МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни

„ МЕТОДОЛОГІЯ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ“

для студентів спеціальностей:
152 „Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка“
(освітня програма: „Якість, стандартизація та сертифікація“);
153 „Мікро- та наносистемна техніка“
(освітня програма: „Мікро- та наноелектронні прилади і пристрої“)
денної й заочної форм навчання

2018

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни „Методологія наукових досліджень“ для студентів спеціальностей: 152 „Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка“ (освітня програма: „Якість, стандартизація та сертифікація“); 153 „Мікро- та наносистемна техніка“ (освітня програма: „Мікро- та наноелектронні прилади і пристрої“) денної й заочної форм навчання / Укл.: О.В. Василенко, А.В. Коротун. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018. – 32 с.

В практичних роботах з дисципліни «Методологія наукових досліджень» методично розв'язані задачі, пов'язані з прийняттям оптимальних рішень. Оптимізація є одним з етапів дослідження при проектуванні систем, як технічних, так і економічних. Задачі оптимізації досить часто розв'язуються технологіями теорії прийняття рішень та відносяться до задач лінійного програмування. Показані шляхи та методи розв'язання задач лінійної оптимізації в різних галузях практичної діяльності людини. Наведено контрольні питання з означених тем.

Укладачі: О.В. Василенко, доц., канд.техн.наук
А.В. Коротун, доц., канд. фіз.-мат. наук

Рецензент: В.В. Погосов, проф., д-р фіз.-мат. наук

Відповід. за випуск: А.В. Коротун, доц., канд. фіз.-мат. наук

Затверджено
на засіданні кафедри ”Мікро- та наноелектроніки”

Протокол №3
від „21“ листопада 2018 р.

Рекомендовано до видання
НМК ФРЕТ
Протокол № 3
від „22“ листопада 2018 р.

ЗМІСТ

Вступ. 4

1 Практичне заняття № 1 «Прийняття рішень в умовах ризику». 6
1.1 Мета роботи 6
1.2 Методичні вказівки до виконання завдання. 6
1.3 Завдання до практичного заняття. 9
1.4 Контрольні запитання. 10

2 Практичне заняття № 2 «Задача лінійного програмування». . 11
2.1 Мета роботи 11
2.2 Методичні вказівки до виконання завдання. 11
2.3 Завдання до практичного заняття. 14
2.4 Контрольні запитання. 14

3 Практичне заняття № 3 «Графічний метод розв'язання ЗЛП». 15
3.1 Мета роботи 15
3.2 Методичні вказівки до виконання завдання. 15
3.3 Завдання до практичного заняття. 18
3.4 Контрольні запитання. 19

4 Практичне заняття № 4 «Використання Microsoft Excel для лінійного програмування» 20
4.1 Мета роботи 20
4.2 Методичні вказівки до виконання завдання. 20
4.3 Завдання до практичного заняття. 24
4.4 Контрольні запитання. 26

Перелік рекомендованої літератури. 27

Додаток А Методи параметричної оптимізації. 29

ВСТУП

Основне завдання практикуму з дисципліни «Методологія наукових досліджень» (МНД) полягає в тому, щоб виробити у студентів вміння застосовувати наукові методи лінійного програмування для прийняття оптимальних рішень, навіть в умовах невизначеності (ризику). Знання методології, теорії, технології, методів та організації науково-дослідницької діяльності є базою для аспірантів, докторантів, здобувачів наукових ступенів, співробітників наукових підрозділів різного профілю.

У результаті вивчення навчальної дисципліни МНД студент повинен навчитися застосовувати методи для розв'язання задач лінійного програмування (ЗЛП) на практиці, зокрема, при плануванні постачань, запасів, у логістиці тощо. Крім того, побудова дерева рішень дозволяє полегшити та формалізувати прийняття рішень в умовах невизначеності в будь-якій галузі знань, наприклад, при побудові моделей, під час структурного синтезу систем, при формуванні інвестиційних планів тощо.

Крім того, після лекційного курсу та практичних занять студент має навчитися:

- організовувати власну розумову діяльність;
- застосовувати сучасні ефективні засоби роботи з науковою та навчально-методичною літературою;
- здійснювати аналіз теоретико-експериментальних даних;
- складати модель творчої роботи, програму та план дослідження;
- формулювати висновки та пропозиції;
- використовувати категоріально-поняттєвий апарат, методи і методології аналізу та оптимізації, автоматизовані в тому числі;
- використовувати методи лінійної оптимізації/програмування тощо на всіх етапах проектування новітніх систем;
- володіти прийомами роботи над науковим текстом;
- оформлювати результати наукових робіт у вигляді тез, статей, магістерської роботи тощо;
- раціонально використовувати наукові методи пізнання;

- обґрунтовувати практичну значущість результатів дослідження;
- оформляти результати магістерського дослідження;
- захищати результати свого дослідження у встановленій формі.

Звіт з кожної роботи повинен містити тему роботи та наступні розділи:

а) мета роботи.

б) завдання до роботи.

в) хід виконання роботи.

г) висновки.

1 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №1 «ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ»

1.1 Мета роботи

Навчитися застосовувати метод «Дерева рішень» для прийняття оптимальних рішень в умовах невизначеності.

1.2 Методичні вказівки до виконання завдання

Кожну систему можна охарактеризувати набором вартісних показників, тобто, частину критеріїв якості назвати «Якість», а ту частину, яка їм суперечить, назвати «Ціною». Отже задача прийняття правильного рішення полягає у узгодженні між собою «Ціни» та «Якості». Таким чином, оптимізаційна задача полягає у «примиренні» суперечок. Обидві групи показників можна виражати у грошових умовних одиницях, або переходити до безрозмірних показників, знаходячи так звані «Маржинальні показники якості».

Розглянемо ситуацію, коли кожен з варіантів вирішення проблеми/розв’язання задачі може бути реалізований з тією чи іншою ймовірністю. Така ситуація в теорії прийняття рішень (ТПР) називається *прийняттям рішень в умовах ризику*. Тобто ризики, пов'язані з кожним альтернативним рішенням, залежать в тому числі від ймовірності певної реалізації задачі, а отже, є випадковою величиною.

В умовах «ризиків» за критерій прийняття рішення, як правило, використовують очікуване значення − *математичне очікування* (М). Всі альтернативи (реалізації проекту) порівнюються з точки зору максимізації очікуваного результату (наприклад, швидкодії, потужності – для технічних аспектів проектованих систем, або прибутку / мінімізації очікуваних витрат – для всіх проектів).

