

Канд. физ.-мат. наук И. А. Костюшко<sup>1</sup>, канд. физ.-мат. наук С. П. Швыдка<sup>1</sup>,  
А. В. Куземко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный университет, <sup>2</sup>Национальный технический университет; г. Запорожье

## РОЛЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В СТАБИЛИЗАЦИИ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

*Дестабилизация равновесия неконсервативных систем малыми диссипативными силами обнаружена на примере рассмотрения двойного маятника с вязкоупругими шарнирами, на который действует следящая сила [1]. Дестабилизация также обнаруживается и при рассмотрении континуальных моделей. Например, в [2] рассматривается консольно закрепленный стержень, изготовленный из вязкоупругого материала, и на который действует следящая сила. Таким образом, в пространстве параметров этих задач существует область, в которой равновесие системы без диссипации устойчиво, а при наличии малой диссипации – неустойчиво. Эта область имеет конечную меру при стремлении коэффициента вязкости к нулю. В публикуемой работе анализируется возможность параметрической стабилизации неустойчивой прямолинейной формы консольно закрепленного стержня, на который действует следящая сила.*

**Ключевые слова:** вязкоупругий стержень, стабилизация, параметрический резонанс.

### Постановка задачи и уравнения движения

Рассматривается консольно закрепленный стержень, на свободный конец которого действует следящая сила  $P$  (рис. 1). Стержень изготовлен из вязкоупругого материала с законом деформирования Кельвина-Фойхта  $\sigma = E(e + \nu \dot{e})$ , где  $\sigma, e, E, \nu$  – соответственно напряжение, деформация, модуль упругости и время релаксации. Предполагается, что основание  $x = 0$  может совершать гармонические колебания вдоль невозмущенной прямой  $y = 0$  (прямолинейной формы) по закону  $x_0 = \varepsilon_0 \cos \omega t$ ,  $x_0$  – неподвижная ось, коллинеарная оси  $x$ .

Линеаризованное в окрестности прямоугольной формы  $y = 0$  уравнение движения стержня с граничными условиями имеет вид

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + m \varepsilon_0 \omega^2 \cos \omega t \frac{\partial y}{\partial x} = 0;$$

$$y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l, t) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l, t) = 0, \quad (1)$$

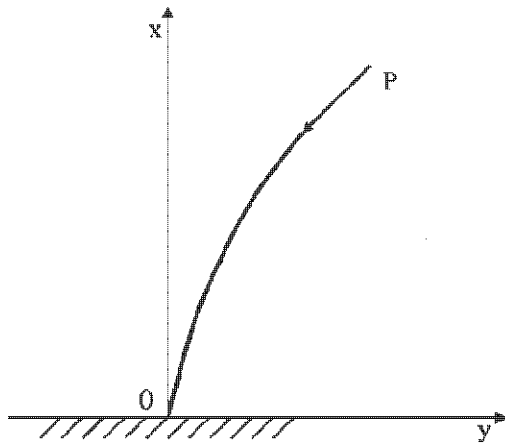


Рис. 1.

где  $EI$  – жесткость сечения стержня при изгибе,  $m$  – линейная плотность стержня.

**Редукция к системе дифференциальных уравнений**

Решение уравнения (1) ищем в виде ряда

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau) z_k(\xi), \quad \tau = \omega t, \quad \xi = x/l. \quad (2)$$

Функции  $z_k(\xi)$  являются решениями краевой задачи

$$\frac{d^4 z_k}{d\xi^4} - \lambda_k^2 \mu^2 z_k = 0, \quad \mu^2 = \frac{m\omega^2 l^4}{EI};$$

$$z_k(0) = \frac{dz_k}{d\xi}(0) = 0, \quad \frac{d^2 z_k}{d\xi^2}(l) = \frac{d^3 z_k}{d\xi^3}(l) = 0. \quad (3)$$

и имеют вид

$$z_k(\xi) = \gamma_k (\cos \delta_k \xi - ch \delta_k \xi) + sh \delta_k \xi - \sin \delta_k \xi;$$

$$\gamma_k = \frac{\sin \delta_k + sh \delta_k}{\cos \delta_k + ch \delta_k} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (4)$$

