

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

“Математичні задачі енергетики”

для студентів спеціальності
141 «Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка»
всіх форм навчання

2024

Конспект лекцій з дисципліни "Математичні задачі енергетики" для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» всіх форм навчання / Укл.: Д.О. Кулагін – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2024 – 90 с.

Укладач: Д.О. Кулагін, д-р техн. наук, професор, професор кафедри ЕПП

Рецензент: Ю.Г. Качан, д-р техн. наук, професор, професор кафедри ЕПП

Відповідальний за випуск: О.А. Шрам, канд. техн. наук, доц., зав. кафедри ЕПП

Затверджено
на засіданні кафедри
«Електропостачання
промислових підприємств»
Протокол № 6 від 31.01.24

Затверджено
на засіданні НМК
електротехнічного факультету
Протокол № 6 від 25.04.24

ЗМІСТ

Глава 1.Рівняння встановленого режиму електричної системи.

§1.1. Загальні відомості про схеми заміщення	6
§1.2. Рівняння стану лінійного електричного кола.....	9
§1.3. Формування матричних рівнянь стану електричного кола.....	15
§1.4.Рівняння вузлових напруг.....	19
§1.5. Рівняння контурних струмів.....	20
§1.6. Преобразовані форми рівняння стану.....	23

Глава 2.Методи розв'язку рівнянь стану електричної системи

§2.1.Технічна и математична постановка задачі розрахунку встановленого режиму.....	24
§2.2Рішення рівнянь стану методом Гаусса.....	26
§2.3.Звернення матриці коефіцієнтів рівнянь стану.....	28
§2.4.Рішення рівнянь стану ітераційним методом.....	29

Глава 3.Основні поняття о застосуванні методів теорії імовірностей.

§3.1.Технічна і математична постановка задачі.Основні поняття теорії ймовірностей.....	31
§3.2. Випадкові події.....	33
§3.3.Випадкові величини.....	34
§3.4 Статистичний аналіз електричних навантажень.....	35
§3.5Деякі відомості про випадкові процеси.....	38
§3.6 Стаціонарні випадкові процеси.....	39
§3.7. Застосування метода Монте-Карло.....	41
§3.8Властивості найпростішого потоку подій.....	47

Глава 4.Математичні моделі, які застосовуються при вивченні перехідних процесів в електричних системах.

§4.1.Ідентифікація електротехнічних задач.....	50
§4.2Технічна постановка задачі.....	51
§4.3Структурні схеми і характеристика їх елементів.....	51
§4.4 Поннятя передавальної функції.....	52
§4.5Єлементарні ланки та їх передавальні функції.....	55
§4.6 Передавальна функція системи.....	55
§4.7Поннятя комплексного коефіцієнта посилення.....	56
§4.8Знаходження спрощеної математичної моделі по її амплітудно-фазовій частотній характеристиці.....	57

Глава 5.Математичний апарат для вивчення статистичної стійкості встановленого режиму.

§5.1Задачі дослідження.....	58
§5.2 Стійкість стану рівноваги.....	57
§5.3Необхідні і достатні умови стійкості.....	59
§5.4Алгебраїчні критерії стійкості.....	62
§5.5Критерій стійкості Михайлова.....	64
§5.6.Критерій стійкості Найквіста.....	65
§5.7.Виділення областей стійкості (метод D-розбиття)	67

Глава 6.Математичний апарат для вивчення перехідних процесів в лінійній ідеалізації.

§6.1Постановка задачі.....	68
§6.2Побудова перехідних процесів по передавальній функції.....	68
§6.3Оцінка перехідного процесу по ступеню стійкості.....	71
§6.4Побудова перехідного процесу по частотним характеристикам...71	
§6.5Оцінка перехідного процесу по виду дійсних частотних характеристик.....	75
§6.6.Вимушенні коливання в електричній системі.....	76
§6.7.Зв'язок амплітудно частотної хаактеристики з запасом стійкості.....	78
§6.8.Побудова амплітудно-частотної хаартеистики замкнутої системи по амплітудно-фазовій частотній характеристиці разомкнутої системи.....	79

Глава 7. Математичний апарат для вивчення перехідних процесів

§7.1. Визначення перехідного процесу з допомогою числених рішення диференціальних рівнянь.....	80
§7.2. Поняття якісних характеристик для можливих рухів нелінійної системи.....	82
§7.3. Знаходження достатніх умов стійкості при великих обуреннях з допомогою прямого (второго) метода Ляпунова.....	83
§7.4. Дослідження періодичних рішень з допомогою гармонічної лінеаризації нелінійностей.....	83

1.1 «Загальні відомості про схеми заміщення»

При плануванні розвитку, проектуванні і управлінні режимами електроенергетичних систем (ЕЕС) необхідно вирішувати коло технічних і техніко-економічних завдань, які мають аналітичний і розрахунковий характер.

Завдання електроенергетики досить складні, що обумовлено:

1) складністю ЕЕС, 2) високою швидкістю і взаємозв'язком процесів, що протікають в різних елементах системи в нормальних і аварійних режимах 3) забезпеченням надійної роботи при різних аваріях

Аналіз режимів роботи ЕЕС вимагає розрахунків їх параметрів: напруги в вузлових точках, струмів і потужностей в елементах.

Для виконання таких розрахунків реальним ЕЕС зазвичай ставляться у відповідність так звані схеми заміщення, що представляють собою сукупність схем заміщення окремих елементів ЕЕС, з'єднаних між собою в тій же послідовності, що і в розглянутих ЕЕС. По суті, схеми заміщення - це електротехнічні моделі ЕЕС, що відображають фізичну сутність що відбуваються в них електричних і магнітних процесів за допомогою комплексу відомих електротехнічних елементів - джерел напруги, джерел струму, опорів, провідностей. На підставі схем заміщення ЕЕС створюються їх математичні моделі, які реалізуються, як правило, з використанням відомих законів і методів електротехніки: закону Ома, законів Кірхгофа, рівнянь вузлових потенціалів, рівнянь контурних струмів, методу накладення. Аналіз режимів роботи ЕЕС вимагає розрахунків їх параметрів: напруги в вузлових точках, струмів і потужностей в елементах і ін. Для виконання таких розрахунків реальним ЕЕС зазвичай ставляться у відповідність так звані схеми заміщення, що представляють собою сукупність схем заміщення окремих елементів ЕЕС, з'єднаних між собою в тій же послідовності, що і в розглянутих ЕЕС. По суті, схеми заміщення - це електротехнічні моделі ЕЕС, що відображають фізичну сутність що відбуваються в них електричних і магнітних процесів за допомогою комплексу відомих електротехнічних елементів - джерел напруги, джерел струму, опорів, провідностей. На підставі схем заміщення ЕЕС створюються їх математичні моделі, які реалізуються, як правило, з використанням

відомих законів і методів електротехніки: закону Ома, законів Кірхгофа, рівнянь вузлових потенціалів, рівнянь контурних струмів, методу накладення. Навантаження (споживачі електроенергії) мають схеми заміщення або у вигляді опорів або так само, як і джерела живлення, у вигляді джерел струму. Оскільки схеми заміщення ЕЕС, які використовуються для розрахунків ustalених режимів, є електричні ланцюги, то до них застосовуються такі поняття, що характеризують електричні ланцюги, як гілка, вузол і контур. Як відомо, гілкою називається ділянку ланцюга, який складається з послідовно з'єднаних ЕРС і опору (або тільки опору), уздовж якого в будь-який заданий момент часу струм має одне й те саме значення. Узел визначається як точка з'єднання двох або більше гілок, а контур - як ділянку ланцюга, утворений таким послідовним з'єднанням декількох гілок, при якому початок першої гілки контуру пов'язане з кінцем останньої в одному вузлі.

Схема заміщення на рис.1.1, містить двадцять вісім гілок і вісімнадцять вузлів: 1 - 17 і вузол нейтралі (землі), що має нульовий потенціал. Гілки, пов'язані з вузлом нейтралі (гілки джерел живлення і навантажень), називаються поперечними; інші гілки - поздовжніми.

Схема заміщення, показана на рис.1.2, міститься тільки сімнадцять поздовжніх гілок і сімнадцять вузлів, що визначається відсутністю вузла нейтралі. Обидві розглянуті схеми містять контури, утворені, наприклад, лініями 5, 6, 8 (опору z_{17} , z_{18} , z_{19}) і тому називаються замкнутими; при відсутності контурів схема заміщення називається розімкнутою.

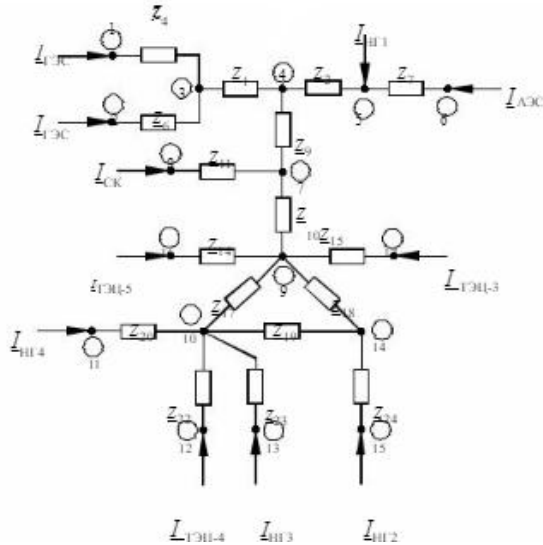


Рис.1.2. Схема заміщення (відсутність вузла нейтралі).

1.2.«Рівняння стану лінійного електричного кола»

Як відомо, режим лінійного електричного кола, якою і є схема заміщення ЕЕС для розрахунку усталеного режиму, повністю описується рівняннями законів Ома і Кірхгофа. Однак для запису цих рівнянь повинні бути прийняті певні позначення. Зупинимося коротко на використовуваній далі системі позначень. Закон Ома встановлює взаємозв'язок параметрів кожної з гілок ланцюга. Будемо вважати, що позитивні напрямки параметрів режиму деякої гілки прийняті від її умовного початку p до умовного кінця (рис. 1.2.1.).

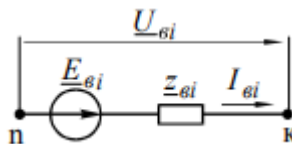


Рис.2.1 Позитивні напрямки параметрів режиму гілки

$$\underline{U}_{\epsilon i} = \underline{z}_{\epsilon i} \underline{I}_{\epsilon i} - \underline{E}_{\epsilon i}$$

У загальному випадку між окремими гілками ланцюга i і j можуть існувати також взаємні опори ij з і ji з, обумовлені, наприклад, взаємної індуктивністю

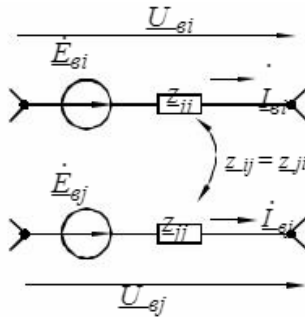


Рис.2.2. Явище взаємної індуктивності

Ці опори характеризують відносини величин ЕРС взаємоіндукції $\Delta \underline{E}_{\epsilon i}$ і $\Delta \underline{E}_{\epsilon j}$, наведених у гілках i і j , до величин наведених їх струмів, $\underline{I}_{\epsilon j}$ і $\underline{I}_{\epsilon i}$, протікаючих відповідно в гілках j і i :

$$\underline{z}_{ij} = \frac{\Delta \underline{E}_{\epsilon i}}{\underline{I}_{\epsilon j}}; \quad \underline{z}_{ji} = \frac{\Delta \underline{E}_{\epsilon j}}{\underline{I}_{\epsilon i}}.$$

У ланцюгах, що володіють властивостями взаємності, величини взаємних опорів \underline{z}_{ij} і \underline{z}_{ji} не залежать від черговості запису індексів:

$$\underline{z}_{ij} = \underline{z}_{ji},$$

Тому, в припущенні, що ЕРС самоіндукції і взаємоіндукції в гілках і

і j збігаються за напрямком, зв'язок між параметрами режимів гілок і і

j може бути визначена наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{\epsilon i} &= \underline{z}_{ii} \underline{I}_{\epsilon i} + \underline{z}_{ij} \underline{I}_{\epsilon j} - \underline{E}_{\epsilon i}; \\ \underline{U}_{\epsilon j} &= \underline{z}_{jj} \underline{I}_{\epsilon j} + \underline{z}_{ij} \underline{I}_{\epsilon i} - \underline{E}_{\epsilon j}; \end{aligned}$$

Де \underline{z}_{ii} і \underline{z}_{jj} - власні опори гілок;
 \underline{z}_{ij} - їх взаємний опір.

Перший закон Кірхгофа визначає баланс струмів в кожному вузлі електричної ланцюга і формулюється так: алгебраїчна сума струмів в вузлі дорівнює нулю. Беручи в якості позитивного спрямування для струмів, пов'язаних з довільним вузлом, напрямком від вузла (рис.1.8), рівняння першого закону Кірхгофа отримаємо у вигляді

$$\sum_{i=1}^s \hat{a}_{i} \underline{I}_{\epsilon i} - \underline{I}_y = 0 ,$$

де s - число гілок, пов'язаних в вузлі;

\underline{I}_y - джерело струму, включене в вузол.

Другий закон Кірхгофа визначає баланс напруг в замкнутих контурах електричного кола і формулюється так: алгебраїчна сума падінь напруги на гілках замкнутого контуру дорівнює нулю. Для довільного контуру, що містить s гілок (рис.1.9), рівняння другого закону Кірхгофа запишеться у вигляді:

$$\sum_{i=1}^s \hat{a}_{i} \underline{U}_{\epsilon i} = 0 .$$

Зазвичай при складанні рівнянь (1.6) падіння напруги гілок, що збігаються з напрямками обходу контуру враховуються в сумі алгебри з позитивними знаками, а не співпадаючі - з негативними.

Незважаючи на те, що розрахунки сталих режимів роботи трифазних ЕЕС найчастіше виконуються за допомогою схем заміщення, складених для однієї фази, характеристику цих режимів прийнято здійснювати за допомогою параметрів режимів, властивих трифазним системам: комплексними величинами струмів I_A, I_B і I_C (рис .1.10), фазних напруг U_A, U_B, U_C , визначених щодо нейтралі або землі, міжфазних (лінійних) напруг - U_{AB}, U_{BC} і U_{CA} .

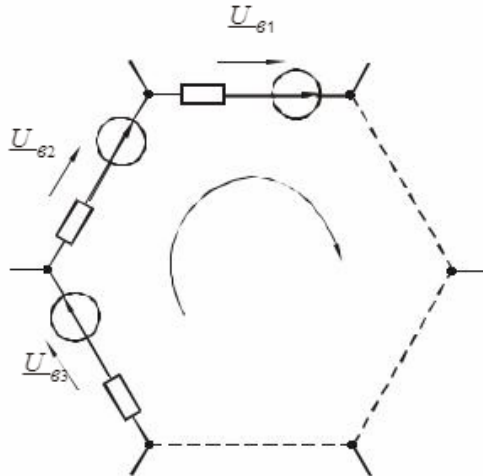


Рис. 2.3 Позитивні напрямки напруг в замкнутому контурі

Найчастіше однофазні схеми заміщення складаються і розраховуються для фази А ЕЕС (рис.1.10, б), т. К. Для трифазної системи, яка має циклічної симетрією, при відомих комплексних параметрах режиму фази А параметри фаз В і С легко визначаються за допомогою корекції фазових кутів векторів, що відповідають фазі А (рис.1.10, в).

