.; 5 – 3 шт; 10,5 – 4 шт.

Тоді, для рядка 1 (Експерт №1):

$$T_1 = [(2^3 - 2) + (3^3 - 3) + (4^3 - 4)] = 90 \text{ і т.д.}$$

Таблиця 14.3 – Матриця модифікованих рангів

Експерт	Фактори											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	3	7	1,5	10,5	5	1,5	5	5	10,5	8	10,5	10,5
2	1,5	5	1,5	10	5	3	5	7	10	8	10	12
3	1	4	3	8	5	2	6	7	9	10	12	11
4	1	5,5	2,5	8,5	5,5	2,5	4	7	8,5	11	11	11
5	2,5	4	2,5	8	5,5	1	5,5	8	8	10,5	12	10,5
6	1	3	4	8	5	2	6	7	9	12	10	11
7	1,5	4,5	3	8	4,5	1,5	6	8	8	10	11	12
8	1,5	4,5	3	8,5	4,5	1,5	6,5	6,5	8,5	10	11,5	11,5
R _{si}	13,0	37,5	21,0	69,5	40,0	15,0	44,0	55,5	71,5	79,5	88,0	89,5

Таблиця 14.4 — Розрахунок показника зв'язаних рангів T_j

Експерт j	Зв'язані ранги	H_j	t_{jk}	T_j
1	1.5	3	2	90
	5		3	
	10.5		4	
2	1.5	3	2	54
	3		3	
	10		3	
3	-	0	0	0
4	2.5	3	2	36
	5.5		2	
	11		3	
5	2.5	4	2	42
	5.5		2	
	8		3	
	10.5		2	
6	-	0	0	0
7	1.5	3	2	36
	4.5		2	
	8		3	
8	1.5	5	2	30
	4.5		2	
	6.5		2	
	8.5		2	
	11.5		2	
$U = \sum_{j=1}^8 T_j$				288

6. Розрахувати коефіцієнт конкордації (Кендала) W .
Коефіцієнт характеризує узгодженість думок експертів.

$$W = \frac{12 \cdot S}{m^2(n^3 - n) - m \cdot U} \quad (14.7)$$

Коефіцієнт конкордації може приймати значення від 0 до 1. $W = 1$ якщо всі експерти дадуть однакові оцінки і $W \rightarrow 0$ якщо думки експертів зовсім не узгоджені.

Сенс коефіцієнта конкордації подібний до коефіцієнта кореляції. І для оцінки ступеня узгодженості думок експертів можна скористатися співвідношеннями Чеддока, наведеними в таблиці 8.1 інтерпретуючи «силу зв'язку» як ступінь узгодженості.

Якщо узгодженість відсутня або слаба ($W < 0.3$) – висновків з результатів опитування робити не можна. Однією з причин цього може бути невірний вибір експертів.

Якщо ж $W > 0.3$, то остаточні висновки про результати опитування можна робити тільки після визначення статистичної значущості отриманих результатів.

Приклад.

Для наведених вище даних

$$W = \frac{12 \cdot 8426,5}{8^2(12^3 - 12) - 8 \cdot 288} = 0,94$$

Згідно з Табл. 8.1 - ступінь узгодженості дуже суттєва.

7. Розрахувати статистичну значущість отриманих результатів.

Розрахунок статистичної значущості здійснюється з метою перевірки рівності нулю (в статистичному сенсі) отриманого значення коефіцієнта конкордації. Тобто, чи можна отриманий коефіцієнт приймати до уваги.

При кількості елементів $n > 7$ статистична значущість визначається за критерієм згоди Пірсона χ^2 .

Якщо зв'язані ранги відсутні, χ^2 визначається за рівнянням (6.8)

$$\chi^2 = W \cdot m \cdot (n - 1) \quad (14.8)$$

При наявності зв'язаних рангів – за рівнянням (14.9)

$$\chi^2 = \frac{12 \cdot S}{m \cdot n \cdot (n + 1) - \frac{U}{n - 1}} \quad (14.9)$$

Отримане значення треба порівняти з критичним χ^2_q , що визначається для довірчої імовірності q та кількості ступенів свободи v :

$$v = n - 1 \quad (14.10)$$

Якщо виконується умова $\chi^2 > \chi^2_q$ то гіпотеза про статистичну значущість отриманого результату не відхиляється.

Якщо ж $\chi^2 \leq \chi^2_q$ – то отримані результати статистично не значущі. Це може свідчити про недостатню кількість експертів, або про недостатній (низький) рівень отриманого коефіцієнту конкордації W для наявної кількості експертів. У цьому разі не можна робити достовірних висновків з отриманих результатів і робота потребує перегляду.

Приклад.

Оскільки в нашому випадку наявні зв'язані ранги, то критерій χ^2 визначається за рівнянням (14.9):

$$\chi^2 = \frac{12 \cdot 8426,5}{8 \cdot 12 \cdot (12 + 1) - \frac{288}{12 - 1}} = 82.76$$

Для $v = 12 - 1 = 11$ та довірчої імовірності $q = 0,99$ визначаємо $\chi^2_{0,99} = 24,72$

Оскільки $82.76 > 24.72$ – отримані данні є статистично значущими.

8. Зробити висновки про рівень важливості факторів на основі сумарних рангів, зазначених в Табл. 14.3. Виходячи з наведених даних – статистично достовірно з високим ступенем узгодженості можна зробити висновок, що найбільш значущим фактором є фактор «А» (ранг 13), за ним йде «F» (ранг 15) і т.д. Результати ранжування факторів у вигляді гістограми наведені на Рисунку 14.1.

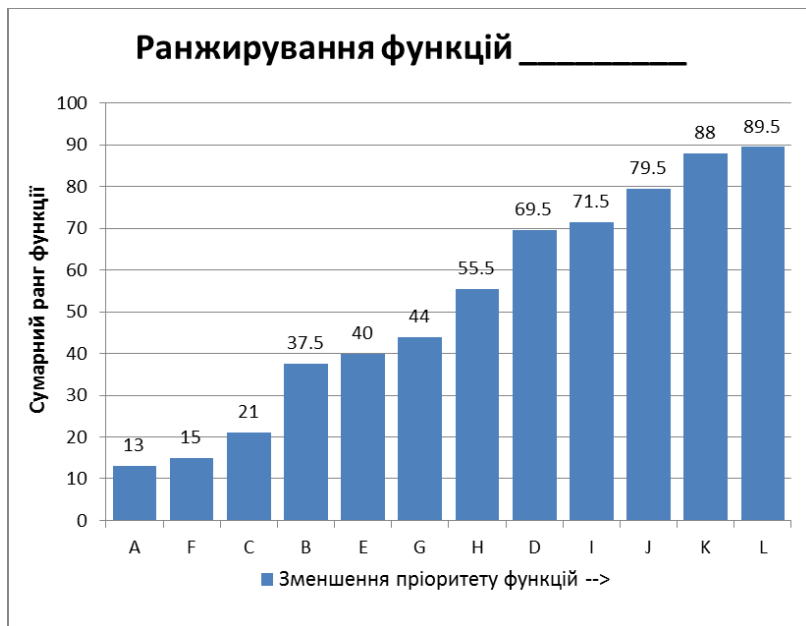


Рисунок 14.1. — Результати ранжування факторів (або функцій) методом експертних оцінок.

14.3. Визначення вагових коефіцієнтів

Ще одним показником пріоритету є вагові або масштабні коефіцієнти a_i які в багатьох випадках слугують для формалізації прийняття рішень, формування цільової функції в багатокритеріальній оптимізації (наприклад функції якості), створення комплексного критерію оптимальності та ін. В функції якості вони демонструють ступінь (вагу) впливу одного показника, серед інших, на вибір споживача. Побіжно інформація про вагові коефіцієнти була надана в розділі 2.2.

Вагові коефіцієнти повинні відповідати вимогам:

$$\begin{cases} a_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n a_i = 1 \end{cases} \quad (14.11)$$

14.3.1. Метод Уея

Одним з найпростіших методів визначення вагових коефіцієнтів за результатами опитування є метод Уея з використанням матриці Бержа – заснований на парних порівняннях.

Матриця парних порівнянь Бержа виглядає наступним чином:

$$A = \|\lambda_{ij}^+\| \quad (14.12)$$

Де λ_{ij}^+ приймає значення:

- $\lambda_{ij}^+ = 0$ якщо показник i менш важливий ніж показник j ;
- $\lambda_{ij}^+ = 1$ якщо показники i та j рівнозначні;
- $\lambda_{ij}^+ = 2$ якщо показник i більш важливий ніж показник j

Ваговий коефіцієнт показника i буде визначатися за формулою:

$$a_i = \frac{\sum_{j=1}^N \lambda_{ij}^+}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}^+} \quad (14.13)$$

Або а процентах:

$$A_i = a_i \cdot 100\% \quad (14.14)$$

Приклад.

