

# **МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

Національний університет «Запорізька політехніка»

## **ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ**

до виконання РГР з вищої математики  
(розділи «Застосування похідної функції однієї змінної»,  
«Функції кількох змінних»)  
для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання

**2020**

Індивідуальні завдання до виконання РГР з вищої математики. (розділи «Застосування похідної функції однієї змінної», «Функції кількох змінних») для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання / Укл.: Килимник І.М., Полякова Т.Г.– Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2020 – 54 с.

Укладачі:                   Килимник І.М., к.т.н., доцент  
Полякова Т.Г., асистент

Рецензент: Онуфрієнко Л.М., к.ф.-м.н., доцент

Відповідальний за випуск:       Килимник І.М., к. т. н., доцент

Затверджено на засіданні кафедри  
вищої математики НУ «Запорізька  
політехніка»  
Протокол № 1 від 25.08.2020 р.

Рекомендовано НМК Машинобудівного  
факультету НУ «Запорізька  
політехніка»  
Протокол № 1 від 03.09.2020 р.

**ЗМІСТ**

|                                                |    |
|------------------------------------------------|----|
| Правила оформлення та виконання РГР            | 4  |
| 1 Застосування похідної функції однієї змінної | 5  |
| 1.1 Короткий виклад теоретичного матеріалу     | 5  |
| 1.2 Аудиторні завдання                         | 11 |
| 1.3 Індивідуальні завдання.                    | 15 |
| 2 Диференціювання функції двох змінних         | 25 |
| 2.1 Короткий виклад теоретичного матеріалу     | 25 |
| 2.2 Аудиторні завдання.                        | 29 |
| 2.3 Індивідуальні завдання                     | 33 |
| 3 Застосування похідних функції двох змінних   | 44 |
| 3.1 Короткий виклад теоретичного матеріалу     | 44 |
| 3.2 Аудиторні завдання.                        | 47 |
| 3.3 Індивідуальні завдання                     | 48 |
| Література                                     | 54 |

## **ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ТА ВИКОНАННЯ РГР ТА КР**

1. Студент виконує РГР в окремому зошиті у відповідності зі своїм варіантом (варіанти вказує викладач).
2. На обкладинці зошита треба записати назву теми РГР, номер академічної групи, прізвище, ім'я по батькові повністю та номер варіанта.
3. В РГР повинні бути розв'язані всі завдання, вказані викладачем. Розв'язання завдань необхідно записувати в порядку номерів завдань, зберігаючи їх послідовність. Умова задачі в завданні і розв'язування завдання записуються повністю (без скорочень). Відповідь у кожному завданні надається окремим рядком.
4. РГР подається викладачеві на перевірку і захищається студентом у терміни, визначені навчальним планом. РГР, виконана не за своїм варіантом, не зараховується.

# 1 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

## 1.1 Короткий виклад теоретичного матеріалу

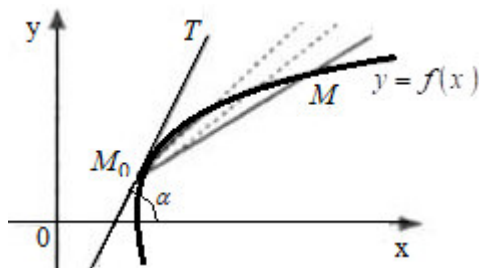
**Правило Лопіталя** дозволяє розкрити невизначеності, застосовуючи похідні. *Наприклад*, для  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$  і  $\left[\frac{0}{0}\right]$  матимемо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (1.1)$$

Невизначеності  $[\infty - \infty]$ ,  $[0 \cdot \infty]$ ,  $[\infty^n]$ ,  $[1^\infty]$  та інші спочатку зводяться до основних  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$  і  $\left[\frac{0}{0}\right]$ , а потім застосовується правило Лопіталя.

**Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції  $y = f(x)$  в заданій точці дотику**

Маємо криву, задану функцією  $y = f(x)$ . Зафіксуємо на кривій точку  $M_0(x_0, y_0)$ . Нехай точка  $M$ , рухаючись по кривій, наближається до точки  $M_0$ . При цьому січна  $M_0M$  буде повертатися навколо точки  $M_0$  і в граничному положенні при наближенні точки  $M$  до точки  $M_0$  займе положення прямої  $M_0T$ . Пряму  $M_0T$  називають дотичною до даної кривої в точці  $M_0$ .



**Означення 1.1** Дотичною  $M_0T$  до графіка функції  $y = f(x)$  називають граничне положення січної  $M_0M$ , коли точка  $M$ , рухаючись по кривій, наближається до точки  $M_0$ .

Слід мати на увазі, що не в усякій точці кривої можна провести до неї дотичну.

Дотична  $M_0T$  до цієї кривої  $y = f(x)$  проходить через точку  $M_0(x_0, y_0)$  і утворює з додатним напрямом осі  $Ox$  кут  $\alpha$ . З геометричного змісту похідної маємо  $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$ . Підставимо  $k = f'(x_0)$  в формулу  $y - y_0 = k(x - x_0)$ . Матимемо рівняння дотичної до кривої  $y = f(x)$  в точці  $M_0(x_0, y_0)$ :

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (1.2)$$

Якщо функція  $y = f(x)$  в точці  $M_0(x_0, y_0)$  має нескінченну похідну, то дотична в цій точці паралельна осі  $Oy$ , а її рівняння  $x = x_0$ . Якщо похідна функції  $y = f(x)$  в точці  $M_0(x_0, y_0)$  дорівнює нулю, то дотична в цій точці паралельна осі  $Ox$ , а її рівняння  $y = y_0$ .

**Означення 1.2** Нормаллю до кривої називають пряму, яка проходить перпендикулярно до дотичної через точку дотику.

З умова перпендикулярності прямих маємо, що для нормалі  $k = -\frac{1}{f'(x_0)}$ . Тоді рівняння нормалі до графіка кривої  $y = f(x)$  в точці  $M(x_0, y_0)$  матиме вигляд:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0). \quad (1.3)$$

## Екстремум функції $y = f(x)$ , інтервали монотонності

Введемо ще деякі поняття.

**Означення 1.3** Точки, в яких похідна функції  $y = f(x)$  дорівнює нулю, називаються *стаціонарними точками*.

**Означення 1.4** Точки, в яких похідна функції  $y = f(x)$  дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками цієї функції.

Отже, стаціонарні точки є підмножиною множини критичних точок.

**Теорема 1.1.** *Необхідна умова екстремуму.* Якщо точка  $x_0$  є точкою екстремуму функції  $y = f(x)$ , то в цій точці або похідна дорівнює нулю, або не існує.

Іншими словами, екстремуми функції містяться серед її критичних точок. Звертаємо увагу на те, що ці точки повинні входити в область визначення функції. Однак легко переконатись, що критична точка зовсім не обов'язково є точкою екстремуму.

**Теорема 1.2.** *Перша достатня умова екстремуму.* Якщо в околі критичної точки  $x_0$  похідна функції  $y = f(x)$  змінює знак, то точка  $x_0$  є екстремальною.

У цьому випадку при зміні знака похідної з "+" на "-" точка  $x_0$  є точкою локального максимуму, а при зміні знака похідної з "-" на "+" точка  $x_0$  є точкою локального мінімуму. Якщо знак похідної в околі критичної точки  $x_0$  не змінюється, то точка не є екстремальною.

**Теорема 1.3.** *Друга достатня умова екстремуму.* Якщо  $f'(x_0) = 0$  і в околі точки  $x_0$  існує неперервна друга похідна, причому  $f''(x_0) \neq 0$ , то при умові  $f''(x_0) > 0$  точка  $x_0$  є точкою локального мінімуму, а при  $f''(x_0) < 0$  — точкою локального максимуму.

**Теорема 1.4.** Якщо в кожній внутрішній точці проміжку  $(a, b)$  справедливо, що  $f'(x_0) > 0$ , то функція  $y = f(x)$  на цьому проміжку зростає, якщо  $f'(x_0) < 0$ , то функція  $y = f(x)$  на цьому проміжку спадає.

### Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Нехай функція  $y = f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  є неперервною. На цьому відрізку вона досягає найбільшого і найменшого значень або на кінцях відрізка при  $x = a$  чи  $x = b$ , або у критичних точках, що належать на відрізку  $[a, b]$ , які знайдені з умови: похідна функції  $f'(x_0)$  або не існує, або дорівнює нулю  $f'(x_0) = 0$ .

Для знаходження найбільшого і найменшого значень функції необхідно впевнитись, що вона неперервна на заданому відрізку. Знайти критичні точки. Визначити, які з них належать заданому відрізку. Знайти значення функції в них та на кінцях відрізка. Серед отриманих значень вибрати найбільше і найменше.

### Опуклість і вгнутість кривої $y = f(x)$ , точки перегину

**Означення 1.5** Крива  $y = f(x)$  називається *опуклою* на інтервалі  $(a, b)$ , якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі, тобто  $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$ .

**Означення 1.6** Крива  $y = f(x)$  називається *вгнутою* на інтервалі  $(a, b)$ , якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі, тобто  $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ .

**Означення 1.7** *Точкою перегину* називається точка кривої, що відділяє її опуклу частину від вгнутої.

**Теорема 1.5.** *Необхідна умова існування точки перегину.* Якщо  $x_0$  – абсциса точки перегину графіка функції  $y = f(x)$ , то друга похідна

в цій точці або дорівнює нулю, або не існує, тобто  $f''(x_0)=0$  або  $f''(x_0)$  не існує.

Точки, у яких друга похідна  $f''(x_0)$  дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками другого роду*.

**Зауваження.** Зворотнє твердження не завжди є вірним, тобто якщо  $f''(x_0)=0$  або  $f''(x_0)$  не існує, то точка з абсцисою  $x_0$  може і не бути точкою перегину.

**Теорема 1.6.** Достатня умова існування точки перегину. Якщо в околі критичної точки другого роду  $x_0$  функції  $y=f(x)$  друга похідна  $f''(x_0)$  змінює знак, то точка  $x_0$  є точкою перегину кривої  $y=f(x)$ .

### Асимптоти кривої

**Означення 1.8** Асимптотою кривої називається пряма до якої крива при віддаленні в нескінченність наближається як завгодно близько, але не перетинає її.

Асимптоти поділяють на вертикальні, похилі, горизонтальні.

**Означення 1.9** Графік функції  $y=f(x)$  має вертикальну асимптоту  $x=x_0$ , якщо границя функції, коли  $x \rightarrow x_0$ , нескінченна, тобто  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$ .

Крім цього точка  $x=x_0$  є точкою розриву II роду.

**Означення 1.10** Графік функції  $y=f(x)$  має похилу асимптоту

$$y=kx+b, \quad (1.4)$$

де

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ і } b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) \quad (1.5)$$

при умові, що обидві границі існують і скінченні.

У протилежному випадку похилих асимптот немає. Слід окремо розглядати випадки, коли змінна прямує до плюс нескінченності ( $x \rightarrow +\infty$ ) та мінус нескінченності ( $x \rightarrow -\infty$ ).

**Означення 1.11** Графік функції  $y = f(x)$  має горизонтальну асимптоту  $y = b$  тільки в тому випадку, коли границя функції при  $x \rightarrow +\infty$  або  $x \rightarrow -\infty$  існує, скінченна і дорівнює сталій:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

або  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ .

Знаходження границь в деяких випадках спрощується, якщо застосовувати правило Лопітала.

### Схема дослідження функції та побудова її графіка

Необхідно:

1. Знайти область визначення функції. Це дає змогу визначити ті точки осі абсцис, над якими пройде чи не пройде графік функції.

2. Знайти точки перетину графіка з координатними осями. Для цього треба розв'язати дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} y = f(x), \\ x = 0. \end{cases}$$

Перша система дає точки перетину з віссю  $Ox$ , друга – з віссю  $Oy$ .

3. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність. Якщо  $f(x \pm T) = f(x)$ ,  $T \neq 0$ , то функція  $y = f(x)$  періодична функція з періодом  $T$ . Якщо  $f(-x) = f(x)$ , то

функція  $y = f(x)$  парна і графік функції симетричний відносно осі  $Oy$ . Якщо  $f(-x) = -f(x)$ , то функція  $y = f(x)$  непарна і графік функції симетричний відносно початку координат. Якщо жодна з умов не справджується, то функція є ні парною, ні непарною і графік функції не буде мати ніякої симетрії.

4. Знайти асимптоти графіка функції.

5. Знайти екстремум функції та інтервали монотонності функції.

6. Знайти інтервали вгнутості та опуклості кривої, яка є графіком функції. Знайти точки перетину.

7. Побудувати графік функції.

## 1.2. Аудиторні завдання

1. Знайти границі функцій, користуючись правилом Лопітала.

|                                                                          |                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - 3e^{x^2} + 3}{4x^2}$         | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3tg^2 x - x^2}{x \cdot \sin 2x}$ |
| в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \cdot e^{2x} - 1}{5x - x^3}$ | г) $\lim_{x \rightarrow \infty} (6x^2 + 5) \cdot e^{-7x}$         |
| д) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \sin x}{ctg x}$                   | е) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x - 9}{\sqrt{x+2} - 2}$        |
| є) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$          | ж) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot tg \frac{\pi x}{2}$        |

Відповіді: а)  $-0.5$ , б)  $1$ , в)  $-0.2$ , г)  $0$ , д)  $0$ , е)  $2,25 \ln 3$ , є)  $0$ , ж)  $\frac{2}{\pi}$ .

2. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функцій в заданих точках:

|    |                           |           |            |
|----|---------------------------|-----------|------------|
| а) | $y(x) = x \cdot \ln x,$   | $x_0 = 1$ | $y_0 = 0$  |
| б) | $x^2 + y^2 = 25,$         | $x_0 = 4$ | $y_0 = -3$ |
| в) | $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x},$ | $x_0 = 2$ | $y_0 = 3$  |

Відповіді: а) дотична  $y = x - 1$ , нормаль  $y = 1 - x$ ;

б) дотична  $y = \frac{4}{3}x - \frac{25}{3}$ , нормаль  $y = -\frac{3}{4}x$ ;

в) дотична  $y = 3$ , нормаль  $x = 2$ .

2. Знайти екстремуми та інтервали монотонності функцій:

а)  $y = \frac{\ln x}{x}$ ,      б)  $y = \frac{e^{x+5}}{(x-1)^2}$ ,      в)  $y = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} - x$

Відповіді: а)  $y_{\max} = y(e) = \frac{1}{e}$ , зростає при  $x \in (0; e]$ , спадає при  $x \in [e; +\infty)$ ;

б)  $y_{\min} = y(3) = 0,25e^8$ , зростає при  $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$ , спадає при  $x \in (1; 3]$ ;

в)  $y_{\min} = y(1) = -1$ ,  $y_{\max} = y(2) = -0,5$ , зростає при  $x \in [1; 2]$ , спадає при  $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$ .

3. Знайти найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку:

|                                                            |
|------------------------------------------------------------|
| а) $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{x}, x \in [1; 4]$           |
| б) $y = x - \sin^2 x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ |
| в) $y = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2} - x, x \in [1; 4]$   |

Відповіді: а)  $y_{\text{найм}} = y(2) = 1$ ,  $y_{\text{найб}} = y(1) = y(4) = 1,25$ ;

$$\text{б) } y_{\text{найм}} = y(0) = 0, \quad y_{\text{найб}} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1;$$

$$\text{в) } y_{\text{найм}} = y(1) = -1, \quad y_{\text{найб}} = y(2) = -0,5.$$

4. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіка функції:

$$\text{а) } y = \frac{2x}{4-x^2}, \quad \text{б) } y = x \cdot e^{3x-2}.$$

Відповіді: а) точка перегину  $x=0, y(0)=0$ , інтервали опуклості  $x \in (-2; 0] \cup (2; +\infty)$ , інтервали вгнутості  $x \in (-\infty; -2) \cup [0; 2)$ ;

б) точка перегину  $x = -\frac{2}{3}, y\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}e^{-4}$ , інтервали опуклості  $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$ , інтервали вгнутості  $x \in \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ .

5. Знайти асимптоти графіків заданих функцій:

$$\text{а) } y = \frac{x^2 - 4x}{5x - 2}, \quad \text{б) } y = \frac{x+1}{9-x^2}.$$

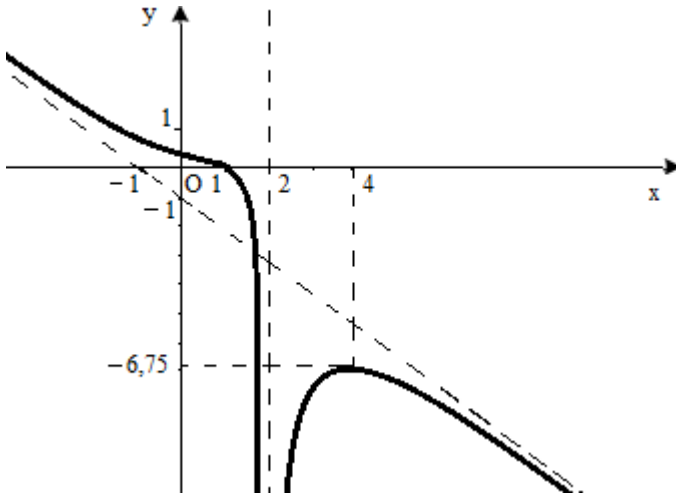
Відповіді: а) вертикальна асимптота  $x=0,4$ , похила асимптота  $y = \frac{1}{5}x - \frac{18}{25}$ ;

б) вертикальні асимптоти  $x=3, x=-3$ , горизонтальна асимптота  $y=0$ .

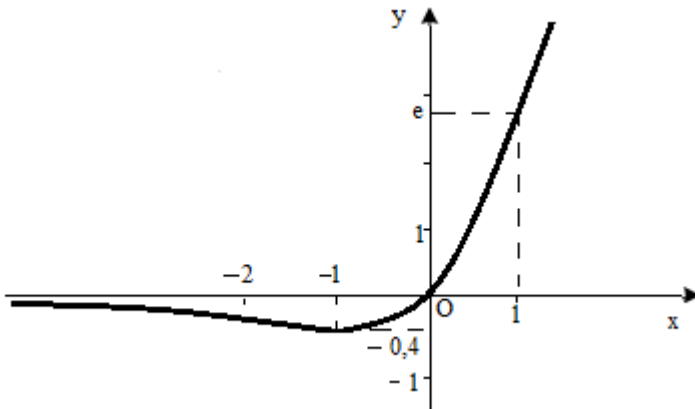
7. Провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки:

$$\text{а) } f(x) = \frac{(1-x)^3}{(x-2)^2} \quad \text{б) } y = x \cdot e^x$$

Відповіді: а)  $D(y): x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ ,  $y_{\text{max}} = y(4) = -6,75$ , точка перегину  $x=1, y(1)=0$ , вертикальна асимптота  $x=2$ , похила асимптота  $y = -x - 1$ .



б)  $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$ ,  $y_{\min} = y(-1) = -e^{-1} \approx -0,4$ , точка перегину  $x = -2, y(-2) = -2e^{-2} \approx -0,27$ , горизонтальна асимптота  $y = 0$ , коли  $x \rightarrow -\infty$ .



### 1.3 Індивідуальні завдання

1.3.1 Знайти границі функцій, користуючись правилом Лопітала.

|     |                                                                                                         |     |                                                                                   |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 1.  | $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 4x) e^{-3x}$                                                       | 2.  | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 2x}$               |
| 3.  | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{x \cdot \sin 3x}$                                        | 4.  | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sin 3x - 3xe^{-x}}$                  |
| 5.  | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{\sin^2 x}$                                               | 6.  | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{3 \cdot \sin^2 x}$          |
| 7.  | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}$                          | 8.  | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}$                      |
| 9.  | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{3x^2}$                                                    | 10. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + e^{2x}}{4e^{2x}}$                       |
| 11. | $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}$                                        | 12. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$                           |
| 13. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 5x}{\ln \cos 3x}$                                                | 14. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \sin 5x}{e^{3x} - 3x - 1}$                       |
| 15. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$                                     | 16. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 16x}{\operatorname{tg}^2 4x}$              |
| 17. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}$ | 18. | $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 - 3)e^{-2x}$                                   |
| 19. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(e^x - e^{-x})}{e^{3x^2+1} - e}$                                        | 20. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(\cos 2x - \cos x)}{\ln \cos 5x}$                  |
| 21. | $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(2x - \pi)^2}$                                    | 22. | $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\left( 1 - \frac{\pi}{x} \right)^2}$ |

|     |                                                                         |     |                                                                                                 |
|-----|-------------------------------------------------------------------------|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 23. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x^2} - 3^{3x^2}}{\arctg x + x^2 - x}$ | 24. | $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{3(x - \pi)^2}$                |
| 25. | $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 7x - \cos 3x}{3 \sin^2 3x}$        | 26. | $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg} 2x} - e^{-\sin 2x}}{\sin x - 1}$ |
| 27. | $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(2 + \cos x)}{(3^{\sin x} - 1)^2}$   | 28. | $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(x - 2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x - 1)}$                  |
| 29. | $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\ln \sin 3x}{(6x - \pi)^2}$   | 30. | $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos x}{e^{\sin 4x} - e^{\sin x}}$                         |

1.3.2 Знайти рівняння нормалі в точці перетину графіка функції з віссю  $OY$  та рівняння дотичної в точці перетину графіка функції з віссю  $OX$ .

|     |                        |     |                         |     |                        |
|-----|------------------------|-----|-------------------------|-----|------------------------|
| 1.  | $y = \frac{2x-3}{1-x}$ | 2.  | $y = \frac{x-2}{4-x}$   | 3.  | $y = \frac{x-1}{2x+1}$ |
| 4.  | $y = \frac{x-4}{2x+1}$ | 5.  | $y = \frac{x+4}{x+2}$   | 6.  | $y = \frac{x-3}{x+1}$  |
| 7.  | $y = \frac{x+4}{2x-1}$ | 8.  | $y = \frac{x+1}{2x-1}$  | 9.  | $y = \frac{2x-5}{x+1}$ |
| 10. | $y = \frac{x+2}{2x-1}$ | 11. | $y = \frac{x+3}{3x+1}$  | 12. | $y = \frac{x-2}{x+1}$  |
| 13. | $y = \frac{x+2}{x-1}$  | 14. | $y = \frac{x-3}{2x-1}$  | 15. | $y = \frac{2x+3}{x+1}$ |
| 16. | $y = \frac{4-x}{x+2}$  | 17. | $y = \frac{2x-1}{x+1}$  | 18. | $y = \frac{5-x}{x+1}$  |
| 19. | $y = \frac{x-9}{3x+1}$ | 20. | $y = \frac{3x-1}{2x+1}$ | 21. | $y = \frac{x-4}{2x-1}$ |
| 22. | $y = \frac{x+1}{x-2}$  | 23. | $y = \frac{2x+3}{2x+1}$ | 24. | $y = \frac{2x-1}{x+1}$ |

|     |                        |     |                       |     |                        |
|-----|------------------------|-----|-----------------------|-----|------------------------|
| 25. | $y = \frac{x-1}{x+2}$  | 26. | $y = \frac{x+9}{x-3}$ | 27. | $y = \frac{x+2}{x-4}$  |
| 28. | $y = \frac{3x-1}{x+2}$ | 29. | $y = \frac{x+1}{x+2}$ | 30. | $y = \frac{3x+1}{x-2}$ |