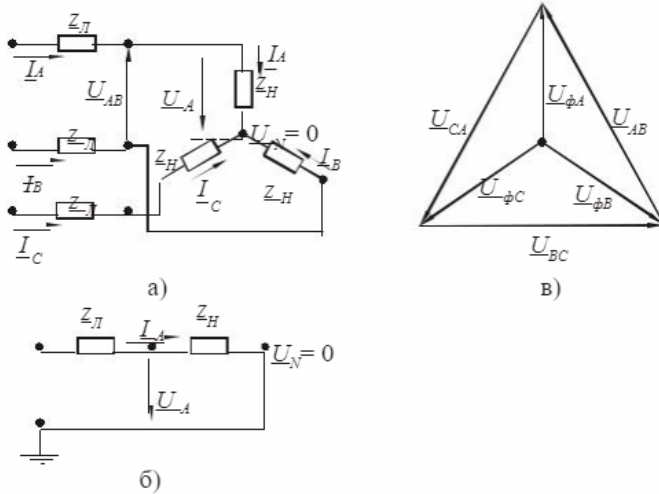


Рис.2.4 Пояснення до системи позначення параметрів режиму трифазної системи: а, б - трифазна і однофазна схеми заміщення; в - векторна діаграма напруг трифазної симетричної системи.

Вектори міжфазних U і фазних U_{ϕ} напруг трифазної системи

зв'язані співвідношеннями (рис.1.10, в):

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB} &= \underline{U}_A - \underline{U}_B; \\ \underline{U}_{BC} &= \underline{U}_B - \underline{U}_C; \\ \underline{U}_{CA} &= \underline{U}_C - \underline{U}_A; \end{aligned}$$

а для модулів цих величин отримаємо:

$$U = \sqrt{3} U_{\phi}$$

Нагадаємо, що номінальні напруги електричних мереж - це міжфазні напруги.

Комплексні опору елементів схем заміщення ЕЕС будемо представляти у вигляді суми активної r і реактивної jx їх складових:

$$\underline{Z}_{\delta i} = r_{\delta i} + jx_{\delta i},$$

де x - застосовується зі знаком плюс для індуктивних елементів і зі знаком мінус - для ємнісних.

Провідності елементів будемо представляти як:

$$\underline{Y} = g - jb,$$

де b також застосовується зі знаком плюс для індуктивних елементів і зі знаком мінус - для ємнісних.

Відповідно комплекси розглянутих вище напружень можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} U_{vi} &= U_v + jU \\ U_{\phi} &= U_{\phi} + jU \\ U &= U + jU \end{aligned}$$

де U_v, U_{ϕ}, U - відповідно активні складові цих напруг, а для струмів елементів, а також струмів вузлів, отримаємо:

$$\underline{I} = I^e + jI^{\text{re}};$$

де I^e - активна складова струму; I^{re} - його реактивна складова.

Згідно з прийнятими позначеннями, повна потужність однієї фази буде дорівнює:

$$\underline{S}_{\phi} = \frac{U}{\phi} \underline{I}^*,$$

де \underline{I}^* - сопряженный комплекс тока.

Повна потужність трьох фаз:

$$\underline{S} = 3\underline{S}_\phi = 3\underline{U}_\phi \underline{I}^* = P + jQ,$$

Де P і Q - активна і реактивна потужності фаз;

Модуль повної потужності може бути знайдений також за допомогою формули:

$$S = \sqrt{3}UI$$

Із цього випливає:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{3}UI \cos j; \\ Q &= \sqrt{3}UI \sin j, \end{aligned}$$

де j - кут між векторами струму і напруги.

1.3. «Формування матричних рівнянь стану електричного кола»

Розрахунки в електроенергетиці пов'язані із записом систем рівнянь високого порядку (в даний час до декількох тисяч). В цьому випадку аналітичне складання таких рівнянь і їх перетворення пов'язане з великими труднощами.

Припустимо, наприклад, що складається система з 10 повних рівнянь.

$$\left. \begin{aligned} \underline{a}_{11}x_1 + \underline{a}_{12}x_2 + \dots + \underline{a}_{1n}x_n &= \underline{b}_1 \\ \underline{a}_{21}x_1 + \underline{a}_{22}x_2 + \dots + \underline{a}_{2n}x_n &= \underline{b}_2 \\ &\vdots \\ \underline{a}_{n1}x_1 + \underline{a}_{n2}x_2 + \dots + \underline{a}_{nn}x_n &= \underline{b}_n \end{aligned} \right\}$$

При використанні рівнянь в такій формі буде потрібно записати 100 позначень невідомих x_i , перед ними 100 коефіцієнтів a_{ij} , 100 знаків додавання або віднімання, 10 знаків рівності і 10 вільних членів b_i . При цьому, безумовно, важливими є лише 100 коефіцієнтів, 10 вільних членів і, припустимо, 50 арифметичних знаків віднімання ("-"). Половина символів, що залишилася зайва.

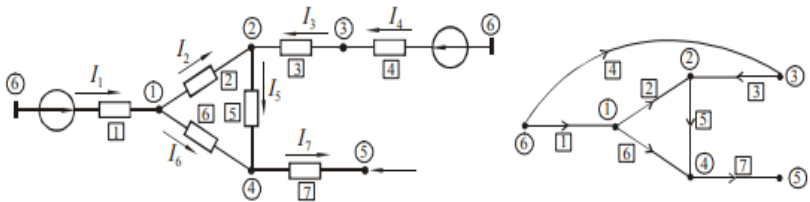
Уникнути цього дозволяють матричні методи. Вони засновані на використанні алгебри матриць і елементів теорії графів

Конфігурацію схеми заміщення електричної системи можна відобразити у вигляді графа.

Під графом електричної мережі розуміють геометричну побудову,

відображає конфігурацію схеми заміщення електричної системи, а також всі зв'язки цієї системи. При цьому гілкам схеми ставляться у відповідність ребра графа,

а вузлам схеми - вершини графа.



а) схема мережі

б) граф мережі

Рис.3.1 Матриця з'єднань гілок графа в вузлах

Рівняння за першим законом Кірхгофа з урахуванням струмів всіх гілок можна записати в наступному вигляді.

Для вузла 1:

$$-1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 + 1 \cdot I_6 + 0 \cdot I_7 = 0$$

Для вузла 2:

$$0 \cdot I_1 - 1 \cdot I_2 - 1 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 + 1 \cdot I_5 + 0 \cdot I_6 + 0 \cdot I_7 = 0$$

І так далі ждя всіх вузлів.

Таким чином, для кожного вузла і можна записати:

$$\sum m_{ij} \cdot I_{ij} = 0$$

Таким чином, для графа мережі, зображеного на рисунку першу матрицю інцидентій можна записати в наступному вигляді:

$$\mathbf{M}_\Sigma = \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \quad \text{Вузли}$$

Гілки

Рис.3.2 Матриця з'єднань гілок графа в незалежних контурах
(Друга матриця інцидентій)

Друга матриця інцидентій \mathbf{N} (матриця контурів) служить для узагальненого аналітичного уявлення з'єднань гілок схеми в незалежні замкнуті контури. Принцип її складання може бути отриманий з аналізу загальної форми записи рівнянь за другим законом Кірхгофа.

Для прикладу розглянемо граф:

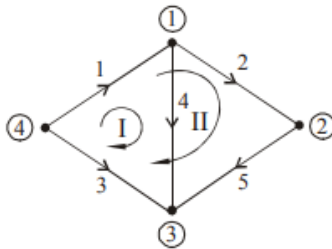


Рис.3.3 Граф.

Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа, вибравши довільно напрямки обходу контурів:

$$1 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 - 1 \cdot U_3 + 1 \cdot U_4 + 0 \cdot U_5 = 0$$

$$1 \cdot U_1 + 1 \cdot U_2 - 1 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 + 1 \cdot U_5 = 0$$

Уявімо індекси в матричній формі:

$$\mathbf{N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Гілки}} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \right\} \text{ незалежні контури}$$

Гілки

У матричному вигляді для кожного контуру можна записати:

$$\sum_{i=1}^n m_i U_i = 0.$$

1.4. «Рівняння вузлових напруг»

Рівняння вузлових напруг в електротехніці відомі під назвою рівнянь вузлових потенціалів. Як вже зазначалося, при аналізі і розрахунках симетричних робочих режимів ЕЕС вважається, що потенціал трифазного ланцюга Ψ_N або, що в цьому випадку те ж саме, потенціал землі Ψ_3 дорівнює нулю. Тому, якщо після складання і рішення рівнянь вузлових потенціалів щодо потенціалів ланцюга Ψ_i також напруги у вузлах ЕЕС $\underline{U}_{\phi i}$ визначаються щодо нульового потенціалу, то справедливо наступне вираження:

$$\underline{U}_{\phi i} = \underline{\Psi}_i - \underline{\Psi}_N = \underline{\Psi}_i.$$

В цьому випадку при складанні рівнянь вузлових потенціалів і їх перетворенні зручно оперувати безпосередньо з поняттями напруг, називаючи відповідно і рівняння - рівняннями вузлових напруг.

Рівняння вузлових напруг впливають з першого закону Кірхгофа і закону Ома, якщо все струми в гілках висловити через напруги вузлів і провідності гілок. Наприклад, для ланцюга, зображеної на рис.1.10, б, повна система рівнянь вузлових напруг, записана на підставі першого закону Кірхгофа, матиме вигляд.

$$\left. \begin{aligned} \underline{Y}_{11}\underline{U}_{\phi 1} + \underline{Y}_{12}\underline{U}_{\phi 2} + \underline{Y}_{13}\underline{U}_{\phi 3} &= \underline{I}_{y1}; \\ \underline{Y}_{21}\underline{U}_{\phi 1} + \underline{Y}_{22}\underline{U}_{\phi 2} + \underline{Y}_{23}\underline{U}_{\phi 3} &= \underline{I}_{y2}; \\ \underline{Y}_{31}\underline{U}_{\phi 1} + \underline{Y}_{32}\underline{U}_{\phi 2} + \underline{Y}_{33}\underline{U}_{\phi 3} &= \underline{I}_{y2}, \end{aligned} \right\}$$

де $\underline{U}_{\phi i}$ - невідомі фазні значення вузлових напруг

\underline{I}_{yi} - задають струми в вузлах

\underline{Y}_{ii} - власні провідності вузлів;

\underline{Y}_{ij} - взаємні провідності між вузлами i і j

i і j - поточні номери вузлів.

1.5. «Рівняння контурних струмів»

Розглянуті рівняння вузлових напруг ґрунтувалися на використанні

першого закону Кірхгофа і закону Ома. Їх застосування дозволяє значно знизити порядок розв'язуваної системи рівнянь в порівнянні з узагальненими рівняннями стану, оскільки кількість вузлів завжди буде меншою за кількість гілок, особливо в складних схемах.

Іншим методом, що дає можливість пониження порядку розв'язуваної системи рівнянь, є метод контурних струмів, заснований на використанні другого закону Кірхгофа і закону Ома. При розрахунку режимів мережі за допомогою цього методу вважають, що в кожному незалежному контурі протікає свій контурний струм. При цьому дійсні струми гілок, які є загальними для двох або більш контурів, представляються у вигляді алгебраїчної суми відповідних контурних струмів, а струми в гілках, що входять тільки в один контур, прирівнюються відповідним контурним струмів з урахуванням обраних позитивних напрямків струмів гілки і контурного.

Введення цих контурних струмів дозволяє зменшити число змінних в

системі рівнянь стану, так як число незалежних контурів значно менше числа гілок.

Рівняння контурних струмів можна отримати на підставі другого закону Кірхгофа, якщо струми в гілках висловити через контурні.

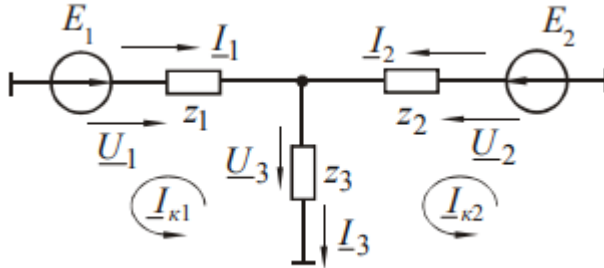


Рис.5.1. Схема заміщення мережі

Для схеми, зображеної на рис. 1.11, при прийнятих позитивних напрямках струмів в гілках і напрямках обходу контурів за другим законом Кірхгофа можна записати 2 незалежних рівняння:

$$\begin{aligned} -z_1 I_1 - z_3 I_3 &= -E_1 \\ z_2 I_2 + z_3 I_3 &= E_2. \end{aligned}$$

Ці рівняння безпосередньо вирішити не можна, так як кількість змінних більше кількості рівнянь.

Виконаємо заміну змінних в рівняннях (1.38). Для цього введемо припущення, що незалежні контури обтікаються деякими умовними

контурними струмами $I_{\kappa 1}$ і $I_{\kappa 2}$ які мають таку властивість, що струм кожної гілки може бути отриманий як алгебраїчна сума контурних струмів, що протікають по цій гілці. Тоді з урахуванням обраних позитивних напрямків струмів гілок і контурних струмів для схеми (рис.1.11) можна записати:

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_{\kappa 1}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{\kappa 2}$$

$$\underline{I}_3 = -\underline{I}_{\kappa 1} + \underline{I}_{\kappa 2}.$$

Можна записати в наступному вигляді:

$$\underline{z}_1 \underline{I}_{\kappa 1} + \underline{z}_3 \cdot (\underline{I}_{\kappa 1} - \underline{I}_{\kappa 2}) = -\underline{E}_1$$

$$\underline{z}_2 \underline{I}_{\kappa 2} - \underline{z}_3 \cdot (\underline{I}_{\kappa 1} - \underline{I}_{\kappa 2}) = \underline{E}_2.$$

Згрупуємо подібні члени рівнянь щодо невідомих і введемо такі позначення:

$$\underline{z}_{11} = \underline{z}_1 + \underline{z}_3$$

$$\underline{z}_{22} = \underline{z}_2 + \underline{z}_3$$

$$\underline{z}_{12} = -\underline{z}_3$$

$$\underline{E}_{\kappa 1} = -\underline{E}_1$$

$$\underline{E}_{\kappa 2} = \underline{E}_2,$$

Де $\underline{z}_{11}, \underline{z}_{22}$ - власні опори незалежних контурів;

\underline{z}_{12} - взаємні опори контурів;

$\underline{E}_{\kappa 1}, \underline{E}_{\kappa 2}$ - контурні ЕРС.

Власні опори представляють собою суму опорів всіх гілок, що входять в незалежний замкнутий контур.

Взаємні опору представляють собою суму опорів гілок, за якими спільно протікають контурні струми. В даному випадку це один опір

\underline{z}_3 , по якому протікають струми контурів 1 і 2. Якщо повинні бути щільними мають загальних опорів, то взаємні опору дорівнюють

нулю. Якщо позитивні напрямки контурних струмів в загальній гілці збігаються, то загальний опір береться зі знаком "+", в іншому випадку - зі знаком "-" (в даному Для 12 $z = -z$). Якщо контури не мають загальних гілок, то їх загальний опір дорівнює нулю.

Контурні ЕРС знаходяться підсумовуванням ЕРС гілок, що входять в замкнутий контур, з урахуванням прийнятих позитивних напрямків обход контурів. Якщо в схемі присутні джерела струму, то вони можуть бути замінені еквівалентними джерелами напруги.

У загальному вигляді рівняння контурних струмів можна записати наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} \underline{z}_{11} \underline{I}_{k1} + \underline{z}_{12} \underline{I}_{k2} + \dots + \underline{z}_{1n} \underline{I}_{kn} &= \underline{E}_{k1} \\ &\vdots \\ \underline{z}_{n1} \underline{I}_{k1} + \underline{z}_{n2} \underline{I}_{k2} + \dots + \underline{z}_{nn} \underline{I}_{kn} &= \underline{E}_{kn} \end{aligned} \right\}$$

Важливою властивістю рівнянь контурних струмів є те, що $\underline{z}_{ij} = \underline{z}_{ji}$.