Визначимо вагові коефіцієнти для результатів отриманих в розділі 14.2, для чого складемо матрицю парних порівнянь – див. Табл. 14.5

Таблиця 14.5 – Матриця парних порівнянь

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	Σ
A	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	23
B	0	1	0	2	2	0	2	2	2	2	2	2	17
C	0	2	1	2	2	0	2	2	2	2	2	2	19
D	0	0	0	1	0	0	0	0	2	2	2	2	9
E	0	0	0	2	1	0	2	2	2	2	2	2	15
F	0	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	21
G	0	0	0	2	0	0	1	2	2	2	2	2	13
H	0	0	0	2	0	0	0	1	2	2	2	2	11
I	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	7
J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	5
K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
ΣΣ												144	

За формулами (14.3) та (14.4) наприклад для функції А маємо:

$$a_A = \frac{\sum_{j=1}^N \lambda_{ij}^+}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}^+} \cdot 100\% = \frac{23}{144} \cdot 100\% = 16\%$$

Підсумковий результат у вигляді кругової діаграми наведено на Рис. 14.2

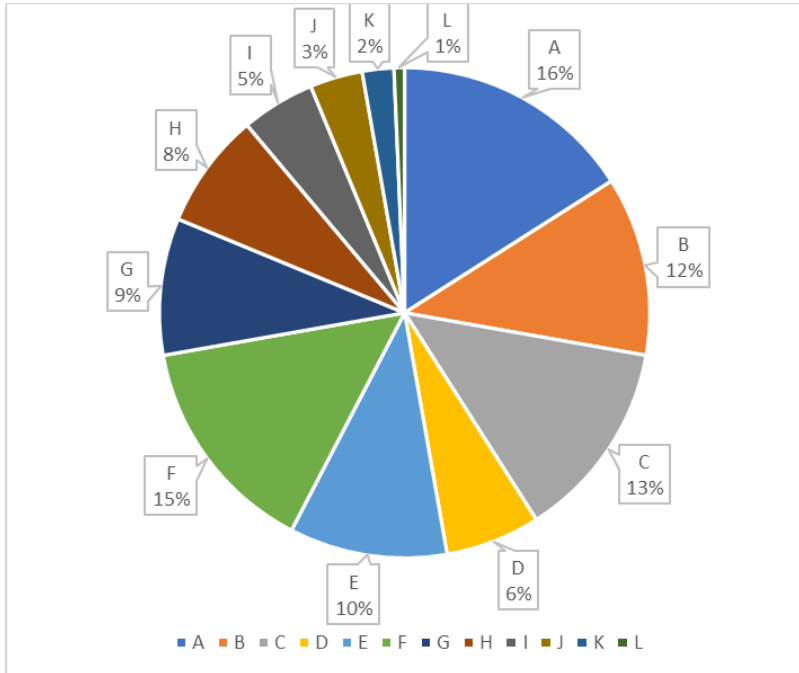


Рисунок 14.2 – Вагові коефіцієнти, отримані за методом парних порівнянь

14.3.2. Метод середніх рангів

Розглянутий вище метод враховує що деякі показники більш важливі ніж інші, але не враховує на скільки. Цього недоліку позбавлений метод середніх рангів. За цим методом вагові коефіцієнти визначаються за формулою:

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^m R_{ij}^1}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}^1} \quad (14.15)$$

Тут R_{ij}^1 – Перетворений ранг критерію i у експерта j

Перетворення полягає в тому, що значення 0 отримує критерій з низьким рангом, 1 – наступний за ним і т.д.

Приклад.

Ранги перетворені для визначення вагових коефіцієнтів, отримані на основі Табл. 14.3, наведені в Табл. 6.4.

Таблиця 14.6 – Перетворені ранги

Експ.	Функції											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	4	2	5	0	3	5	3	3	0	1	0	0
2	7	4	6	1	4	5	4	3	1	2	1	0
3	11	8	9	4	7	10	6	5	3	2	0	1
4	6	3	5	1	3	5	4	2	1	0	0	0
5	6	5	6	3	4	7	4	2	2	1	0	1
6	11	9	8	4	7	10	6	5	3	0	2	1
7	8	5	6	3	5	7	4	3	3	2	1	0
8	7	4	5	2	4	6	3	3	2	1	0	0
$\sum_{j=1}^m R_{ij}^1$	60	40	50	18	37	55	34	26	15	9	4	3

Загальна сума перетворених рангів:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}^1 = 351$$

Використовуючи формулу (14.15) визначаємо вагові коефіцієнти (Див. Табл. 14.7):

Таблиця 14.7 – Вагові коефіцієнти за методом середніх рангів

	A	B	C	D	E	F	J	H	I	J	K	L
a_i	0,17	0,11	0,14	0,05	0,11	0,16	0,10	0,07	0,04	0,03	0,01	0,01

Наглядно результат може бути продемонстрований круговою діаграмою (Рис. 14.3)

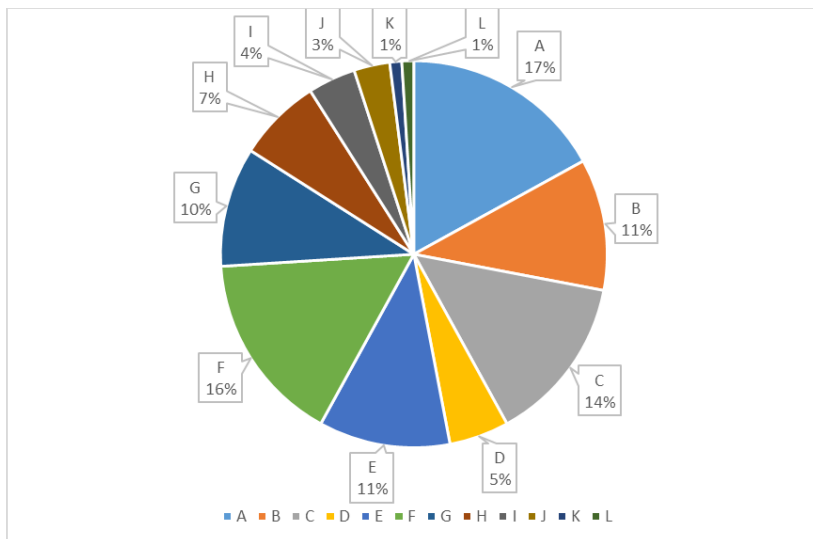


Рисунок 14.3. – Вагові коефіцієнти, отримані за методом середніх рангів.

Як бачимо, наведені результати не сильно відрізняються від отриманих методом парних порівнянь. Вони демонструють, що найбільший ваговий вплив на вибір споживача (0,17 або 17%) має функція «А», далі – «F» (16%) і т.д. Найменшу вагу мають функції «К» та «L» - 1%.

15. ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ ЗА КОНЦЕПЦІЄЮ ТАГУЧІ В ЗАБЕЗПЕЧЕННІ ЯКОСТІ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ

15.1. Основні принципи

Побіжно розглянемо ще один підхід до планування експерименту, який останнім часом набуває неабиякої популярності.

Мова йде про концепцію планування експерименту доктора **Генічі Тагучі** з метою забезпечення якості продукції. При цьому ми залишимо поза увагою подробиці визначення якості продукції та послуг у відповідності зі стандартами ISO серії 9000, що не є метою цього видання. Концепція була висунута д-ром Тагучі в той час коли він працював в Лабораторії Електричного Зв'язку (ECL), заснованій в Японії після другої світової війни. Займаючись оптимізацією планування експериментів він запропонував плани при яких **кількість дослідів значно скорочується** по відношенню до традиційних планів особливо при великій кількості факторів. Порівняння кількості необхідних дослідів при проведенні повного факторного експерименту і за концепцією Тагучі наведено в Табл. 15.1.

Таблиця 15.1 - Порівняння кількості необхідних дослідів для повного факторного експерименту та за планами Тагучі

Факторів	Рівнів	Кількість дослідів	
		Повний факторний експеримент	План Тагучі
2	2	4	4
3	2	8	4
4	2	16	8
7	2	128	8
15	2	32768	16
4	3	81	9

Методика Тагучі почала широко застосовуватися в Сполучених Штатах на початку 80-х років ХХ сторіччя та принесла суттєві зміни в інженерію якості та забезпечила вражаючі результати, що дало декому привід вважати запропонований підхід найбільш значущим вкладом в статистичні методи управління якістю за декілька останніх десятиріч [40].