Розглянемо етапи розв’язання задачі методом побудови «Дерева прийняття рішень» на конкретному прикладі.

Для фінансування проекту бізнесмену потрібно зайняти терміном на один рік 15000 у.о. Банк може позичити йому ці гроші під 15% річних або вкласти у справу зі 100% -ним поверненням суми, але під 9% річних. З минулого досвіду банкіру відомо, що 4% таких клієнтів позику не повертають. Необхідно прийняти рішення: чи надавати цьому клієнту позику.

Для цього побудуємо «дерево рішень» (рис.1.1).

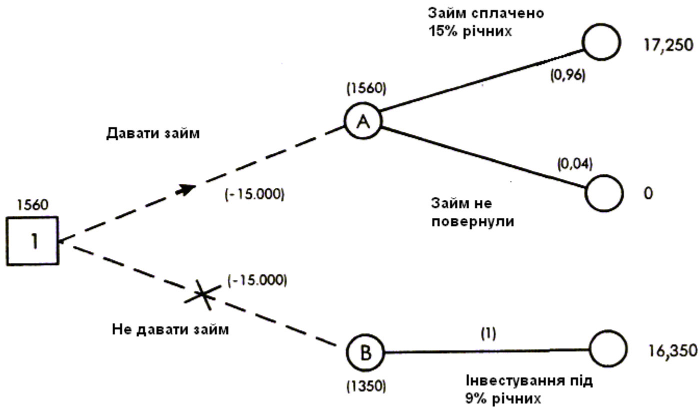


Рисунок 1.1 − Дерево рішень

- вузли, відмічені квадратом, позначають місця, в яких приймається рішення (квадрат, з нього виходять стрілки-альтернативи);
- круглі вузли – альтернативи, з певним математичним очікуванням їхньої реалізації.

Числові значення доходів (результати) прораховуються, починаючи з кінця «гілок», поступово наближуючись до вихідного питання (квадрату).

Розглянемо розрахунок прибутку при реалізації можливих альтернатив. Альтернатива A_1 – давати позику, при цьому дохід складе видану в кредит суму і відсотки по кредиту (15%) – за умови, що кредит повернули; альтернатива A_0 – давати позику, але видану позику не повернули.

По альтернативі $A_1 = 15000 + 15\% \cdot 15000 = 17250$ *(у.о.)*

Отже, по альтернативі A_0 чистий прибуток $A_0 = 0$.

Альтернатива B – позику не давати, але гроші пустити на інвестування під 9%.

Результат:

$$B_1 = 15000 + 9\% \cdot 15000 = 16350 \text{ (у.о.)}$$

Оцінку кожної з альтернатив (чистий прибуток від її реалізації) отримаємо за формулою: *M* (альтернативи) мінус витрати.

Альтернатива *A* має два результати – позику віддали (ймовірність повернення становить 96%) і позику не віддали (ймовірність неповернення 4%).

Альтернатива *A* (давати позику):

$$(17250 \cdot 0{,}96 + 0 \cdot 0{,}04) - 15000 = 16500 - 15000 = 1560 \text{ (у.о.)}$$

Альтернатива *B* (не давати позику):

$$16350 \cdot 1{,}0 - 15000 = 1350 \text{ (у.о.)}$$

Оскільки очікуваний чистий прибуток більше для альтернативи А, то приймаємо рішення видати позику.

Послідовність прийняття рішення:

1. Визначити всі можливі в даній ситуації варіанти вирішення і для кожного з них визначити його можливі наслідки (тобто побудувати **дерево рішень**).

2. Оцінити вартість результатів та на цій основі визначити вартість кожного з варіантів рішень.

Рішення, що приймаються за допомогою «дерева», залежать від ймовірностей результатів. Вибираючи рішення, ми повинні знати, наскільки воно чутливе до зміни значень цих ймовірностей, і, отже, наскільки можна покладатися на цей вибір.

Проведемо аналіз чутливості щойно розглянутого прикладу. Очікувані чисті доходи у вузлах *A* і *B* досить близькі: 1560 і 1350 у.о. Вибір рішення залежить від значення ймовірності повернення позики.

Позначимо ймовірність «неповернення» позики через *p*. Прирівнюючи чисті доходи варіантів *A* і *B*:

$17250 \cdot (1-p) + 0 \cdot p - 15000 = 2250 - 17250 \cdot p = 1350,$

отримаємо $p=0,052$.

Близькість отриманого результату до вихідного $p = 0,04$ вказує на те, що вибір рішення дуже чутливий до даних про ймовірності «неповернення», і навіть мала помилка може призвести до вибору іншого варіанту рішення.

1.3 Завдання до практичного заняття

Задача 1. Дано: для фінансування проекту бізнесмену потрібно зайняти терміном на один рік N у.о. Банк може позичити йому ці гроші під X % річних або вкласти в справу зі 100% -вим поверненням суми, але під Y % річних. З минулого досвіду банкіру відомо, що M % таких клієнтів позичку не повертають.

Яке рішення прийняти: чи давати позику?

Варіант	Кредит **N**, тис. $	Відсоток, **X** %	Відсоток **Y**, %	Відсоток **M**, %
1	30	12%	7%	5%
2	25	15%	9%	3%
3	20	11%	6%	4%
4	15	13%	8%	6%
5	50	10%	5%	2%
6	10	19%	12%	7%
7	45	17%	11%	3%
8	40	14%	8%	4%
9	35	16%	9%	5%
10	30	18%	10%	6%

Задача 2. Скласти «Дерево» для прийняття рішень за темою магістерської роботи щодо етапу синтезу структури, параметричного синтезу, або для задачі вибору програмного забезпечення для аналізу/моделювання об’єктів дослідження.

Спрогнозувати числові значення для гілок дерева.

1.4 Контрольні запитання

1 Що таке теорія прийняття рішень (ТПР) ?

2 Що таке ризики в ТПР?

3 Назвіть етапи побудови дерева рішень?

4 Надайте критерії оптимальності системи (за вибором).

5 Покажіть на прикладі, як можна розділити критерії на «Ціну» та «Якість» до обраного об'єкту дослідження.

6 Обґрунтуйте доцільність використання методу «Дерева рішень» для структурного синтезу систем.

7 Побудуйте «Дерево рішень» для задачі проектування технічного об'єкту (дає викладач).