Слід також зазначити, що для складання рівнянь контурних струмів необхідно виділити в схемі незалежні контури.

Найчастіше метод застосовується тоді, коли в схемі присутні джерела напруги, тому що при наявності джерел струму їх доводиться замінювати штучно джерелами напруги, що ускладнює розрахунок.

1.6. «Преобразовані форми рівняння стану»

З системи рівнянь, складених за першим законом Кірхгофа

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{J}$$

визначити струми у вітках замкнених мереж неможливо – невідомих m , а рівнянь n ($n < m$). Потрібні ще $m-n$ рівнянь, складених за другим законом Кірхгофа.

$$\mathbf{NZ}_B \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{NE}.$$

Формули першого і другого законів Кірхгофа утворюють узагальнене рівняння стану електричного кола:

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{F}},$$

в якому матриця \mathbf{A} складена з матриць \mathbf{M} та \mathbf{NZ}_B , а вектор \mathbf{F} – із векторів \mathbf{J} та \mathbf{NE} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{NZ}_B \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{J}} \\ \mathbf{NE} \end{bmatrix}.$$

Розв'язок узагальненого рівняння стану:

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{F}}.$$

2.1. «Технічна и математична постановка задачі розрахунку встановленого режиму»

(Розрахунок ustalених режимів електричних мереж).

Існує декілька форм запису системи рівнянь вузлових напруг. Базовою є комплексна форма балансу струмів. Оскільки під час розрахунку електричних мереж прийнято використовувати лінійні напруги, то вираз необхідно записати у такому вигляді:

$$\mathbf{YU}_\Delta = \sqrt{3}(\mathbf{J} - \mathbf{MY}_B \dot{\mathbf{E}}).$$

За такого запису розглядають комплексні значення $U_{\Delta i}$, модулі яких дорівнюють модулям лінійних напруг, а початкові фази – початковим фазам напруг фази А. Струми у вітках – комплекси діючих значень струмів і I у фазі А ліній електропередачі
У розгорнутому вигляді останнє рівняння має вигляд:

$$\underline{Y}_{ii}\dot{U}_{\Delta i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \underline{Y}_{ij}\dot{U}_{\Delta j} = \sqrt{3}J_i + \sqrt{3} \sum_{j=1}^{m_i} (\pm \underline{Y}_{i(j)}\dot{E}_j), \quad i = 1, \dots, n,$$

де \underline{Y}_{ii} – власна провідність i -го вузла, яка дорівнює сумі провідностей віток, приєднаних до цього вузла; \underline{Y}_{ij} – взаємна провідність i -го та j -го вузлів, яка дорівнює сумі провідностей віток, що безпосередньо з'єднують ці вузли; $\dot{U}_{\Delta i}$ – напруга i -го вузла відносно вузла балансу; $\dot{E}_j, \underline{Y}_{i(j)}$ – поздовжня фазна ЕРС і провідність j -ої вітки, що приєднана до i -го вузла.

У разі застосування напруг вузлів вираз набуде вигляду:

$$\underline{Y}_{ii}\dot{U}_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \underline{Y}_{ij}\dot{U}_j - \underline{Y}_{i,\delta}\dot{U}_\delta = \sqrt{3}J_i + \sqrt{3} \sum_{j=1}^{m_i} (\pm \underline{Y}_{i(j)}\dot{E}_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.13)$$

де \dot{U}_δ – напруга базисного вузла; $\underline{Y}_{i,\delta}$ – взаємна провідність i -го та базисного вузлів.

В матричній формі має такий вигляд:

$$\mathbf{Y}_\Sigma \dot{\mathbf{U}}_\Sigma = \sqrt{3}(\mathbf{J} - \mathbf{M}\mathbf{Y}_B \dot{\mathbf{E}}),$$

де \mathbf{Y}_Σ – розширена матриця провідностей вузлів, що додатково містить стовпець взаємних провідностей віток і базисного вузла; \mathbf{U}_Σ – розширений вектор напруг вузлів, що додатково містить напругу базисного вузла.

За відсутності ЕРС у вітках вираз набуде вигляду:

$$\underline{Y}_{ii}\dot{U}_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \underline{Y}_{ij}\dot{U}_j - \underline{Y}_{i,\delta}\dot{U}_\delta = \sqrt{3}J_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

В матричній формі має такий вигляд:

$$\text{diag}(\hat{\mathbf{U}}) \mathbf{Y}_{\Sigma} \mathbf{U}_{\Sigma} = \hat{\mathbf{S}},$$

де $\text{diag}(\hat{\mathbf{U}})$ – діагональна матриця комплексних спряжених напруг вузлів; $\hat{\mathbf{S}}$ – вектор комплексних спряжених потужностей вузлів.

2.2 «Рішення рівнянь стану методом Гаусса»

Алгоритм із зворотним ходом складається з двох етапів: прямого і зворотного ходу. На першому етапі систему лінійних рівнянь:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$$

з квадратною матрицею коефіцієнтів:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

приводять до системи рівнянь з верхньою трикутною матрицею. Для цього на першому кроці перше рівняння системи:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= f_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= f_2; \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= f_n \end{aligned}$$

ділять на a_{11} (нормалізація напрямного рядка) і, домноживши отримане рівняння на a_{i1} та віднявши його відповідні коефіцієнти від коефіцієнтів кожного наступного i -го рівняння, вилучають з них $1 \cdot x_1$ (визначення коефіцієнтів наступних рядків). На другому кроці за

такою ж схемою вилучають 2 x з третього і наступних рівнянь. Аналогічно виконуть наступні кроки. На другому етапі визначають невідомі починаючи з останнього рівняння.

Алгоритм Гаусса без зворотного ходу (алгоритм Жордана) полягає в приведенні матриці А до одиничної матриці. Відмінність полягає в тому, що на кожному кроці перетворюють не лише наступні, а й попередні рівняння. Метод Гаусса не має методичної похибки. Однак будь-яка неточність вихідних даних або округлення можуть призвести до суттєвих помилок розв'язування погано обумовлених систем рівнянь. Для оцінювання помилок використовують поняття норми матриці.

Переважають розглядають такі норми матриці:

1) найбільша сума абсолютних значень елементів матриці за рядками або найбільша сума абсолютних значень елементів матриці за стовпцями:

$$\|A\|_{1i} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, i=1, \dots, n; \quad \|A\|_{1j} = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, j=1, \dots, n;$$

2) Евклідова норма, яку визначають як корінь квадратний із суми квадратів модулів усіх елементів матриці.

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2};$$

3) спектральна норма, яку визначають за найбільшим за абсолютною величиною власним значенням матриці $\max |\lambda_i|, i=1, \dots, n$.

Власними значеннями квадратної матриці А називають корені характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для симетричних матриць:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max|\lambda_i|, i=1, \dots, n; \quad \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min|\lambda_i|}, i=1, \dots, n,$$

де λ_i – власні значення матриці \mathbf{A} .

Відношення похибки розв'язку до похибки правої частини називають числом обумовленості матриці, для визначення якого використовують формулу:

$$\vartheta(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2.$$

Для симетричних матриць:

$$\vartheta(\mathbf{A}) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|}.$$

Якщо число обумовленості матриці $\vartheta(\mathbf{A}) = 1 \div 10$, то матриця \mathbf{A} вважається добре обумовленою, якщо $\vartheta(\mathbf{A}) = 100 \div 1000$, то матриця \mathbf{A} вважається погано обумовленою і отриманий прямими методами розв'язок необхідно уточнювати.

2.3. «Звернення матриці коефіцієнтів рівнянь стану»

Метод прогонки застосовують для розв'язування систем рівнянь зі стрічковими матрицями коефіцієнтів. Такий вигляд матриць є характерним для розподільних мереж. Розглянемо систему рівнянь з трьохдіагональною матрицею:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Здійснивши n -кроків за методом Гаусса систему рівнянь можна привести до вигляду:

$$\begin{bmatrix} 1 & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & p_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix},$$

де $p_1 = c_1 / b_1$; $v_1 = f_1 / b_1$; $p_k = c_k / (b_k - a_k p_{k-1})$;
 $v_k = (f_k - a_k v_{k-1}) / (b_k - a_k p_{k-1})$ – коефіцієнти прогонки.

Для обчислення невідомих на зворотному ході використовують формули:

$$x_n = v_n; x_k = v_k - p_k x_{k+1}.$$

2.4. «Рішення рівнянь стану ітераційним методом»

Метод простої ітерації полягає в приведенні вихідної системи рівнянь $Ax = f$ до канонічного вигляду:

$$x = Bx + b,$$

$$\text{де } B = -C^{-1}D, b = C^{-1}f, C + D = A.$$

Систему рівнянь згідно з методом простої ітерації розв'язують у такому порядку. Задають початкове наближення розв'язку x_0 . В подальшому на кожному кроці ітераційного процесу визначають наступне наближення:

$$x_{k+1} = Bx_k + b.$$

Процес продовжують до тих пір, поки

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon,$$

де ε – мале задане значення, що визначає необхідну точність ітераційного процесу

Для збіжності методу простої ітерації при $k \rightarrow \infty$ достатньо, щоб будь-яка перша норма матриці B була меншою від одиниці, наприклад:

$$\sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1, i=1, \dots, n; \quad \sum_{i=1}^n |b_{ij}| < 1, j=1, \dots, n.$$

Для збіжності методу простої ітерації при $k \rightarrow \infty$ необхідно і достатньо, щоб евклідова норма матриці B була меншою від одиниці або матриця B мала всі власні значення $\lambda_i < 1$.

Метод простої ітерації можна реалізувати шляхом приведення вихідної системи рівнянь $Ax = f$ до такого вигляду :

$$x_{k+1} = x_k - \tau(Ax_k - f) = (1 - \tau A)x_k + \tau f = Bx_k + b,$$

де τ – довжина кроку процесу, для збіжності якого достатньо, щоб $\|B\| < 1$.

Якщо в системі лінійних алгебраїчних рівнянь $a_{ii} \neq 0, i=1, \dots, n,$

то її можна привести до вигляду таким чином:

2) події $\omega_1, \dots, \omega_N$ утворюють повну групу подій у тому розумінні, що за будь-якого результату експерименту хоча б одна з них неодмінно відбувається, а це означає, що

$$\omega_1, \dots, \omega_N = \Omega;$$

3) події $\omega_1, \dots, \omega_N$ рівноймовірні.

Кожній елементарній події $\omega_i \in \Omega$ надають деяку вагу, яку позначають $P(\omega_i)$ і називають ймовірністю події ω_i . Ця ймовірність задовольняє такі умови:

$$1) 0 \leq P(\omega_i) \leq 1 \text{ (невід'ємність);}$$

$$2) P(\omega_1) + \dots + P(\omega_N) = 1 \text{ (нормованість).}$$

Випадкова подія утворюється з поєднання елементарних подій і вважається підмножиною множини Ω : $A \subset \Omega$, яка складається з тих точок $\omega \in \Omega$, для яких відбувається подія A .

Ймовірність $P(A)$ будь-якої події в класичній моделі подана у вигляді суми ймовірностей елементарних подій ω_i .

$$P(A) = \sum_{i, \omega_i \in A} P(\omega_i);$$

3) Внаслідок рівноймовірності усіх ω_i ймовірність події A визначається рівністю:

$$P(A) = \frac{k}{N}.$$

де k – кількість доданків

Це класичне за Лапласом означення ймовірності.

3.2. «Випадкові події»

Для багатьох задач рівномірність елементарних подій не можна постулювати, і тому визначення ймовірностей у класичній схемі Лапласа за допомогою (3.4) стає неприйнятним. У зв'язку з цим з'явилась необхідність переформулювати основні початкові положення теорії.

Алгебра подій F є σ -алгеброю, якщо для будь-якої послідовності подій $A_i \subset F$, $i = 1, 2, \dots$ їх об'єднання $A = \bigcup A_i \subset F$ та переріз $A = \bigcap A_i \subset F$ належать F , тобто є подіями.

Нижченаведені п'ять умов утворюють систему аксіом теорії ймовірностей.

1. На σ -алгебрі F визначається функція $P(\cdot)$, що приймає числові значення $P(A) \geq 0$ ($A \subset F$) і називається ймовірністю.

2. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці

$$P(\Omega) = 1.$$

3. Для будь-яких несумісних подій A і B ($A \cap B = \emptyset$) має місце аксіома додавання ймовірностей

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

4. Якщо події A, A_1, A_2, \dots, A_n складають групу попарно несумісних подій, а A – об'єднання цих подій, то

$$P(A) = P\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i\right\} = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

5. Нехай події A_i , $i = 1, 2, \dots$ та A_j , $j = 2, 3, \dots$ попарно несумісні: $A_i \cap A_j = \emptyset$. Тоді має місце розширена аксіома додавання, яка рівносильна аксіомі неперервності ймовірності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n P(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

Простір елементарних подій Ω , σ -алгебра подій F та ймовірність $P(\cdot)$ на F , що задовольняють аксіоми теорії ймовірностей, утворюють так званий ймовірнісний простір, який позначають (Ω, F, P) .

Система аксіом теорії ймовірностей несуперечлива, існують (Ω, F, P) , що задовольняють ці аксіоми, і неповна, оскільки ймовірність можна визначити багатьма способами у межах аксіом. Як приклад можна вказати на класичну теоретико-ймовірнісну модель.

Наведені аксіоми постулюються, і спроба довести їх позбавлена є сенсу. Єдиним критерієм справедливості є ступінь, з яким теорія, побудована на їхній основі, відображає реальний світ.

3.3. «Випадкові величини»

Для випадкової величини характерним є те, що не можна заздалегідь вказати значення, яке вона прийме, хоча множина її можливих значень вважається відомою. Для повного визначення випадкової величини необхідно вказати ймовірності на множині її значень.

Функція $F(x) = P\{X < x\}$, $-\infty < x < \infty$, називається функцією розподілу випадкової величини X . Значимо, що функція $F(x)$ визначає ймовірність випадкової величини на множині її значень.

Дискретні випадкові величини. Означення. Випадкова величина X називається дискретною, якщо множина її значень скінченна.

Для повної ймовірнісної характеристики дискретної випадкової величини, що приймає значення x_k ($k = 1, 2, \dots$), достатньо задати ймовірності $p_k = P\{X = x_k\}$. Якщо значення x_k та p_k відомі, то можна записати функцію розподілу $F(x)$ випадкової дискретної величини X у вигляді

$$F(x) = \sum_{k: x_k < x} p_k.$$

Очевидно, що $F(x)$ не залежить від способу нумерації значень випадкової величини X . Функція розподілу дискретної випадкової величини зростає стрибками в точках $x = x_k$ і величина стрибка дорівнює.

$$F(x_k + 0) - F(x_k) = p_k.$$

Неперервні випадкові величини. Діапазон можливих значень випадкової величини може бути настільки великим, що подавати її дискретною кількістю значень дуже складно. Означення. Випадкова величина X називається неперервною, якщо її функцію розподілу можна подати у вигляді:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Функція $f(x)$, $-\infty < x < \infty$ називається густиною розподілу ймовірностей

(або густиною ймовірностей) випадкової величини. Густина $f(x)$ повністю визначає функцію розподілу, і в точках неперервності має місце співвідношення $f(x) = dF(x)/dx$.

Для неперервної величини X математичне сподівання, природно, виражається вже не сумою, а інтегралом

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

3.4 «Статистичний аналіз електричних навантажень»

Статистичний ряд, гістограма та функція розподілу. Сукупність експериментально отриманих значень випадкової величини називають вибіркою. Припустимо, що вивчаються ймовірності максимальних добових навантажень конкретної підстанції. Нехай спостереження за 10 робочих днів ($n = 10$) складають такий ряд: 800; 900; 1000; 850; 700; 900; 1100; 1050; 1100; 850. Наведена послідовність статистичних даних називається простим статистичним рядом.