Принципово підхід до планування експерименту (Design of experiment - DOE) практично не відрізняється від багатофакторних експериментів, розглянутих вище – послідовність дослідів є набір різних комбінацій рівнів факторів. Планування здійснюється на основі планів у вигляді стандартизованих ортогональних масивів (Orthogonal Arrays - OA). Результатом застосування методики є пошук оптимального співвідношення факторів, що забезпечує **мінімальне або максимальне значення відгуку або результуючого показника**. Але є деякі відмінності:

- Кількість рівнів факторів може бути будь-яким;
- Кількість рівнів для різних факторів може бути різним;

• Фактори поділяються на ті якими можна керувати або *зовнішній масив* і ті якими керувати не можна – *внутрішній масив*. **Фактори, внутрішнього масиву мають назву шумових**. Наявність шумів призводить до відхилення роботи системи від ідеальної. В свою чергу фактори внутрішнього масиву можна поділити на ті що піддаються контролю та вимірюванню і випадкові варіації. Існує три категорії факторів шуму:

- а) Зовнішня середа (вологість, температура та ін.);
- б) Старіння та зміна властивостей об'єкта в часі;
- в) Виробничі варіації.

• Деякі фактори з внутрішнього масиву - ті, значення яких піддаються контролю та вимірюванню можуть вводитися до плану експерименту. Кількість рівнів для таких факторів як правило дорівнює 2 (наприклад вище чи нижче деякого порогового значення);

- В результаті експерименту модель об'єкту або процесу **не будується**, а тільки визначається оптимальне поєднання значень факторів. Оптимальним поєднанням вважається таке, що забезпечує мінімальне або максимальне значення результуючого показника. Виходячи з цього, збільшення кількості рівнів підвищує точність визначення оптимального рішення, але збільшує необхідну кількість дослідів.

- Оптимальне поєднання значень факторів, визначене в ході експерименту та шляхом нескладного розрахунку, **як правило не співпадає з тими, що використовувалися для проведення дослідів**. Це цілком зрозуміло, бо плани Тагучі є лише маленьким фрагментом повного факторного експерименту. Такий результат є передбаченим, а не таким що був отриманий в ході експерименту. Якщо так, обов'язковим елементом концепції Тагучі є **необхідність проведення перевірного дослідів** на визначеній оптимальній комбінації рівнів факторів.

Різниця у використанні підходу Тагучі до управління якістю та до оптимізації будь-яких фізичних показників буде полягати тільки в тому, **що використовується в якості результуючого показника**. Якщо мова йде про оптимізацію як таку, то результуючим показником буде будь-який фізичний показник процесу або виробу, наприклад величина зносу ріжучого інструменту або його стійкість, сила різання та ін. Такий відгук може як мінімізуватись так і максимізуватись.

В основі використання концепції Тагучі для оцінки якості знаходиться функція втрат (loss function) на один виріб, один з варіантів якої виглядає наступним чином:

$$Loss = k[S^2 + (\bar{y} - y_0)^2] \quad (15.1)$$

Де $k = const$; S^2 – дисперсія фактора що контролюється (результуючого показника); \bar{y} – середнє значення фактора, що контролюється; y_0 – цільове або номінальне значення фактору що контролюється.

Виходячи з рівняння (15.1) бачимо, що втрати пропорційні квадрату відхилення середнього значення результуючого

показника від номінального, а також його дисперсії (варіації), що можна наочно побачити на Рис.15.1.

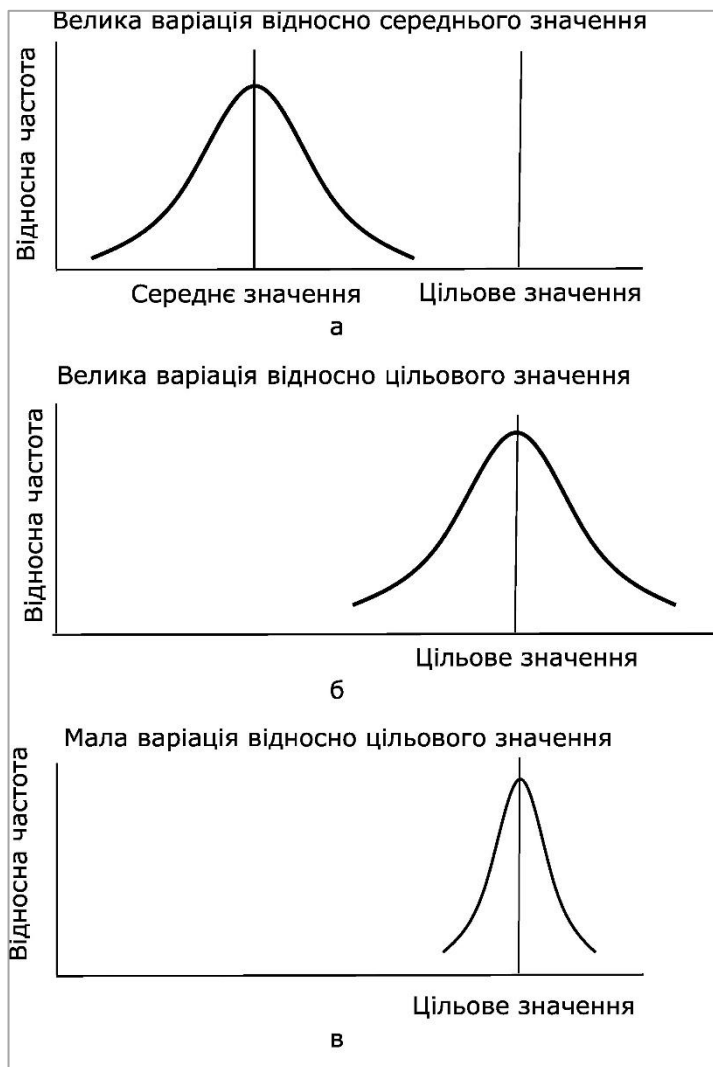


Рисунок 15.1 – Типові розподіли при контролі якості
а – Середнє значення не співпадає з цільовим; б, в – Середнє значення співпадає з цільовим

Порівняння підходу Тагучі з традиційним за оцінкою втрат можна побачити на Рис.15.2. За традиційним підходом втрати відсутні допоки розмір або будь яка інша технічна характеристика знаходиться в допустимих межах і як тільки виходить за них – втрати стають 100%. За підходом Тагучі, втрати плавно збільшуються при відхиленні від номіналу - від 0 до 100% що досягається на межах допуску. Таким чином, **критерієм підвищення якості за Тагучі є зменшення розсіювання (варіації) параметрів виробу відносно номіналу.**

Виходячи з цього, розподіл відхилень в межах допуску, зображені на Рис.15.3, не є рівнозначними [40].

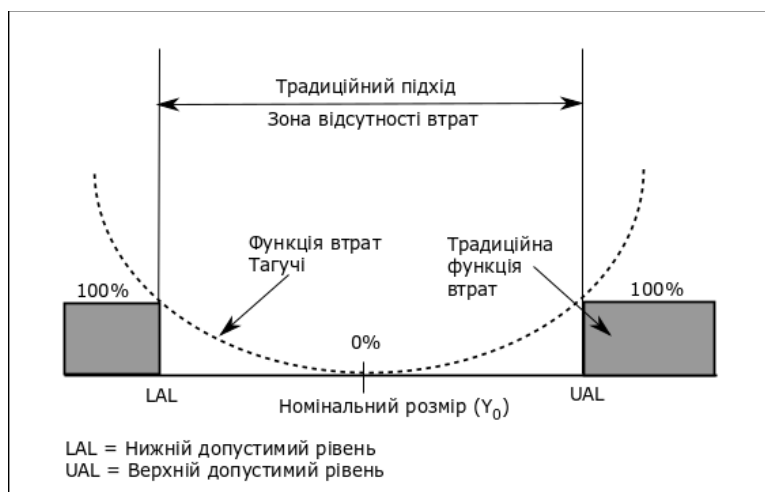
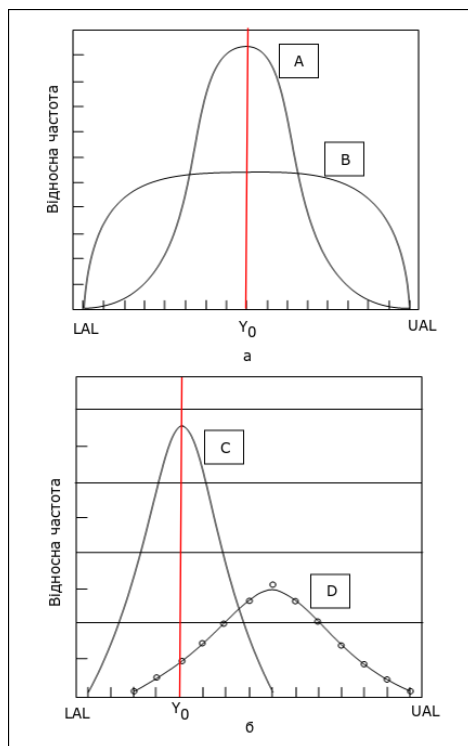