### 1.3.3 Знайти екстремуми та інтервали монотонності функції

|     |                                         |     |                                     |
|-----|-----------------------------------------|-----|-------------------------------------|
| 1.  | $y = xe^{-\frac{x^4}{4}}$               | 2.  | $y = \frac{x+2}{(x-2)^2}$           |
| 3.  | $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$ | 4.  | $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$ |
| 5.  | $y = x^4 - 2x^2 + 3$                    | 6.  | $y = \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}$         |
| 7.  | $y = (x+1)^2 e^{2x}$                    | 8.  | $y = (x+1)e^{2x}$                   |
| 9.  | $y = x^2 \ln x$                         | 10. | $y = x \cdot \sqrt[3]{1-x}$         |
| 11. | $y = \frac{x}{\ln x}$                   | 12. | $y = \frac{4x^3 + 1}{x}$            |
| 13. | $y = (x-1)^2 (x-2)^3$                   | 14. | $y = (2x^2 + 2x - 3)e^{-2x}$        |
| 15. | $y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$           | 16. | $y = \frac{10}{x(4x^2 - 9x + 6)}$   |
| 17. | $y = \frac{e^x}{x}$                     | 18. | $y = x + \frac{1}{x}$               |
| 19. | $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$         | 20. | $y = \frac{x^2}{x-2}$               |
| 21. | $y = \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ | 22. | $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$           |

|     |                                   |     |                            |
|-----|-----------------------------------|-----|----------------------------|
| 23. | $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$         | 24. | $y = x^3(x+2)^2$           |
| 25. | $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$ | 26. | $y = x e^{-\frac{x^2}{2}}$ |
| 27. | $y = x - 2 \ln x$                 | 28. | $y = x - \arctg 2x$        |
| 29. | $y = 2x^2 - \ln x$                | 30. | $y = x - \ln(1+x^2)$       |

1.3.4 Знайти найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку.

|     |                                 |                  |
|-----|---------------------------------|------------------|
| 1.  | $y = x^5 - 15x^3 + 1$           | $x \in [-4; 0]$  |
| 2.  | $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ | $x \in [1; 3]$   |
| 3.  | $y = x^3 - 3x^2 + 1$            | $x \in [-1; 4]$  |
| 4.  | $y = 3\sqrt[3]{(x-1)^2} + x$    | $x \in [-7; 2]$  |
| 5.  | $y = \frac{3-x^2}{3+x^2}$       | $x \in [-1; 2]$  |
| 6.  | $y = x - \frac{8}{x^4}$         | $x \in [-3; -1]$ |
| 7.  | $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$           | $x \in [-2; 1]$  |
| 8.  | $y = \frac{(x-2)^2}{x^2 + 4}$   | $x \in [-1; 3]$  |
| 9.  | $y = \ln(x^4 - 2x^2 + 3)$       | $x \in [-2; 1]$  |
| 10. | $y = x^3 - 3x^2 + 1$            | $x \in [-1; 4]$  |

|     |                                    |                                                    |
|-----|------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 11. | $y = \sqrt[3]{x^2} + 1$            | $x \in [-2; 1]$                                    |
| 12. | $y = x + \cos^2 x$                 | $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$              |
| 13. | $y = x^4 - 2x^2 + 2$               | $x \in [-1; 2]$                                    |
| 14. | $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$            | $x \in [0; 3]$                                     |
| 15. | $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$    | $x \in [-5; -1]$                                   |
| 16. | $y = 2 \sin x + \cos 2x$           | $x \in [0; \pi]$                                   |
| 17. | $y = \sqrt{9 - x^2}$               | $x \in [-3; 3]$                                    |
| 18. | $y = \sin^4 x + \cos^4 x$          | $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ |
| 19. | $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$ | $x \in [0; \sqrt{3}]$                              |
| 20. | $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 18$      | $x \in [1; 3]$                                     |
| 21. | $y = x - \ln(1 + x)$               | $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$               |
| 22. | $y = 2x^3 - x^2 - 4x - 2$          | $x \in [0; 2]$                                     |
| 23. | $y = \frac{2}{(5 - x)^2}$          | $x \in [-1; 0]$                                    |
| 24. | $y = x^3 + 3x^2 + 2$               | $x \in [-1; 3]$                                    |
| 25. | $y = (3 - x)e^{-x}$                | $x \in [0; 5]$                                     |
| 26. | $y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 18}}$    | $x \in [-3; 3]$                                    |

|     |                        |                                                      |
|-----|------------------------|------------------------------------------------------|
| 27. | $y = ctg^2 x - 2ctgx$  | $x \in \left[ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right]$  |
| 28. | $y = \sqrt{100 - x^2}$ | $x \in [-6; 8]$                                      |
| 29. | $y = \sin 2x - x$      | $x \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ |
| 30. | $y = 2tgx - tg^2 x$    | $x \in \left[ 0; \frac{\pi}{3} \right]$              |

1.3.5 Знайти точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіка функції

|     |                                        |     |                                     |
|-----|----------------------------------------|-----|-------------------------------------|
| 1.  | $y = \ln(x^2 + 4)$                     | 2.  | $y = \frac{x}{4x^2 + 1}$            |
| 3.  | $y = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^2$ | 4.  | $y = \frac{x^3 - x}{(x+1)^2}$       |
| 5.  | $y = x^2 \ln x$                        | 6.  | $y = e^x (x^2 + 1)$                 |
| 7.  | $y = \frac{x^2}{(1-x)^2}$              | 8.  | $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$           |
| 9.  | $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$              | 10. | $y = x^2 + \frac{8}{x+2}$           |
| 11. | $y = x - \arctg x$                     | 12. | $y = 2x - \frac{3}{2} \ln(1 + x^2)$ |
| 13. | $y = x e^{-\frac{x^2}{2}}$             | 14. | $y = \frac{2}{x} \ln \frac{x}{2}$   |
| 15. | $y = \frac{x}{x^2 + 1}$                | 16. | $y = \frac{e^x}{x}$                 |
| 17. | $y = x + \sin x$                       | 18. | $y = \frac{1}{x^2 + 1}$             |

|     |                             |     |                           |
|-----|-----------------------------|-----|---------------------------|
| 19. | $y = \frac{1}{x^2 - 1}$     | 20. | $y = (x + 1) \ln x$       |
| 21. | $y = e^{-x^2}$              | 22. | $y = \frac{x^2}{x - 2}$   |
| 23. | $y = x \cdot \arctg x$      | 24. | $y = x - \frac{8}{x^4}$   |
| 25. | $y = \frac{x^4}{x^3 + 1}$   | 26. | $y = x^2 e^{-x}$          |
| 27. | $y = \frac{1}{x} + 4x^2$    | 28. | $y = \frac{x^4 - 1}{x^2}$ |
| 29. | $y = \frac{3 - x^2}{x + 2}$ | 30. | $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ |

### 1.3.6 Знайти асимптоти графіка заданої функції

|     |                               |     |                                 |
|-----|-------------------------------|-----|---------------------------------|
| 1.  | $y = \frac{x^4}{x^3 - 3}$     | 2.  | $y = \frac{x^2 + 5}{2x + 3}$    |
| 3.  | $y = \frac{1 - x^2}{2 - x^2}$ | 4.  | $y = \frac{x}{2x - 1} + x$      |
| 5.  | $y = \frac{5 - x^2}{3 - x^2}$ | 6.  | $y = \frac{x^2 + 9}{5x - 1}$    |
| 7.  | $y = \frac{2 - x^2}{5 - x^2}$ | 8.  | $y = \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4}$ |
| 9.  | $y = \frac{2x^2 - 7}{3x - 2}$ | 10. | $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$       |
| 11. | $y = \frac{x^2 + 2}{x - 3}$   | 12. | $y = \frac{x^3}{2(x + 2)^2}$    |
| 13. | $y = \frac{2x^2}{4x^2 - 5}$   | 14. | $y = \frac{4x - 16}{(x - 2)^2}$ |

|     |                                |     |                                |
|-----|--------------------------------|-----|--------------------------------|
| 15. | $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$  | 16. | $y = \frac{x-1}{x^2-2x}$       |
| 17. | $y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$    | 18. | $y = \frac{4x-x^2}{5x-2}$      |
| 19. | $y = \frac{5x-x^2}{x^2+6x+9}$  | 20. | $y = \frac{3-x}{x^2+2x}$       |
| 21. | $y = \frac{2x^2-3}{-x^2+4x-4}$ | 22. | $y = \frac{7-2x^2}{x^2+2x-15}$ |
| 23. | $y = \frac{2x+x^2}{x^2-2x+1}$  | 24. | $y = \frac{2x^2}{2-5x}$        |
| 25. | $y = \frac{4x^2}{-x^2+4x-3}$   | 26. | $y = \frac{x-1}{9-x^2}$        |
| 27. | $y = \frac{8+x^2}{2x^2-3x+1}$  | 28. | $y = \frac{(x+1)^2}{16-x^2}$   |
| 29. | $y = \frac{6x^2-1}{x^2-3x+2}$  | 30. | $y = \frac{x^2-6}{x^2+5x+6}$   |

1.3.7 Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

|    |                               |                                |
|----|-------------------------------|--------------------------------|
| 1. | а) $y = \frac{4x+1}{x^2}$     | б) $y = \frac{x^2}{2} + \ln x$ |
| 2. | а) $y = \frac{4x}{(x-2)^2}$   | б) $y = e^x(x-5)$              |
| 3. | а) $y = \frac{x^4}{(x+1)^3}$  | б) $y = \frac{e^x}{x+1}$       |
| 4. | а) $y = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$ | б) $y = \frac{x}{\ln x}$       |

|     |                                          |                              |
|-----|------------------------------------------|------------------------------|
| 5.  | a) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$    | б) $y = x^2 \ln x$           |
| 6.  | a) $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$             | б) $y = xe^{\frac{1}{x}}$    |
| 7.  | a) $y = \frac{x^3 + 1}{x}$               | б) $y = x^2 e^{-x^2}$        |
| 8.  | a) $y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2}$        | б) $y = \ln(x^2 - 2x)$       |
| 9.  | a) $y = \frac{1 - x}{x^2}$               | б) $y = e^{-x}(x + 4)$       |
| 10. | a) $y = \frac{x - \frac{1}{2}}{(x+2)^2}$ | б) $y = \frac{\ln x}{x}$     |
| 11. | a) $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$             | б) $y = x^2 e^{-x}$          |
| 12. | a) $y = \frac{4x}{(x+2)^2}$              | б) $y = x^2(\ln x - 1)$      |
| 13. | a) $y = \frac{x}{(x+2)^3}$               | б) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ |
| 14. | a) $y = \frac{4x^3 + 1}{x}$              | б) $y = 2x^3 e^{-x}$         |
| 15. | a) $y = \frac{x - 2}{(x+3)^2}$           | б) $y = e^x(x + 2)$          |
| 16. | a) $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$         | б) $y = \frac{e^x}{x}$       |
| 17. | a) $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$             | б) $y = x^2 e^x$             |

|     |                                          |                                |
|-----|------------------------------------------|--------------------------------|
| 18. | a) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$         | б) $y = xe^{-x^2}$             |
| 19. | a) $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$             | б) $y = x \ln^2 x$             |
| 20. | a) $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$         | б) $y = x(\ln x - 3)$          |
| 21. | a) $y = \frac{x-2}{(x+3)^2} - 1$         | б) $y = x^2 - 2 \ln x$         |
| 22. | a) $y = \frac{x+4}{(x+1)^2}$             | б) $y = \frac{e^x}{x-2}$       |
| 23. | a) $y = 1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$ | б) $y = x \ln x$               |
| 24. | a) $y = \frac{x^3}{x-2}$                 | б) $y = (x+4)e^{2x}$           |
| 25. | a) $y = \frac{(4-x)^3}{2-x}$             | б) $y = \ln(x^2 + 4x)$         |
| 26. | a) $y = \frac{-8}{x^4} + x$              | б) $y = e^{\frac{1}{x+2}}$     |
| 27. | a) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$               | б) $y = x - \ln(1+x)$          |
| 28. | a) $y = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$          | б) $y = x^3 e^x$               |
| 29. | a) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$               | б) $y = \frac{x^2}{2} + \ln x$ |
| 30. | a) $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$             | б) $y = xe^{\frac{1}{x}}$      |

## 2 ДИФЕРЕНЦІОВАННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

### 2.1 Короткий виклад теоретичного матеріалу

**Означення 2.1.** Якщо кожній впорядкованій парі чисел  $(x, y)$ , що належать множині  $D$ , поставлено у відповідність за деяким законом певне число  $z$ , то кажуть, що на множині  $D$  визначено функцію двох змінних  $x$  та  $y$  і позначають  $z = f(x, y)$ .