Розташувавши значення випадкової величини в порядку зростання $n \times x \leq x \leq \dots \leq x \times 1$ можна побудувати функцію розподілу випадкової величини за такими правилами:

$$\begin{aligned}
 F^*(x) &= 0, \quad x < x_1; \\
 F^*(x) &= i/n, \quad x_i \leq x < x_{i+1}; \\
 &\dots \\
 F^*(x) &= 1,000, \quad x \geq x_n.
 \end{aligned}$$

Якщо кількість спостережень є великою, то дані необхідно згрупувати. Для цього спочатку визначають кількість інтервалів k , на які розподіляють статистичний матеріал. Кількість інтервалів k вибирають в межах від 8 до 20. Кількість інтервалів можна розрахувати за формулою Стержесса:

$$k \approx 1 + 3,2 \ln n.$$

За найбільшим і найменшим значеннями статистичних даних $\max x$ і $\min x$ визначають довжину інтервалу:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}.$$

Визначивши частоту потрапляння в кожний інтервал, статистичний матеріал подається як статистичний ряд (табл. 3.6). У разі, якщо в певний інтервал потрапляє менше п'яти значень, то його об'єднують з сусіднім інтервалом.

Розряд	700-750	750-800	800-850	850-900	900-950	950-1000	1000-1050	1050-1100
n_i^*	5	20	50	100	80	60	40	10
p_i^*	0,014	0,055	0,137	0,274	0,219	0,164	0,110	0,027
$F^*(x)$	0,014	0,069	0,206	0,480	0,699	0,863	0,973	1,000

Таблиця 4.1 – Статистичний ряд навантаження підстанції

Геометричне зображення статистичного ряду отримало назву гістограми .

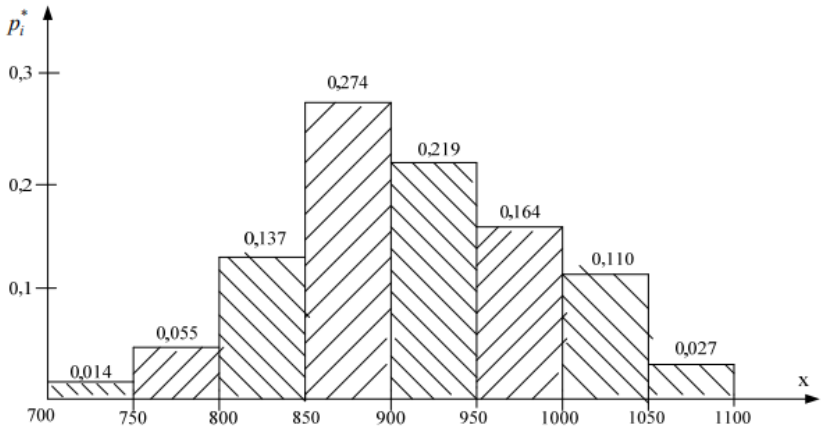


Рисунок 4.1 –Гістограма навантажень

Для побудови статистичної функції розподілу випадкової величини $F(x)$ (рис. 3.8) використовують границі розрядів, які фігурують в статистичному ряді.

За визначенням $F(x) = P(-\infty \leq \eta < x)$.

$$F^*(700) = P(-\infty \leq x < 700) = 0;$$

$$F^*(750) = P(-\infty \leq x < 750) = 0,014;$$

$$F^*(800) = P(-\infty \leq x < 800) = 0,069; \dots$$

$$F^*(1100) = P(-\infty \leq x < 1100) = 1,000.$$

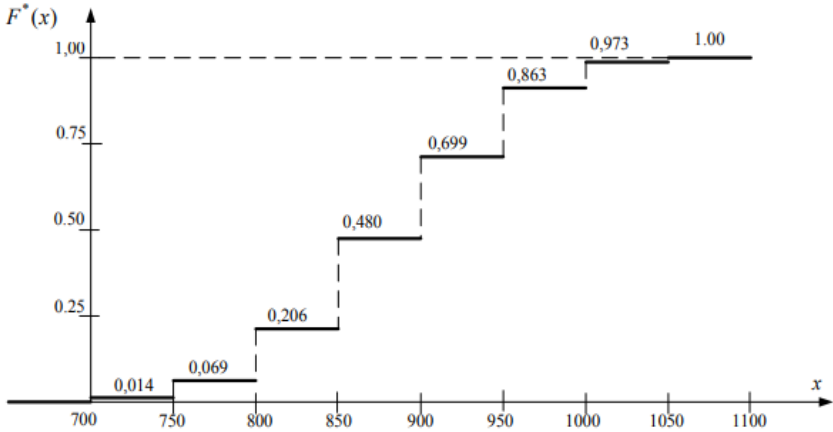


Рисунок 4.2 – Статистична функція розподілу

3.5 «Деякі відомості про випадкові процеси»

Випадковий процес — важливе поняття сучасної теорії ймовірностей. Є певним узагальненням поняття випадкова величина, а саме — це випадкова величина, що змінюється з часом (іншими словами: випадкова величина, що залежить від змінної величини, яку називають час, або іншими словами — це набір випадкових величин, параметризованих величиною T — часом).

Випадковий процес визначається як сімейство випадкових величин, визначених на загальному ймовірнісному просторі, де це зразок простору, це σ -Алгебра і це ймовірнісної міри, і випадкові величини, індексовані деяким набором всі приймають значення в однаковому математичному просторі, який повинен бути вимірним щодо деяких σ -алгебра.

Іншими словами, для даних ймовірнісних просторів і вимірних просторів, стохастичний процес - це набір випадкових величин, який може бути записаний як:

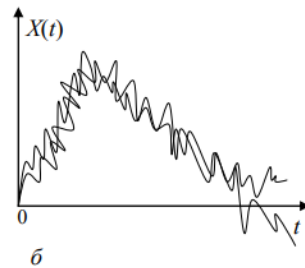
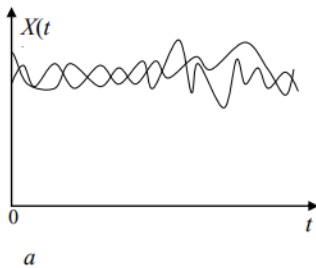
$$\{X(t) : t \in T\}.$$

Одним з найпростіших випадкових процесів є процес Бернуллі, який являє собою послідовність незалежних і однаково розподілених випадкових величин, де кожна випадкова величина приймає значення з імовірністю, скажімо, i нульове значення з імовірністю $1-i$. Цей процес можна порівняти з підкиданням монетки, де ймовірність отримання орла i його значення дорівнює одиниці, а значення решки дорівнює нулю. Іншими словами, процес Бернуллі — це послідовність випадкових величин Бернуллі, де кожне підкидання монети це випробовування Бернуллі.

Випадкові блукання - це стохастичні процеси, які зазвичай визначаються як суми випадкових величин або випадкових векторів в Евклідовому просторі, тому вони є процесами, які змінюються в дискретному часі. Але деякі також використовують цей термін для позначення процесів, які змінюються в безперервному часі.

3.6 «Стаціонарні випадкові процеси»

На практиці часто спостерігаються випадкові процеси, перебіг яких у часі приблизно однаковий, тобто середнє значення процесу залишається сталим, а його характеристики не змінюються. Такі випадкові процеси називаються стаціонарними (рис)



6.1 Стаціонарні випадкові процеси

Прикладами стаціонарних випадкових процесів є коливання напруги в електромережі, випадкові шуми в радіоприймачі, процес хитавиці корабля. Кожен СВП можна розглядати як такий, що триває як завгодно довго. При цьому за початок відліку ми можемо вибрати

будь-який момент часу: характеристики СВП повинні залишитися незмінними. Зауважимо, що крім СВП, існують і нестационарні процеси. Характеристики таких процесів змінюються в часі. Але потрібно розуміти, що саме поняття «стаціонарність» часто залежить від інтервалу часу, на якому розглядається випадковий процес (див. рис. 2.2). Тут один і той самий процес буде стаціонарним, якщо його розглядати на інтервалі $t_1 \div t_2$, і не стаціонарним на інших проміжках часу.

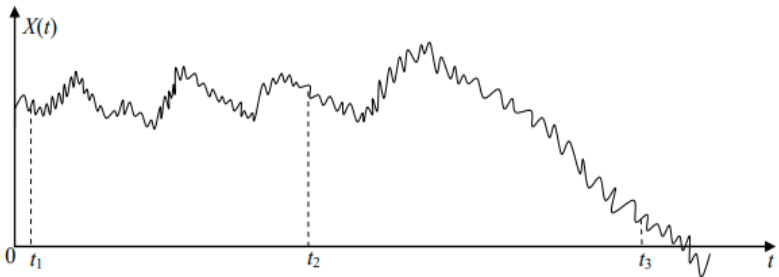


Рис.6.2.Зображення залежності стаціонарного процесу від часу:
 $0 \div t_1$ – нестационарний; $t_1 \div t_2$ – стаціонарний; $t_2 \div t_3$ – нестационарний

Оскільки математичний опис СВП та їхнє перетворення значно спрощуються, порівняно з нестационарними процесами, широкого застосування на практиці набула теорія СВП (теорія стаціонарних ВФ). Випадкова функція $X(t)$ називається стаціонарною, якщо всі її ймовірнісні характеристики не залежать від аргументу t . Під характеристиками будемо розуміти математичне сподівання, дисперсію й кореляційну функцію. Сформулюємо визначення СВП через його характеристики. Випадкова функція $X(t)$ називається стаціонарною, якщо вона має:

- 1) стале математичне сподівання, тобто $m_X(t) = m_X = \text{const}$;
- 2) сталу дисперсію: $D_X(t) = D_X = \text{const}$;

3) кореляційний момент двох перерізів $K_X(t, t')$, де $t' = t + \tau$, не залежить від того, де саме на осі t взято відрізок довжиною τ , а зумовлюється тільки довжиною відрізка, тобто $K_X(t, t + \tau) = k_X(\tau)$ (рис. 2.3).

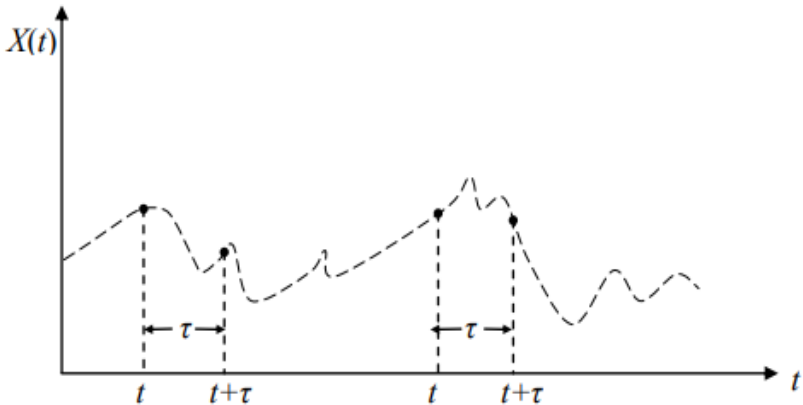


Рис.6.3 Зображення стаціонарного випадкового процесу

Зауважимо, що коли математичне сподівання мінливе, тобто процес не є стаціонарним, то можна перейти до центрованого процесу:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t),$$

й розглядати його як стаціонарний. Крім того, друга умова є окремим випадком третьої, оскільки для СВП має місце рівність:

$$\overline{D_x(t)} = K_x(t, t) = k_x(0) = \text{const}.$$

3.7. «Застосування метода Монте-Карло»

Метод чисельного інтегрування Монте-Карло – це найбільш відоме застосування статичного моделювання для розв’язання прикладних математичних задач.

Якщо з послідовністю випадкових чисел $\{x_i\} \in X$ з законом розподілу ймовірностей $f_x(x)$ провести функціональне перетворення

$y_i = \varphi(x_i)$, то математичне очікування отриманої послідовності випадкових чисел $\{y_i\} \in Y$

$$m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_x(x) dx$$

при обсязі вибірки більше декількох тисяч чисел з достатньо високою точністю може бути оцінено за формулою

$$m_Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

Введемо в вирази так звану функцію індикатора області

$$1[a, b, x] = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x < a, x > b. \end{cases}$$

Якщо тепер обрати функцію

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{f_x(x)},$$

то кінцевий вираз буде мати вигляд

$$I = m_Y = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{f_x(x_i)} 1[a, b, x_i]$$

Алгоритм обчислення визначеного інтегралу за методом Монте-Карло наведено на рисунку 6.16.

Похибка методу Монте-Карло визначається похибкою генерації псевдовипадкової послідовності чисел, що згенеровані на ЕОМ, та обсягом вибірки. Вона може бути оцінена із співвідношення

$$\Delta = \frac{1}{2\sqrt{n(1-P)}}, \quad (6.34)$$

де P – гарантована ймовірність влучання похибки в інтервал $[-\Delta; +\Delta]$

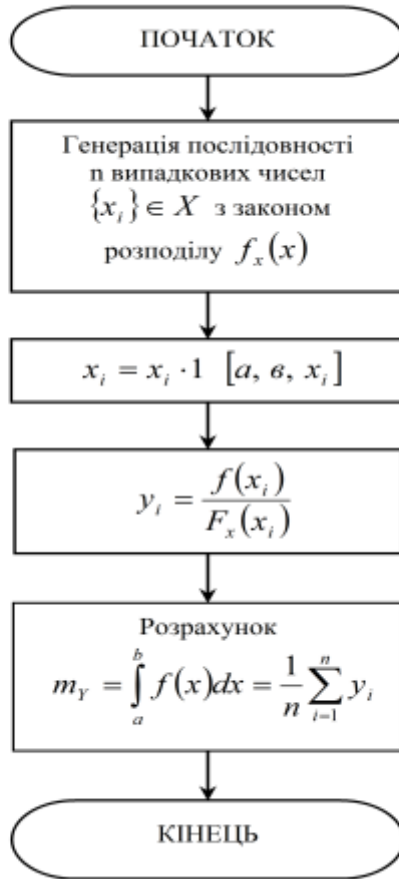


Рис.6.4. Алгоритм методу Монте-Карло

Кількість випробувань n не залежить від кратності інтегралу, тому метод Монте-Карло знаходить застосування для обчислення багатократних інтегралів, де застосувати інші методи чисельного

інтегрування неефективно через сильне збільшення кількості обчислювальних операцій.

Розглянемо послідовність дій при обчисленні кратних інтегралів. Для реалізації цієї процедури перш за все потрібно мати m генераторів випадкових чисел, де m – дорівнює кратності інтегрованих.

Геометрично, обчислення m – кратного інтегралу

$$I = \iiint_{(S)} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m, \quad (6.35)$$

де $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ – неперервна функція в обмеженій замкненій області S , зводиться до визначення $(m+1)$ – вимірного обсягу прямого циліндра в просторі ${}^0x_1, x_2, \dots, x_m y$, що побудований на основі S й обмежений зверху поверхнею $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Для перетворення інтегралу (6.20) таким чином, щоб нова область інтегрування цілком знаходилась в середині одиничного m – вимірного куба σ , зробимо заміну змінних

$$x_i = a_i + (b_i - a_i)\xi_i,$$

де ξ_i – відповідні координати від 0 до 1; a_i, b_i – граничні значення координат, де розташована область інтегрування.

Тоді з (6.35) отримуємо

$$I = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_m - b_m) I_{\xi},$$

де

$$I_{\xi} = \iiint_{(\sigma)} \dots \int f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m.$$

Якщо застосувати m генераторів рівномірно розподілених випадкових чисел в діапазоні $(0,1)$, то обчислення середнього значення функції від їх комбінацій з застосуванням багатовимірного індикатора області інтегрування дасть шукану оцінку інтегралу:

$$I_{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \dots, \xi_{mi}) 1[\xi_{1i}, \xi_{2i}, \dots, \xi_{mi}]$$

де $1[\xi_{1i}, \xi_{2i}, \dots, \xi_{mi}]$ дорівнює 1, якщо точка потрапляє в середину області інтегрування, і 0, якщо не потрапляє.