2 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2 «ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ»

2.1 Мета роботи

Застосування моделей лінійного програмування (ЛП) для дослідження завдання прийняття рішення: постановка задачі ЛП у рамках теорії прийняття рішень.

2.2 Методичні вказівки до виконання завдання

Лінійна оптимізація (лінійне програмування) – розділ математики, присвячений методам розв'язання екстремальних задач з лінійною залежністю між змінними. Лінійна оптимізація застосовується для розв'язання задач із **лінійними обмеженнями**, такі задачі називаються задачами Лінійного програмування (ЗЛП).

Розглянемо приклади застосування ЗЛП.

Визначення максимального прибутку

Нехай на деякому виробництві виготовляється n видів продукції в кількості $x_1, x_2, \ldots, x_n$ одиниць кожного виду по ціні за кожен відповідно $c_1, c_2, \ldots, c_n$ умовних одиниць. При цьому витрачається m видів сировини, запаси якої є в кількості $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Витрата сировини i-го виду на продукцію j-го виду дорівнює a_{ij}.

Потрібно визначити обсяг випуску продукції $x_1, x_2, \ldots, x_n$ одиниць, при якому загальний прибуток виробництва буде максимальним, а витрати сировини не перевищать наявні запаси.

Складемо схему завдання.

Сировина	Продукція				Запаси сировини
	x_1	x_2	…	x_n	
Сировина 1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
Сировина 2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
Сировина m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Ціна за од.	c_1	c_2	…	c_n	

Математична модель задачі лінійного програмування для визначення максимального прибутку виробництва має вигляд (цільова функція з системою нерівностей, що є набором обмежень для ЗЛП):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0; \ldots;\ x_n \ge 0, \end{cases}$$

де – цільова функція.

Стандартна форма ЗЛП формулюється так: «Знайти значення цільової функції (ЦФ)», тобто знайти такі значення *x*, при яких ЦФ буде максимальною/мінімальною:

при обмеженнях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, & i = \overline{1,m}; \\ x_j \ge 0, & j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

У матричному вигляді задачу лінійного програмування про оптимальний випуск продукції за наявності певного обсягу сировини можна записати як:

$$f(X) = CX \to max,$$
$$\{AX \le B, \quad x_j \ge 0;$$

або

$$f(X) = CX \to min,$$
$$\{AX \ge B, \quad x_j \ge 0;$$

де обмеження можна записати в матричній формі:

Канонічна форма задачі лінійного програмування

Задача лінійного програмування в загальному випадку записується так, що обмеженнями можуть бути як рівняння, так і нерівності.

У тому випадку, коли всі обмеження є рівняннями і всі змінні задовольняють умові невід'ємності, задачу лінійного програмування називають **канонічною**. Вона може бути представлена в координатному, векторному і матричному запису.

Канонічна задача лінійного програмування в координатному запису має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_{n+m} \ge 0, \end{cases}$$

де змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ називаються *вільними* змінними, а $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ – *базисними* змінними, оскільки входять тільки в одне з рівнянь обмежень.

Для отримання канонічної форми ЗЛП необхідно в кожне рівняння ввести додаткову базисну змінну, для чого існує два способи.

Якщо обмеження мають вид

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1,$$

то змінну додають, тобто

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

якщо обмеження

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ge b_1,$$

то змінну віднімають, тобто

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1.$$

2.3 Завдання до практичного заняття

Сформуйте ЗЛП для розв’язання конкретної задачі. Отримати канонічну форму ЗЛП. Запропонуйте метод для розв’язання поставленої задачі (аргументувати).

Варіанти завдань:

1. сформулювати концепцію організації оптимального виробництва;
2. скласти схему завдання для задачі виготовлення технічного об’єкту (друкованої плати, корпусу для електронного пристрою, вимірювальної системи тощо);
3. сформулювати обмеження для ЗЛП;
4. скласти математичну модель ЗЛП для даного об’єкту;
5. отримати ЗЛП в канонічній формі;
6. отримати ЗЛП в матричній формі.

2.4 Контрольні запитання

1 Що таке оптимізація?

2 Які види оптимізації ви знаєте?

3 Чим задачі лінійного програмування відрізняються від задач нелінійної оптимізації?

4 Що таке параметрична оптимізація в процедурах проектування технічних об’єктів?

5 Види обмежень в задачах оптимізації?

6 Як отримати канонічну форму ЗЛП

7 Які методи розв’язання ЗЛП ви знаєте?

3 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3 «ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗЛП»

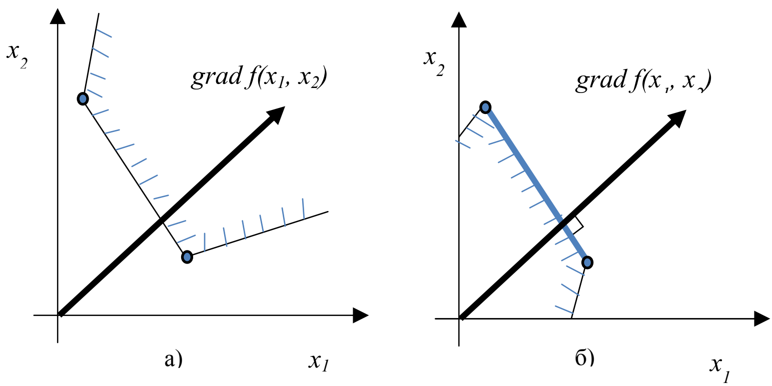
3.1 Мета роботи

Дослідження алгоритму розв’язання ЗЛП графічним способом.

3.2 Методичні вказівки до виконання завдання

Завдання лінійного програмування можна вирішити графічним способом, якщо є тільки дві змінні x_1 та x_2. При кількості змінних $n\geq 3$ розв’язання ЗЛП графічним способом здійснити важко, тому застосовується симплекс-метод.

Розв’язок поставленої задачі знаходиться всередині області, обмеженою нерівностями і умовою незаперечності змінних. При цьому оптимальне рішення досягається у вершині отриманої області, в якій перпендикуляр, опущений з вершини на вектор-градієнт цільової функції $grad\ f(x)=(c_1, c_2)$, відсікає на ньому відрізок максимальної довжини. Приклад графічного розв’язання ЗЛП наведене на рисунку 3.1.



а) немає рішення; б) рішень нескінченно багато

Рисунок 3.1 − Графічне розв’язання ЗЛП

Завдання лінійного програмування може не мати рішень в разі необмеженості зверху області рішення при знаходженні максимуму (аналогічно, знизу при знаходженні мінімуму), або мати нескінченно багато рішень в разі, коли оптимум досягається в двох сусідніх вершинах, адже тоді він досягається в будь-якій точці відрізка, що з'єднує ці вершини.