Рисунок 15.2 - Порівняння традиційного підходу та підходу Тагучі до втрат

З точки зору традиційного підходу всі представлені розподіли свідчать про відсутність дефектів у виробів, тому що всі параметри знаходяться в межах допуску. Але з точки зору концепції Тагучі, виріб «В» явно має більшу дисперсію по відношенню до виробу «А» (Рис.15.3а). Чому це важливо можна продемонструвати на наступному прикладі: подібно до «А» спостерігався розподіл насиченості кольорів телевізійних приймачів, що вироблялися

компанією Sony в Японії, а подібно до «В» - таких саме приймачів, що вироблялися тією-ж компанією в США. І ті і інші приймачі вироблялися для американського ринку. Вочевидь, що споживачі віддавали перевагу виробам японського виробництва [40]. На Рис. 15.3б можна побачити не тільки збільшення дисперсії виробу «D» по відношенню до «С», а й зміщення його центру розподілу відносно номіналу. Якщо такі розподіли будуть відноситися до посадкових розмірів підшипників, то як показує досвід [40] підшипник «D» буде мати меншу зносостійкість.



а – Різні форми розподілу, центри розподілу співпадають з номіналом; б – Однакові форми розподілу з різною варіацією; центр розподілу D не співпадає з номіналом

Рисунок 15.3 – Варіанти розподілу відносно номіналу.

Тобто стосовно функції втрат можна підсумувати:

- Функція втрати якості є безперервною функцією і є мірою відхилення від цільового значення. Відповідність обмеженням LAL і UAL є неадекватною оцінкою якості.
- Втрата якості пов'язана з експлуатаційними характеристиками виробу, і її найкраще можна мінімізувати шляхом впровадження якості в продукт в процесі проектування та виробництва. Запобігання зниженню якості обходиться дешевше, ніж переробка, і приносить набагато кращу віддачу.
- Результатом втрати якості є невдоволення споживачів і вона повинна вимірюватися стосовно готового виробу, а не в окремих точці виробничого процесу.
- Втрата якості є фінансовою та соціальною втратою.
- Мінімізація втрати якості — єдиний спосіб бути конкурентоспроможним і вижити в сучасному конкурентному бізнес-середовищі.

Окремо треба дещо сказати про фактори внутрішнього масиву, зокрема про ті з них які піддаються контролю та вимірюванню, наприклад температура зовнішнього середовища. Яке є цільове значення кількості спроб завести автомобіль на морозі, повертаючи ключ запалення? (Температурою зовнішнього середовища звісно ми керувати не можемо). Вочевидь – один, але так буває не завжди. Щоб так було, система має бути стійкою до зовнішнього впливу - це носить назву «робастність» (*стійкість*) системи. Досягається вона перш за все впровадженням відповідних **конструктивних** та **технологічних** рішень в сам виріб. Згідно з концепцією Тагучі, для оцінки робастності системи **шумові фактори**, включаючи ті що виникають на стороні споживача при експлуатації виробу, та різні їх комбінації, **мають бути присутні в плані експерименту**. Виходячи з цього планування за Тагучі називають ще *робастним плануванням*.

Філософія Тагучі має далекосяжні наслідки, але вона базується на трьох дуже простих і фундаментальних концепціях. Вся технологія та техніка повністю впливають із цих трьох ідей:

1. Якість має бути закладена (розроблена, реалізована) в продукті, а не перевірятися в ньому.

2. Якість найкраще досягається мінімізацією відхилення від цілі. Продукт має бути розроблений таким чином, щоб він був несприйнятливим до неконтрольованих факторів навколишнього середовища.

3. Вартість якості повинна вимірюватися як функція відхилення від стандарту, а втрати повинні вимірюватися в масштабах всієї системи.

15.2. Результуючі показники

Як було сказано вище, при оптимізації будь якого фізичного процесу, наприклад процесу різання, в якості результуючого показника використовуються самі фізичні характеристики процесу які мінімізуються або максимізуються. Коли ж оптимізуються показники якості з метою зменшення їх варіацій, в якості результуючого показника використовується співвідношення сигнал/шум – SN . Показник SN має **максимізуватися** та розраховуватися в залежності від того, чого треба досягти в результаті оптимізації за результатами n паралельних дослідів, вимірюючи результуючий показник Y_{ij} . Індекс i відноситься до строки в плані експерименту, а j – до паралельних дослідів i -ї строки. Тут можливі наступні варіанти:

Менший відгук – краще (наприклад: менша кількість дефектів)

$$SN_i^S = -10lg \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{ij}^2 \right] \quad (15.2)$$

Більший відгук – краще (наприклад: більша стійкість інструменту)

$$SN_i^L = -10lg \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{Y_{ij}^2} \right] \quad (15.3)$$

Номинал – кращий результат (наприклад: посадковий діаметр шпинделю)

$$SN_i^N = -10 \lg(MSD_i) \quad (15.4)$$

MSD – середній квадрат відхилення (Mean Square Deviation) відносно цільового значення Y_0 :

$$MSD_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - Y_0)^2 \quad (15.5)$$

15.3. Приклади ортогональних масивів

Ми не будемо тут розглядати як саме генеруються ортогональні масиви Тагучі. З цією метою можна користуватися спеціальним програмним забезпеченням, таблицями та ін. З підходами до генерації ОА можна ознайомитися в [40], [41]. Позначають масиви наступним чином: $OA_N(s^m)$ де N – кількість дослідів в масиві, s – кількість рівнів, m – кількість факторів. Якщо для різних факторів встановлена різна кількість рівнів, то позначення буде мати вигляд: $OA_N(s_1^{m_1} \times s_2^{m_2} \dots)$. Рівні частіше позначаються послідовністю $1, 2, 3, \dots, s$ або іноді $0, 1, 2, 3, \dots, s-1$. Якщо позначення рівнів зробити в кодованому вигляді як прийнято в багатофакторному експерименті, то ортогональність масивів стане очевидною (див. п. 10.5)

Деякі з ОА з однаковою кількістю рівнів для всіх факторів наведені в Табл.15.2. Приклади ОА з різною кількістю рівнів наведені в Табл. 15.3, 15.4 [41]. Треба зазначити, що будь який ОА який влаштовує за кількістю рівнів можна використовувати для меншої кількості факторів, відкинувши зайві стовбці.