Похибка обчислення m -кратного інтегралу за методом Монте-Карло оцінюється аналогічно однократному за формулою (6.34).

Задача полягає в тому, щоб для заданої диференційованої функції $f(x)$ знайти похідну в точці x_0 .

Наближене диференціювання аналітично-заданих функцій може бути потрібне при розробці універсальної процедури пошуку похідної для великої кількості різних функцій, або у випадку, коли аналітичний вид похідної надто громіздкий і призводить до втрати точності.

В основі чисельного диференціювання (numerical differentiation) аналітично заданих функцій покладене визначення похідної:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Оскільки невідомо, яке значення h узяти, будеться

послідовність так, $h_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ і, відповідно, формується послідовність $\{D_k\}$, де

$$D_k = \frac{f(x + h_k) - f(x)}{h_k}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

Розрахунок елементів послідовності проводять до тих пір, поки виконується умова:

$$|D_{n+1} - D_n| < |D_n - D_{n-1}|.$$

Якщо відома точність ε , з якою потрібно знайти похідну, то умова завершення може бути такою:

$$|D_{n+1} - D_n| < \varepsilon$$

Порядок точності результату в цьому методі – h .

Нехай $f \in C^3[a, b]$. Тоді порядок точності попереднього метода можна підвищити, використовуючи замість формули (6.36) інші вирази. Розглянемо ці формули.

Формула другого порядку точності $O(h^2)$ для обчислення похідної:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Отримана формула з наступних міркувань. Розкладемо $f(x)$ в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f^{(2)}(x) \cdot h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(C_1) \cdot h^3}{3!} \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x) \cdot h + \frac{f^{(2)}(x) \cdot h^2}{2!} - \frac{f^{(3)}(C_2) \cdot h^3}{3!} \end{aligned}$$

Відніmemo з першої рівності другу :

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x) \cdot h + \frac{(f^{(3)}(C_1) + f^{(3)}(C_2)) \cdot h^3}{3!}$$

Звідси

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Аналогічно можна отримати наступні формули для старших похідних точності порядку $O(h^2)$:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

$$f'''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3},$$

$$f^{(4)}(x) \approx \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4}.$$

Сам алгоритм залишається незмінним. Формується послідовність так, й відповідно обчислюються елементи послідовності, для розрахунку яких замість виразу використовується одна з отриманих формул.

Існують формули більш високих порядків точності, їх можна знайти в спеціальній літературі.

3.8 «Властивості найпростішого потоку подій»

При розгляді випадкових процесів, що відбуваються у системах з дискретними станами та неперервним часом, часто доводиться зустрічатися з так званими «потоками подій».

Потоком подій називається послідовність однорідних подій, що з'являються одна за одною в деякі випадкові моменти часу. Прикладами можуть бути потік викликів на телефонній станції, потік включення приборів у побутовій електромережі, потік збоїв обчислювальної техніки, потік пострілів по мішені і т.д.

Потік подій називається регулярним, якщо події з'являються одна за одною через строго визначені проміжки часу.

Частіше доводиться зустрічатися з потоками подій, для яких і моменти появи і проміжки часу між ними випадкові.

У даному підрозділі будемо розглядати потоки подій, що мають деякі особливо прості властивості. Для цього введемо ряд визначень.

Потік подій називається стаціонарним, якщо ймовірність попадання тієї чи іншої кількості подій на проміжок часу довжиною t залежить тільки від довжини проміжку і не залежить від початку цього проміжку.

Потік подій називається потоком без післядії, якщо для будь-яких проміжків часу, які не перетинаються, кількість подій, що потрапляють на один з цих проміжків, не залежить від кількості подій, що з'явилися на іншому проміжку.

Потік подій називається ординарним, якщо ймовірність потрапляння на елементарний проміжок двох або більше подій скільки завгодно мала у порівнянні з ймовірністю появи однієї події.

Стаціонарність потоку означає його однорідність відносно часу: ймовірнісні характеристики такого потоку мають не змінюватися залежно від часу. Наприклад, інтенсивність потоку подій – середня кількість подій в одиницю часу – для стаціонарного потоку має залишатися сталою. Це не означає, що фактична кількість подій, які з'являються в одиницю часу, стала – ні, потоки можуть мати місцеві згущення та розрідження. Важливо, що для стаціонарного потоку ці згущення та розрідження не носять характер закономірності, а середня кількість подій, що потрапляють на одиничний проміжок часу, залишається сталою для всього періоду, що розглядається. Наприклад, потік викликів, що надходять на телефонну станцію з 12 до 13 год. можна розглядати стаціонарним, той же потік протягом доби вже не буде стаціонарним (вночі потік викликів значно менший ніж вдень).

Відсутність післядії у потоці означає, що події, які утворюють потік, з'являються у послідовні моменти часу незалежно одна від одної. Наприклад, потік пасажирів, що входять на станцію метро, можна вважати потоком без післядії.

Ординарність потоку означає, що події у потоці приходять поодинокі, а не парами, трійками т.д. Якщо у неординарному потоці події з'являються тільки парами, тільки трійками і т.д., то можна його розглядати як ординарний «потік пар», «потік трійок».

Розглянемо потік подій, що має всі три властивості: стаціонарний, без післядії, ординарний. Такий потік називається найпростішим (або стаціонарним пуассонівським) потоком.

Найпростіший потік відіграє серед інших потоків особливу роль. А саме, можна довести, що при суперпозиції достатньо великої кількості потоків, що мають післядію (лише б вони були стаціонарні та ординарні), утворюється сумарний потік, який можна вважати найпростішим, і тим точніше, чим більша кількість потоків додається.

Якщо потік подій не має післядії, ординарний, але не є стаціонарним, то він називається нестаціонарним пуассонівським потоком. У такому потоці інтенсивність λ залежить від часу $\lambda = \lambda(t)$, тоді як для найпростішого потоку $\lambda = const$.

Пуасонівський потік подій (як стаціонарний, так і нестаціонарний) пов'язаний з розподілом Пуасона. А саме, кількість подій потоку, що випадають на будь-який проміжок часу, розподілена за законом Пуасона. Нагадаємо, що закон Пуасона має вигляд:

$$P(m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$$

($m=1,2,\dots$).

Показниковий (експоненціальний) закон розподілу відіграє велику роль у теорії марковських процесів і має щільність ймовірності:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

($t>0$).

Проміжок часу між сусідніми подіями у найпростішому потоці розподілений за показниковим законом, а його математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення дорівнюють $\frac{1}{\lambda}$,

де λ — інтенсивність потоку.

Якщо всі потоки подій, що переводять систему із стану в стан, пуасонівські, то процес, що відбувається у системі буде марковським. Дійсно, пуасонівський потік не має післядії, тому, при заданому стані системи у заданий момент, її переходи в інший стан у майбутньому обумовлені тільки появою деяких подій у пуасонівських потоках, а ймовірності появи цих подій не залежать від «передісторії» процесу.

4.1. «Ідентифікація електротехнічних задач»

Електрична система являє собою сукупність підсистем, які містять велике число окремих елементів. Математичний опис реальної ситуації точними смисловими термінами називають побудовою моделі

Постійні велечини визначаються значеннями параметрів системи.

Задача розрахунку електромагнітних процесів в силових колах тягового електропостачання є імовірнісною задачею з розв'язанням нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь, тому потребує розробки спеціального методу. Враховуючи складність розрахунків, їх доцільно здійснювати або з обходом графіка реальної ВАХ, або удаватися спершу до її еквівалентної наближеної заміни, наприклад, еліпсом. Числові розрахунки математичної моделі з однією чи декількома циклічними ВАХ можливо здійснювати або обходом "реальної" ВАХ, або удатися до "ідеалізації", тобто наближеної заміни реальної циклічної ВАХ. Наведено динамічні ВАХ електровозів відповідно ДСЗ і 2ЕС5К за різних струмів їх навантаження. Циклічна ВАХ може бути закономірно і однозначно використана в системі рівнянь електромагнітного стану під час розрахунку перехідних режимів в системі тяги для найбільш "важкого та складного" (чи (та) найбільш "легкого") режиму. Розроблено та обгрунтовано новий метод структурної ідентифікації електротехнічних пристроїв систем електричної тяги як постійного, так і змінного струмів. Для розв'язання поставленої задачі використовуються: методи і методики лінійної електротехніки, зокрема, операторний метод за Лапласом; числовий метод розв'язання інтегрального рівняння, що базується на представленні рівняння Вінера-Хопфа системою лінійних рівнянь, що дозволяє формувати розв'язання поставленої задачі в математичному вигляді кореляційної і вагової функції; метод факторизації, що передбачає певне розбивання кореляційних функцій випадкових процесів. Розроблено метод вагової функції ідентифікації електротехнічних пристроїв, який у повній мірі може використовуватись у системах електричної тяги. Запропонований метод і методика, що на ньому базується, дозволяють прогнозувати електротягові навантаження тягової мережі, а також інших пристроїв систем тягового електропостачання та електрорухомого складу в різних режимах їх роботи і, зокрема, при швидкісному русі поїздів.

Метод дозволяє враховувати вплив навантаження (і його режим роботи) сусідніх фідерних зон на електромагнітні процеси в досліджуваній міжпідстанційній зоні. При цьому важливо те, що шукані напруги і струми розглядаються як випадкові функції.

4.2 «Технічна постановка задачі»

Математичні моделі електричної системи различаються за ступенем адекватності їх реально досліджуваної системі; по глибині опису процесів в елементах системи (наприклад, спрощене або повний опис електромагнітних перехідних процесів в контурах ротора і статора синхронної машини, у всіх елементах системи регулювання); за формою завдання (у вигляді диференціальних рівнянь, структурних схем, передавальних функцій, тимчасових частотних характеристик). Вибір математичної моделі визначається адекватністю її розв'язуваної задачі - постановкою завдання дослідження, вимогами до точності рішення, вибором методу розв'язання видом вихідної інформації. У всіх випадках дослідник прагне створити найбільш просту, але відповідає цим вимогам математичну модель. При хорошому знанні динамічних властивостей елементів системи, при визначенні їх параметрів, при використанні чисельних методів розв'язання регульовану електричну систему часто описують диференціальних рівнянь. Як правило, диференціальні рівняння, що описують перехідні процеси в технічних пристроях, нелінійні, що обумовлено нелінійністю фізичних закономірностей, що описують їх еси. Так, наприклад, однією з характерних нелінійностей електричної системи, що містить паралельно працювати синхронно машини, є тригонометрическая залежність електромагнітного моменту $P_{ел}$ від імені незалежної змінної - угла δ розбіжності роторів машин.

$$P_{ел} = P_m \sin \delta$$

4.3 «Структурні схеми і характеристика їх елементів»

Структурною схемою автоматичної системи називається умовне графічне зображення її елементів (ланок) та зв'язків між ними з визначенням перетворень сигналів за допомогою передаточних

функцій цих елементів. При аналізі структурних схем враховуються лише інформаційні аспекти, в першу чергу напрямки передачі сигналів. На структурних схемах крім динамічних ланок з фіксованими виходами та входами, зображаються також суматори або елементи порівняння кількох сигналів та вузли (точки розгалуження сигналів). В задачах аналізу та синтезу АСР структурні схеми приводять до зручного виду за рахунок перетворень, для чого існують певні правила. В основі цих перетворень лежить фундаментальне правило : вихід елемента – відображення входу за допомогою передаточної функції, тобто $x(p) = W(p) \cdot U(p)$.

4.4 «Поняття передавальної функції»

Передавальна функція — функція, що описує залежність виходів деякої динамічної лінійної стаціонарної системи від її входів. Також відома як системна або мережева функція. Є математичним представленням моделі чорного ящика деякої системи.

Зазвичай це подання в умовах просторової або тимчасової частоти на зв'язку між входом і виходом теорії лінійних стаціонарних систем з нульовими початковими умовами і нульовою рівновагою. Наприклад, у випадку оптичних пристроїв обробки зображень — це перетворення Фур'є функції розсіювання точки (функція просторової частоти), тобто розподілу інтенсивності, викликаного точковим об'єктом в полі зору. Однак, деякі джерела використовують поняття «передавальна функція» для зазначення різних характеристик входу-виходу в прямих фізичних вимірюваннях (наприклад, вихідної напруги в залежності від вхідної напруги мережі), а не його перетворення в S-площині.

Лінійні стаціонарні системи

Нехай $u(t)$ — вхідний сигнал лінійної стаціонарної системи, а $y(t)$ — її вихідний сигнал. Тоді передавальна функція $W(s)$ такої системи записується у вигляді:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

де $U(s)$ і $Y(s)$ — перетворення Лапласа для сигналів $u(t)$ і $y(t)$ відповідно:

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} \equiv \int_0^{+\infty} u(t)e^{-st} dt$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} \equiv \int_0^{+\infty} y(t)e^{-st} dt$$

Дискретна передавальна функція

Для дискретних і дискретно-безперервних систем вводится поняття дискретної передавальної функції. Нехай $u(k)$ — вхідний дискретний сигнал такої системи, а $y(k)$ — її дискретний вихідний сигнал, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тоді передавальна функція $W(z)$ такої системи записується у вигляді:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

де $U(z)$ і $Y(z)$ — z -перетворення для сигналів $u(k)$ і $y(k)$ відповідно:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}$$

$$U(z) = \mathcal{Z}\{u(k)\} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$$

4.5 «Елементарні ланки та їх передавальні функції»

Найпростіші ланки:

- підсилююче
- інтегровувальне ідеальне
- інтегровувальне реальне
- диференціювальне (ідеальне, реальне)
- аперіодичне інерційне
- коливальне
- запізнювальне.

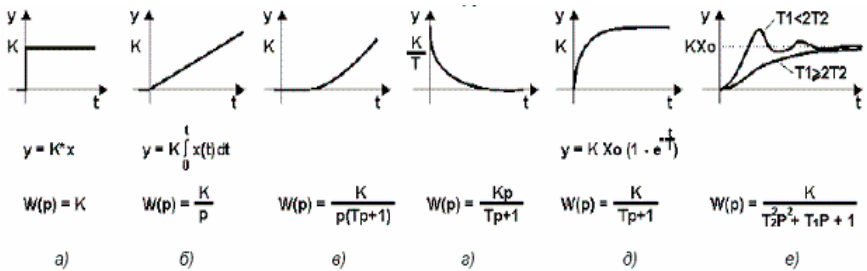


Рис.5.1 Перехідні характеристики і передавальні функції

Пояснення до рисунка:

а) Підсилювальна ланка, пропорційна ланка підсилює вхідний сигнал в K раз. Рівняння ланки $y = K * x$, передавальна функція $W(p) = K$ (де K - коефіцієнт посилення). Приклад підсилювальної ланки - механічні передачі, датчики. Підсилювальна ланка є безінерційною ланкою.

б) Ідеальна інтегруюча ланка має вихідну величину пропорційну інтегралу вхідної величини. При подачі сигналу на вхід ланки вихідний сигнал постійно зростає. Ідеальна інтегруюча ланка є астатичною, тому що не має усталеного режиму.

в) Реальна інтегруюча ланка має передавальну функцію. Реальна інтегруюча ланка є ланкою з запізненням. Перехідна характеристика на відміну від ідеальної ланки є кривою. Приклади інтегруючої ланки: ємність, що наповнюється водою; інтегральний імпульсний виконавчий механізм.

г) Ідеальні диференціюючі ланки фізично не реалізуються. Реальні диференціюючі ланки є собою диференційні ланки більшості об'єктів.