**Означення 2.2.** Множину  $D$  пар значень  $(x, y)$ , для яких функція  $z = f(x, y)$  визначена, називають *областю визначення функції*, а множину значень  $z$  – *областю значень функції* і позначають  $E$ .  $x$  і  $y$  – незалежні змінні.

**Означення 2.3.** Стала величина  $A$  називається *границею функції*  $z = f(x, y)$  в точці  $M_0(x_0, y_0)$ , якщо кожному довільно малому числу  $\varepsilon > 0$  можна поставити у відповідність число  $\delta > 0$  таке, що для всіх

точок  $M(x, y) \in D$ , які задовольняють умову 
$$\begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta, \\ 0 < |y - y_0| < \delta, \end{cases}$$

виконується нерівність  $|f(x, y) - A| < \varepsilon$  і записують  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ .

**Означення 2.4.** Функція  $z = f(x, y)$  називається *неперервною* в точці  $M_0(x_0, y_0)$ , якщо кожному довільно малому числу  $\varepsilon > 0$  можна поставити у відповідність число  $\delta > 0$  таке, що для всіх точок

$M(x, y) \in D$ , які задовольняють умову 
$$\begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta, \\ 0 < |y - y_0| < \delta, \end{cases}$$
 виконується

нерівність  $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$  і записують  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ .

**Означення 2.5.** 1. Частинним приростом  $\Delta_x z$  по змінній  $x$  (або

частинним приростом  $\Delta_y z$  по змінній  $y$ ) функції  $z = f(x, y)$  при переході від точки  $(x, y) \in D$  до точки  $(x + \Delta x, y) \in D$  (або  $(x, y + \Delta y) \in D$ ) називають

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \text{ або } \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

2. Повним приростом  $\Delta z$  функції  $z = f(x, y)$  при переході від точки  $(x, y) \in D$  до точки  $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$  (або  $(x, y + \Delta y) \in D$ ) називають

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

**Означення 2.6.** Якщо існує границя  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$ , то її називають *частинною похідною функції  $z = f(x, y)$  в точці  $(x, y) \in D$  по змінній  $x$*  і позначають одним із символів:  $z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}$ .

Аналогічно визначається *частинна похідна функції  $z = f(x, y)$  по змінній  $y$* :  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$  і позначається одним із символів:  $z'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, f'_y, \frac{\partial f}{\partial y}$ .

**Зауваження.** При знаходженні частинних похідних функції  $z = f(x, y)$  правила диференціювання і таблиця похідних такі ж самі, як для функції однієї змінної. 2. При знаходженні частинної похідної по певній змінній всі інші змінні вважаємо сталими.

**Означення 2.7.** Частинним диференціалом по змінній  $x$  функції  $z = f(x, y)$  називається головна частина частинного приросту  $\Delta_x z$ , пропорційна приросту змінної  $x$ .

Позначають  $d_x z = f'_x(x, y) \cdot dx$ . Аналогічно визначається частинний диференціал по змінній  $y$  функції  $z = f(x, y)$ , тобто  $d_y z = f'_y(x, y) \cdot dy$ .

**Означення 2.8.** Повним диференціалом функції  $z = f(x, y)$  називається головна частина повного приросту функції, лінійна щодо  $\Delta x$  та  $\Delta y$ :  $dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y$ .

Враховуючи, що  $\Delta x = dx$  і  $\Delta y = dy$ , матимемо

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy. \quad (2.1)$$

Нехай задано рівняння  $F(x, y, z) = 0$ .

**Теорема 2.1** Про існування та диференційованість неявної функції двох змінних.

Якщо виконуються такі умови:

1) Функція  $F(x, y, z)$  і її похідні  $F'_x(x, y, z)$ ,  $F'_y(x, y, z)$  визначені та неперервні в паралелепіпеді:

$$G = \{(x, y, z) : x_0 - a \leq x \leq x_0 + a; y_0 - b \leq y \leq y_0 + b; z_0 - c \leq z \leq z_0 + c\};$$

$$2) F(x_0, y_0, z_0) = 0;$$

$$3) F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

то існує окіл точки  $(x_0, y_0, z_0)$ , в якому рівняння  $F(x, y, z) = 0$  визначає неявну функцію  $z = f(x, y)$ , неперервну та диференційовану в околі точки  $(x_0, y_0)$  і таку, що  $z_0 = f(x_0, y_0)$ .

Тоді частинні похідні неявної функції  $z = f(x, y)$  визначаються за формулами:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}. \quad (2.2)$$

Аналогічні формули можна застосувати для неявної функції  $y = f(x)$ , заданої рівнянням  $F(x, y) = 0$ . Матимемо

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}. \quad (2.3)$$

Розглянемо знаходження похідних першого порядку для складеної функції двох змінних.

а) Нехай функція  $z = f(x, y)$  залежить від двох змінних  $x$  та  $y$ , кожна з яких, в свою чергу, є функцією змінної  $t$ :  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Тоді

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}; \quad (2.4)$$

б) Нехай функція  $z = f(x, y)$  і  $y = y(x)$ . Тоді

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}; \quad (2.5)$$

в) Нехай функція  $z = f(x, y)$  і  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ . Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{і} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (2.6)$$

Частинні похідні першого порядку  $z'_x$ ,  $z'_y$  функції двох змінних  $z = f(x, y)$  в свою чергу є функціями двох змінних. Їх можна диференціювати. Дістанемо другі частинні похідні:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

При цьому  $z''_{xy} = z''_{yx}$ , тобто  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ . Ці похідні називають мішаними похідними другого порядку.

*Диференціал другого порядку* – це диференціал від диференціала першого порядку:  $d^2 z = d(dz) = d(z'_x dx + z'_y dy)$ . Тоді

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2. \quad (2.7)$$

Аналогічно можна дістати формулу для диференціала  $n$ -го порядку:

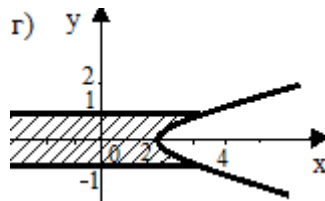
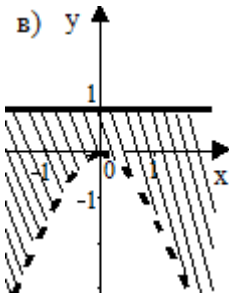
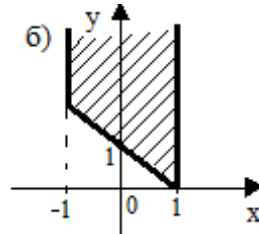
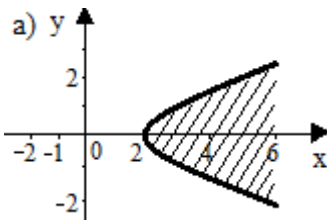
$$d^n z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z. \quad (2.8)$$

## 2.2 Аудиторні завдання

1. Знайти і намалювати область визначення функції:

|                                      |                                         |
|--------------------------------------|-----------------------------------------|
| а) $z = \sqrt{2x - 4 - y^2}$         | б) $z = \sqrt{x + y - 1} + \arccos x$   |
| в) $z = \ln(x^2 + y) + \sqrt{1 - y}$ | г) $z = \arcsin y + \sqrt{y^2 + 2 - x}$ |

Відповіді: Область визначення функцій зображена на рисунках. Це множина точок заштрихованої частини площини.



2. Знайти частинні похідні  $z'_x$  і  $z'_y$  для функції  $z = f(x, y)$

|                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------|
| а) $z = y \ln \sqrt[4]{x^2 + y^2} - 3 \sin(xy) + 2x$                |
| б) $z = x \cdot 2^{3y} - \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$ |
| в) $z = \arcsin(x^2 y) + \sqrt[3]{x^2 + y^3}$                       |

Відповіді: а)  $z'_x = \frac{0,5xy}{x^2 + y^2} - 3y \cos(xy) + 2,$

$$z'_y = 0,25 \ln(x^2 + y^2) + \frac{0,5y^2}{x^2 + y^2} - 3x \cos(xy);$$

б)  $z'_x = 2^{3y} - \frac{1}{y \cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}, \quad z'_y = 3x \cdot 2^{3y} \ln 2 + \frac{x}{y^2 \cos^2\left(\frac{x}{y}\right)};$

в)  $z'_x = \frac{2xy}{\sqrt{1-x^4y^2}} + \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^3)^2}},$

$$z'_y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4y^2}} + \frac{y^2}{3\sqrt[3]{(x^2+y^3)^2}}.$$

3. Знайти частинні похідні 2-го порядку  $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$  функції  $z = f(x, y)$ .

|                                         |                                          |
|-----------------------------------------|------------------------------------------|
| а) $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ | б) $z = 4x^3 + 5y^2 - x^2y - 3x + y + 7$ |
| в) $z = x \sin^2 y$                     | г) $z = \operatorname{tg}(2x + 3y)$      |
| д) $z = \cos(x + 5y^2)$                 | е) $z = x \cdot \sqrt[3]{\frac{y}{x}}$   |

Відповіді: а)  $z''_{xx} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $z''_{xy} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $z''_{yy} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ;

б)  $z''_{xx} = 24x - 2y$ ,  $z''_{xy} = -2x$ ,  $z''_{yy} = 10$ ;

в)  $z''_{xx} = 0$ ,  $z''_{xy} = \sin 2y$ ,  $z''_{yy} = 2x \cos 2y$ ;

г)  $z''_{xx} = \frac{8 \sin(2x + 3y)}{\cos^3(2x + 3y)}$ ,  $z''_{xy} = \frac{12 \sin(2x + 3y)}{\cos^3(2x + 3y)}$ ,  $z''_{yy} = \frac{18 \sin(2x + 3y)}{\cos^3(2x + 3y)}$ ;

д)  $z''_{xx} = -\cos(x + 5y^2)$ ,  $z''_{xy} = -10y \cos(x + 5y^2)$ ,  
 $z''_{yy} = -10 \sin(x + 5y^2) - 100y^2 \cos(x + 5y^2)$ ;

е)  $z''_{xx} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ ,  $z''_{xy} = \frac{2}{9}x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$ ,  $z''_{yy} = -\frac{2}{9}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{5}{3}}$ .