где  $\delta_k^2 = \lambda_k \mu$ , причем  $\delta_k$  являются корнями уравнения

$$ch \delta_k \cos \delta_k = -1 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Первые два наименьших корня уравнения (5) приближенно равны  $\delta_1 = 1,875$ ,  $\delta_2 = 4,694$ . Соответственно  $\gamma_1 = 1,362$ ,  $\gamma_2 = 0,982$ . Система функций  $\{z_k(\xi)\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) на отрезке  $[0, 1]$  удовлетворяет условию ортогональности

$$\int_0^1 z_k(\xi) z_i(\xi) d\xi = 0 \quad (i \neq k),$$

$$a_i = \int_0^1 z_i^2(\xi) d\xi \quad (i = k) \quad (6)$$

Подставляя (2) в исходное уравнение (1), умножая на  $z_i(\xi)$  и интегрируя от 0 до 1 и учитывая условие ортогональности (6), получим относительно  $u_k(\tau)$  бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Ограничимся рассмотрением системы двух уравнений для  $u_1(\tau)$ ,  $u_2(\tau)$ . Эта система такова

$$\ddot{u}_1 + k\mu^{-2} \delta_1^4 \dot{u}_1 + \mu^{-2} \delta_1^4 u_1 + p\mu^{-2} (e_{11} u_1 + e_{21} u_2) + \varepsilon \cos \tau (f_{11} u_1 + f_{21} u_2) = 0,$$

$$\ddot{u}_2 + k\mu^{-2} \delta_2^4 \dot{u}_2 + \mu^{-2} \delta_2^4 u_2 + p\mu^{-2} (e_{12} u_1 + e_{22} u_2) + \varepsilon \cos \tau (f_{12} u_1 + f_{22} u_2) = 0,$$

$$k = \frac{v\omega}{EI}, \quad p = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{l} \ll 1; \quad (7)$$

$$e_{ki} = a_i^{-1} \int_0^1 z_k''(\xi) z_i(\xi) d\xi,$$

$$f_{ki} = a_i^{-1} \int_0^1 z_k'(\xi) z_i(\xi) d\xi, \quad (k, i = 1, 2), \quad (8)$$

где точка означает производную по  $\tau$ . Малость  $\varepsilon$  означает, что амплитуда параметрического возбуждения мала по сравнению с длиной стержня.

Вычисления по формулам (8) приводят к числовым значениям:

$$e_{11} = 0,825, \quad e_{22} = -17,73, \quad e_{12} = 2,92, \quad e_{21} = 8,582,$$

$$f_{11} = 1,988, \quad f_{22} = 1,646, \quad f_{12} = 1,203, \quad f_{21} = -3,383.$$

Для модели упругого стержня ( $k = 0$ ) при отсутствии параметрического возбуждения ( $\varepsilon = 0$ ) прямолинейная форма  $y(x, t)$  устойчива при  $p < p_0 \cong 20,15$  [3]. В этом случае характеристическое уравнение системы (7) при  $k = \varepsilon = 0$  имеет две пары чисто мнимых корней  $\pm i\omega_1$ ,  $\pm i\omega_2$ , причем частоты  $\omega_1, \omega_2$  зависят от двух параметров  $\mu$  и  $p$ . Пусть теперь  $k > 0$ , а параметрическое возбуждение по-прежнему отсутствует:  $\varepsilon = 0$ . Применение критерия Рауса-Гурвица дает следующий результат. Условие асимптотической устойчивости сводится к положительности третьего гурвицева определителя  $\Delta_3$ , который приводится к виду

$$k^{-2} \delta_1^{-4} \delta_2^{-4} (\delta_2^4 - \delta_1^4)^{-1} \Delta_3 = \mu^{-8} f(p) + \mu^{-10} (\delta_2^4 - \delta_1^4)^{-1} (\delta_2^4 + \delta_1^4) [2\delta_2^4 \delta_1^4 + (e_{22} \delta_1^4 + e_{11} \delta_2^4)] k^2.$$

Коэффициент при  $k^2$  положителен, а функция  $f(p) = 473,12 - 37,11p - 1,459p^2$ . Неравенство  $f(p) > 0$  выполняется при  $p < p_1 \cong 9,328$  и при достаточно малом  $k \approx \varepsilon$  является условием асимптотической устойчивости.