Єдине рішення можливе за умови обмеженості області рішень, тоді перпендикуляр, що відтинає на векторі-градієнті відрізок максимальної довжини, показує точку оптимуму *(min, max)*.

Наведемо алгоритм розв’язання ЗЛП графічним методом.

1. Побудувати прямі, відповідні до рівнянь обмежень.

2. Визначити область нижче або вище лінії в залежності від виду нерівності, що визначає обмеження.

3. Визначити область можливих рішень як область, обмежену нерівностями і умовою незаперечності змінних.

4. Накреслити вектор-градієнт $grad\ f(x)=(c_1, c_2)$.

5. З кожної вершини області можливих рішень опустити перпендикуляри на вектор-градієнт.

6. Визначити вершину, з якої перпендикуляр відсікає на градієнті відрізок максимальної довжини.

7. Знайти координати вершини оптимуму, як точки перетину двох рівнянь обмежень.

8. Підставити значення знайденої вершини в цільову функцію і отримати оптимальне значення цільової функції.

Приклад 1.

Вирішити графічно задачу лінійного програмування задану в формі:

(3.1)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9; \\ x_1 + 2x_2 \le 16; \\ 3x_1 + x_2 \le 21; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Висловимо x_2 в кожній нерівності, які задають обмеження 3.2:

$$\begin{cases} x_2 \le 9 - x_1; \\ x_2 \le 8 - 0{,}5x_1; \\ x_2 \le 21 - 3x_1. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Будуємо таблицю координат для побудови трьох прямих (три лінійні обмеження відповідають трьом прямим лініям на площині):

1:

x_1	0	9
x_2	9	0

2:

x_1	0	16
x_2	8	0

3:

x_1	0	7
x_2	21	0

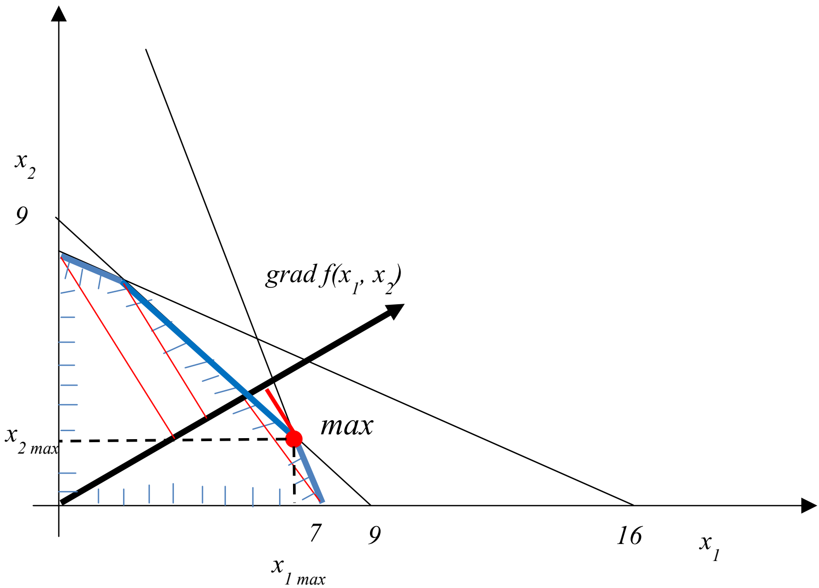


Рисунок 3.2 − Розв’язання ЗЛП графічним методом

Як бачимо, перпендикуляр побудований до градієнта з вузла, отриманого перетином прямих 1 та 3, відсікає на цьому градієнті відрізок максимальної довжини. Отже, це точка максимуму.

Залишилося визначити координати цієї точки $max(x_{1\,max}, x_{2\,max})$.

Для цього розв’яжемо систему рівнянь з першого та третього обмеження (див. 3.3):

$$\begin{cases} x_2 = 9 - x_1; \\ x_2 = 21 - 3x_1. \end{cases}$$

Оскільки ліві частини однакові, то рівні й праві. Таким чином,

$$9 - x_1 = 21 - 3x_1$$

Звідси

$$x_1 = 6;$$
$$x_2 = 9 - x_1 = 3.$$

Отже, оптимальне значення цільової функції досягається в точці з координатами *max(6; 3)*.

Підставляємо отримані координати в (3.1) і отримуємо значення цільової функції:

$$f(6;\ 3)=5\cdot 6+3\cdot 3=30+9=39.$$

3.3 Завдання до практичного заняття

Побудувати в декартовій системі координат область рішень задачі лінійного програмування, із системою нерівностей-обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3,\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

і графічно визначити найменше та найбільше значення цільової функції в цій області

$$f(x_1,x_2)= c_1x_1 + c_2x_2$$

Варіанти:

1) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 7 \\ -x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \end{cases}$
$f = x_1 + 2x_2$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 25 \\ 3x_1 - 5x_2 \le 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 26 \end{cases}$
$f = 2x_1 + x_2$

3) $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 16 \\ -x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 7x_2 \ge 9 \end{cases}$
$f = 2x_1 + 3x_2$

4) $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 40 \\ -5x_1 + 4x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \end{cases}$
$f = x_1 + x_2$

5) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 27 \end{cases}$
$f = x_1 + 2x_2$

6) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \end{cases}$
$f = x_1 + 2x_2$

7) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 3x_1 - 5x_2 \le 5 \\ 5x_1 + 3x_2 \ge \end{cases}$
$f = 2x_1 + x_2$

8) $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 11 \\ -x_1 + 3x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 7x_2 \ge 11 \end{cases}$
$f = 2x_1 + 3x_2$

9) $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 28 \\ -5x_1 + 4x_2 \le 7 \\ x_1 + 2x_2 \ge 5 \end{cases}$
$f = x_1 + x_2$

10) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 20 \end{cases}$
$f = x_1 + 2x_2$

11) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 7 \\ -x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \end{cases}$
$f = 2x_1 + x_2$

12) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 15 \\ -3x_1 - 5x_2 \le 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 26 \end{cases}$
$f = 2x_1 + 3x_2$

3.4 Контрольні запитання

1 Умови адекватного застосування використання графічного методу розв’язання ЗЛП.

2 Подайте умови знаходження розв’язку ЗЛП.

3 Алгоритм розв’язання ЗЛП графічним методом.

