УДК 539.3

Канд. техн. наук В. С. Левада, канд. физ.-мат. наук В. К. Хижняк,
канд. техн. наук Т. И. Левицкая

Национальный технический университет, г. Запорожье

# ИЗГИБ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННЫМ КРАЕМ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

*Получено точное решение задачи изгиба полубесконечной анизотропной пластины с жестко закрепленным краем, находящейся под действием сосредоточенной нагрузки. Решение выражено в замкнутой форме через элементарные функции. Построена функция Грина соответствующей краевой задачи.*

***Ключевые слова:*** *изгиб, анизотропная пластина, сосредоточенная нагрузка, жесткое закрепление, функция Грина, краевая задача.*

Задачи о локальных воздействиях на элементы конструкций издавна привлекали внимание исследователей. Решение таких задач стремятся получить в замкнутом виде относительно элементарных или других легко вычисляемых функций. При решении задачи изгиба анизотропных пластин под действием сосредоточенных нагрузок широко использовались методы теории аналитических функций, восходящие к классическим работам С. Г. Лехницкого [1]. Эти методы использовались в [2]. В настоящей работе использованы интегральные преобразования обобщенных функций для получения решения задачи изгиба полубесконечной анизотропной пластины с жестко закрепленным краем.

Рассматривается задача

$$D_{11}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 W}{\partial x^3\partial y}+2\left(D_{12}+D_{66}\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+$$

$$+4D_{26}\frac{\partial^4 W}{\partial x\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}=\delta(x-\xi)\delta(y)\,, \qquad (1)$$

$$W(0,y)=0, \qquad \frac{\partial W(0,y)}{\partial x}=0, \qquad (2)$$

где $x\in(0;\infty)$, $m_2=\beta_2(x-\xi)$, $\xi\in(0;\infty)$.

Здесь $m_5=\beta_1(x+\xi)$ – дельта-функция Дирака; $D_{11}, D_{12}, D_{16}, D_{26}, D_{66}, D_{22}$ – жесткости пластины; $W(x,y)$ – прогиб пластины в точке $(x,y)$.

Эта краевая задача моделирует изгиб анизотропной пластинки, находящейся под действием единичной нагрузки, сосредоточенной в точке $(\xi,0)$.

Зная $W(x,y)$, можно найти

$$M_x=-\left(D_{11}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+D_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+2D_{16}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right),$$

$$M_y=-\left(D_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+D_{22}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+2D_{26}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right),$$

$$H_{xy}=H_{yx}=-\left(D_{16}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+D_{26}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+2D_{66}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right),$$

$$N_x=-\left(D_{11}\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+3D_{16}\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}+(D_{12}+2D_{66})\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}+D_{26}\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}\right),$$

$$N_y=-\left(D_{16}\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+3D_{26}\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}+(D_{12}+2D_{66})\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}+D_{22}\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}\right),$$

где $M_x, M_y$ – изгибающие моменты; $H_{xy}, H_{yx}$ – скручивающие моменты; $N_x, N_y$ – перерезывающие силы.

Применим к (1), (2) преобразование Фурье по $y$. Обозначив $F_y\left[W(x,y)\right]=\overline{W}(x,\lambda)$, получаем:

$$D_{11}\frac{\partial^4\overline{W}}{\partial x^4}+4D_{16}(-i\lambda)\frac{\partial^3\overline{W}}{\partial x^3}+$$

$$+2(D_{12}+2D_{66})(-i\lambda)^2\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial x^2}+$$

$$+4D_{26}(-i\lambda)^3\frac{\partial\,\overline{W}}{\partial x}+(-i\lambda)^4 D_{22}\overline{W}=\delta(x-\xi), \qquad (3)$$

$$\overline{W}(+0,\lambda)=0, \qquad \frac{\partial\overline{W}(+0,\lambda)}{\partial x}=0. \qquad (4)$$

Применяя к (3) преобразование Лапласа по $x$ и обозначив $L[W(x)] = \overline{\overline{W}}(p)$, получим

$$\overline{\overline{W}}(p) = \frac{1}{\Delta}\left(e^{-p\xi} + D_{11}B_1 p + D_{11}B_2 - 4D_{16}(i\lambda)B_1\right), \quad (5)$$

где $\Delta = D_{11}p^4 + 4D_{16}(-i\lambda)p^3 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \times (-i\lambda)^2 p^2 + 4D_{26}(-i\lambda)^3 p + (-i\lambda)^4 D_{22}$,

$$B_1 = \frac{\partial^2 \overline{W}(+0,\lambda)}{\partial x^2}, \quad B_2 = \frac{\partial^3 \overline{W}(+0,\lambda)}{\partial x^3}.$$

Уравнение

$$D_{11}\mu^4 + 4D_{16}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{26}\mu + D_{22} = 0$$

может иметь следующие варианты корней

1) $\mu_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$, $\mu_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$,

2) $\mu_{1,2,3,4} = \alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$.