Очевиден эффект падения критической нагрузки при наличии малой вязкости. Возникает задача о возможности стабилизации прямолинейной формы вязкоупругого стержня параметрическим возбуждением в области  $p_1 < p < p_0$ . Эта задача решается ниже.

### Комбинационные резонансы. Эффект стабилизации

Сделаем в системе (7) замену переменных

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e_{21}p}{\mu^2 \omega_2^2 - \delta_1^4 - pe_{11}} \\ \frac{e_{12}p}{\mu^2 \omega_1^2 - \delta_2^4 - pe_{22}} & 1 \end{pmatrix}.$$

После этой замены система (7) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{v}_1 + k\sigma(d_{11}^0 \dot{v}_1 + d_{21}^0 \dot{v}_2) + \omega_1^2 v_1 + \varepsilon \sigma \cos \tau (f_{11}^0 v_1 + f_{21}^0 v_2) &= 0, \\ \ddot{v}_2 + k\sigma(d_{12}^0 \dot{v}_1 + d_{22}^0 \dot{v}_2) + \omega_2^2 v_2 + \varepsilon \sigma \cos \tau (f_{12}^0 v_1 + f_{22}^0 v_2) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) коэффициенты  $d_{ij}^0, f_{ij}^0$  выражаются через  $e_{ij}, f_{ij}, \delta_1, \delta_2, p, \mu$ .

Границу устойчивости системы (9) будем искать методом осреднения. Для этого приведем систему (9) к стандартному виду многочастотной системы с помощью замены переменных  $v_i = r_i \sin \varphi_i, \dot{v}_i = r_i \omega_i \cos \varphi_i$  ( $i = 1, 2$ ). В новых переменных  $r_i, \varphi_i$  система (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \omega_1 + k\sigma(d_{11}^0 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + d_{21}^0 r_2 r_1^{-1} \omega_2 \omega_1^{-1} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) + \\ &+ \varepsilon \sigma \omega_1^{-1} (f_{11}^0 \sin^2 \varphi_1 + f_{21}^0 r_2 r_1^{-1} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \cos \tau, \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_2 + k\sigma(d_{12}^0 r_1 r_2^{-1} \omega_1 \omega_2^{-1} \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + d_{22}^0 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2) + \\ &+ \varepsilon \sigma \omega_2^{-1} (f_{12}^0 r_1 r_2^{-1} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + f_{22}^0 \sin^2 \varphi_2) \cos \tau, \\ \dot{r}_1 &= -k\sigma(d_{11}^0 \cos^2 \varphi_1 r_1 + d_{21}^0 \omega_2 \omega_1^{-1} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 r_2) - \\ &- \varepsilon \sigma \omega_1^{-1} (f_{11}^0 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 r_1 + f_{21}^0 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 r_2) \cos \tau, \\ \dot{r}_2 &= -k\sigma(d_{12}^0 \omega_1 \omega_2^{-1} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 r_1 + d_{22}^0 \cos^2 \varphi_2 r_2) - \\ &- \varepsilon \sigma \omega_2^{-1} (f_{12}^0 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 r_1 + f_{22}^0 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 r_2) \cos \tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим сначала комбинационный резонанс  $\omega_1 + \omega_2 - 1 = 0$ . Этому резонансу на плоскости  $(\mu, p)$  соответствует кривая (рис. 2). Введя расстройку  $\Delta_1 = \omega_1 + \omega_2 - 1$ ,  $\Delta_1 \approx \varepsilon$  и сделав замену переменных  $\varphi_1, \varphi_2, \tau \rightarrow \varphi_1, \varphi_2, \theta$ ,  $\theta = \varphi_1 + \varphi_2 - \tau$  приведем систему уравнений (10) к виду, в котором резонанс устранен за счет увеличения на единицу числа медленных переменных. Осредняя эту систему по быстрым переменным  $\varphi_1, \varphi_2$ , получим уравнения, описывающие эволюцию медленных переменных, для которых