д) аперіодична (інерційна) ланка першого порядку, де T постійна часу. Більшість теплових об'єктів є аперіодичними ланками. Наприклад, при подачі на вхід електричної печі напруги її температура змінюватиметься по аналогічному закону.

е) Коливальна ланка. При подачі на вхід ступеневої впливу амплітудою x_0 перехідна крива матиме один з двох видів: аперіодична (при $T_1 \geq 2T_2$) або коливальна (при $T_1 < 2T_2$).

ж) Запізнювальна ланка

Вихідна величина Y повторює вхідну величину X з деяким запізненням. Наприклад, стрічковий транспортер, конвеєр.

4.6 «Передавальна функція системи»

1. Для стаціонарних систем (тобто систем незмінними параметрами компонентів) і з зосередженими параметрами передавальна функція — це дрібно-раціональна функція комплексної змінної s :

$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

2. Знаменник і чисельник передавальної функції — це характеристичні поліноми диференціального рівняння руху лінійної системи. Полюсами передавальної функції називають корені характеристичного полінома знаменника, нулі — корені характеристичного полінома чисельника.

3. У фізично реалізованих системах порядок полінома чисельника передавальної функції m не може перевищувати порядку полінома її знаменника n , тобто $m \leq n$

4. Імпульсна перехідна функція являє собою оригінал (перетворення Лапласа) для передавальної функції.

5. При формальній заміні $s = j\omega$ в $W(s)$ виходить комплексна передавальна функція системи, що описує одночасно амплітудно-

частотну (у вигляді модуля цієї функції) і фазо-частотну характеристики системи як аргумент її.

4.7 «Поняття комплексного коефіцієнта посилення»

Коефіцієнт підсилення – один з найважливіших показників аналогових електронних пристроїв, який показує у скільки разів корисний ефект, при заданому навантаженні на виході пристрою, більше ефекту, зумовленого джерелом сигналу на його вході

Корисний ефект на виході може визначатися напругою, струмом та потужністю.

На підставі цього пристрій підсилювач характеризують коефіцієнтами підсилення напруги \dot{K}_u , струму \dot{K}_i та потужності K_p :

$$\dot{K}_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = K_u e^{j\phi_u};$$

$$\dot{K}_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = K_i e^{j\phi_i};$$

$$K_p = \frac{P_2}{P_1};$$

$$\text{Де } \dot{U}_2 = \dot{U}_{2\text{эф}}, \dot{U}_1 = \dot{U}_{1\text{эф}}, \dot{I}_2 = \dot{I}_{2\text{эф}}, \dot{I}_1 = \dot{I}_{1\text{эф}}, P_2 = P_{2\text{эф}}, P_1 = P_{1\text{эф}}.$$

Коефіцієнти підсилення напруги та струму становлять величини комплекснозначні, а потужності – дійсну.

Наявність у схемі підсилювача та його навантаженні реактивних елементів спричиняє додатковий фазовий зсув сигналів

$\dot{U}_{2\text{эф}} - \dot{U}_{1\text{эф}}$ та $\dot{I}_{2\text{эф}} - \dot{I}_{1\text{эф}}$, ϕ_u та ϕ_i – кути фазового зсуву відповідних векторів.

У багатокаскадних підсилювачах ці коефіцієнти визначаються з виразів

$$K_{\omega(i)} = K_{1\omega(i)} K_{2\omega(i)} \dots K_{n\omega(i)},$$

$$K_p = K_{1p} K_{2p} \dots K_{np}.$$

Де K_1, K_2, \dots, K_n - коефіцієнти підсилення кожного окремого каскаду.

4.8 «Знаходження спрощеної математичної моделі по її амплітудно-фазовій частотній характеристиці»

Загальні міркування. Елементи регульованою електричної системи, мають, як правило складну внутрішню структуру. З ускладненням електричних систем спрощення математичного опису викликається як необхідність.

Для вирішення цього завдання необхідно:

- 1) оцінити діапазон частот,
- 2) вибрати структуру спрощеної передавальної функції:
- 3) вибрати спосіб апроксимації і визначити коефіцієнти

Оцінка діапазона частот.

На підставі досвіду виходячи з фізичних міркувань можна оцінити діапазон частот для кожної конкретної системи .

Так, наприклад відомо, що діапазон для простої електричній системи з АРВ дорівнює $f = 0 \div 7$ Гц.

Вибір структури спрощеної передавальної функції:

Передавальна функція записується у вигляді відносини двох многочленів:

$$W(p) = B(p)/A(p),$$

де $B(p)$ і $A(p)$ – поліноми по степеням p ,

5.1 «Задачі дослідження»

При розробці пристроїв і систем інженеру доводиться брати до уваги, що параметри систем, зовнішні умови, в яких вони змушені працювати, не бувають постійними незмінними в часі. Зміна їх у часі призводить до виникнення в експлуатовані пристроях і системах перехідних процесів. Тому для оцінки працездатності системи, встановлення якості роботи її в реальних умовах інженеру необхідно вивчати властивості перехідних процесів, розробляти спеціальні заходи і пристрої, що забезпечують потрібні властивості перехідних процесів. На першому етапі створення або розвитку будь-якої технічної системи визначається її працездатність, стійкість стану рівноваги при малих від нього відхиленнях. Здатність системи повернутися у вихідне або близьке до вихідного положення після малого обурення (початкового відхилення параметрів) називається стійкістю стану рівноваги або статичною стійкістю. Широкий клас технічних пристроїв, до якого відносяться і автоматично регульовані електричні системи, при вивченні перехідних процесів після малих збурень може бути описаний системами звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

5.2 «Стійкість стану рівноваги»

Розглядається система диференціальних рівнянь з запізненням :

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x_t),$$

для якої виконані умови теореми існування і єдиності рішень.

Рішення $x(t)$, $t > t_0$. називається стійким, якщо для будь якого

$\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$, таке що при всіх $\varphi \in C$, $\|\varphi - \chi_{t_0}\|_C < \delta(\varepsilon)$, виконується нерівність $\|x_t(\cdot, t_0, \varphi) - \chi_t(\cdot)\|_C < \varepsilon$ при $t > t_0$.

5.3 «Необхідні і достатні умови стійкості»

Для асимптотичної стійкості лінійних систем необхідно і достатньо щоб всі корені характеристичного рівняння:

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

мала б негативну реальну частину.

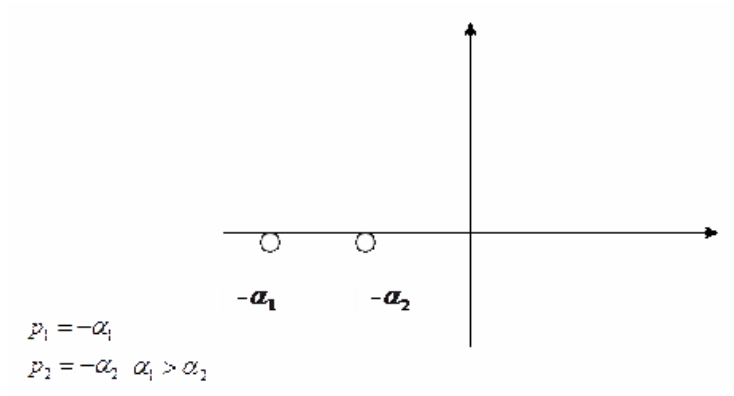
$$p_1 = -\alpha_1$$

$$p_{2,3} = -\alpha \pm j\beta$$

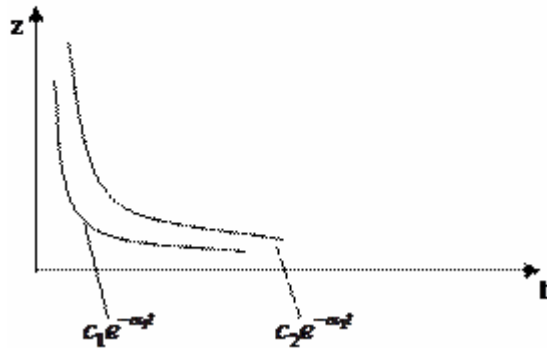
Відомо, що рішення диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}$$

1. Нехай коріння дійсні.

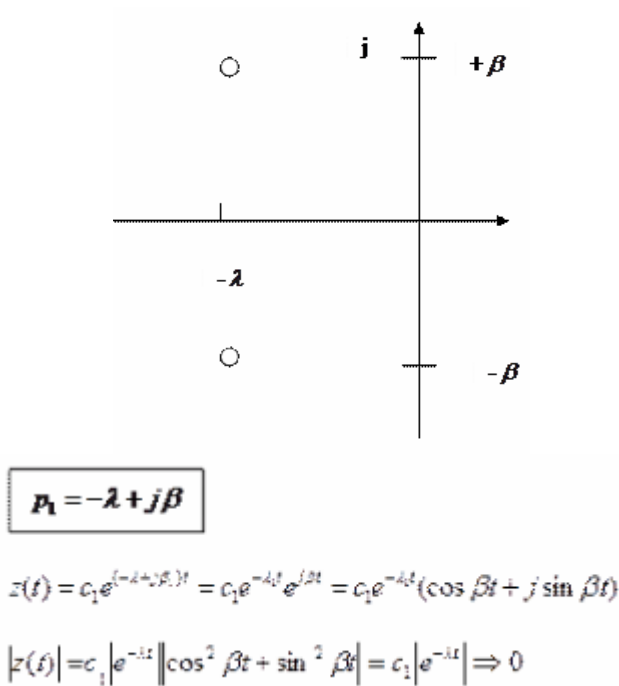


$$z(t) = c_1 e^{-\alpha_1 t} + c_2 e^{-\alpha_2 t}$$



При $t \rightarrow \infty \quad z(t) \rightarrow 0$ а це відхилення від номінального режиму.

2. Якщо корені комплексні.



Необхідна умова стійкості.

Для асимптотичної стійкості системи, необхідно, щоб всі коефіцієнти характеристичного рівняння мали один знак.

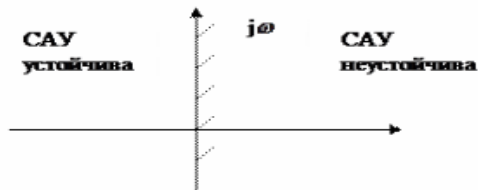


Рис.3.1 Геометричне трактування умови стійкості

Для стійкості САУ необхідно і достатньо, щоб коріння характеристичного рівняння були б розташовані в лівій півплощині комплексної площині коренів.

5.4 «Алгебраїчні критерії стійкості»

Обчислення коренів є простим для характеристичного рівняння першого та другого порядку. Для рівнянь третього та четвертого порядку загальні вирази для коренів громіздкі та незручні у використанні. Загальні вирази для коренів рівнянь вищих порядків не існують.

Тому важливе значення мають правила, які дозволяють визначати стійкість системи без обчислення коренів характеристичного рівняння. Ці правила називають критеріями стійкості.

За допомогою критеріїв стійкості можна встановити, стійка система чи ні, а також з'ясувати, як впливають на стійкість ті чи інші параметри та структурні зміни в системі.

Усі критерії можуть бути розподілені на алгебраїчні та частотні.

До алгебраїчних належать критерії Рауса, Гурвіца, Лъенара-Шипара. До частотних - критерії стійкості Михайлова, Найквіста.

Алгебраїчні критерії дозволяють судити про стійкість САК за коефіцієнтами характеристичного рівняння (6.6).

Зазначимо спочатку, що необхідною умовою стійкості системи будь-якого порядку є додатність усіх коефіцієнтів характеристичного рівняння, тобто:

$$a_n > 0; \quad a_{n-1} > 0; \quad \dots \quad a_1 > 0; \quad a_0 > 0.$$

Для систем першого та другого порядків необхідна умова (є і достатньою умовою стійкості.)

Для систем третього та вищих порядків додатність коефіцієнтів є необхідною умовою, але недостатньою.

Критерій стійкості Гурвіца. Цей критерій був запропонований 1895 року німецьким математиком О.Гурвіцем у вигляді визначників,

що складаються за коефіцієнтами характеристичного рівняння замкнутої системи.

Спочатку будують головний визначник Гурвіца за таким правилом: по головній діагоналі визначника зліва направо виписують усі коефіцієнти характеристичного рівняння від a_{n-1} до a_0 у напрямі зменшення індексів. Стовпці вгору від головної діагоналі доповнюють коефіцієнтами з індексами, що послідовно зменшуються, а стовпці вниз - коефіцієнтами з індексами, що послідовно збільшуються. Місця у визначнику, що залишилися, заповнюють нулями. Тобто визначник має вигляд:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

Відкреслюючи у головному визначникові Гурвіца, як показано пунктиром, діагональні мінори, отримуємо визначники Гурвіца нижчого порядку:

$$\Delta_1 = a_{n-1}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}.$$

Критерій стійкості Гурвіца формулюється таким чином: для того, щоб система автоматичного управління була стійкою, необхідно та достатньо, щоб усі визначники Гурвіца були додатними.

В останньому стовпці головного визначника Гурвіца (від нуля відрізняється лише один коефіцієнт a_0 , тому

$$\Delta_n = a_0 \cdot \Delta_{n-1}.$$

Звідси видно, що при $a_0 > 0$ для перевірки стійкості системи достатньо знайти лише визначники Гурвіца від D_1 до D_{n-1} (головний визначник D_n обчислювати непотрібно).

Якщо всі визначники нижчого порядку додатні, то система знаходиться на межі стійкості, коли головний визначник дорівнює нулю, тобто

$$\Delta_n = a_0 \cdot \Delta_{n-1} = 0.$$

Це можливо у двох випадках: $a_0 = 0$ чи $D_{n-1} = 0$.

Використовуючи критерій Гурвіца, можна за заданими параметрами системи прийняти за невідомий будь-який один параметр (наприклад, коефіцієнт підсилення) та визначити його граничне (критичне) значення, при якому система буде знаходитися на межі стійкості.

5.5 «Критерій стійкості Михайлова»

При використанні критерію стійкості Михайлова стійкість системи автоматичного регулювання визначають за положенням годографа Михайлова на комплексній площині. Годограф Михайлова стійкої системи має починатись на додатній дійсній осі й огинати на комплексній площині початок координат, проходячи проти годинникової стрілки послідовно таку кількість квадрантів, яка дорівнює порядку характеристичного рівняння (рис. 2.31). Якщо годограф проходить через меншу кількість квадрантів, система нестійка. Годограф Михайлова будують за комплексною функцією.

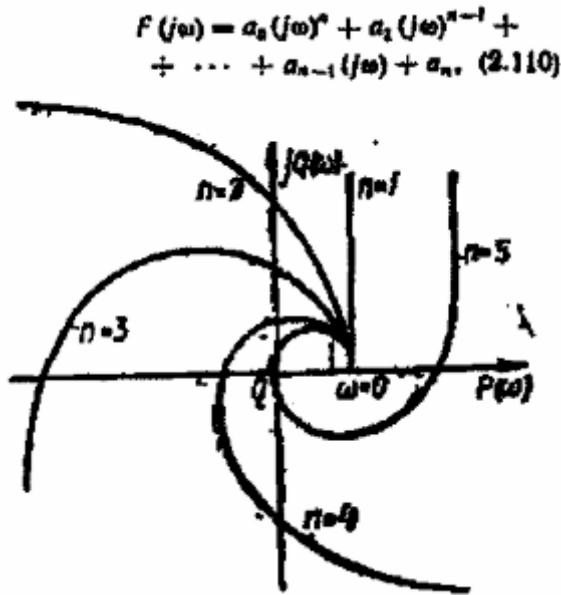


Рис.4.1 Голоографи стійких систем 1,2,3,4 і 5-го порядків. яку дістають із характеристичного рівняння системи (

$$P(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 \pm \dots ;$$

$$Q(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 \pm \dots .$$

Частоту ω при побудові голоографа Михайлова змінюють від 0 до ∞ .