4 Як формувати систему обмежень, що вони означають?

5 В яких випадках ЗЛП не має розв’язку?

4 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4 «ВИКОРИСТАННЯ MICROSOFT EXCEL ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ»

4.1 Мета роботи

Навчитися використовувати Microsoft EXCEL для розв'язання задач лінійного програмування.

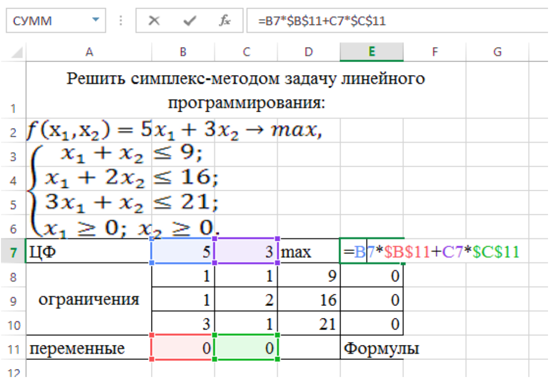
4.2 Методичні вказівки до виконання завдання

Наведемо алгоритм розв'язання задачі лінійного програмування за допомогою надбудови «Пошук рішення» Microsoft Excel.

Нехай ЦФ $f(x_1,x_2)= c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow max$ має обмеження:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9; \\ x_1 + 2x_2 \le 16; \\ 3x_1 + x_2 \le 21; \\ x_1 \ge 0; \; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Заповнимо таблицю EXCEL коефіцієнтами при x, значення цих змінних покладемо рівними 0 і введемо формули (рис. 4.1):


СУММ | =B7*B11+C7*C11

	A	B	C	D	E	F	G
1	Решить симплекс-методом задачу линейного программирования:						
2	$f(x_1,x_2) = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow max,$						
3	$x_1 + x_2 \le 9;$						
4	$x_1 + 2x_2 \le 16;$						
5	$3x_1 + x_2 \le 21;$						
6	$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$						
7	ЦФ	5	3	max	=B7*B11+C7*C11		
8	ограничения	1	1	9	0		
9		1	2	16	0		
10		3	1	21	0		
11	переменные	0	0		Формулы		
12							

Рисунок 4.1 − Заповнення таблиці і формул за умовою задачі

Відкриємо надбудову «Пошук рішення». Заходимо в меню Файл –> Параметри –> Надбудови –> Надбудови Excel (кнопка «Перейти») –> Пошук рішення (у вікні ставимо прапорець навпроти рядка «Пошук рішення», як показано на рис. 4.2).

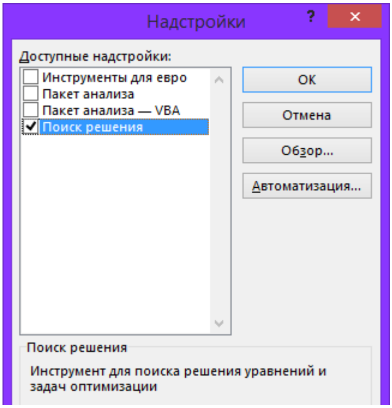


Рисунок 4.2 – Додавання надбудови «Пошук рішення»

Переходимо у вікно «Пошук рішення», для цього відкриваємо закладку «Дані» і в правому верхньому куті знаходимо «Пошук рішення» (рис. 4.3).

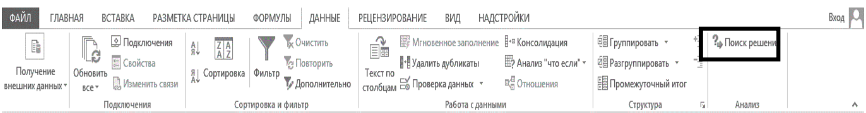


Рисунок 4.3 – Розташування в меню надбудови «Пошук рішення»

У вікні, що відкрилося, визначаємо цільову комірку, задаємо її значення як максимальне, в якості осередків, що змінюються виділяємо 0, що відповідають значенням змінних. Додаємо обмеження на формули і в разі необхідності додаємо умови цілочисельності значень змінних (рис. 4.4 та 4.5).

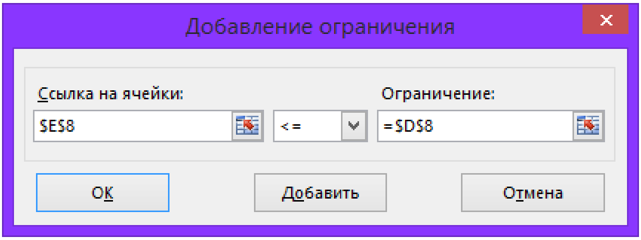


Рисунок 4.4 – Обмеження на формули

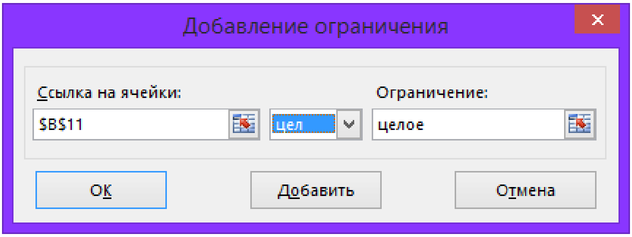


Рисунок 4.5 – Обмеження цілісності на значення змінних

Отримуємо завдання, записане в вікні, як показано на рис. 4.6.

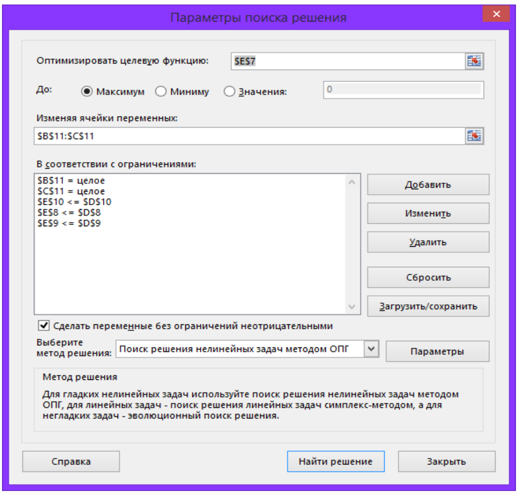


Рисунок 4.6 – Введення даних у вікні «Пошук рішення»

Після натискання на кнопку «Знайти рішення», отримуємо результат рішення задачі лінійного програмування (рис. 4.7).