сохранены прежние обозначения

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \Delta_1 - \frac{1}{4} \varepsilon \sigma f_{21}^0 \omega_1^{-1} r_2 r_1^{-1} \cos \theta - \frac{1}{4} \varepsilon \sigma f_{12}^0 \omega_2^{-1} r_1 r_2^{-1} \cos \theta, \\ \dot{r}_1 &= -\frac{1}{2} k \sigma d_{11}^0 r_1 - \frac{1}{4} \varepsilon \sigma \omega_1^{-1} f_{21}^0 r_2 \sin \theta, \\ \dot{r}_2 &= -\frac{1}{2} k \sigma d_{22}^0 r_2 - \frac{1}{4} \varepsilon \sigma \omega_2^{-1} f_{12}^0 r_1 \sin \theta. \end{aligned} \quad (11)$$

На границе устойчивости система (11) имеет ненулевое стационарное решение, которое находится из уравнений

$$\begin{aligned} 4\Delta_1 - \varepsilon \sigma f_{21}^0 \omega_1^{-1} r_2 r_1^{-1} \cos \theta - \varepsilon \sigma f_{12}^0 \omega_2^{-1} r_1 r_2^{-1} \cos \theta &= 0, \\ 2k d_{11}^0 r_1 + \varepsilon \omega_1^{-1} f_{21}^0 r_2 \sin \theta &= 0, \\ \varepsilon \omega_2^{-1} f_{12}^0 r_1 \sin \theta + 2k d_{22}^0 r_2 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Условием существования стационарного решения является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при  $r_1, r_2$  во втором и третьем уравнениях

$$4\omega_1 \omega_2 k^2 \chi - \varepsilon^2 \sin^2 \theta = 0, \quad \chi = \frac{d_{11}^0 d_{22}^0}{f_{12}^0 f_{21}^0}. \quad (13)$$

Заметим, что соотношение (13) может быть выполнено только при  $\chi > 0$ . Исключая  $r_1, r_2, \theta$  из уравнений (12) с учетом (13), получим, с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$ , уравнение границы области устойчивости

$$\varepsilon^2 = 4\omega_1 \omega_2 \chi \left[ 4\Delta_1^2 \mu^4 (\delta_1^4 + \delta_2^4)^2 + k^2 \right]. \quad (14)$$

Численный расчет показал, что на резонансной кривой  $\omega_1 + \omega_2 - 1 = 0$  параметр  $\chi > 0$  только при  $p_1 < p < p_0$ . Если  $0 < p < p_1$ , то  $\chi < 0$ . Отсюда следует, что граница устойчивости существует в области, где прямолинейная форма вязкоупругого стержня неустойчива. В качестве примера построения границы устойчивости была взята на резонансной кривой  $\omega_1 + \omega_2 - 1 = 0$  точка  $Q$ , которой отвечают значения параметров  $\mu = 21,87, p = 13$ . Граница устойчивости изображена в плоскости  $(p\mu^{-2}, \varepsilon)$  (рис. 2) при  $k = 10^{-2}$ .

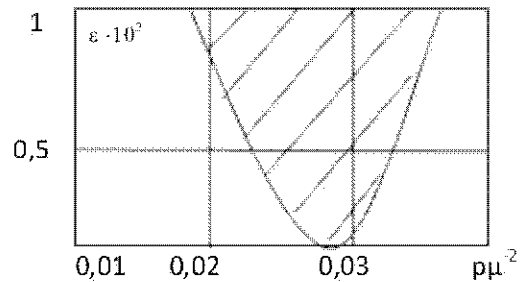


Рис. 2.

Область асимптотической устойчивости заштрихована.

Рассмотрим теперь другой комбинационный резонанс  $\omega_2 - \omega_1 - 1 = 0$  (рис. 3).