4. Знайти диференціал першого порядку  $dz$  і диференціал другого порядку  $d^2z$  для функції  $z = f(x, y)$

|                                                                |                           |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------|
| а) $z = 3x^4 + 5x - 2x^3y^7 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2$ | б) $z = x^2 - xy - 3y^3$  |
| в) $z = \ln(x^2 + y)$                                          | г) $z = x^2e^{y^2} - 2xy$ |

Відповіді: а)  $dz = (12x^3 + 5 - 6x^2y^7)dx + (y - y^2 - 14x^3y^6)dy$ ,  
 $d^2z = (36x^2 - 12xy^7)dx^2 - 84x^2y^6dxdy + (1 - 2y - 84x^3y^5)dy^2$ ;

б)  $dz = (2x - y)dx - (x + 9y^2)dy$ ,  
 $d^2z = 2dxdy - 2dxdy - 18ydy^2$ ;

в)  $dz = \frac{2x}{x^2 + y}dx + \frac{1}{x^2 + y}dy$ ,

$d^2z = \frac{2y - 2x^2}{(x^2 + y)^2}dx^2 - \frac{4x}{(x^2 + y)^2}dxdy - \frac{1}{(x^2 + y)^2}dy^2$ ;

г)  $dz = e^{y^2 - 2xy}(2x - 2x^2y)dx + e^{y^2 - 2xy}(2x^2y - 2x^3)dy$ ,

$$d^2 z = e^{y^2-2xy} (4x^2 y^2 - 8xy + 2) dx^2 + e^{y^2-2xy} (8xy - 8x^2 y^2 - 12x^2 + 8x^3 y) dx dy + e^{y^2-2xy} (4x^2 y^2 - 8x^3 y + 4x^4 + 2x^2) dy^2.$$

5. Знайти частинні похідні функції, яка задана неявно:  $z'_x$ ,  $z'_y$  для а) і б);  $y'$  для в) і г)

|                                    |                                             |
|------------------------------------|---------------------------------------------|
| а) $\sin z^4 - e^{yz} + x^2 y = 0$ | б) $z^2 \sqrt[3]{y} - x^2 y \cos z + 4 = 0$ |
| в) $\sin y^2 = 1 - x^y$            | г) $xy^3 + \ln y + x^2 = 0$                 |

Відповіді: а)  $z'_x = \frac{2xy}{ye^{yz} - 4z^3 \cos z^4}$ ,  $z'_y = \frac{x^2 - ze^{yz}}{ye^{yz} - 4z^3 \cos z^4}$ ;

б)  $z'_x = \frac{2xy \cos z}{2z \sqrt[3]{y} + x^2 y \sin z}$ ,  $z'_y = \frac{x^2 \cos z - \frac{z^2}{3\sqrt[3]{y^2}}}{2z \sqrt[3]{y} + x^2 y \sin z}$ ;

в)  $y' = -\frac{yx^{y-1}}{2y \cos(y^2) + x^y \ln x}$ ; г)  $y' = -\frac{y^4 + 2xy}{3xy^3 + 1}$ .

6. Знайти похідні складених функцій: а)  $z'_u$ ,  $z'_v$ ; б)  $z'_t$ ; в)  $z'_x$

|                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------|
| а) $z = 3\sqrt{x} - 2y^3$ , $x = e^{3uv} - u^2$ , $y = e^{\frac{2v}{u}}$ |
| б) $z = \ln^2(x^2 + y^2)$ , $x = 3\sqrt{t} + t^2$ , $y = 4t^3 - 2$       |
| в) $z = x^3 y - 4xy^2 + \sqrt{xy}$ , $y = \sqrt[3]{3x^2 + 4}$            |

Відповіді: а)  $z'_u = \frac{3}{2\sqrt{x}} \cdot (3ve^{3uv} - 2u) + 6y^2 \cdot \frac{2v}{u^2} e^{\frac{2v}{u}}$ ,

$z'_v = \frac{9}{2\sqrt{x}} \cdot ue^{3uv} - 12y^2 \cdot \frac{e^{\frac{2v}{u}}}{u}$ ;

$$\text{б) } z'_t = \frac{4x \ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \cdot \left( \frac{3}{2\sqrt{t}} + 2t \right) + \frac{4y \ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \cdot 12t^2;$$

$$\text{в) } z'_x = 3x^2y - 4y^2 + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \left( x^3 - 8xy + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2 + 4)^2}}.$$

## 2.3 Індивідуальні завдання

2.3.1 Знайти і намалювати область визначення функції.

|     |                                               |     |                                      |
|-----|-----------------------------------------------|-----|--------------------------------------|
| 1.  | $z = \frac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$             | 2.  | $z = \arcsin(x + y - 1)$             |
| 3.  | $z = \sqrt{1 + x - y^2} + \sqrt{1 - x - y^2}$ | 4.  | $z = \sqrt{(x+1)(y-1)}$              |
| 5.  | $z = \arcsin \frac{x^2 + y^2}{4}$             | 6.  | $z = (9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$ |
| 7.  | $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$                    | 8.  | $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$              |
| 9.  | $z = e^{\sqrt{x-y}} + \sqrt{y-1}$             | 10. | $z = \ln(4 - 4x - y^2)$              |
| 11. | $z = \frac{5}{4 - x^2 - y^2}$                 | 12. | $z = \arcsin(x + y)$                 |
| 13. | $z = \ln(y^2 - x^2)$                          | 14. | $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$       |
| 15. | $z = \arccos(x + 2y)$                         | 16. | $z = \sqrt{4x^2 - y^2}$              |
| 17. | $z = \ln(x^2 + y^2 - 3)$                      | 18. | $z = \sqrt{1 - x - y}$               |

|     |                                       |     |                                     |
|-----|---------------------------------------|-----|-------------------------------------|
| 19. | $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$              | 20. | $z = \sqrt{x+y} \ln(y^2 - x^2)$     |
| 21. | $z = \ln(2x^2 - y)$                   | 22. | $z = \sqrt{x^2 - y^2}$              |
| 23. | $z = \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{1 - x^2}$ | 24. | $z = \ln(\sqrt{xy} - 1)$            |
| 25. | $z = 3x + \frac{y}{2 - x + y}$        | 26. | $z = 4x + \frac{y}{\sqrt{2x - 5y}}$ |
| 27. | $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$         | 28. | $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$            |
| 29. | $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$             | 30. | $z = \arccos(x + 3y)$               |

2.3.2 Знайти частинні похідні  $z'_x$  і  $z'_y$  для функції  $z = f(x, y)$

|     |                                |     |                                            |
|-----|--------------------------------|-----|--------------------------------------------|
| 1.  | $z = \ln(y^2 + 2xy + x^2 - 2)$ | 2.  | $z = \operatorname{tg}(x^3 - 2yx + 3)$     |
| 3.  | $z = \cos(2x + 3y - x^2 y^3)$  | 4.  | $z = \sin \sqrt{2 - x - y^2}$              |
| 5.  | $z = \sqrt{x^3 y} + 5x - 3y$   | 6.  | $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ |
| 7.  | $z = \ln(3x^2 - y^2 + 4x)$     | 8.  | $z = \operatorname{ctg} \sqrt{xy^3}$       |
| 9.  | $z = 2^{y+xy^2-5x}$            | 10. | $z = \arccos(x - y^2 - 1)$                 |
| 11. | $z = \ln(\sqrt{xy} - x)$       | 12. | $z = \operatorname{tg}(y^3 - 2x + 5)$      |

|     |                                           |     |                                               |
|-----|-------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------|
| 13. | $z = \arcsin\left(\frac{x}{y} + 2\right)$ | 14. | $z = e^{-\sqrt{x^2+y^2+3xy}}$                 |
| 15. | $z = \left(\frac{x}{y}\right)^3$          | 16. | $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$               |
| 17. | $z = \arctg \frac{y^3}{x}$                | 18. | $z = \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x}$ |
| 19. | $z = \ctg \frac{y}{x^2}$                  | 20. | $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2 + 3}$         |
| 21. | $z = \ln(y^2 - ye^{-x} + x)$              | 22. | $z = xy + \ln(x^4 - y^3)$                     |
| 23. | $z = \cos(x^3 y^2 - yx + 2y)$             | 24. | $z = e^{-\left(xy+3x^2-4y^3\right)}$          |
| 25. | $z = \ln(3xy - 4 + x^2)$                  | 26. | $z = \arctg(3x^2 - y^2 + 2xy)$                |
| 27. | $z = \sin^3 \sqrt{yx^4}$                  | 28. | $z = \ctg\left(\frac{x^2 + y}{y^2}\right)$    |
| 29. | $z = \cos(xy^2)$                          | 30. | $z = \frac{x^3 y^2 - 2x}{yx^2 + y^3}$         |

2.3.3 Знайти частинні похідні 2-го порядку  $z''_{xx}$ ,  $z''_{xy}$ ,  $z''_{yy}$  функції  $z = f(x, y)$ .

|    |                                |    |                             |
|----|--------------------------------|----|-----------------------------|
| 1. | $z = (\sin x + \cos x) e^{2y}$ | 2. | $z = \sin(2x + y^2)$        |
| 3. | $z = \cos(x^3 - 2xy)$          | 4. | $z = e^{2x^2 - y^3}$        |
| 5. | $z = \ln(3x^2 - y^2)$          | 6. | $z = \cos(x^2 - y^2) + x^3$ |
| 7. | $z = e^{x^2 - 2y^2}$           | 8. | $z = \sin(x + 3y) - y^2$    |

|     |                                  |     |                            |
|-----|----------------------------------|-----|----------------------------|
| 9.  | $z = \sin(x^3 y) + y^3$          | 10. | $z = \arctg(2x - y)$       |
| 11. | $z = \ln(2xy - 3)$               | 12. | $z = \cos(xy^2) + x^3$     |
| 13. | $z = \ln(3x^2 + 2y^2)$           | 14. | $z = \arctg(3x + 2y)$      |
| 15. | $z = \sin(2x + 5y^2)$            | 16. | $z = e^{2x^2 - 5y}$        |
| 17. | $z = \cos(3x^2 - 4y^3)$          | 18. | $z = \arctg(x + \sqrt{y})$ |
| 19. | $z = \ln(xy - y^2)$              | 20. | $z = e^{y^2 - x^2}$        |
| 21. | $z = \cos(x - y^3)$              | 22. | $z = e^{xy}$               |
| 23. | $z = \ln(x + e^{-y})$            | 24. | $z = \ln(y^2 + 2x)$        |
| 25. | $z = y \cdot \sqrt{\frac{y}{x}}$ | 26. | $z = x^{\frac{y}{x}} e^x$  |
| 27. | $z = \arctg \frac{y}{x}$         | 28. | $z = x^y$                  |
| 29. | $z = \ln(x^2 - y^2)$             | 30. | $z = e^{x^2 y}$            |

2.3.4 Знайти диференціал першого порядку  $dz$  і диференціал другого порядку  $d^2z$  для функції  $z = f(x, y)$

|    |                                     |     |                                       |
|----|-------------------------------------|-----|---------------------------------------|
| 1. | $z = x^2 - 3xy^3 + 5y^4$            | 2.  | $z = -3x^3 + 2x^2y^4 - 2y^2$          |
| 3. | $z = \frac{1}{3}x^3 + 5x^2y - 4y^3$ | 4.  | $z = \frac{1}{4}x^4 - 5xy^4 - 3y^3$   |
| 5. | $z = 0,5x^2 + 6xy^2 - 3y$           | 6.  | $z = \frac{1}{5}x^5 + 4x^2y^3 - 2y^5$ |
| 7. | $z = 1,5x^3 - 7x^3y^2 - 4y^7$       | 8.  | $z = 3x - 5x^3y^2 - \frac{1}{2}y^3$   |
| 9. | $z = 3x^2 + 3x^2y^3 - 4y^3$         | 10. | $z = x^3 - x^2y + y^3$                |

|     |                                                  |     |                                              |
|-----|--------------------------------------------------|-----|----------------------------------------------|
| 11. | $z = 2x^2 - 3x^4y^2 + y^2$                       | 12. | $z = x^4 - 2x^2y^3 + 2y$                     |
| 13. | $z = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^3y^3 - \frac{1}{4}y^4$ | 14. | $z = -3x^2 + 5x^2y - 7y^3$                   |
| 15. | $z = 3x^2 + 2x - 8xy^2 + 8y^3$                   | 16. | $z = 2x^3 - 3x^4y + 5y - 2y^2$               |
| 17. | $z = -3x^2 + 3x^2y^5 + 2y^4 - 3y$                | 18. | $z = x^3 - 8xy^5 + 2y^7$                     |
| 19. | $z = 3x^5 + x - 8x^2y^3 + 2y^6$                  | 20. | $z = 5x^4 + 2x^4y^5 - 4y^6$                  |
| 21. | $z = -\frac{1}{5}x^5 + x^2 - 4x^3y^2 - 3y$       | 22. | $z = -x^2 - 8xy^3 + 3y^5$                    |
| 23. | $z = 5x^2 - 6x^2y^2 - 7y^4$                      | 24. | $z = -5x^4 + 9x^2y^3 + 10y^2$                |
| 25. | $z = -\frac{1}{2}x^4 - 7x^3y^2 - 2y^8$           | 26. | $z = 5x^5 - x + 8x^3y^4 - 5y^3$              |
| 27. | $z = -2x^5 - 5x^4y^5 - 3y^3 + 2y$                | 28. | $z = 2x^3 + 3x^2 - 4x^5y^2 + 2y^6$           |
| 29. | $z = -3x^3 + 2x^2 - 4x^3y^4 + 3y^5$              | 30. | $z = -\frac{1}{5}x^5 - x^3 + 2x^7y^6 - 3y^3$ |