Таблиця 15.2 – Приклади ортогональних масивів з однаковою кількістю рівнів

<table border="1" style="margin: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="3">$OA_4(2^2)$</th> </tr> <tr> <th>N</th> <th>X_1</th> <th>X_2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>2</td></tr> </tbody> </table>	$OA_4(2^2)$			N	X_1	X_2	1	1	1	2	1	2	3	2	1	4	2	2	<table border="1" style="margin: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="4">$OA_4(2^3)$</th> </tr> <tr> <th>N</th> <th>X_1</th> <th>X_2</th> <th>X_3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	$OA_4(2^3)$				N	X_1	X_2	X_3	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	1	2	4	2	2	1	<table border="1" style="margin: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="5">$OA_8(2^4)$</th> </tr> <tr> <th>N</th> <th>X_1</th> <th>X_2</th> <th>X_3</th> <th>X_4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> </tbody> </table>	$OA_8(2^4)$					N	X_1	X_2	X_3	X_4	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	3	1	2	2	1	4	1	2	2	2	5	2	1	2	1	6	2	1	2	2	7	2	2	1	1	8	2	2	1	2																																																																																																																												
$OA_4(2^2)$																																																																																																																																																																																																																										
N	X_1	X_2																																																																																																																																																																																																																								
1	1	1																																																																																																																																																																																																																								
2	1	2																																																																																																																																																																																																																								
3	2	1																																																																																																																																																																																																																								
4	2	2																																																																																																																																																																																																																								
$OA_4(2^3)$																																																																																																																																																																																																																										
N	X_1	X_2	X_3																																																																																																																																																																																																																							
1	1	1	1																																																																																																																																																																																																																							
2	1	2	2																																																																																																																																																																																																																							
3	2	1	2																																																																																																																																																																																																																							
4	2	2	1																																																																																																																																																																																																																							
$OA_8(2^4)$																																																																																																																																																																																																																										
N	X_1	X_2	X_3	X_4																																																																																																																																																																																																																						
1	1	1	1	1																																																																																																																																																																																																																						
2	1	1	1	2																																																																																																																																																																																																																						
3	1	2	2	1																																																																																																																																																																																																																						
4	1	2	2	2																																																																																																																																																																																																																						
5	2	1	2	1																																																																																																																																																																																																																						
6	2	1	2	2																																																																																																																																																																																																																						
7	2	2	1	1																																																																																																																																																																																																																						
8	2	2	1	2																																																																																																																																																																																																																						
<table border="1" style="margin: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="3">$OA_9(3^2)$</th> </tr> <tr> <th>N</th> <th>X_1</th> <th>X_2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>3</td><td>3</td></tr> </tbody> </table>	$OA_9(3^2)$			N	X_1	X_2	1	1	1	2	1	2	3	1	3	4	2	1	5	2	2	6	2	3	7	3	1	8	3	2	9	3	3	<table border="1" style="margin: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="4">$OA_9(3^3)$</th> </tr> <tr> <th>N</th> <th>X_1</th> <th>X_2</th> <th>X_3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>7</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>9</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr> </tbody> </table>	$OA_9(3^3)$				N	X_1	X_2	X_3	1	1	1	1	2	1	2	2	3	1	3	3	4	2	1	2	5	2	2	3	6	2	3	1	7	3	1	3	8	3	2	1	9	3	3	2	<table border="1" style="margin: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="5">$OA_8(2^4)$</th> </tr> <tr> <th>N</th> <th>X_1</th> <th>X_2</th> <th>X_3</th> <th>X_4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>8</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>9</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	$OA_8(2^4)$					N	X_1	X_2	X_3	X_4	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2	3	1	3	3	3	4	2	1	2	3	5	2	2	3	1	6	2	3	1	2	7	3	1	3	2	8	3	2	1	3	9	3	3	2	1																																																																																				
$OA_9(3^2)$																																																																																																																																																																																																																										
N	X_1	X_2																																																																																																																																																																																																																								
1	1	1																																																																																																																																																																																																																								
2	1	2																																																																																																																																																																																																																								
3	1	3																																																																																																																																																																																																																								
4	2	1																																																																																																																																																																																																																								
5	2	2																																																																																																																																																																																																																								
6	2	3																																																																																																																																																																																																																								
7	3	1																																																																																																																																																																																																																								
8	3	2																																																																																																																																																																																																																								
9	3	3																																																																																																																																																																																																																								
$OA_9(3^3)$																																																																																																																																																																																																																										
N	X_1	X_2	X_3																																																																																																																																																																																																																							
1	1	1	1																																																																																																																																																																																																																							
2	1	2	2																																																																																																																																																																																																																							
3	1	3	3																																																																																																																																																																																																																							
4	2	1	2																																																																																																																																																																																																																							
5	2	2	3																																																																																																																																																																																																																							
6	2	3	1																																																																																																																																																																																																																							
7	3	1	3																																																																																																																																																																																																																							
8	3	2	1																																																																																																																																																																																																																							
9	3	3	2																																																																																																																																																																																																																							
$OA_8(2^4)$																																																																																																																																																																																																																										
N	X_1	X_2	X_3	X_4																																																																																																																																																																																																																						
1	1	1	1	1																																																																																																																																																																																																																						
2	1	2	2	2																																																																																																																																																																																																																						
3	1	3	3	3																																																																																																																																																																																																																						
4	2	1	2	3																																																																																																																																																																																																																						
5	2	2	3	1																																																																																																																																																																																																																						
6	2	3	1	2																																																																																																																																																																																																																						
7	3	1	3	2																																																																																																																																																																																																																						
8	3	2	1	3																																																																																																																																																																																																																						
9	3	3	2	1																																																																																																																																																																																																																						
<table border="1" style="margin: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="3">$OA_{16}(4^2)$</th> </tr> <tr> <th>N</th> <th>X_1</th> <th>X_2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>9</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>10</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>11</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>12</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>13</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>14</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>15</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>16</td><td>4</td><td>4</td></tr> </tbody> </table>	$OA_{16}(4^2)$			N	X_1	X_2	1	1	1	2	1	2	3	1	3	4	1	4	5	2	1	6	2	2	7	2	3	8	2	4	9	3	1	10	3	2	11	3	3	12	3	4	13	4	1	14	4	2	15	4	3	16	4	4	<table border="1" style="margin: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="4">$OA_{16}(4^3)$</th> </tr> <tr> <th>N</th> <th>X_1</th> <th>X_2</th> <th>X_3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>7</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>8</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>9</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>10</td><td>3</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>11</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>12</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>13</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>14</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>15</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>16</td><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	$OA_{16}(4^3)$				N	X_1	X_2	X_3	1	1	1	1	2	1	2	2	3	1	3	3	4	1	4	4	5	2	1	2	6	2	2	1	7	2	3	4	8	2	4	3	9	3	1	3	10	3	2	4	11	3	3	1	12	3	4	2	13	4	1	4	14	4	2	3	15	4	3	2	16	4	4	1	<table border="1" style="margin: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="5">$OA_{16}(4^4)$</th> </tr> <tr> <th>N</th> <th>X_1</th> <th>X_2</th> <th>X_3</th> <th>X_4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>10</td><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>11</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>12</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>13</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>14</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>15</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>16</td><td>4</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td></tr> </tbody> </table>	$OA_{16}(4^4)$					N	X_1	X_2	X_3	X_4	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2	3	1	3	3	3	4	1	4	4	4	5	2	1	2	3	6	2	2	1	4	7	2	3	4	1	8	2	4	3	2	9	3	1	3	4	10	3	2	4	3	11	3	3	1	2	12	3	4	2	1	13	4	1	4	2	14	4	2	3	1	15	4	3	2	4	16	4	4	1	3
$OA_{16}(4^2)$																																																																																																																																																																																																																										
N	X_1	X_2																																																																																																																																																																																																																								
1	1	1																																																																																																																																																																																																																								
2	1	2																																																																																																																																																																																																																								
3	1	3																																																																																																																																																																																																																								
4	1	4																																																																																																																																																																																																																								
5	2	1																																																																																																																																																																																																																								
6	2	2																																																																																																																																																																																																																								
7	2	3																																																																																																																																																																																																																								
8	2	4																																																																																																																																																																																																																								
9	3	1																																																																																																																																																																																																																								
10	3	2																																																																																																																																																																																																																								
11	3	3																																																																																																																																																																																																																								
12	3	4																																																																																																																																																																																																																								
13	4	1																																																																																																																																																																																																																								
14	4	2																																																																																																																																																																																																																								
15	4	3																																																																																																																																																																																																																								
16	4	4																																																																																																																																																																																																																								
$OA_{16}(4^3)$																																																																																																																																																																																																																										
N	X_1	X_2	X_3																																																																																																																																																																																																																							
1	1	1	1																																																																																																																																																																																																																							
2	1	2	2																																																																																																																																																																																																																							
3	1	3	3																																																																																																																																																																																																																							
4	1	4	4																																																																																																																																																																																																																							
5	2	1	2																																																																																																																																																																																																																							
6	2	2	1																																																																																																																																																																																																																							
7	2	3	4																																																																																																																																																																																																																							
8	2	4	3																																																																																																																																																																																																																							
9	3	1	3																																																																																																																																																																																																																							
10	3	2	4																																																																																																																																																																																																																							
11	3	3	1																																																																																																																																																																																																																							
12	3	4	2																																																																																																																																																																																																																							
13	4	1	4																																																																																																																																																																																																																							
14	4	2	3																																																																																																																																																																																																																							
15	4	3	2																																																																																																																																																																																																																							
16	4	4	1																																																																																																																																																																																																																							
$OA_{16}(4^4)$																																																																																																																																																																																																																										
N	X_1	X_2	X_3	X_4																																																																																																																																																																																																																						
1	1	1	1	1																																																																																																																																																																																																																						
2	1	2	2	2																																																																																																																																																																																																																						
3	1	3	3	3																																																																																																																																																																																																																						
4	1	4	4	4																																																																																																																																																																																																																						
5	2	1	2	3																																																																																																																																																																																																																						
6	2	2	1	4																																																																																																																																																																																																																						
7	2	3	4	1																																																																																																																																																																																																																						
8	2	4	3	2																																																																																																																																																																																																																						
9	3	1	3	4																																																																																																																																																																																																																						
10	3	2	4	3																																																																																																																																																																																																																						
11	3	3	1	2																																																																																																																																																																																																																						
12	3	4	2	1																																																																																																																																																																																																																						
13	4	1	4	2																																																																																																																																																																																																																						
14	4	2	3	1																																																																																																																																																																																																																						
15	4	3	2	4																																																																																																																																																																																																																						
16	4	4	1	3																																																																																																																																																																																																																						