З'являється вікно «Результати пошуку рішення», де можна додатково вибрати «Зберегти знайдене рішення» або «Відновити вихідні значення». Обираємо варіант: «Зберегти знайдене рішення».

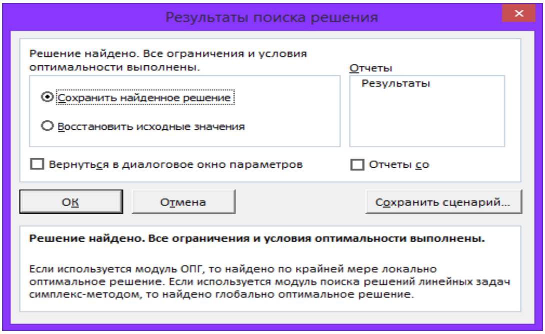
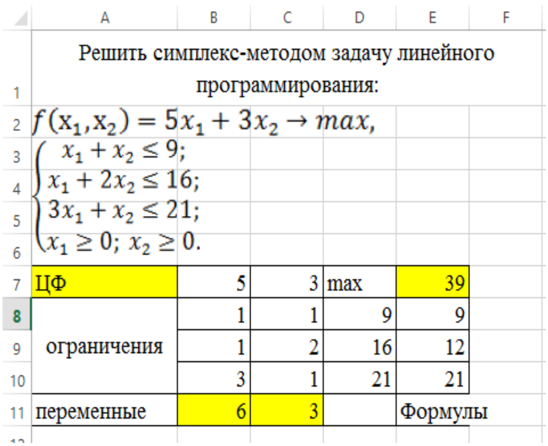


Рисунок 4.7 – Вікно «Результати пошуку рішення»

Натискаємо кнопку «ОК», отримуємо результат рішення, показаний на рис. 4.8.



Решить симплекс-методом задачу линейного программирования:

$$f(x_1,x_2) = 5x_1 + 3x_2 \to max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9; \\ x_1 + 2x_2 \le 16; \\ 3x_1 + x_2 \le 21; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

	A	B	C	D	E	F
7	ЦФ	5	3	max	39	
8	ограничения	1	1	9	9	
9		1	2	16	12	
10		3	1	21	21	
11	переменные	6	3		Формулы	

Рисунок 4.8 – Результат розв’язання ЗЛП

Отже, при $x_1=6$ і $x_2=3$ отримуємо максимальне значення цільової функції $f(6;\ 3)=39$ (порівняйте із результатом, отриманим графічним методом в л.р.3.

4.3 Завдання до практичного заняття

Задача. Для виробництва продукції *A* і *B* використовується три види сировини. Виробництво одиниці продукції *A* вимагає витрат сировини виду – a_1 кг, сировини другого виду – a_2 кг, сировини третього виду – a_3 кг. На виробництво одиниці продукції *B* необхідно витратити сировини першого виду b_1 кг, сировини другого виду – b_2 кг, сировини третього виду – b_3 кг.

Виробництво забезпечене сировиною першого виду в кількості p_1 кг, другого виду – p_2 кг, третього виду – p_3 кг.

Прибуток від реалізації одиниці готового товару становить: для продукції *A* – α грн., для продукції *B* – β грн.

Скласти план виробництва продукції *A* і *B*, який забезпечує максимальний прибуток від їх реалізації. Розв’язати завдання за допомогою надбудови Microsoft Excel «Пошук рішення».

Варіанти:

1)	$a_1 = 12;$	$в_1 = 3;$	$p_1 = 264;$		
	$a_2 = 4;$	$в_2 = 5;$	$p_2 = 136;$	$\alpha = 6;$	$\beta = 4$
	$a_3 = 3;$	$в_3 = 266:$	$p_3 = 266;$		
2)	$a_1 = 15;$	$в_1 = 2;$	$p_1 = 300;$		
	$a_2 = 12;$	$в_2 = 6;$	$p_2 = 306;$	$\alpha = 9;$	$\beta = 6$
	$a_3 = 3;$	$в_3 = 12;$	$p_3 = 360;$		
3)	$a_1 = 14;$	$в_1 = 5;$	$p_1 = 350;$		
	$a_2 = 14;$	$в_2 = 8;$	$p_2 = 392;$	$\alpha = 10;$	$\beta = 5$
	$a_3 = 6;$	$в_3 = 12;$	$p_3 = 408;$		

4) $a1 = 16;$ $в1 = 4;$ $p1 = 400;$

$a2 = 9;$ $в2 = 9;$ $p2 = 333;$ $\alpha = 9;$ $\beta = 12$

$a3 = 5;$ $в3 = 12;$ $p3 = 360;$

5) $a_1 = 8;$ $в_1 = 6;$ $p_1 = 192;$

$a_2 = 4;$ $в_2 = 9;$ $p_2 = 144;$ $\alpha = 8;$ $\beta = 9$

$a_3 = 3;$ $в_3 = 9;$ $p_3 = 135;$

6) $a_1 = 14;$ $в_1 = 4;$ $p_1 = 252;$

$a_2 = 4;$ $в_2 = 4;$ $p_2 = 120;$ $\alpha = 30;$ $\beta = 40$

$a_3 = 2;$ $в_3 = 12;$ $p_3 = 240;$

7) $a_1 = 15;$ $в_1 = 4;$ $p_1 = 225;$

$a_2 = 5;$ $в_2 = 3;$ $p_2 = 100;$ $\alpha = 6;$ $\beta = 8$

$a_3 = 3;$ $в_3 = 8;$ $p_3 = 192;$

8) $a_1 = 16;$ $в_1 = 2;$ $p_1 = 304;$

$a_2 = 3;$ $в_2 = 2;$ $p_2 = 83;$ $\alpha = 10;$ $\beta = 12$

$a_3 = 6;$ $в_3 = 15;$ $p_3 = 375;$

9) $a_1 = 13;$ $в_1 = 2;$ $p_1 = 260;$

$a_2 = 4;$ $в_2 = 4;$ $p_2 = 124;$ $\alpha = 12;$ $\beta = 10$

$a_3 = 3;$ $в_3 = 14;$ $p_3 = 280;$

10) $a_1 = 15;$ $в_1 = 2;$ $p_1 = 285;$

$a_2 = 4;$ $в_2 = 3;$ $p_2 = 113;$ $\alpha = 15;$ $\beta = 9$

$a_3 = 4;$ $в_3 = 14;$ $p_3 = 322;$

4.4 Контрольні запитання

1 Які методи розв’язання ЗЛП ви знаєте?