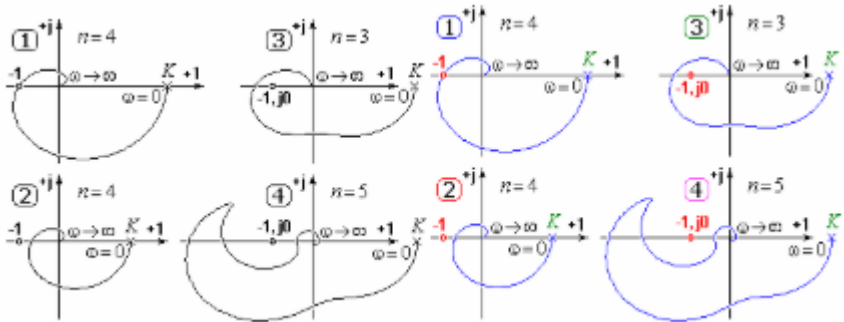
5.6. «Критерій стійкості Найквіста»

При аналізі стійкості системи по критерію Найквіста можна виділити три випадки:

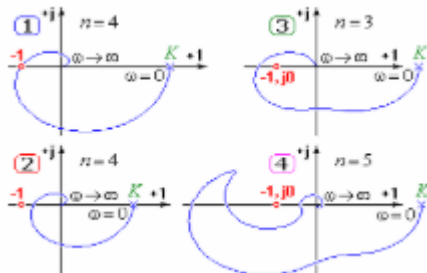
- система в розімкненому стані стійка;
- система в розімкненому стані нейтральна;
- система в розімкненому стані нестійка.

1. Система в розімкненому стані стійка

Автоматична система керування стійка, якщо АФЧХ $W(j\omega)$ розімкненого контуру не охоплює точку з координатами $(-1; j0)$.

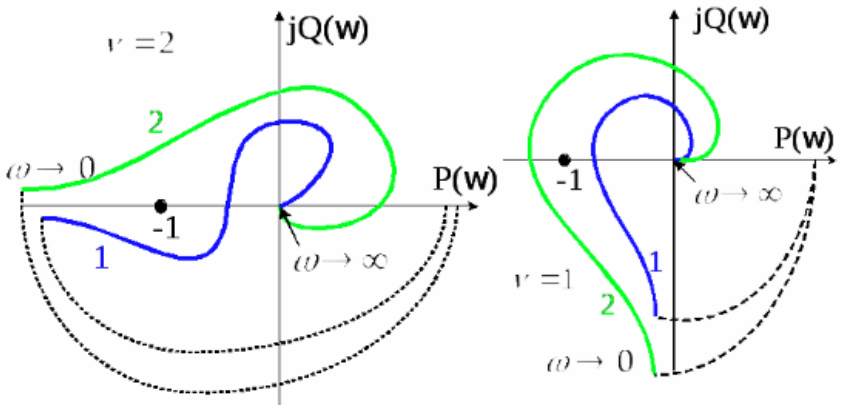


2. Межа стійкості Система стійка Система не стійка



3. Система в розімкненому стані нейтральна

Це системи, що містять інтегруючі ланки в розімкненому контурі. Якщо система в розімкненому стані нейтральна, то для стійкості системи в замкнутому стані необхідно і достатньо щоб АФЧХ розімкненої системи $W(j\omega)$, разом з доповненням її дугою нескінченно-великого радіусу, що починається на позитивному напрямі дійсної осі, не охоплювала точку з координатами $(-1; j0)$.



- 1 – система стійка 2 – система нестійка
3. Система в розімкненому стані нестійка.

Рис.5.1 Графічна різниця стійких та не стійких систем.

Автоматична система управління стійка якщо АФЧХ $W(j\omega)$ розімкненого контуру охоплює $l/2$ - раз точку з координатами $(-1; j0)$, де l - число правих коренів характеристичного рівняння розімкненого контуру.

Іншими словами, лівіше за точку $(-1; j0)$ різниця між числом позитивних і числом негативних переходів АФЧХ через вісь абсцис повинно дорівнювати $l/2$.

Система стійка, якщо має два правих кореня: $l=2$.

5.7. «Виділення областей стійкості (метод D-розбиття)»

Виділення областей стійкості в площині параметрів ЛДС, яка описується диференціальним рівнянням n -го порядку здійснюється на базі загального методу D-розбиття.

Для систем будь-якого порядку зручно використовувати критерій стійкості Михайлова. Коливній границі стійкості відповідає рівність нулю характеристичного комплексу $D(j\omega) = 0$.

D-розбиття

Нехай 2 параметри A, B входять лінійно в характеристичний комплекс $A(T); B(K)$:

$$a(\omega, A, B) = 0$$

$$b(\omega, A, B) = 0$$

Повна сукупність всіх кривих в площині параметрів, що розбиває всю площину на області з певним розподілом коренів називається D-розбиття.

6.1 «Постановка задачі»

Доцільно завдання вивчення перехідних процесів розбити на два етапи. На першому етапі вивчаються перехідні процеси статично стійкою системи при малих збуреннях.

На другому етапі вивчаються перехідні процеси після великих збурень, коли нелінійні властивості системи можуть якісно змінювати характер перехідного процесу.

6.2 «Побудова перехідних процесів по передавальній функції»

Для визначення числових значень показників перехідного процесу необхідно мати його криву, яку можна отримати трьома різними способами: експериментально, за допомогою моделювання та розрахунковим шляхом. Проведемо огляд розрахункових методів встановлення і побудови перехідних процесів. До них відносяться методи, що ґрунтуються на розв'язанні диференціальних рівнянь та частотний метод.

Спочатку розглянемо встановлення перехідної функції шляхом розв'язання диференціальних рівнянь системи.

Відомі методи розв'язку диференціальних рівнянь розділяють на точні і наближені. До точних відносяться класичні і операційні методи. Різні чисельні та графічні методи розв'язку диференціальних рівнянь є наближеними.

При розв'язанні диференціальних рівнянь класичним методом виникають труднощі, пов'язані з розв'язанням характеристичного рівняння для знаходження його коренів, та з розв'язанням системи

алгебраїчних рівнянь для знаходження сталих інтегрування з початкових даних. Ці труднощі збільшуються із збільшенням порядку диференціального рівняння. Крім того розв'язання диференціального рівняння значно ускладнюється, якщо початкові значення не нульові, а права частина рівняння містить похідні.

Тому класичний спосіб в автоматичі знаходить обмежене застосування, інколи використовується для рівнянь другого і третього порядку.

Розв'язання диференціальних рівнянь операційним методом зводиться до відшукування оригіналу функції за відомим її зображенням шляхом зворотного перетворення Лапласа. Так, якщо ми хочемо знайти перехідну функцію $h(t)$, то необхідно знати її зображення $H(p)$.

$$h(t) = L^{-1}[H(p)]$$

Зображення $H(p)$ легко знайти за допомогою передавальної функції замкнутої системи $\Phi(p)$. Дійсно, $X_{вих}(p) = \Phi(p) \cdot X_{вх}(p)$. Якщо прийняти $X_{вх}(t) = 1(t)$, то $X_{вих}(t) = h(t)$ і, враховуючи, що зображення одиничної ступінчатої функції рівне $1/p$, отримаємо:

$$H(p) = \frac{\Phi(p)}{p}$$

Тоді

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{\Phi(p)}{p}\right]$$

Для пошуку оригіналу $h(t)$ можна скористатися таблицями зображень. Це, наприклад, вигідно робити при визначенні перехідних

функцій типових ланок, так як в таблицях приведені прості вирази для зображень.

Зображення $H(p)$ для автоматичних систем є завжди складною функцією аргументу p . В цьому випадку для знаходження оригіналу $h(t)$ можна користуватися теоремою розкладу. Ця теорема – для випадку, коли зображення може бути показано у вигляді:

$$H(p) = \frac{Q(p)}{p} R(p)$$

Тобто має один нульовий корінь в знаменнику, і виражається формулою:

$$h(t) = \frac{Q(0)}{R(0)} + \sum \frac{Q(p_k)}{R_k R'(p_k)} e^{p_k t}$$

де p_k – корені рівняння

$$R(p) = 0$$

$$R'(p_k) = \left. \frac{dR(p)}{dp} \right|_{p=p_k}$$

; n – степінь полінома $R(p)$. Операційний

метод розв'язання диференціальних рівнянь порівняно з класичним має ту перевагу, що в ній залишається тільки одна складна операція –

знаходження коренів алгебраїчного рівняння $R(p) = 0$. Друга операція, пов'язана зі знаходженням вільних сталих інтегрування, відпадає, оскільки початкові умови (нульові) враховуються автоматично при складанні передавальної функції системи. Тому операційний метод є більш зручним і його часто застосовують для вирішення практичних завдань автоматичного регулювання.

Для побудови кривої перехідного процесу можуть бути використані числові і графоаналітичні методи розв'язання диференціальних рівнянь.

6.3 «Оцінка перехідного процесу по ступеню стійкості»

Стійкість необхідна, але недостатня вимога, що пред'являється до системи, вона повинна задовольняти вимогам по якості.

Вплив розташування коренів на якість перехідного процесу та стійкість добре ілюструє діаграма І.О.Вишнеградського (1876 р.), побудована для систем третього порядку.

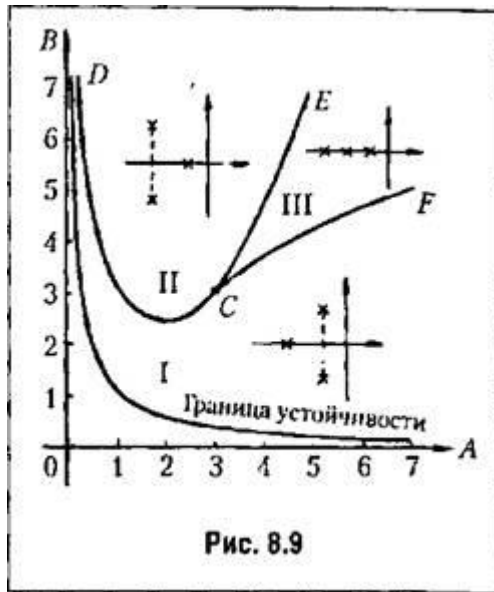


Рис.3.1 Діаграма І.О. Вишнеградського

6.4 «Побудова перехідного процесу по частотним характеристикам»

Частотний метод побудови перехідного процесу

Побудова кривої перехідного процесу для відомих частотних характеристик системи має велике практичне значення, так як це не пов'язано з великими розрахунками, особливо при застосуванні логарифмічних частотних характеристик. Крім того, частотні характеристики можна зняти експериментально.

Частотний метод побудови перехідного процесу ґрунтується на кількісному зв'язку між тимчасовими і частотними характеристиками, що відображається перетворенням (інтегралом) Фур'є:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Причому

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad , (4.20)$$

де $x(j\omega)$ – зображення Фур'є функції $x(t)$.

Як функцію часу $x(t)$ будемо розглядати перехідну функцію $h(t)$. Тоді отримаємо:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$H(j\omega) = \frac{\Phi(j\omega)}{j\omega}$$

де

Функція $\Phi(j\omega)$ є амплітудно-фазовою характеристикою замкнутої системи.

Таким чином, зв'язок між перехідною функцією $h(t)$ і частотною характеристикою $\Phi(j\omega)$ має вигляд

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

Отриманою формулою при розрахунках користуватись незручно через наявність комплексних функцій під знаком інтегралу. Тому, враховуючи відомі співвідношення:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$\Phi(j\omega) = R(\omega) + jQ(\omega)$$

формулу можна привести до вигляду:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega$$

Або

$$h(t) = R(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega$$

Де $R(\omega)$ є і $Q(\omega)$ – відповідно дійсно і уявна частотні характеристики замкнутої системи.

Таким чином, за формулами (4.23) або (4.24) можна розрахувати перехідну функцію $h(t)$ і побудувати її графік, якщо відома частотна

характеристика $R(\omega)$ або $Q(\omega)$. Але, оскільки функції $R(\omega)$ і $Q(\omega)$ є складними дрібно-раціональними, то інтеграли в формулах (4.23) і (4.24) важко вираховуються. Ці важкості можна обминути, якщо отримати функції $R(\omega)$ і $Q(\omega)$ у вигляді графіків, що, як було показано в шостій частині, можна зробити досить простими способами. Тому виникло завдання побудови перехідної функції $h(t)$ за відомим графіком $R(\omega)$ або $Q(\omega)$. Це завдання було вирішено професором В.В.Солодовниковим, який запропонував наближений графоаналітичний метод побудови перехідного процесу.

Суть даного методу полягає в тому, що графік $R(\omega)$ розбивають на типові трапеції. Потім для кожної трапеції на основі попередньо складених таблиць h -функцій, розрахованих за допомогою формули (4.23), будують графік перехідної функції. Шукану перехідну функцію знаходять шляхом алгебраїчного додавання ординат окремих складових.

Таблиці h -функцій складені для одиничної трапеції, яка характеризується коефіцієнтом нахилу $\alpha = \omega_a / \omega_0$ (рис. 4.13).

Така таблиця дозволяє для заданого значення α побудувати графік $\tau = \omega_0 t$, де t – поточний час перехідного процесу. Якщо висота трапеції не дорівнює одиниці, то графік $h(t)$ відповідно змінить свій масштаб по осі ординат.

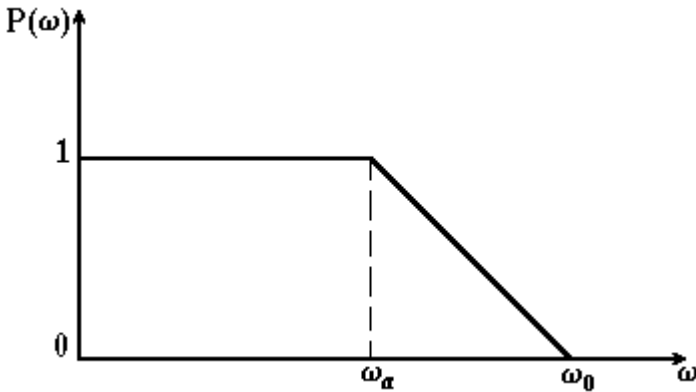


Рис.4.1 Типова одинична трапецеїдальна дійсна частотна характеристика

6.5 «Оцінка перехідного процесу по виду дійсних частотних характеристик»

Для оцінки якості перехідних процесів можна використовувати дійсну частотну характеристику замкненої системи, наприклад за зміною завдання (рис.5.6). Інтервал частот $0 \div \omega_{\text{поз}}$ називається інтервалом позитивних частот, $0 \div \omega_c$ - суттєвих. Після ω_c $U(\omega)$ мало впливає на якість перехідного процесу. Якщо для частоти $\omega > \omega_n$ виявиться, що $U(\omega) < 0.2 \cdot U(0)$, то в першому наближенні можна приймати до уваги лише інтервал позитивності $0 \div \omega_n$. Значення $U(0)$ при частотах $\omega > \omega_n$ та $\omega > \omega_c$ впливає лише на початок перехідного процесу і їх можна відкинути, а початок $U(\omega)$ визначає головним чином кінцеву частину перехідного процесу.

Аналіз інтегралів та графіку $U(\omega)$ (дає можливість зробити такі оцінки щодо якості перехідного процесу:

- статична похибка $X(\infty)$ після нанесення одиничного стрибка дорівнює $U(0)$. Якщо це зміна завдання, то $U(0)=1$ або деякому

коефіцієнту K_0 (з урахуванням відтворення зміни завдання). При оцінці характеристик відносно збурення $U(0) \rightarrow \min$, а в астатичній системі $U(0)=0$;

- порівняння графіків рис.5.7,а та 5.7,б показує відповідність $h(t)$ та $U(\omega)$. При наявності екстремума $U(\omega)$ перехідний процес коливальний, при відсутності – аперіодичний;

- перехідний процес тим швидше загасає, чим більше значення ω_n (при цьому менша інерційність);

- для мінімально-фазових систем замість $U(\omega)$ можна використовувати $A(\omega)$.