Таблица 15.3 – Ортогональный массив $OA_{18}(6^1 \times 3^6)$

N	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3	3	3
4	2	1	1	2	2	3	3
5	2	2	2	3	3	1	1
6	2	3	3	1	1	2	2
7	3	1	2	1	3	2	3
8	3	2	3	2	1	3	1
9	3	3	1	3	2	1	2
10	4	1	3	3	2	2	1
11	4	2	1	1	3	3	2
12	4	3	2	2	1	1	3
13	5	1	2	3	1	3	2
14	5	2	3	1	2	1	3
15	5	3	1	2	3	2	1
16	6	1	3	2	3	1	2
17	6	2	1	3	1	2	3
18	6	3	2	1	2	3	1

Таблица 15.4 – Ортогональный массив $OA_{18}(2^1 \times 3^7)$

N	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	3	3	3	3	3	3
4	1	2	1	1	2	2	3	3
5	1	2	2	2	3	3	1	1
6	1	2	3	3	1	1	2	2
7	1	3	1	2	1	3	2	3
8	1	3	2	3	2	1	3	1
9	1	3	3	1	3	2	1	2
10	2	1	1	3	3	2	2	1
11	2	1	2	1	1	3	3	2
12	2	1	3	2	2	1	1	3
13	2	2	1	2	3	1	3	2
14	2	2	2	3	1	2	1	3
15	2	2	3	1	2	3	2	1
16	2	3	1	3	2	3	1	2
17	2	3	2	1	3	1	2	3
18	2	3	3	2	1	2	3	1

15.4. Аналіз результатів: розрахунок середнього ефекту факторів, побудова діаграм ефектів та визначення оптимального рішення. ANOVA

Метою аналізу результатів експерименту за Тагучі є перш за все пошук відповіді на три ключових питання [40]:

1. Які умови є оптимальними?
2. Які фактори впливають на варіабельність результатів і як сильно?
3. Який буде очікуваний результат при оптимальних умовах і наскільки сильно кожен фактор впливає на поліпшення результатів

Для відповіді на ці питання на основі отриманих за результатами експерименту результатів та самого ортогонального масиву розраховується середній ефект кожного фактору для кожного з рівнів. Розрахунок середнього ефекту фактору X_i на рівні l - \bar{X}_i^l виконується наступним чином:

$$\bar{X}_i^l = \frac{1}{r\{l \mid X_i = l\}} \sum_{\substack{j=1 \\ \{j \mid X_{ij}=l\}}}^N Y_j \quad (15.6)$$

Тут $r\{l \mid X_i = l\}$ – кількість рівнів l у відповідному стовбці X_i
 $\sum_{\substack{j=1 \\ \{j \mid X_{ij}=l\}}}^N Y_j$ - сума значень результуючих показників Y для яких

рівень у відповідному рядку j стовбця X_i дорівнює l

Оптимальним рішенням буде комбінація рівнів факторів, що забезпечують мінімальні або максимальні ефекти (в залежності від потреби).

Може декому такі пояснення здадуться занадто складними, тоді є сенс розглянути приклад і побачити, що все насправді не так складно.

Нагадаємо що результуючим показником Y може бути як співвідношення сигнал / шум так і будь який фізичний показник процесу чи об'єкту.

Приклад

Розглянемо план експерименту $OA_4(2^2)$ та його результати [40] (Табл. 15. 5). Результуючий показник Y отримано за результатами трьох паралельних дослідів ($n = 3$) та його потрібно мінімізувати.

Таблиця 15.5 - План Тагучі $OA_4(2^3)$ та його результати

N	Фактори			Результат
	X_1	X_2	X_3	
1	1	1	1	30
2	1	2	2	25
3	2	1	2	34
4	2	2	1	27

Розрахуємо ефекти факторів для кожного з рівнів за формулою (15.6):

$$\bar{X}_1^1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) = \frac{1}{2}(30 + 25) = 27,5$$

$$\bar{X}_1^2 = \frac{1}{2}(Y_3 + Y_4) = \frac{1}{2}(34 + 27) = 30,5$$

$$\bar{X}_2^1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_3) = \frac{1}{2}(30 + 34) = 32,0$$

$$\bar{X}_2^2 = \frac{1}{2}(Y_2 + Y_4) = \frac{1}{2}(25 + 27) = 26,0$$

$$\bar{X}_3^1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_4) = \frac{1}{2}(30 + 27) = 28,5$$

$$\bar{X}_3^2 = \frac{1}{2}(Y_2 + Y_3) = \frac{1}{2}(25 + 34) = 29,5$$

На основі виконаного розрахунку будують діаграми ефектів (Рис. 15.4). Виходячи з умовою мінімізації вибираємо значення рівнів факторів, які забезпечують мінімальний середній ефект – Табл. 15.6

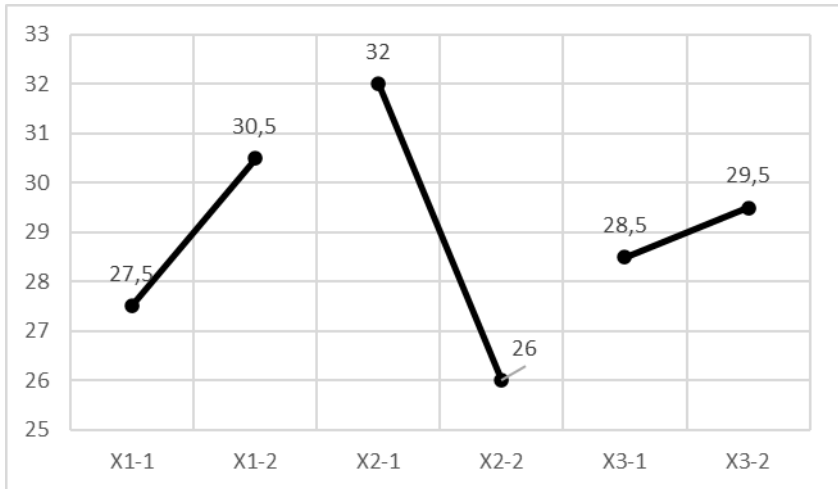


Рисунок 15.4 – Діаграма ефектів

Таблиця 15.6 – Рівні факторів з мінімальним середнім ефектом

Фактор	X ₁	X ₂	X ₃
Рівень	1	2	1

Як видно з Табл. 15.6 рівні факторів не співпадають ні з однією комбінацією умов дослідів, визначених ОА в Табл. 15.5. В цьому випадку за концепцією Тагучі обов'язково необхідно провести перевірочний дослід за умов зазначених в Табл. 15.6 для підтвердження або спростування отриманого результату.

Додатково за методом Тагучі, використовуючи отримані результати, для оцінки ступеню впливу факторів на відгук проводиться специфічний дисперсійний аналіз – ANOVA (Analysis of variance) [40] який без детальних пояснень наведено в Табл. 15.7 разом з прикладом розрахунку. Окрім того планування за концепцією Тагучі дозволяє визначати взаємодію факторів, а також розмір допуску виходячи з відомих витрат на виправлення браку (в цьому посібнику не розглядається).