2.3.5 Знайти частинні похідні функції, яка задана неявно: а)  $z'_x$  і  $z'_y$ ; б)  $y'$

|    |                                                                         |    |                                                              |
|----|-------------------------------------------------------------------------|----|--------------------------------------------------------------|
| 1. | а) $x \sin y + y \cos z + z \sin x = 1$<br>б) $x^2 + y^3 - 3xy = 0$     | 2. | а) $\sin(z^3) - xyz = 0$<br>б) $y^3 - 3yx^2 + 2x = 0$        |
| 3. | а) $e^z - x^2yz = 1$<br>б) $x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + y^2 = 0$              | 4. | а) $\ln(x+z) - x^2yz^3 = 0$<br>б) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$      |
| 5. | а) $z^3 + y \cdot \arctg(x+z) - \sqrt{y} = 3$<br>б) $2y \ln x = x^2y^2$ | 6. | а) $3xz^2 - x^2y \sin z + 4 = 0$<br>б) $x + y = xy^2 - x^2y$ |

|     |                                                                                     |     |                                                                           |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|---------------------------------------------------------------------------|
| 7.  | а) $3yz^2 - x^2 \sin z + yx = 0$<br>б) $y^2 - 2xy^3 - x^2 = 0$                      | 8.  | а) $\arcsin(xyz) - 3xz^2 + \sin y = 0$<br>б) $y^2 = 2x^3 + xe^y$          |
| 9.  | а) $\cos(x^2 - z^2) - 3zy + x^3 = 0$<br>б) $y = x + \arctg y - x^3$                 | 10. | а) $y \sin z + x^2 y^2 z^3 = 1$<br>б) $y = \cos(x + y) - x^4$             |
| 11. | а) $x \cos y - y \cos z + z \cos x = 2$<br>б) $yx^2 = y^3 x - 4$                    | 12. | а) $z^4 - e^{xyz} = 0$<br>б) $y = \sin(x - y) + xy^2$                     |
| 13. | а) $e^{yz} - xy^2 z = 1$<br>б) $(x + y)^2 = 9(x - y)$                               | 14. | а) $\ln(2y - z) = x^3 y^2 z^2$<br>б) $y = 3x^3 + xe^y$                    |
| 15. | а) $z^3 \cdot \sqrt{y} + x \arctg(y + 2z) = 2$<br>б) $y \cdot \sin x = \cos(x - y)$ | 16. | а) $2x^2 z^3 - xy \sin z - 2 = 0$<br>б) $x + y = e^y - x^4$               |
| 17. | а) $3xz^2 - y^2 \sin z + xy = 0$<br>б) $y^2 = 2x + \ln \frac{y}{x}$                 | 18. | а) $\sin(y^2 - z^2) - 3xz + y^3 = 0$<br>б) $(x + y)^3 = \frac{27}{x - y}$ |
| 19. | а) $\arctg(xyz) - 3yz^2 + \cos x = 0$<br>б) $ye^x = e^{y+1} + x$                    | 20. | а) $x \cos z + x^2 yz^3 = 3$<br>б) $xy - 0,5 \sin 2y = x^2$               |
| 21. | а) $\arcsin(x + z) + yz^3 = 1$<br>б) $e^{xy} = x + y$                               | 22. | а) $\arctg(x - z) + 2xyz^2 = 2$<br>б) $xy = \arctg y + e^x$               |
| 23. | а) $x^2 e^{-z} + xyz^3 = 4$<br>б) $\tg y = x^2 y - x$                               | 24. | а) $\cos(z^2) = xy^2 z^3$<br>б) $y^2 = e^x + 3xy$                         |
| 25. | а) $2^z = x^2 yz^2$<br>б) $\cos y = xy^2 + 3x^4$                                    | 26. | а) $3x^2 z - xy^2 \cos z = 1$<br>б) $xy = e^y \sin x$                     |
| 27. | а) $\sin(x - z^2) - 3x^2 z + 2y^2 = 0$<br>б) $\ctg y = x^2 + xy$                    | 28. | а) $y^2 z - \ln(x + z^2) + xyz = 0$<br>б) $x + \sin x = \cos y - y$       |
| 29. | а) $\arccos(xyz) + 2x^2 z^2 = \sin y$<br>б) $x^3 + 2xy = 3y^2$                      | 30. | а) $3x^2 z^2 + x\sqrt{y} \sin z = 3$<br>б) $x^4 - xy + y^4 = 1$           |

2.3.6 Знайти похідні складених функцій: а)  $z'_u$ ,  $z'_v$ ; б)  $z'_t$ ; в)  $z'_x$

|    |                                                                                   |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | а) $z = x^2 y - y^2 x$ , $x = u \cdot \operatorname{tg} v$ , $y = v \cdot \cos u$ |
|    | б) $z = e^{x^2 - 2y}$ , $x = \sin 3t$ , $y = 2t^3$                                |
|    | в) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ , $y = \sqrt{x^2 + 1}$                  |
| 2. | а) $z = x^3 y + 4y^2$ , $x = u^2 \cdot \ln v$ , $y = u \cdot v^3$                 |
|    | б) $z = \ln(e^{3x} - e^{-2y})$ , $x = 4t^2 + 1$ , $y = (2 - t)^3$                 |
|    | в) $z = \operatorname{tg}(3 + 2x^2 - y)$ , $y = \sqrt{x}$                         |
| 3. | а) $z = e^{2x^2 - 2y^2}$ , $z = u \cdot v$ , $y = v \cdot u$                      |
|    | б) $z = y^{2x}$ , $x = \ln(t^2 - 1)$ , $y = \sqrt[3]{t}$                          |
|    | в) $z = \ln \sin\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$ , $y = x^3 + 2$                  |
| 4. | а) $z = \ln(e^{-x} + e^{-2y})$ , $x = u^2 \cdot v$ , $y = u - v^3$                |
|    | б) $z = e^{y^2 - 2x + 2xy}$ , $x = \cos 3t$ , $y = \operatorname{tg} 2t$          |
|    | в) $z = \sin\left(\frac{x}{y^2}\right)$ , $y = \operatorname{tg}^2 x$             |
| 5. | а) $z = \cos(x^2 + y^3)$ , $x = \frac{u^3}{v}$ , $y = \frac{v^2}{u^3}$            |
|    | б) $z = x^3 e^{2y}$ , $x = \ln(t^2 + 2)$ , $y = t^3 - 4$                          |
|    | в) $z = \operatorname{tg}(y^2 + x^2)$ , $y = \cos 3x$                             |
| 6. | а) $z = x^3 y^3 + \frac{x^2}{y^2}$ , $x = \frac{u}{v}$ , $y = v^2 + u^2$          |
|    | б) $z = \ln(e^{5y} - e^{2x})$ , $x = t^2 - 1$ , $y = t^3 + 2t$                    |
|    | в) $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2 x}$ , $y = \sqrt[3]{x} + 2x$                           |

|     |                                                                                   |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 7.  | a) $z = x^y$ , $x = u^2 - 3vu$ , $y = \sqrt{v} - u^2$                             |
|     | б) $z = x^{3y}$ , $x = e^{4t}$ , $y = e^{-5t}$                                    |
|     | в) $z = \sin\left(\frac{y}{x^3}\right)$ , $y = \sqrt[3]{x^2 + 4}$                 |
| 8.  | a) $z = \sqrt{3x - y^3}$ , $x = u^2 \cdot v$ , $y = v^3 - 2u^2$                   |
|     | б) $z = \cos(x^2 + 3y)$ , $x = 2\ln(t+1)$ , $y = \ln(t^2 + 2)$                    |
|     | в) $z = \cos(x^3 - xy^2)$ , $y = e^{3x^2}$                                        |
| 9.  | a) $z = tg^2(x + \sqrt{y})$ , $x = u \cdot e^v$ , $y = \sqrt{v} \cdot u^3$        |
|     | б) $z = y^3 \cdot e^{-3x}$ , $x = \sqrt[5]{t+2}$ , $y = \sqrt[3]{t-1}$            |
|     | в) $z = ye^{\frac{x}{y}}$ , $y = \ln(x^2 + 3)$                                    |
| 10. | a) $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ , $x = e^{2uv} + v$ , $y = e^{\frac{u}{v}}$  |
|     | б) $z = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$ , $x = \cos^2 t$ , $y = \sin 2t$         |
|     | в) $z = \ln(x^3 - y^2)$ , $y = \cos^2 x$                                          |
| 11. | a) $z = x^2 \ln y$ , $x = \sqrt[3]{u \cdot v}$ , $y = u^3 v - uv^3$               |
|     | б) $z = x^3 y - 4\sqrt{x}$ , $x = t^3 + 2t$ , $y = \sqrt[3]{t} - 1$               |
|     | в) $z = tg(xy + y^2)$ , $y = \cos 4x$                                             |
| 12. | a) $z = tg^2(x^2 - y^2)$ , $x = \cos \sqrt{v} \cdot u^2$ , $y = v^3 \cdot u^3$    |
|     | б) $z = \arccos\left(\frac{2x}{y}\right)$ , $x = \sin 3t$ , $y = \cos 2t$         |
|     | в) $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right)$ , $y = \sqrt[3]{x^2 + 4}$ |

|     |                                                                                                             |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 13. | a) $z = \operatorname{ctg}(3x^2 - 2y^3), \quad x = \sin\left(\frac{u}{v}\right), \quad y = e^{\frac{v}{u}}$ |
|     | б) $z = \frac{x^2}{y^3 + 2}, \quad x = 1 - 2t^3, \quad y = 3 + t^2$                                         |
|     | в) $z = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 + y^2}, \quad y = e^{-x^2}$                                           |
| 14. | a) $z = (x^2y - y^3 + x^3)^2, \quad x = u \cdot v - 2, \quad y = v^3 \cdot u^2$                             |
|     | б) $z = \frac{x^3}{y^2}, \quad x = 1 - e^{-3t}, \quad y = e^{2t} + 1$                                       |
|     | в) $z = \sin^3(xy^2), \quad y = \sqrt[3]{x}$                                                                |
| 15  | a) $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \quad y = u \cdot e^v, \quad x = \sqrt[3]{uv}$        |
|     | б) $z = \operatorname{arc} \cos \frac{y}{2x}, \quad x = \sin 2t, \quad y = \operatorname{tg}^2 t$           |
|     | в) $z = \ln(\sqrt{xy} - 1), \quad y = x\sqrt{x^3}$                                                          |
| 16. | a) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad x = \ln(u^3 + 2v^2), \quad y = v^4 \cdot u^3$                     |
|     | б) $z = \frac{y^2}{x}, \quad x = \operatorname{arctg} 2t, \quad y = \frac{1}{t^2 + 1}$                      |
|     | в) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}, \quad y = x^4 + 3x^2$                                              |
| 17. | a) $z = \frac{x+y}{x-y}, \quad x = u^3v - 3uv^3, \quad y = \sqrt[3]{uv}$                                    |
|     | б) $z = \operatorname{arc} \sin\left(\frac{x^2}{y}\right), \quad x = \cos 3t, \quad y = \sin 2t$            |
|     | в) $z = \operatorname{ctg}\sqrt{xy^3}, \quad y = \sin x^2$                                                  |