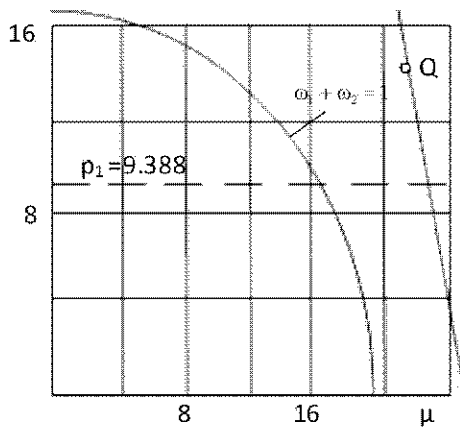


Рис. 3.

Проведя аналогичные вычисления, получим выражение для границы устойчивости

$$\varepsilon^2 = -4\omega_1\omega_2\chi \left[ 4\Delta_2^2\mu^4(\delta_1^4 + \delta_2^4)^2 + k^2 \right],$$

$$\Delta_2 = \omega_2 - \omega_1 - 1 \approx \varepsilon. \quad (15)$$

Вычисления показали, что  $\chi < 0$  в области  $0 < p < p_1$  и  $\chi > 0$  при  $p_1 < p < p_0$ . Это означает, что граница устойчивости существует в области асимптотической устойчивости, т.е. наличие резонанса  $\omega_2 - \omega_1 - 1 = 0$  приводит при параметрическом возбуждении к дестабилизации асимптотически устойчивой формы стержня.

**Костюшко І.А., Швидка С.П., Куземко А.В. Роль параметричного резонансу в стабілізації в'язкопружного стрижня під дією сили, що стежить**

*Дестабілізація рівноваги неконсервативних систем малими дисипативними силами виявлена на прикладі подвійного маятника з в'язкопружними шарнірами, на який діє сила, що стежить [1]. Дестабілізація також виявляється і при розгляданні континуальних моделей. Наприклад, у [2] розглядається консольно закріплений стрижень, виготовлений із в'язкопружного матеріалу, на який діє сила, що стежить. Таким чином, у просторі параметрів цих задач існує область, де рівновага системи без дисипації стійка, а при наявності малої дисипації – нестійка. Ця область має кінцеву міру при прагненні коефіцієнта в'язкості до нуля. У роботі аналізується можливість параметричної стабілізації нестійкої прямокутної форми консольно закріпленого стрижня, на який діє сила, що стежить.*

**Ключові слова:** в'язкопружний стрижень, стабілізація, параметричний резонанс.

**Kostushko I., Shvidkaya S., Kuzemko A. Parametric resonance role in the stabilization problem of the viscoelastic rod under the follow force action**

*The stability region of elastic rod is wider compared to small viscous rod. In the parameter space region exists in which equilibrium system without dissipation is stable, but with small dissipation is unstable. Problem of the stabilization by means of parametric excitation is analyzed.*

**Key words:** viscoelastic, rod, stabilization, parametric, resonance.

Отметим следующее важное обстоятельство. Исходный объект исследования описывается уравнением в частных производных (1). При применении метода разделения переменных, оно сводилось к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой ограничивались лишь двумя. Строго говоря, одна задача подменялась другой. Однако в задачах о параметрической неустойчивости (асимптотической устойчивости) имеет место близость показателя экспоненциального роста (убывания) решений уравнения (1) аналогичному показателю для конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В пределе, когда число уравнений  $n \rightarrow \infty$  они совпадают. Строгие формулировки и доказательства соответствующих теорем даны в [4].

Таким образом, рассмотрение комбинационных резонансов показало, что резонанс  $\omega_1 + \omega_2 - 1 = 0$  приводит к стабилизации неустойчивой формы упруговязкого стержня посредством параметрического возбуждения. Резонанс  $\omega_2 - \omega_1 - 1 = 0$ , наоборот, приводит к дестабилизации асимптотически устойчивой формы стержня.

**Список литературы**

1. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik / H. Ziegler // Ind. – Arch. 1952. Bd. 20. H. 1. P. 49–56.
2. Bolotin V.V. Effects of damping on stability on stability of elastic system subjected to non-conservative forces / V. V. Bolotin, N. I. Zhinzer // Intern. J. Solids and Structures. 1969. Vol. 5. – N 9. – P. 965–989.
3. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. – М. : Физматгиз, 1961. – 339 с.
4. Якубович В. А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. – М. : Наука, 1972. – 720 с.

Одержано 19.12.2011