Таблиця 15.7 – ANOVA, послідовність розрахунків

№	Характеристика	Розрахункова формула	Приклад розрахунку
1	T – загальна сума результатів	$T = \sum_{j=1}^N Y_j$	$T = (30+25+34+27) = 116$
2	CF – коригуючий фактор	$CF = T^2 / N$	$CF = \frac{116^2}{4} = 3364$
3	S_T^2 - Загальна дисперсія	$S_T^2 = \left[\sum_{j=1}^N Y_j^2 \right] - CF$	$S_T^2 = (30^2 + 25^2 + 34^2 + 27^2) - 3364 = 46$
4	$Q_{X_i}^l$ – сума відлуків для певного рівня l фактору X_i	$Q_{X_i}^l = \sum_{j=1}^N Y_j \Big _{\{j X_i=j=l\}}$	$Q_{X_1}^1 = (30 + 25) = 55$ $Q_{X_1}^2 = (34 + 27) = 61$ $Q_{X_2}^1 = (30 + 34) = 64$ $Q_{X_2}^2 = (25 + 27) = 52$ $Q_{X_3}^1 = (30 + 27) = 57$ $Q_{X_3}^2 = (25 + 34) = 59$

Продовження таблиці 1.5.7 – ANOVA, послідовність розрахунків

№	Характеристика	Розрахункова формула	Приклад розрахунку
5	S_{Xi}^2 – загальна дисперсія фактору X_i	$S_{Xi}^2 = \left[\sum_{j=1}^{u_{Xi}} \frac{(Q_{Xi}^j)^2}{r\{l \mid X_i = l\}} \right] - CF$ <p>u_{Xi} – кількість рівнів фактору X_i</p>	$S_{X1}^2 = \left(\frac{55^2}{2} + \frac{61^2}{2} \right) - 3364 = 9$ $S_{X2}^2 = \left(\frac{64^2}{2} + \frac{52^2}{2} \right) - 3364 = 36$ $S_{X3}^2 = \left(\frac{57^2}{2} + \frac{59^2}{2} \right) - 3364 = 1$
6	S_e^2 – загальна дисперсія помилки	$S_e^2 = S_T^2 - \sum_{j=1}^m S_{Xj}^2$ <p>m – кількість факторів</p>	$S_e^2 = 46 - (9 + 36 + 1) = 0$
7	f_{Xi} – Кількість рівнів свободи фактору X_i	$f_{Xi} = u_{Xi} - 1$ <p>u_{Xi} – кількість рівнів фактору X_i</p>	$f_{X1} = 2 - 1 = 1$ $f_{X2} = 2 - 1 = 1$ $f_{X3} = 2 - 1 = 1$
8	f_T – загальна кількість ступенів свободи	$f_T = N \cdot n - 1$	$f_T = 4 \cdot 3 - 1 = 11$

Продовження таблиці 15.7 – ANOVA, послідовність розрахунків

№	Характеристика	Розрахункова формула	Приклад розрахунку
9	f_e – кількість ступенів свободи для дисперсії помилки	$f_e = f_T - \sum_{i=1}^m f_{X_i}$	$f_e = 11 - (1 + 1 + 1) = 8$
10	$V_{X_i}^2$ – дисперсія фактору X_i	$V_{X_i}^2 = \frac{S_{X_i}^2}{f_{X_i}}$	$V_{X_1}^2 = \frac{9}{1} = 9$ $V_{X_2}^2 = \frac{36}{1} = 36$ $V_{X_3}^2 = \frac{1}{1} = 1$
11	V_e^2 – дисперсія помилки	$V_e^2 = \frac{S_e^2}{f_e}$	$V_e^2 = \frac{0}{8} = 0$

Продовження таблиці 15.7 – ANOVA, послідовність розрахунків

№	Характеристика	Розрахункова формула	Приклад розрахунку
12	F – відношення для фактору X_i або помилки e	$F_{Xi} = \frac{V_{Xi}^2}{V_e^2}$ $F_e = \frac{V_e^2}{V_e^2} = 1$	F_{X1} – невизначеність F_{X2} – невизначеність F_{X3} – невизначеність
13	S'_{Xi} - Чиста сума квадратів для факторів X_i та помилки e	$S'_{Xi} = S_{Xi}^2 - f_{Xi} \cdot V_e^2$ $S'_e = S_e^2 + \left(\sum_{j=1}^m f_{Xj} \right) \cdot V_e^2$	$S'_{X1} = 9 - 1 \cdot 0 = 9$ $S'_{X2} = 36 - 1 \cdot 0 = 36$ $S'_{X3} = 1 - 1 \cdot 0 = 1$ $S'_e = 0 + (1 + 1 + 1) \cdot 0 = 0$

Продовження таблиці 15.7 – ANOVA, послідовність розрахунків

№	Характеристика	Розрахункова формула	Приклад розрахунку
14	P_{X_i} - Процентний вплив факторів X_i та помилки e на відгук	$P_{X_i} = \frac{S_{X_i}^2}{S_T^2} \cdot 100$ $P_e = \frac{S_e^2}{S_T^2} \cdot 100$ Перевірка: $P_e + \sum_{i=1}^m P_{X_i} = 100$	$P_{X_1} = \frac{9}{46} \cdot 100 = 19,6\%$ $P_{X_2} = \frac{36}{46} \cdot 100 = 78,2\%$ $P_{X_3} = \frac{1}{46} \cdot 100 = 2,2\%$ $P_e = \frac{0}{46} \cdot 100 = 0\%$ $19.6 + 78.2 + 2.2 + 0 = 100$

15.5. Підсумки

Підсумовуючи сказане, зазначимо, що міркування для впровадження методики, запропоновані д-ром Тагучі полягають в наступному [40]:

1. **Визначення якості** – Тагучі визначив якість як мінімальний збиток для суспільства, який у вимірних інженерних термінах перетворюється на постійність технічних характеристик виробу. Незалежно від застосування, незалежно від того, чи це продукт, чи процес, чи від того, як вимірюються результати, стабільність характеристик вважається основним атрибутом. Узгодженість досягається, коли значення технічних характеристика близькі до цільового з найменшою варіацією. Щоб покращити якість, Тагучі запропонував двоетапний підхід до оптимізації:

а. Знайдіть комбінацію рівня факторів, яка зменшує варіабельність технічних характеристик.

б. Налаштуйте рівні факторів, щоб наблизити значення технічних характеристик до цільових.

2. **Стандартизований DOE** – для планування експериментів Тагучі використовував спеціальний набір таблиць, які називаються ортогональними масивами (OA), які представляють найменші дробові репліки та використовуються для більшості поширених планів експериментів.

3. **Надійна стратегія проектування.** Щоб зробити продукти та процеси нечутливими до впливу неконтрольованих (шумових) факторів, Тагучі використовує формальний спосіб включення шумових факторів у схему експерименту. Ця нова структура (називається конструкцією зовнішнього масиву) полегшує використання експериментів меншого розміру для вивчення ефектів більшої кількості факторів шуму, що призводить до сприятливих характеристик із середнім значенням, близьким до цільового, і зменшеною варіацією навколо середнього.

4. **Функція втрат** – Математична формула, пов'язана з концепцією функції втрат, запропонована Тагучі, дозволяє

простим способом кількісно оцінити покращення в грошових одиницях. Концепції можуть бути легко використані для вираження прогнозованого покращення результатів DOE в термінах очікуваної економії коштів.

5. **Аналіз сигнал/шум (SN)** – для аналізу результатів випробувань із кількома зразками (паралельними дослідями) використання співвідношення сигнал/шум замість прямих результатів вимірювання значно полегшує аналіз результатів DOE. Крім того, логарифмічне перетворення результатів у термінах співвідношення сигнал/шум дає змогу передбачити покращення результатів на основі аналізу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бучинський, М. Я. Основи творення машин [Текст] / М.Я. Бучинський, О.В. Горик, А.М. Чернявський, С.В. Яхін – Харків: Вид-во «НТМТ», 2017 – 448 с.
2. Моделювання та оптимізація систем: підручник / Дубовой В. М., Кветний Р. Н., Михальов О. І., А.В.Усов А. В. –Вінниця: ПП «ТД «Едельвейс», 2017. – 804 с.
3. Статистичне моделювання та прогнозування [Електронний ресурс]: Посібники, статті та книги для студентів. – 2022. – Електрон. текстові дані. - Режим доступу: <https://posibniki.com.ua/catalog-statistichne-modeluvannya-ta-prognozuвання>
4. Frolov M.: Parameter estimation of the Weibull distribution in modeling the reliability of technical objects / M. Frolov, S.Tanchenko, L.Ohluzdina // (2024). Journal of Engineering Sciences (Ukraine). – 2024. - Vol. 11(1).- pp. A1–A10. [https://doi.org/10.21272/jes.2024.11\(1\).a1](https://doi.org/10.21272/jes.2024.11(1).a1)
5. Семенова, І. Ю. Математичні моделі МСС: навчальний посібник [Текст] / І. Ю. Семенова. – Київ: КНУ ім. Т. Шевченка, 2014. – 82 с.
6. Буряк, В. І. Випадкові величини та їх характеристики [Текст] / В.І. Буряк. – Дніпро: КРКМ ДНУ ім. О. Гончара, 2017. – 13 с.
7. Frolov, M.: Empirical Data-Based Failure Rate Assessment Methodology for Metal-Cutting Tools (2024). / M. Frolov, V. Tsyganov, V. Solokha, V. In: Ivanov, V., Trojanowska, J., Pavlenko, I., Rauch, E., Pitel, J. (eds) Advances in Design, Simulation and Manufacturing VII. DSMIE 2024. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-61797-3_17
8. Клименко, Г. П. Определение рациональных регламентов эксплуатации инструментов для тяжелых станков с ЧПУ [Текст] / Г. П. Клименко, Я. В. Васильченко // Резание и инструмент в технологических системах: В.86. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2016. – С.49 – 56.
9. Salehi, M. Probabilistische Modellierung und Vorhersage der Standzeit und Zuverlässigkeit eines Fräswerkzeugs mittels der