|     |                                                                                                 |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 18. | a) $z = \arcsin \sqrt{xy}$ , $x = \frac{\ln u}{v^2}$ , $y = \frac{v^3}{u^2}$                    |
|     | б) $z = y^2 e^x$ , $x = \cos^2 t$ , $y = \sin^2 t$                                              |
|     | в) $z = \arccos(x - y^2)$ , $y = \operatorname{tg} x^3$                                         |
| 19. | a) $z = e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}$ , $x = \ln(u^2 - v^2)$ , $y = v^3 \cdot u^3$                     |
|     | б) $z = \sqrt{x^2 + y + 3}$ , $x = \ln t$ , $y = t^3$                                           |
|     | в) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ , $y = x^4 + 2$                                   |
| 20. | a) $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^4}{y^2}\right)$ , $x = u^3 - v^3$ , $y = \frac{u}{v}$ |
|     | б) $z = \arcsin\left(\frac{x}{2y}\right)$ , $x = \operatorname{tg} 2t$ , $y = \cos 2t$          |
|     | в) $z = \sin \sqrt{\frac{x}{y}}$ , $y = e^{x^2}$                                                |
| 21. | a) $z = \cos^2(xy^2)$ , $x = e^u \cdot v$ , $y = v^3 \cdot u + u^3$                             |
|     | б) $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ , $x = t^3$ , $y = 2t^2 + 1$                                 |
|     | в) $z = \sin \sqrt{3x^2 - y^3}$ , $y = x^3 + 4x - 5$                                            |
| 22. | a) $z = \operatorname{tg}(x^3 + y^2)$ , $x = \sqrt[3]{u^3 - v^2}$ , $y = \sqrt{v^3 + u^2}$      |
|     | б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , $x = t^3 + \sqrt{t}$ , $y = \sqrt[3]{t} + t$                        |
|     | в) $z = \ln(xy - \sqrt{xy})$ , $y = e^{x^3}$                                                    |
| 23. | a) $z = \operatorname{arctg}(y^3 - \sqrt{x})$ , $y = u^2 \cdot v$ , $x = \sqrt{u} \cdot v^3$    |
|     | б) $z = \ln(e^{3x} + 2y)$ , $x = t^4$ , $y = \sqrt[4]{t}$                                       |
|     | в) $z = e^{xy^3} + x^2$ , $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x}$                                              |

|     |                                                                                                           |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 24. | a) $z = \frac{x^2}{y-x}, \quad x = e^u \cdot v, \quad y = v^2 \cdot u^3$                                  |
|     | б) $z = \frac{y^3}{x^2 + y}, \quad x = 2 + t^3, \quad y = t^2 - t$                                        |
|     | в) $z = \ln \sin(xy), \quad y = tg^2 x$                                                                   |
| 25. | a) $z = x^2 \cos y - y^2 \sin x, \quad x = e^{uv}, \quad y = u^2 v - 3u$                                  |
|     | б) $z = \sqrt[3]{xy - 4}, \quad x = \ln t, \quad y = t^3$                                                 |
|     | в) $z = \ln(x^3 + y^2 x), \quad y = \sin(x^2)$                                                            |
| 26. | a) $z = e^{x-2y}, \quad x = u \sin v, \quad y = v \cos u$                                                 |
|     | б) $z = \arcsin(x^2 y), \quad x = \sqrt{t}, \quad y = \sqrt[3]{t}$                                        |
|     | в) $z = x^2 e^y, \quad y = \cos^2(3x)$                                                                    |
| 27. | a) $z = y^x, \quad x = u^3 - v^2, \quad y = \sqrt[3]{u+v}$                                                |
|     | б) $z = e^{xy+x^2-y^2}, \quad x = \ln^2 t, \quad y = \ln t$                                               |
|     | в) $z = e^{x-2y}, \quad y = x^3 - 4x^2 + 1$                                                               |
| 28. | a) $z = \arcsin\left(\frac{x+y}{x}\right), \quad x = \sqrt{u} + \sqrt{v}, \quad y = \sqrt{uv}$            |
|     | б) $z = \frac{x}{y^2}, \quad x = \ln^2 t, \quad y = \frac{1}{t}$                                          |
|     | в) $z = tg\left(\frac{y^2}{x^3}\right), \quad y = \cos(4x^2)$                                             |
| 29. | a) $z = \arccos\left(\frac{2x}{y}\right), \quad x = \ln u + v^3, \quad y = v \cdot u^3$                   |
|     | б) $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \quad x = \frac{1}{t^2 + 1}, \quad y = \frac{1}{t}$ |
|     | в) $z = \sin(x^2 + y^3), \quad y = x^2 e^x$                                                               |

|     |                                                                         |
|-----|-------------------------------------------------------------------------|
| 30. | а) $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$ , $y = uv^3 + 2u^2$ , $x = \cos(u \cdot v)$ |
|     | б) $z = \arctg(xy)$ , $x = t^3 + 2$ , $y = 4 - t^2$                     |
|     | в) $z = \sqrt[3]{x^2 y + 2}$ , $y = \ln(x^2 - 4x)$                      |

### 3 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

#### 3.1 Короткий виклад теоретичного матеріалу

##### Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

Нехай задано поверхню  $F(x, y, z) = 0$ . Точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  належить цій поверхні і функція  $F(x, y, z)$  диференційована в ній, причому частинні похідні функції в точці  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  одночасно не дорівнюють нулю.

Розглянемо дотичну площину до поверхні  $F(x, y, z) = 0$  в точці  $M_0$ . Нормальний вектор дотичної площини в точці  $M_0$  має координати:  $\vec{n} = (F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0))$ . Тоді рівняння дотичної площини до поверхні  $F(x, y, z) = 0$  в точці  $M_0$  обчислюється за формулою:

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0. \quad (3.1)$$

**Означення 3.1.** Нормалю до поверхні в точці  $M_0$  називають прямою, яка проходить через цю точку перпендикулярно до дотичної площини в точці  $M_0$ .

Рівняння нормалі, яка проходить через точку  $M_0$ , має вид:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (3.2)$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі:  $z = f(x, y)$ , то

поклавши  $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$ , можна застосувати наведені вище формули.

$$F'_x(M_0) = f'_x(x_0, y_0), \quad F'_y(M_0) = f'_y(x_0, y_0), \quad F'_z(M_0) = -1.$$

Тоді рівняння дотичної площини в точці  $M_0$  матиме вигляд

$$f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - (z - z_0) = 0, \quad (3.3)$$

а рівняння нормалі в точці  $M_0$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (3.4)$$

### Екстремум функції двох змінних

**Означення 3.2** Точка  $M_0(x_0, y_0)$  є точкою локального максимуму функції  $z = f(x, y)$ , якщо значення функції в цій точці є найбільшим у деякому околі точки  $M_0$ .

**Означення 3.3** Точка  $M_0(x_0, y_0)$  є точкою локального мінімуму функції  $z = f(x, y)$ , якщо значення функції в цій точці є найменшим у деякому околі точки  $M_0$ .

**Теорема 3.1** *Необхідні умови екстремуму.* Якщо в точці  $M_0(x_0, y_0)$  диференційована функція  $z = f(x, y)$  має екстремум, то її частинні похідні першого порядку по змінних  $x$  та  $y$  в цій точці рівні нулю:  $z'_x = 0$ ,  $z'_y = 0$ .

**Зауваження.** Функція може мати екстремум в точках, де хоча б одна з частинних похідних не існує

Точка, в якій частинні похідні порядку функції  $z = f(x, y)$  рівні нулю, тобто,  $z'_x = 0$ ,  $z'_y = 0$ , називається *стаціонарною точкою* функції  $z$ .

Стаціонарні точки і точки, в яких хоча б одна частинна похідна не існує, називаються *критичними точками*.

В критичних точках функція може мати екстремум, а може і не мати. Рівність нулю частинних похідних є необхідною, але не достатньою умовою існування екстремуму.

Нехай функція  $z = f(x, y)$  в деякому околі критичної точки  $M_0(x_0, y_0)$  має неперервні частинні похідні до другого порядку включно.

**Теорема 3.2** *Достатні умови екстремуму.* Якщо

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

то функція  $z = f(x, y)$  має екстремум в точці  $M_0(x_0, y_0)$ , причому максимум при  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$  і мінімум при  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ .

Якщо  $\Delta(x_0, y_0) < 0$ , то точка  $M_0(x_0, y_0)$  не екстремальна. У випадку, коли  $\Delta(x_0, y_0) = 0$ , необхідне додаткове дослідження.

### **Знаходження найбільшого і найменшого значення функції двох змінних в замкнутій області**

Нехай функція  $z = f(x, y)$  визначена і неперервна в обмеженій замкнутій області  $D$ . Тоді вона досягає в деяких точках області  $D$  своїх найбільшого  $M$  і найменшого  $m$  значень. (так званий глобальний екстремум) Ці значення досягаються функцією у точках, що лежать в середині  $D$ , або на межі області.

*Правило знаходження найбільшого і найменшого значень:*

1. Знайти критичні точки функції, що належать  $D$  і обчислити значення функції в них.

2. Знайти найбільше і найменше значення функції  $z = f(x, y)$  на межі області.
3. Порівняти знайдені значення і серед них знайти найбільше  $M$  і найменше  $m$ .

### 3.2 Аудиторні завдання

1. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в заданій точці.

|    |                                                     |
|----|-----------------------------------------------------|
| а) | $z = x^2 + 2y^2$ в точці $(1; 1; ?)$                |
| б) | $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$ в точці $(1; 2; -1)$    |
| в) | $x^2 + 20y^2 + z^2 - 28 = 0$ при $x_0 = 2; y_0 = 1$ |

Відповіді: а) дотична площина  $2x + 4y - z - 3 = 0$ ,

$$\text{нормаль } \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-1};$$

б) дотична площина  $x + 13y + 5z - 22 = 0$ ,

$$\text{нормаль } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{13} = \frac{z+1}{5};$$

в) в точці  $M_1(2; 1; -2)$

дотична площина  $x + 10y - z - 14 = 0$ ,

$$\text{нормаль } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{10} = \frac{z+2}{-1};$$

в точці  $M_2(2; 1; 2)$

дотична площина  $x + 10y + z - 14 = 0$ ,

$$\text{нормаль } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{10} = \frac{z-2}{1};$$

2. Знайти екстремум функції  $z = f(x, y)$ .

|    |                               |
|----|-------------------------------|
| а) | $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ |
|----|-------------------------------|

|    |                                                          |
|----|----------------------------------------------------------|
| б) | $z = \frac{1}{3}x^3 + xy - \frac{1}{2}y^2 - 9x - 3y + 1$ |
|----|----------------------------------------------------------|

Відповіді: а)  $z_{\min} = z(2;1) = -28$ ,  $z_{\max} = z(-2;-1) = 28$ ;

б)  $z_{\max} = z(-4;-7) = 40\frac{1}{6}$ .

3. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^2y(4 - y - x)$  в трикутнику, обмеженому прямими  $x = 1$ ;  $y = 0$ ;  $x + y = 6$ .

Відповідь:  $z_{\text{найб}} = z(2;1) = 4$ ,  $z_{\text{найм}} = z(4,2) = -64$ .

4. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = 10 + 2xy - x^2$  в замкнутій області  $D$ , яка задана нерівністю  $0 \leq y \leq 4 - x^2$ .