Применяя к (5) обратное преобразование Лапласа с учетом того, что $\lim\limits_{x\to\infty} \overline{W}(x,\lambda) = 0$, получим:

- для первого варианта корней

$$\begin{aligned}
\overline{W} = \frac{1}{S|\lambda|^3}\Big(& T_1 e^{-|\lambda|\beta_1|x-\xi|} e^{i\lambda\alpha_1(\xi-x)} + \\
&+ T_4 e^{-|\lambda|\beta_2|x-\xi|} e^{i\lambda\alpha_2(\xi-x)} + \\
&+ \Big(\Big(e^{-|\lambda|\beta_1(x+\xi)} e^{i\lambda\alpha_1(\xi-x)}\beta_2 + \\
&+ e^{-|\lambda|\beta_2(x+\xi)} e^{i\lambda\alpha_2(\xi-x)}\beta_1\Big)\cdot T_2 + \\
&+ \Big(e^{-|\lambda|(\beta_1 x+\beta_2\xi)} e^{i\lambda(\alpha_2\xi-\alpha_1 x)} + \\
&+ e^{-|\lambda|(\beta_2 x+\beta_1\xi)} e^{i\lambda(\alpha_1\xi-\alpha_2 x)}\Big)\cdot T_3\Big)/Q\Big) - \\
&- \frac{i\lambda}{S|\lambda|^4}\Big(\Big(e^{-|\lambda|\beta_1|x-\xi|} e^{i\lambda\alpha_1(\xi-x)} - \\
&- e^{-|\lambda|\beta_2|x-\xi|} e^{i\lambda\alpha_2(\xi-x)}\Big)\cdot T_5 + \\
&+ 2\beta_1\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)\Big(e^{-|\lambda|(\beta_1 x+\beta_2\xi)} e^{i\lambda(\alpha_2\xi-\alpha_1 x)} - \\
&- e^{-|\lambda|(\beta_2 x+\beta_1\xi)} e^{i\lambda(\alpha_1\xi-\alpha_2 x)}\Big)\Big),
\end{aligned}$$

где $Q = (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2$,

$S = 2D_{11}\beta_1\beta_2\left((\beta_1+\beta_2)^2 + (\alpha_1-\alpha_2)^2\right)\cdot Q$,

$T_1 = -\beta_1^2\beta_2 + \beta_2^3 + \beta_2(\alpha_1-\alpha_2)^2$,

$T_2 = -\beta_1^4 + 2\beta_1^2\beta_2^2 - 2\beta_1^2(\alpha_1-\alpha_2)^2 - \beta_2^4 - 2\beta_2^2(\alpha_1-\alpha_2)^2 - (\alpha_1-\alpha_2)^4$,

$T_3 = 2\beta_1\beta_2\left(\beta_1^3 - \beta_1\beta_2^2 + \beta_1(\alpha_1-\alpha_2)^2 - \beta_1^2\beta_2 + \beta_2^3 + \beta_2(\alpha_1-\alpha_2)^2\right)$,

$T_4 = -\beta_1\beta_2^2 + \beta_1^3 + \beta_1(\alpha_1-\alpha_2)^2$,

$T_5 = 2\beta_1\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)sign(\xi - x)$;

- для второго варианта корней

$$\begin{aligned}
\overline{W} = \frac{1}{4D_{11}\beta^3|\lambda|^3}\Big(& e^{-|\lambda|\beta|x-\xi|} e^{i\lambda\alpha(\xi-x)} \times \\
&\times \left(1 + |\lambda|\beta|x-\xi|\right) - e^{-|\lambda|\beta(x+\xi)} e^{i\lambda\alpha(\xi-x)} \times \\
&\times \left(1 + 2|\lambda|^2\beta^2 x\xi - |\lambda|\beta(x+\xi)\right)\Big).
\end{aligned}$$

Для нахождения $W(x,y)$ используем результаты [3].

В первом варианте решение будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\overline{W} = \frac{1}{2\pi S}\Bigg(&\left(\left(2m_1 n_1 arctg\frac{n_1}{m_1} + \left(n_1^2 - m_1^2\right)\ln r_1\right)\cdot T_1 + \right. \\
&+ \frac{\beta_2 T_2}{Q}\left(2m_5 n_1 arctg\frac{n_1}{m_5} + \left(n_1^2 - m_5^2\right)\ln\overline{r_1}\right) + \\
&+ \frac{T_3}{Q}\left(2m_3 n_3 arctg\frac{n_3}{m_3} + \left(n_3^2 - m_3^2\right)\ln r_3\right) + \\
&+ T_4\left(2m_2 n_2 arctg\frac{n_2}{m_2} + \left(n_2^2 - m_2^2\right)\ln r_2\right) + \\
&+ \frac{T_3}{Q}\left(2m_4 n_4 arctg\frac{n_4}{m_4} + \left(n_4^2 - m_4^2\right)\ln r_4\right) + \\
&+ \frac{\beta_1 T_2}{Q}\left(2m_6 n_2 arctg\frac{n_2}{m_6} + \left(n_2^2 - m_6^2\right)\ln\overline{r_2}\right) + \\
&+ 4\beta_1\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)m_1 n_1 \ln r_1 + 2\beta_1\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)\times \\
&\times (m_1^2 - n_1^2)arctg\frac{n_1}{m_1} + 2\beta_1\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)\times \\
&\times\left((n_3^2 - m_3^2)arctg\frac{n_3}{m_3} - 2m_3 n_3 \ln r_3\right) - \\
&- 4\beta_1\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)m_2 n_2 \ln r_2 + 2\beta_1\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)\times \\
&\times (n_2^2 - m_2^2)arctg\frac{n_2}{m_2} + 2\beta_1\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)\times \\
&\times\left(2m_4 n_4 \ln r_4 + (m_4^2 - n_4^2)arctg\frac{n_4}{m_4}\right)\Bigg),
\end{aligned}$$

