

СЕКЦІЯ «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

УДК 539.371

Мастиновський Ю.В.¹, Анпілогов Д.І.², Щербіна О.А.³

¹ канд. техн. наук, проф. НУ «Запорізька політехніка»

² канд. техн. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

³ асист. НУ «Запорізька політехніка»

ПОЗДОВЖНІЙ УДАР ПО ПРУЖНОМУ ЗРІЗАНОМУ КОНУСУ

В даній роботі розглядається стрижень змінного перерізу, лінійні розміри якого малі порівняно з довжиною стрижня. Згідно з другим законом Ньютона рівняння руху можна подати у вигляді:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (F \sigma_x), \quad (1)$$

де $F(x)$ – площа поперечного перерізу (функція, що змінюється повільно),

$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x}$ – поздовжня напружка, E – модуль Юнга. Це рівняння зводиться

до наступного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{d}{dx} (\ln F(x)). \quad (2)$$

В якості прикладу хвильового руху стрижня змінного поперечного перерізу розв'яжемо задачу про поздовжній удар по зрізаному конусу скінченної довжини (рис. 1).

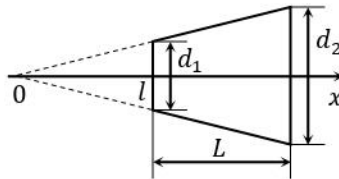


Рисунок 1 – Схема конусу.

Рівняння руху має безрозмірний вигляд

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = - \frac{2}{\xi} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad (3)$$

де $\xi = \frac{x}{L}$, $U = \frac{u}{L}$, $\tau = \frac{ct}{L}$, $(c^2 = \frac{E}{\rho})$.

Початкові і граничні умови приймемо у вигляді

$$\begin{aligned} \tau = 0, \quad \tau U = \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0, \quad h \leq \xi \leq h+1, \quad h = \frac{l}{L}; \\ \tau > 0, \quad \xi = h, \quad \frac{\partial U}{\partial \tau} = hV_0(\tau); \quad \xi = h+1, \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

Розрахунки проводились чисельно з використанням методу характеристик. Рівняння характеристик вихідного рівняння і диференціальні співвідношення на них визначаються виразами:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \pm 1; \quad d\left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right) \mp d\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) = \pm \frac{2}{\xi} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} d\xi. \quad (5)$$

Розрахунки проводились для $h=1$ і $V_0(\tau) = 0,25\tau e^{-\tau}$. Якісні закономірності розповсюдження хвиль досліджувались шляхом порівняння результатів, отримуваних при інших вихідних даних: $h=0,5$, $V_0 = \text{const} = 0,25$, а також з результатами випадку сталого перерізу ($d_1 = d_2$). В усіх випадках спостерігалось зменшення амплітуди хвилі аж до її відбиття.

Планується провести дослідження хвильового руху зрізаного конусу при ударі по основі більшого діаметру при аналогічних початкових і граничних умовах, а також розглянути стрижень іншого змінного перерізу.