2 Симплекс метод для розв’язання ЗЛП.

3 Можливості надбудови «Пошук рішення» EXCEL для розв’язання ЗЛП.

4 Який вид обмежень можна використовувати при розв’язанні задач оптимізації в EXCEL?

5 Адаптуйте розглянуту вище задачу для розв’язання її в Math-cad.

6 Які методи розв’язання ЗЛП можна використовувати в Math-cad?

7 Дайте конкретний приклад ЗЛП для виготовлення технічного об’єкту.

8 Чому транспортну задачу виділяють в окрему задачу ЗЛП?

9 Алгоритми розв’язання транспортної задачі.

10 Що таке параметрична оптимізація технічних об’єктів?

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Базова

1. **Баскаков, А. Я.** Методология научного исследования: учеб. пособие. [Текст] / А. Я.Баскаков, Н. В. Туленков – Киев: МАУП, 2002. – 216 с.
2. **Бірта, Г. О.** Методологія і організація наукових досліджень: навч. посібник для студентів вищ. навч. закладів. [Текст] / Г. О.Бірта, Ю. Г. Бургу – Київ: Центр учбової літератури, 2014. – 142 с.
3. **Кононюк, А. Е.** Основы научных исследований: общая теория эксперимента : в 4 кн. Кн. 1. [Текст] / А. Е. Кононюк – Электронные данные. – Киев: КНТ, 2010. – 508 с.
4. **Крушельницька, О. В.** Методологія та організація наукових досліджень: навч. посібник для вищ. навч. закладів. [Текст] / О. В. Крушельницька – Київ: Кондор, 2009. – 206 с.
5. **Лудченко, А. А.** Основы научных исследований: учебное пособие / [Текст] / А. А. Лудченко, Я. А. Лудченко, Т. А. Примак под ред. А. А. Лудченко. – Киев: Знання, 2000. – 114 с.
6. **Палеха, Ю. І.** Основи науково−дослідної роботи: навчальний посібник для вищ. навч. закл.: рек. МОНУ. [Текст] / Ю. І. Палеха, Н. О. Леміш – К.: Ліра − К, 2013. – 332 с.
7. **Пилипчук, М. І.** Основи наукових досліджень: підручник. [Текст] / М. І. Пилипчук, А. С. Григор'єв, В. В. Шостак. – К.: Знання, 2007. – 270 с.
8. **Романчиков, В. І.** Основи наукових досліджень: навч. посібник. [Текст] / В. І. Романчиков – Київ: Центр учбової літератури, 2007. – 254 с.
9. **Стеченко, Д. М.** Методологія наукових досліджень: підручник. [Текст] / Стеченко, Д. М. Чмир О. С. – 2−ге вид., перероб. і доп. – К.: Знання, 2007. – 317 с.
10. **Тормоса, Ю. Г.** Основи наукових досліджень: навч.−метод. посіб. для самост. вивч. дисц. [Текст] / Ю. Г. Тормоса – Київ: КНЕУ, 2003. – 76 с.
11. **Третяк, О. В.** Засоби та системи автоматизації наукових досліджень [Текст]: підручник для студентів вищ. навч. закладів / О. В. Третяк, Ю. В. Бойко, за ред. О. В. Третяка. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2007. – 319 с.

12. **Філіпенко, А. С.** Основи наукових досліджень: конспект лекцій: посібник для студентів вищ. навч. закл. [Текст] / А. С. Філіпенко – Київ: Академвидав, 2004. – 208 с.
13. **Цехмістрова, Г. С.** Основи наукових досліджень: навч.посібник для студентів вищих навч. закладів. [Текст] / Г. С. Цехмістрова – Київ: Слово, 2004. – 240 с.
14. **Заиченко, Ю.П.** Исследование операций [Текст] / Ю.П. Заиченко. – К.: Издательский дом "Слово", 2007. – 688 с.

Допоміжна

15. **Кислий, В. М.** Організація наукових досліджень: навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл.: рек. МОНУ. [Текст] / В. М. Кислий – Суми: Університетська книга, 2011. – 224 с.
16. **Шейко, В. М.** Організація та методика науково–дослідницької діяльності: підручник для студентів вищ. навч. закладів. [Текст] / В. М.Шейко, Н. М. Кушнаренко – 5-те вид. – Київ: Знання, 2006. – 307 с.
17. **Шишка, Р. Б.** Організація наукових досліджень та підготовки магістерських і дисертаційних робіт: навчальний посібник. [Текст] / Р. Б. Шишка – Харків: Еспада, 2007. – 368 с.

Інформаційні ресурси

18. **Храмов, Д.** Теория принятия решений [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://dkhramov.dp.ua/uploads/Stu/TPR
19. Угода між Україною і Європейським Союзом про участь України у Рамковій програмі Європейського Союзу з наукових досліджень та інновацій "Горизонт 2020", [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon3.rada.gov.ua/ laws/show/604-19
20. ЗАКОН УКРАЇНИ Про наукову і науково-технічну діяльність Відомості Верховної Ради (ВВР), 2016, № 3, ст.25 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/848-19
21. Системне моделювання в економіці [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://csc.knu.ua/en/library/books/vergunova-39.pdf
22. Дякон, В.М. Моделі і методи теорії прийняття рішень [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://lib.udau.edu.ua/bitstream /123456789/512/4/Model_metod_TPR.pdf

Додаток А
Методи параметричної оптимізації

Параметрична оптимізація – це пошук таких параметрів системи, при яких цільова функція набуває екстремального (min, max), або якогось певного значення. Синтез параметрів системи також відноситься до задач параметричної оптимізації, хоча цей етап проектування систем і менш алгоритмізований. Значна кількість методів параметричної оптимізації автоматизована, особливо при наскрізному проектуванні технічних об'єктів, зокрема при проектуванні мікроелектронних приладів та пристроїв в середовищі призначених для цього програм, наприклад класу ECAD.

