

АНАЛІЗ ОДНОГО ПЕРЕХІДНОГО ПРОЦЕСУ

В поточному році на III турі Всеукраїнської олімпіади з фізики [1] серед інших було запропоновано задачу про розрядний струм конденсатора. З незначними змінами її умова така. До джерела сталої ЕРС ε через резистор опором R вже протягом великого часу під'єднано конденсатор початкової ємністю C_0 і відстанню між пластинами d_0 . Одна з пластин починає рухатись зі швидкістю v в напрямку збільшення відстані між пластинами. Знайти струм в ланцюгу.

Авторський розв'язок не враховує перехідного процесу [2] і задовільним вважатись не може. Побудуємо і проаналізуємо альтернативний розв'язок.

Нехай заряд конденсатора є шуканою функцією часу $Q(t)$. За умовою перед початком руху пластини пройшло багато часу, попередній перехідний процес закінчено, струм в ланцюгу не тече, напруга на конденсаторі дорівнює ЕРС джерела, і тоді $Q(0) = C_0\varepsilon = Q_0$.

Напруженість поля, створюваного однією пластиною, дорівнює $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q(t)}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q(t)}{2C_0} \cdot \frac{1}{d_0}$. За умови однорідності поля кулонівська сила взаємодії пластин $F = QE = \frac{Q^2}{2C_0} \cdot \frac{1}{d_0}$. Для рівномірного руху зовнішня сила повинна компенсувати кулонівську. Тоді миттєва потужність зовнішньої сили $P = Fv = \frac{Q^2}{2C_0} \cdot \frac{v}{d_0}$. За законом збереження енергії сума цієї потужності і потужності сторонніх сил джерела врівноважується сумою теплової (джоулевої) потужності і швидкості \dot{W} приросту енергії електричного поля конденсатора. Тому баланс потужностей має вигляд $\frac{Q^2}{2C_0} \cdot \frac{v}{d_0} + \varepsilon \dot{Q} = \dot{Q}^2 R + \dot{W}$.

Маємо рівняння $\dot{W} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q^2(t)}{2C(t)} \right) = \frac{Q\dot{Q}}{C} - \frac{Q^2\dot{C}}{2C^2} = \frac{Q\dot{Q}}{C_0} \left(1 + \frac{vt}{d_0} \right) + \frac{Q^2}{2C_0} \cdot \frac{v}{d_0}$, у

якому враховано, що $C(t) = \frac{\varepsilon_0 S}{d(t)} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0 + vt} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0} \cdot \frac{d_0}{d_0 + vt} = C_0 \cdot \frac{d_0}{d_0 + vt}$. Тоді

$$\varepsilon = \dot{Q}R + \frac{Q}{C_0} \left(1 + \frac{vt}{d_0} \right). \quad (1)$$

Зокрема, при $v = 0$ ми б отримали рівняння $\varepsilon = U_R + U_C$ першого закону Кірхгофа, яке зазвичай використовують при дослідженні перехідних процесів в RC -ланцюгах [2]. Зауважимо також, це рівняння набуває вигляду (1) і при безпосередньому врахуванні залежності $C(t)$, але попередні міркування підкреслюють його узгодження з законом збереження енергії.

Рівняння (1) є лінійним неоднорідним звичайним диференціальним рівнянням першого порядку зі змінними коефіцієнтами. Його аналітичний розв'язок може бути отриманим, наприклад, методом Бернуллі

$$Q(T) = e^{-\left(\frac{T}{\tau_0} + \frac{T^2}{2\tau_0\tau_1}\right)} \left(Q_0 + \frac{\varepsilon}{R} \int_0^T e^{\left(\frac{t}{\tau_0} + \frac{t^2}{2\tau_0\tau_1}\right)} dt \right), \quad \tau_0 = RC_0, \quad \tau_1 = \frac{d_0}{v}. \quad (2)$$

Зокрема, при $v = 0$ ($\tau_1 \rightarrow +\infty$) маємо $Q(T) = C_0\varepsilon + (Q_0 - C_0\varepsilon)e^{-T/\tau_0} \equiv C_0\varepsilon$ згідно до початкових умов. Звичайно, результат (2) має місце лише для таких моментів часу, коли відстань $d_0 + vt$ є настільки малою, що конденсатор ще залишається плоским.

Відповідь задачі виникає при диференціюванні (2): $I(T) = \dot{Q}$. Слід зауважити, що інтеграли в (2) не виражаються у вигляді комбінації скінченної кількості елементарних функцій. Але відповідь вдається отримати аналітично принаймні для моменту $T = 0$; вона має вигляд $\dot{Q}(0) = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{Q_0}{RC_0}$.

При виконанні початкової умови отримуємо $\dot{Q}(0) = 0$.

Подальше дослідження є достатньо громіздким, оскільки його результат залежить від співвідношення моменту T і двох незалежних сталих часу τ_0 , τ_1 . Втім, це вже є технічною задачею.

Висновки. В роботі поставлено і розв'язано задачу про розрядний струм конденсатора змінної ємності з урахуванням перехідних процесів. Виявлено дві незалежних сталі часу. Подальший аналіз залежить від їх співвідношення.

Наголошується також на необхідності більш ретельно ставитись до підбору задач учнівських олімпіад.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Олімпіади в Запорозжській області [Ел. ресурс]. – Ел. дані. – Режим доступу : <https://olymp.zp.ua/ru/archive/5c2385e73fc11c58b889c89e>

2. Переходные процессы в линейных электрических цепях [Ел. ресурс].
– Ел. дані. – Режим доступу : <http://model.exponenta.ru/electro/0060.htm>