- Bayesianischen Statistik [Текст] / M. Salehi, G. Wald, T. L. Schmitz, R. Haas, J. Ovtcharova // Forsch Ingenieurwes. - 2020. - №84. – P.129 – 139. <https://doi.org/10.1007/s10010-019-00391-0>
10. Мироненко, Е. В. Исследование влияния стабильности обработки на регламенты эксплуатации режущего инструмента при многокритериальной оптимизации [Текст] / Е. В. Мироненко, Л. В. Васильева // Вісник СевНТУ. Машиноприладобудування та транспорт: зб. наук. пр: В.107. – Севастополь: СевНТУ, 2010. – С.151 – 154.
 11. Бідюк, П.І. Математична статистика: навч. посіб. / П. І. Бідюк, Б. П. Ткач, Т. Харрінгтон. — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2018. — 348 с.
 12. Brandt, S. Data analysis. Statistical and Computational Methods for Scientists and Engineers / S.Brandt. – Heidelberg: Springer Cham, 2014. – 532 с. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-03762-2>.
 13. Руденко, В. М. Математична статистика. Навч. Посіб / В.М. Руденко – К.: Центр учбової літератури, 2012. – 304 с.
 14. Inglot, T. Intermediate efficiency in nonparametric testing problems with an application to some weighted statistics [Текст] / T. Inglot, T. Ledwina, B. Ćmiel // ESAIM - Probability and Statistics. – 2019. - Vol.23. - P. 697–738.
 15. Jamieson, A. Computer search for the ideal histogram [Текст] / A. Jamieson // Annual Quality Congress Transactions. ASQ, Milwaukee, USA. – 1989. - № 43. - P. 277–283.
 16. Wang, Z. Nonparametric Density Estimation for High-Dimensional Data [Текст] / Z. Wang, D. Scott // Algorithms and Applications. Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics. – 2019. - №11(4). – 41 p. DOI: <https://doi.org/11.10.1002/wics.1461>.
 17. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб./ О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабальок. – К: НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с.
 18. Hojland, A.: System reliability theory [Текст] / A. Hojland – Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons, Inc, 2004. – 629 с.
 19. Song, C. Reliability Life Estimation Considered fault Correlation of Aerial Bearing [Текст] / C. Song, Z. Bian, S.N. Ding // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2021. - № 1043(4), 042011. – 10 p. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1043/4/042011>

20. Barlow, R.E. Mathematical theory of reliability [Текст] / R. Barlow, F. Proschan. – New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc, 1965. – 251 с.
21. O'Connor, A.N. Probability Distributions Used in Reliability Engineering [Текст] / A.N. O'Connor, M. Modarres, A. Mosleh – College Park, Maryland: Center for Reliability Engineering University of Maryland, 2016. – 205 p.
22. Gaddafee, M., Chinchanikar, S. An Experimental Investigation of Cutting Tool Reliability and its Prediction Using Weibull and Gamma Models: A Comparative Assessment [Текст] / M. Gaddafee, S. Chinchanikar // Materials Today: Proceedings. - 2020. - Vol. 24. - P. 1478–1487.
23. Weibull analysis handbook [Text] / R.B. Abernethy et al. - West Palm Beach, FL: Pratt & Whitney Aircraft, 1983. – 228 p.
24. Frolov, M. Variation Coefficient and Some Distribution Laws in the Context of Cutting Tools and Other Technical Objects Reliability Modeling [Текст] / M. Frolov // In: Ivanov V. et al. (eds) Advances in Design, Simulation and Manufacturing. DSMIE 2018. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham, 2018. – PP. 13-22. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-93587-4_2
25. Alavi S.Q., Noughabi H.A. A novel estimator of Kullback–Leibler information with its application to goodness of fit tests // Statistics, Optimization and Information Computing. – 2025. – Vol. 13 (5). – P. 1800–1818. – DOI: 10.19139/soic-2310-5070-2032.
26. Yung, Li Lee. Durability Reliability Demonstration Test Method [Текст] / Yung Li Lee et al // 6-th Fatigue Design Conference, Fatigue Design 2015. – Procedia Engineering, 2015 – P.31-59.
27. Scholz, F. Weibull reliability analysis [Електронний ресурс]: UW Faculty, University of Washington. - 1999. - Електрон. текстові дані. – Режим доступу: <http://faculty.washington.edu/fscholz/Reports/weibullanalysis.pdf>
28. Luko, S.N. Weibull analysis with assumed Weibull slope where no failures are observed [Текст] / Stephen N. Luko // International Off-Highway and Powerplant Congress and Exposition. – Milwaukee, WI: SAE International, 1998. – 9 p.

29. LaFollette, J.P. Introduction to Reliability Demonstration Testing of Nonelectronic Components [Текст] / John P. LaFollette. – Rome Air Development Center, Air Force System Command, Griffiss Air Force Base, NY, 1987. – 122 p.
30. Antony, J.: Design of experiments for engineers and scientists / J. Antony. - In Elsevier eBooks. – 276 с. <https://doi.org/10.1016/c2012-0-03558-2>.
31. Володарський Є.Т., Кошева Л.О.: Теорія та практика експериментальних досліджень / Є.Т. Володарський, Л.О. Кошева – К.: КПІ ім. І. Сікорського, 2023. – 299 с.
32. Ramachandran, K.M., Tsokos С.P. Mathematical statistics with applications / . Математическая статистика с техническими приложениями [Текст] / К.М, Ramachandran, С.P. Tsokos – London: Academic Press, 2009. – 849 с.
33. Goos, P., Bradley, J. Optimal design of experiments: a case study approach / P. Goos, J. Bradleyes. – Chicheste, U.K.: John Wiley & Sons, Inc, 2011. – 283 с.
34. Cochran, W. Experimental designs, 2 ed. [Text] / W.Cochran, G.M. Cox. - N.Y.: J.Wiley, 1960.
35. Кононюк, А. Е. Основы научных исследований (Общая теория эксперимента) [Текст] / А. Е. Кононюк: К.З. Монография. – К.: Освіта України, 2011. – 456 с.
36. Astakhov, V.P.: Design of Experiment Methods in Manufacturing: Basics and Practical Applications / V.P. Astakhov // In: Davim, J.P. (eds) Statistical and Computational Techniques in Manufacturing. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. – С.1 – 56 https://doi.org/10.1007/978-3-642-25859-6_1
37. Schiefer, H., Schiefer, F.: Statistical Design of Experiments (DoE) / H. Schiefer, F. Schiefer // In: Statistics for Engineers. Wiesbaden: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-32397-4_1
38. Aichholzer, G.: The Delphi Method: Eliciting Experts' Knowledge in Technology Foresight / G. Aichholzer // In: Bogner, A., Littig, B., Menz, W. (eds) Interviewing Experts. Research Methods Series. – London: Palgrave Macmillan, 2009. – С. 252 - 274 https://doi.org/10.1057/9780230244276_13
39. Гнатієнко, Г.М. Експертні технології прийняття рішень [Текст] / Г.М. Гнатієнко, В.Є. Снитюк. - Київ : Маклауг, 2008. - 444 с.

40. Roy, R.K. A primer on Taguchi method [Текст] // Ranjit K. Roy. – Dearborn, MI: SME, 2010 – 336 p.
41. Kaker, R.N. Taguchi's orthogonal arrays are classical designs of experiments [Текст] // Raghu N. Kaker, Eric S. Lagergren, James L. Filliben / Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology. – 1991. – Vol.96, № 5. – P.577 – 591.