Відповідь:  $z_{\text{найб}} = z(0;0) = 10$ ,  $z_{\text{найм}} = z(1;3) = 0$ .

### 3.3 Індивідуальні завдання

3.3.1 Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в заданій точці.

|    |                                                       |
|----|-------------------------------------------------------|
| 1. | а) $z = x^2 + y^2$ , $x_0 = 0$ , $y_0 = 1$            |
|    | б) $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$  |
| 2. | а) $z = 2x^2 - y^2$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$           |
|    | б) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 6 = 0$ , $x_0 = 2$ , $y_0 = 1$ |
| 3. | а) $z = x^2 + 3y^2$ , $x_0 = 0$ , $y_0 = 1$           |
|    | б) $3x^2 + y^2 - z^2 - 3 = 0$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$ |
| 4. | а) $z = 4x^2 - y^2$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$           |
|    | б) $x^2 - 4y^2 + z^2 - 4 = 0$ , $x_0 = 2$ , $y_0 = 1$ |

|     |                                                         |
|-----|---------------------------------------------------------|
| 5.  | a) $z = x^2 + 5y^2$ , $x_0 = 0$ , $y_0 = 1$             |
|     | б) $5x^2 + y^2 - z^2 - 5 = 0$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$   |
| 6.  | a) $z = 6x^2 - y^2$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$             |
|     | б) $x^2 - 6y^2 + z^2 - 2 = 0$ , $x_0 = 2$ , $y_0 = 1$   |
| 7.  | a) $z = x^2 + 7y^2$ , $x_0 = 0$ , $y_0 = 1$             |
|     | б) $7x^2 + y^2 - z^2 - 7 = 0$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$   |
| 8.  | a) $z = 8x^2 - y^2$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$             |
|     | б) $x^2 - 8y^2 + z^2 - 5 = 0$ , $x_0 = 2$ , $y_0 = 1$   |
| 9.  | a) $z = x^2 + 9y^2$ , $x_0 = 0$ , $y_0 = 1$             |
|     | б) $9x^2 + y^2 - z^2 - 9 = 0$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$   |
| 10. | a) $z = 10x^2 - y^2$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$            |
|     | б) $x^2 - 10y^2 + z^2 - 10 = 0$ , $x_0 = 2$ , $y_0 = 1$ |
| 11. | a) $z = x^2 + 11y^2$ , $x_0 = 0$ , $y_0 = 1$            |
|     | б) $11x^2 + y^2 - z^2 - 11 = 0$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$ |
| 12. | a) $z = 12x^2 - y^2$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$            |
|     | б) $x^2 - 12y^2 + z^2 - 8 = 0$ , $x_0 = 2$ , $y_0 = 1$  |
| 13. | a) $z = x^2 + 13y^2$ , $x_0 = 0$ , $y_0 = 1$            |
|     | б) $13x^2 + y^2 - z^2 - 13 = 0$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$ |
| 14. | a) $z = 14x^2 - y^2$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$            |
|     | б) $x^2 - 14y^2 + z^2 + 6 = 0$ , $x_0 = 2$ , $y_0 = 1$  |
| 15. | a) $z = x^2 + 15y^2$ , $x_0 = 0$ , $y_0 = 1$            |
|     | б) $15x^2 + y^2 - z^2 - 15 = 0$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$ |
| 16. | a) $z = 16x^2 - y^2$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$            |
|     | б) $x^2 - 16y^2 + z^2 + 3 = 0$ , $x_0 = 2$ , $y_0 = 1$  |

|     |                                                         |
|-----|---------------------------------------------------------|
| 17. | a) $z = x^2 + 17y^2$ , $x_0 = 0$ , $y_0 = 1$            |
|     | б) $17x^2 + y^2 - z^2 - 17 = 0$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$ |
| 18. | a) $z = 18x^2 - y^2$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$            |
|     | б) $x^2 - 18y^2 + z^2 + 5 = 0$ , $x_0 = 2$ , $y_0 = 1$  |
| 19. | a) $z = x^2 + 19y^2$ , $x_0 = 0$ , $y_0 = 1$            |
|     | б) $19x^2 + y^2 - z^2 - 19 = 0$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$ |
| 20. | a) $z = 20x^2 - y^2$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$            |
|     | б) $x^2 - 20y^2 + z^2 + 7 = 0$ , $x_0 = 2$ , $y_0 = 1$  |
| 21. | a) $z = x^2 + 21y^2$ , $x_0 = 0$ , $y_0 = 1$            |
|     | б) $21x^2 + y^2 - z^2 - 21 = 0$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$ |
| 22. | a) $z = 22x^2 - y^2$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$            |
|     | б) $x^2 - 22y^2 + z^2 + 2 = 0$ , $x_0 = 2$ , $y_0 = 1$  |
| 23. | a) $z = x^2 + 23y^2$ , $x_0 = 0$ , $y_0 = 1$            |
|     | б) $23x^2 + y^2 - z^2 - 23 = 0$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$ |
| 24. | a) $z = 24x^2 - y^2$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$            |
|     | б) $x^2 - 24y^2 + z^2 + 4 = 0$ , $x_0 = 2$ , $y_0 = 1$  |
| 25. | a) $z = x^2 + 25y^2$ , $x_0 = 0$ , $y_0 = 1$            |
|     | б) $25x^2 + y^2 - z^2 - 25 = 0$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$ |
| 26. | a) $z = 26x^2 - y^2$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$            |
|     | б) $x^2 - 26y^2 + z^2 - 3 = 0$ , $x_0 = 2$ , $y_0 = 1$  |
| 27. | a) $z = x^2 + 27y^2$ , $x_0 = 0$ , $y_0 = 1$            |
|     | б) $27x^2 + y^2 - z^2 - 27 = 0$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$ |
| 28. | a) $z = 28x^2 - y^2$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$            |
|     | б) $x^2 - 28y^2 + z^2 - 1 = 0$ , $x_0 = 2$ , $y_0 = 1$  |

|     |                                                         |
|-----|---------------------------------------------------------|
| 29. | a) $z = x^2 + 29y^2$ , $x_0 = 0$ , $y_0 = 1$            |
|     | б) $29x^2 + y^2 - z^2 - 29 = 0$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 2$ |
| 30  | a) $z = 30x^2 - y^2$ , $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$            |
|     | б) $x^2 - 30y^2 + z^2 + 1 = 0$ , $x_0 = 2$ , $y_0 = 1$  |

### 3.3.2 Знайти екстремуми функції $z = f(x, y)$

|     |                                                        |
|-----|--------------------------------------------------------|
| 1.  | $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$                             |
| 2.  | $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y$                      |
| 3.  | $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 20$                           |
| 4.  | $z = 3x^3 - xy^2 + y^2$                                |
| 5.  | $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 - 2xy - 13x + 4y$ |
| 6.  | $z = -3x^3 - 3y^3 + 9xy + 5$                           |
| 7.  | $z = x^3 + y^3 - 15xy$                                 |
| 8.  | $z = xy(6 - x - y)$                                    |
| 9.  | $z = 6xy - x^3 - 8y^3 + 15$                            |
| 10. | $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 6y$                           |
| 11. | $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$                          |
| 12. | $z = x^3 + y^2 + 6xy$                                  |
| 13. | $z = \frac{1}{6}x^3 - xy^2 + \frac{1}{4}x^2 + y^2$     |
| 14. | $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - 2xy + 4x - 13y$ |

|     |                                          |
|-----|------------------------------------------|
| 15. | $z = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$            |
| 16. | $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$             |
| 17. | $z = y^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 - xy$   |
| 18. | $z = x^2 - x^2y + 3y^3$                  |
| 19. | $z = 8x^3 - 6xy + y^3 + 10$              |
| 20. | $z = x^2 + y^3 - 6xy + 18x - 39y + 1$    |
| 21. | $z = x^2 - x^2y + 5y^5$                  |
| 22. | $z = 6xy - \frac{1}{2}x^2 - xy^2$        |
| 23. | $z = 7x^7 - xy^2 + y^2$                  |
| 24. | $z = 3x^2 + 3y^2 + 6x - y^3$             |
| 25. | $z = x^2 + 2y^3 + 4y^2 - 2xy$            |
| 26. | $z = x^2y + \frac{1}{3}y^3 + 6xy$        |
| 27. | $z = x^2 - \frac{1}{3}y^3 - x^2y + 5y^2$ |
| 28. | $z = 3x^3 - xy^2 + y^2$                  |
| 29. | $z = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + xy - y^2$   |
| 30. | $z = x^3 + y^3 - 3xy$                    |

3.3.3 Знайти найбільше та найменше значення функції

$z = |a|x^2 + |b|y^2 + 2ax + 2by + k$  в області  $D_k$  ( $k = -2, -1, 1, 2$ ), де

$D_1 : x=0, y=0, x+y=3,$

$D_2 : x=0, y=0, x+y=-3,$

$D_{-1} : x=0, y=0, x-y=-3,$

$D_{-2} : x=0, y=0, x-y=3.$

| №<br>варіанта | $a$ | $b$ | $k$ | №<br>варіанта | $a$ | $b$ | $k$ |
|---------------|-----|-----|-----|---------------|-----|-----|-----|
| 1             | -1  | -1  | 1   | 2             | 1   | -1  | -1  |
| 3             | 1   | 1   | 2   | 4             | -1  | 1   | -2  |
| 5             | -2  | -2  | 1   | 6             | 2   | -2  | -1  |
| 7             | 2   | 2   | 2   | 8             | -2  | 2   | -2  |
| 9             | -3  | -3  | 1   | 10            | 3   | -3  | -1  |
| 11            | 3   | 3   | 2   | 12            | -3  | 3   | -1  |
| 13            | -4  | -4  | 1   | 14            | 4   | -4  | -1  |
| 15            | 4   | 4   | 2   | 16            | -4  | 4   | -2  |
| 17            | -5  | -5  | 1   | 18            | 5   | -5  | -1  |
| 19            | 5   | 5   | 2   | 20            | -5  | 5   | -2  |
| 21            | -6  | -6  | 1   | 22            | 6   | -6  | -1  |
| 23            | 6   | 6   | 2   | 24            | -6  | 6   | -2  |
| 25            | -7  | -7  | 1   | 26            | 7   | -7  | -1  |
| 27            | 7   | 7   | 2   | 28            | -7  | 7   | -2  |
| 29            | -8  | -8  | 1   | 30            | 8   | -8  | -1  |

## ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика. Модуль 2. Вступ до математичного аналізу. Диференційне числення функцій однієї змінної: Навч. посібник / Крисак Я.В., Левковська Т.А., Горідько Р.В. [та ін.] – К. : НАУ-друк, 2006. – 284 с.
2. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. Кн. 1 Основні розділи / Г.Й. Призва В.В. Плахотник, Л.Д. Гординський та ін.; За ред. Г. Л. Кулініча. – 400 с.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах с решениями. В 2 ч. Ч. 1: Учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : ОНИКС 21 век, 2002. – 304 с.
4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах с решениями. В 2 ч. Ч. 2: Учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век, 2006. – 416 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. У трьох частинах. Ч.1. – Х.: Веста, 2008. – 200с., іл.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. У трьох частинах. Ч.2. – Х.: Веста, 2008. – 240с., іл.
7. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення (Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.; За заг. ред. Овчинникова П.П.) – К.: Техніка, 2003. – 600 с.: іл.
8. Пискунов П.С. Дифференциальное и интегральное счисления: Учеб. пособие для вузов. В 2 т. М.: Иитеграл-Пресс, 2004. Т. 1: – 416 с; Т. 2: – 544 с.
9. Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (в 3 частях). – Минск, «Вышэйшая школа», 1990-1991. Ч. 1 – 270 с.
10. Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (в 3 частях). – Минск, «Вышэйшая школа», 1990-1991. Ч.2 – 352 с.