На даний момент існує безліч методів або алгоритмів оптимізації (переважно пошуку екстремуму цільової функції ЦФ (objective function)), а також допоміжних технік (використовуваних при оптимізації), що реалізовані на різних мовах програмування (Algol, Fortran, Pascal, Python, Ada, Forth, Lisp, Java, Prolog, C, C++ тощо):

- метод бінарного пошуку або дихотомії, Фібоначчі, золотого перетину, січних, перебору по сітці, метод Мюллера, метод конфігурацій, спряжених напрямків (паралельних дотичних) або метод Пауела (Powell), Нелдера-Міда (Nelder–Mead) або метод амеби чи симплекс-метод швидкісного спуску (деформованого багатогранника), прямого пошуку (Pattern search – пошук за шаблоном) або метод Хука-Дживса (Hooke-Jeeves), евристичний метод Луса-Джаколи (Luus-Jaakola), метод спряжених градієнтів (Conjugate gradient) або метод Флетчера-Рівза (Fletcher–Reeves), алгоритм Полака-Райбера (Polack-Ribiere), обертових координат Розенброка (Rosenbrock), метод відсікаючої площини (Cutting plane) або метод Келлі (Kelley), метод градієнтного пошуку (Gradient search), зокрема, найшвидшого спуску (steepest descent), покоординатного спуску (метод Гауса-Зейделя), алгоритм Ландвебера (Landweber), метод умовного (спрощеного) градієнта (conditional, reduced gradient method) або алгоритм Франк-Вольфа (Frank-Wolfe, створений Marguerite Frank та Philip Wolfe), субградієнтний метод, квазі-Ньютонівський метод змінної метрики Девідона-Флетчера-Пауела (Davidon-Fletcher-Powell, DFP-метод), метод SR1 (Symmetric Rank 1), метод Гауса-Ньютона (Gauss–Newton), алгоритм Левенберга-Марквардта (Levenberg-Marquardt) або метод затухаючих найменших квадратів (damped least-squares), метод Зойтендейка, BFGS-метод (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno), метод Ньютона-Рафсона (Newton-Raphson) з використанням Гессіана цільової функції;

- алгоритм імітації відпалу (Simulated annealing) або модельного загартування, альфа-бета відсікання (Alpha-beta pruning) як техніка збільшення ефективності алгоритму «мінімакс» (minimax), алгоритм аукціону (Auction algorithm), алгоритм летючої миші (Bat-inspired algorithm) [70], бджолиний алгоритм (Bees algorithm), алгоритм Бенсона (Benson's algorithm), BHHH-алгоритм (Berndt-Hall-Hall-Hausman), метод CMA-ES (Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy), «Criss-cross» алгоритм, алгоритм зозулі (Cuckoo search), алгоритм стратегії орла (Eagle strategy), алгоритм максимізації очікування (Expectation-maximization algorithm), Firefly-алгоритм, метод рою світлячків (Glowworm swarm optimization), метод каліброваної оптимізації (Graduated optimization), алгоритм великого потопу (Great Deluge algorithm), метод керованого локального пошуку (Guided Local Search), алгоритм пошуку гармонії (harmony search), алгоритм імперіалістичної конкуренції (Imperialist Competitive Algorithm), алгоритм розумних крапель (Intelligent Water Drops algorithm), метод внутрішніх точок (Interior point methods) з класу бар'єрних методів (Barrier methods) для вирішення лінійних та нелінійних опуклих задач оптимізації, IOSO-технологія (Indirect Optimization on the basis of Self-Organization), ітераційний локальний пошук (Iterated Local Search), як модифікація алгоритму сходження на вершину (hill climbing) для вирішення задач дискретної оптимізації, евристика кілера (Killer heuristic), як техніка підвищення ефективності методу альфа-бета відсікання, багаторівневий координатний пошук (Multilevel Coordinate Search) нульового порядку для задач глобальної оптимізації з крайовими обмеженнями, метод предиктора-коректора Меротри (Mehrotra's predictor–corrector method), як альтернативна реалізація методу внутрішніх точок, класи методів штрафних функцій (Penalty methods) та методів розширеного (доповненого) лагранжіану (Augmented Lagrangian methods), метод квантового відпалу (quantum annealing), евристична техніка реактивного пошуку (Reactive search optimization) для локальної оптимізації, техніка табу (Tabu search), як метаевристичний алгоритм для локального пошуку, інтерактивний метод Зайонца-Валеніуса (Zionts-Wallenius method) для багатокритеріальної оптимізації, метод гілок і меж (branch and bound);

- допоміжні алгоритми QR–розкладання (на базі модифікованого методу Грама-Шмідта, відображень Хаусхолдера чи обертань Гівенса), сингулярного розкладання (singular value decomposition), Кофмана-Грехема (Coffman–Graham), LU-факторизіції, спектрального розкладання, LU-скорочення, декомпозиції Холецького, розкладання Джордана, факторизації Такагі, перетворення Карунена-Лоева (Karhunen-Loeve) або метод головних компонент (Principal component analysis) для зменшення розмірності даних.

Означені методи оптимізації як правило слугують для перевірки прийнятих рішень при проектуванні і дослідженні систем на середніх рівнях абстракції їхніх моделей.

Всі техніки оптимізації можна класифікувати за різними категоріями; пропонується класифікація, що представлена таблицею А.1.

Таблиця А.1 – Класифікація методів оптимізації

Класифікація	Клас методів	Примітка (підкласи та приклади)
За наявністю обмежень на вектор варійованих параметрів	Безумовні	Без обмежень на вектор параметрів
	Умовні	З обмеженнями типу нерівностей
		З обмеженнями типу рівностей
		З обмеженнями загального вигляду
За розмірністю вектору параметрів	Одновимірні	Варіюється один параметр (методи Фібоначчі, дихотомії, золотого перетину та інші)
	Багато-параметричні	-//- більше одного параметра (метод Нелдера-Міда та інші)
За характером шуканого рішення	Локальні	Метод Хука-Дживса, Пауела та ін.
	Глобальні	Методи відсікаючої площини, імітації відпалу, гілок і меж
За характером цільової функції (ЦФ)	Стохастичні	ЦФ має випадкові параметри
	Детерміновані	ЦФ апріорно детермінована
За способом досягнення результату	Алгоритмічні	Симплекс-метод та інші
	Ітеративні	Метод Ньютона, внутрішніх точок
	Евристичні	Еволюційні алгоритми
За кількістю попередніх врахованих кроків	Однокрокові	Враховується 1 попередній крок
	Багатокрокові	-//- декілька попередніх кроків

За порядком використовуваних похідних	Нульового Порядку (прямі)	Пауелла, золотого перетину, Хука-Дживса, Нелдера-Міда
	Першого порядку (градієнтні)	Градієнтний спуск, BFGS-метод, Левенберга-Марквардта-1, методи DFP та SR1, спряжених градієнтів
	Другого порядку	З використанням Гессіана ЦФ: метод Ньютона, Ньютона-Рафсона