где $m_1 = \beta_1(x-\xi)$, $n_1 = y + \alpha_1(x-\xi)$,

$m_2 = \beta_2(x-\xi)$, $n_2 = y + \alpha_2(x-\xi)$,

$m_3 = \beta_1 x + \beta_2\xi$, $n_3 = y - \alpha_2\xi + \alpha_1 x$,

$m_4 = \beta_2 x + \beta_1\xi$, $n_4 = y - \alpha_1\xi + \alpha_2 x$,

$$m_5 = \beta_1(x+\xi)\,,\ m_6 = \beta_2(x+\xi)\,,$$

$$r_1 = \sqrt{m_1^2 + n_1^2}\,,\ \bar{r}_1 = \sqrt{m_2^2 + n_1^2}\,,$$

$$r_2 = \sqrt{m_2^2 + n_2^2}\,,\ \bar{r}_2 = \sqrt{m_6^2 + n_2^2}\,,$$

$$r_3 = \sqrt{m_3^2 + n_3^2}\,,\ r_4 = \sqrt{m_4^2 + n_4^2}\,.$$

При втором варианте корней решение примет вид

$$W = \frac{1}{8\pi\beta^3 D_{11}}\Big(\big(\beta^2(x-\xi)^2 + (y+\alpha(x-\xi))^2\big)\ln q -$$
$$-\big(\beta^2(x+\xi)^2 + (y+\alpha(x-\xi))^2 - 4\beta^2 x\xi\big)\ln \bar{q} +$$
$$+2\beta^2 x\xi\Big),$$

ãäå $q = \sqrt{\beta^2(x-\xi)^2 + (y+\alpha(x-\xi))^2}\,,$

$$\bar{q} = \sqrt{\beta^2(x+\xi)^2 + (y+\alpha(x-\xi))^2}\,.$$

При $\beta = 1$, $\alpha = 0$, $D_{11} = D$ получается известное решение Мичелла для изотропной пластины.

Из этого решения легко получается функция Грина соответствующей краевой задачи

$$G(x, y, \xi, \eta) = W(x, y-\eta).$$

Полученное точное решение задачи об изгибе полубесконечной анизотропной пластины выражено в замкнутой форме через элементарные функции, что позволяет эффективно его использовать.

## Список литературы

1. Лехницкий С. П. Анизотропные пластинки / С. П. Лехницкий. – М. : Наука,1977. – 416 с.
2. Максименко В. Н. Фундаментальные решения в задачах изгиба анизотропных пластин / В. Н. Максименко, Е. Г. Подружин // ПМТФ. – 2003. – Т. 44. – № 4. – С. 135–143.
3. Левада В. С. К применению преобразования Фурье для построения фундаментального решения эллиптического дифференциального оператора / В. С. Левада. – Запорожье, 1987. – Деп. в Укр. НИИНТИ, № 706. – Ук-87.

*Одержано 21.03.2011*

**Левада В.С., Хижняк В.К., Левицька Т.І. Згин напівнескінченої анізотропної пластини з жорстко закріпленим краєм, що знаходиться під дією зосередженого навантаження**

*Отримано точний розв'язок задачі згину напівнескінченої анізотропної пластини з жорстко закріпленим краєм, що знаходиться під дією зосередженого навантаження. Розв'язок виражено в замкнутій формі через елементарні функції. Побудовано функцію Гріна відповідної крайової задачі.*

***Ключові слова:*** *згин, анізотропна пластина, зосереджене навантаження, жорстке закріплення, функція Гріна, крайова задача.*

**Levada V., Khizhnyak V., Levitskaya T. The semiinfinite anisotropic plate with fixed edge bending under the action of concentrated load**

*The exact solution of semi-infinite anisotropic plate with a rigidly fixed boundary bending under a concentrated load is received. Solution is expressed in closed form through elementary functions. Green's function corresponding to the boundary problem was built.*

***Key words:*** bending, anisotropic plate, concentrated load, fixed edge, the Green's function, boundary value problem.