6.6. «Вимушенні коливання в електричній системі»

Вимушеними вважають коливання, що відбуваються під дією зовнішньої періодичної сили. Наприклад, ви можете взяти в руку книжку і здійснювати нею вимушені коливання. На книжку з боку руки діє зовнішня періодична сила.

Однак у таких вимушених коливаннях немає чогось особливого і цікавого. Інша річ, коли зовнішня періодична сила діє на тіло, яке може самостійно здійснювати вільні коливання (такі коливання завжди затухаючі).

Якщо тіло в момент початку дії змущувальної сили було нерухомим, то спочатку амплітуда його коливань поступово зростає, через певний час досягає максимального значення і далі не збільшується.

Для одержання незатухаючих коливань, щоб компенсувати втрати енергії на нагрівання та випромінювання, необхідно в коливальний контур підводити енергію від зовнішнього джерела. Для цього використовують трьохелектродні лампи або транзистори. Принцип роботи їх досить подібний.

В анодне коло (коло колектора) увімкнено послідовно коливальний контур, а в коло сітки (бази) – котушку зв'язку L_3 , що має індуктивний зв'язок з котушкою $L_{\text{контур}}$. Коли в колі протікає

струм, відбувається заряджання конденсатора, який потім розряджається через котушку, індукуючи в котушці зв'язку ЕРС індукції. Так між сіткою та катодом (базою і емітером) з'являється змінна напруга, яка керує подачею енергії від джерела в коливальний контур.

Якщо вимушені коливання в контурі змінюються під дією ЕРС

за законом $\mathbf{\varepsilon} = \mathbf{\varepsilon}_0 \cos \omega t$, напруга на конденсаторі – $U_c = \frac{q}{C}$, ЕРС

самоіндукції – $\mathbf{\varepsilon}_a = -L \frac{dI}{dt}$, $U = IR$ – спад напруги на активних елементах кола, то відповідно до закону Кірхгофа:

$$U_c + U = \mathbf{\varepsilon} + \mathbf{\varepsilon}_a, \text{ або врахувавши,}$$

$$\frac{dq}{dt} = I; \quad \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{dI}{dt},$$

що , прийдемо до рівняння:

$$\frac{d^2q_0}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq_0}{dt} + \omega_0^2 q_0 = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \omega t,$$

яке і є диференціальним рівнянням вимушених коливань.

Як відомо, розв'язок його складається із суми розв'язків відповідного однорідного і частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння – це затухаючі коливання, які суттєво не впливають на загальний розв'язок. Тому частинний розв'язок можна шукати у загальному вигляді $q = q_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Знайшовши із значення dq/dt та d^2q/dt^2 та підставивши у кінцево прийдемо до частинного розв'язку, який має вигляд:

$$q = \frac{\varepsilon_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}} \cos(\alpha t + \arctg(-\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}))$$

З останнього виразу нескладно знайти закон зміни напруги на конденсаторі та закон зміни струму в коливальному контурі.

6.7. «Зв'язок амплітудно частотної хаактеристики з запасом стійкості»

Реальні системи повинні бути не тільки стійкими, але й мати певний запас стійкості, тобто повинні знаходитися на деякій відстані від границі стійкості. В протилежному випадку незначні зміни параметрів системи можуть призвести до її нестійкості і непридатності для роботи. На практиці проектування САР здійснюють переважно, виходячи не тільки з умов стійкості, але й з умов забезпечення потрібної якості перехідного процесу. З цією метою розрахунок САР проводять з умови забезпечення запасу стійкості.

Запас стійкості – це кількісна оцінка відстані значень параметрів системи або її характеристик від зони, небезпечної з точки зору стійкості

Запас стійкості САР можна оцінити за критерієм Найквіста. Чим ближче наближається АФХ розімкнутої системи до точки $(-1, i0)$, тим менше її запас стійкості в замкнутому стані. Кількісно запас стійкості оцінюють за амплітудою і фазою (див. рис. 10).

Запас стійкості по амплітуді σ дорівнює відстані від точки перетину дійсної осі амплітудно-фазовою характеристикою розімкнутої системи до точки $(-1, i0)$

$\sigma = 1 - A_{pc}(\omega_\pi)$, (26) де ω_π - частота, при якій зсув фаз розімкнутої системи досягає $-\pi$, і відповідно $A_{pc}(\omega_\pi)$ - це є значення амплітудно-частотної характеристики розімкнутої системи при $\phi_{pc}(\omega_\pi) = -\pi$. Запас стійкості за фазою γ оцінюється за кутом між від'ємною частиною дійсної осі і лінією, проведеною через початок координат і точку перетину АФХ з колом одиничного радіуса.

Де ω_3 - частота зрізу, тобто частота, при якій амплітудно-частотна характеристика розімкнутої системи досягає одиниці $A_{pc}(\omega_3) = 1$; $\phi_{pc}(\omega_3)$ - значення зсуву фаз між вихідним та вхідним сигналом розімкнутої системи при частоті зрізу.

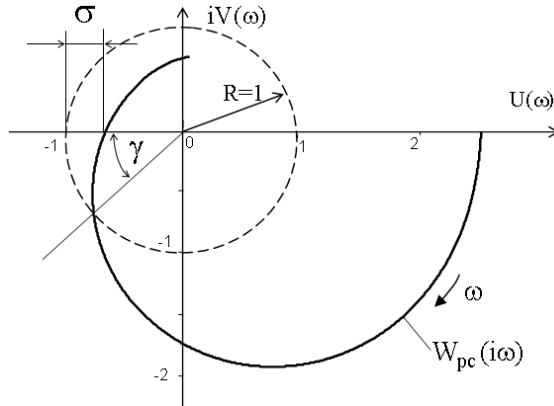


Рис.6.1 Визначення запасу стійкості системи за фазою і амплітудою.

Незалежно від прийнятої форми, запас стійкості є кількісною характеристикою і використання його при розрахунках САР є гарантією стійкості системи в реальних умовах.

6.8. «Побудова амплітудно-частотної характеристики замкнутої системи по амплітудно-фазовій частотній характеристиці розімкнутої системи»

Зобразимо на комплексній площині амплітудно-фазову частотну характеристику розімкнутої і виділемо в ній точки L з координатами $(-1, j0)$. Користуючись співвідношенням, знайдемо амплітудно-частотну характеристику.

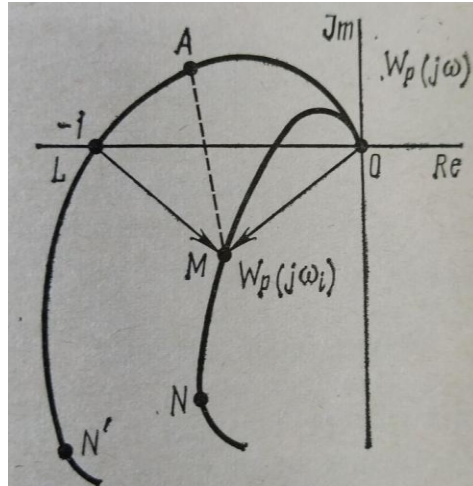


Рис.8.1. Амплітудно-частотна характеристика

$$A_3(\omega) = |W_3(j\omega)| = |W_p(j\omega)| / |1 + W_p(j\omega)|.$$

7.1 «Визначення перехідного процесу з допомогою числених рішень диференційних рівнянь»

Перехідні процеси в лінійних електричних колах описуються лінійними диференційними рівняннями, складеними за першим та другим законами Кірхгофа, що зводяться до одного рівняння для будь-якого струму або напруги в колі. Рішення неоднорідного диференційного рівняння класичним методом складається з суми часткового рішення даного неоднорідного рівняння та його загального рішення, коли вільний член дорівнює нулю, тобто однорідного диференційного рівняння. Рішення однорідного рівняння без вільного члена описує процеси в електричному колі за відсутності зовнішніх джерел живлення, тобто процеси, що виникають під дією енергії, що накопичена в електричному та магнітному полях елементів. В реальних електричних колах енергія розсіюється, в результаті чого запас накопиченої на відповідних елементах кола енергії з часом буде вичерпано і, тому, через певний час усі електромагнітні процеси в колі

завершаться. З урахуванням вище наведеного можна стверджувати, що вільні складові струму i'' та напруги u'' , які є загальним рішенням однорідного диференційного рівняння, наближаються до нуля. Частковим рішенням неоднорідного диференційного рівняння є вимушені або усталені складові струму i' та напруги u' , які мають місце в усталеному режимі, тобто після завершення перехідного процесу.

Перехідний процес в електричному колі можна подати як суму вимушеної та вільної складових:

$$u = u' + u'', \quad i = i' + i''.$$

Під час інтегрування диференційних рівнянь виникають сталі інтегрування, кількість яких визначається порядком відповідного рівняння.

Сталі інтегрування визначаються з початкових умов, які характеризують стан електричного кола в певний момент часу. Кількість початкових умов дорівнює кількості сталих інтегрування.

7.2 «Поннятя якісних характеристик для можливих рухів нелінійної системи. Характеристики типових нелінійних елементів зведено в таблиці»

№	Назва елемента	Характеристика	Математичний опис
1	Ланка із зоною нечутливості		$v = \begin{cases} k(\varepsilon + c) & \text{при } \varepsilon < -c \\ 0 & \text{при } -c \leq \varepsilon \leq c \\ k(\varepsilon - c) & \text{при } \varepsilon > c \end{cases}$
2	Пропорційна ланка із насиченням		$v = \begin{cases} -b & \text{при } \varepsilon < -c \\ k\varepsilon & \text{при } -c \leq \varepsilon \leq c \\ b & \text{при } \varepsilon > c \end{cases}$
3	Ідеальне двопозиційне реле		$v = \begin{cases} -b & \text{при } \varepsilon < 0 \\ b & \text{при } \varepsilon > 0 \end{cases}$
4	Характеристика з люфтом		$v = \begin{cases} k(\varepsilon - c) & \text{при } d \text{ вг } > 0 \\ k(\varepsilon + c) & \text{при } d \text{ вг } < 0 \\ \text{const} & \text{при } k \varepsilon u < c \end{cases}$
5	Ідеальне трипозиційне реле		$v = \begin{cases} -b & \text{при } \varepsilon < -c \\ 0 & \text{при } -c \leq \varepsilon \leq c \\ b & \text{при } \varepsilon > c \end{cases}$
6	Реальне двопозиційне реле		$v = \begin{cases} b \text{ idè } \varepsilon > c \\ -b \text{ idè } \varepsilon < c \end{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} > 0$ $v = \begin{cases} b \text{ idè } \varepsilon < c \\ -b \text{ idè } \varepsilon < -c \end{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} < 0$

7.3. «Знаходження достатніх умов стійкості при великих обуреннях з допомогою прямого (второго) метода Ляпунова»

Прикладом функції Ляпунова може служити функція:

$$V = X_1^2 + X_2^2 + X_3^3$$

В цьому випадку поверхня $V = C$ в фазовому просторі є сфері. Якщо зображуюча точка при русі пронизує поверхні семейства в напрямку ззовні всередину і з плином часу необмежено наближається к точці рівноваги, тоді виконуються достатні умови стійкості.

7.4. «Дослідження періодичних рішення с допомогою гармонічної лінеарізації нелінійностей»

Приклад.

Вхідний сигнал: $M \sin \omega t$.

Оскільки вихідний сигнал є непарною функцією, тоді:

$$B_1 = \frac{2}{T} \int_0^T b(t) \sin \omega t dt = \frac{4V}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = \frac{4V}{T} \left[\frac{-\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{T/2};$$

Оскільки $\omega = \frac{2\pi}{T}$

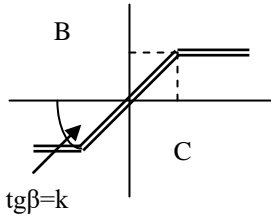
$$i \omega t \Big|_{t=T/2} = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{T}{2} \right) = \pi;$$

$$B_1 = \frac{2V}{\pi} (-\cos \pi + 1) = \frac{4V}{\pi};$$

Таким чином, ми отримали:

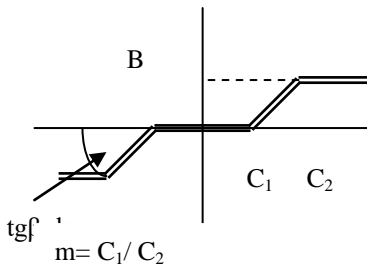
$$N(M, \omega) = \frac{B_1 + jA_1}{M} = \frac{4V}{\pi M};$$

Нелінійна характеристика типу „насичення”.



Нелінійна характеристика типу „насичення”.

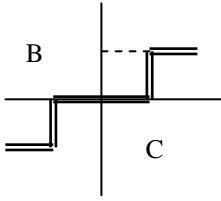
$$N(M, \omega) = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{C}{M} + \frac{C}{M} \sqrt{1 - \frac{C^2}{M^2}} \right); \quad (M \geq C)$$



Нелінійна характеристика.

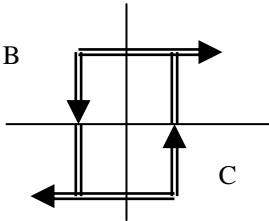
$$N(M, \omega) = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{C}{M} - \arcsin \frac{mC}{M} + \frac{C}{M} \sqrt{1 - \frac{C^2}{M^2}} - \frac{mC}{M} \sqrt{1 - \frac{m^2 C^2}{M^2}} \right)$$

$$; \left(m = \frac{C_1}{C_2} \leq 1.0; M \geq C \right)$$



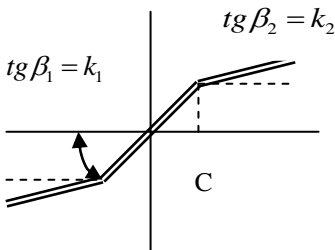
Нелінійна характеристика.

$$N(M, \omega) = \frac{4B}{\pi M} \sqrt{1 - \frac{C^2}{M^2}}; (M \geq C);$$



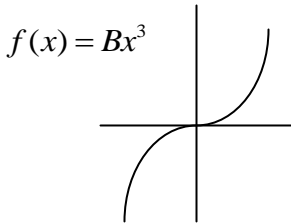
Нелінійна характеристика.

$$N(M, \omega) = \frac{4B}{\pi M}; (M \geq C);$$



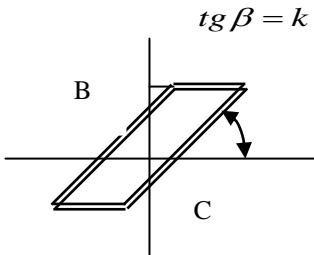
Нелінійна характеристика.

$$N(M, \omega) = k_2 \left[1 - \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{k_1}{k_2} \right) \left(\arcsin \frac{C}{M} + \frac{C}{M} \sqrt{1 - \frac{C^2}{M^2}} \right) \right]; (M \geq C)$$



Нелінійна характеристика.

$$N(M, \omega) = \frac{3B}{4} M^2;$$



Нелінійна характеристика.

$$N(M, \omega) = \frac{k}{\pi} \sqrt{\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2C}{M} \right) \right]^2 + 4 \frac{C}{M} \left(1 - \frac{C}{M} \right) + \left[\pi + 2 \arcsin \left(1 - \frac{2C}{M} \right) \right]^2} * \\ * \sqrt{\left(1 - \frac{2C}{M} \right) \sqrt{\frac{C}{M} \left(1 - \frac{C}{M} \right)}}; (M \geq C)$$

Для багатьох нелінійних елементів складені відповідні таблиці з коефіцієнтами гармонійної лінеаризації.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Математичне моделювання в електроенергетиці: Підручник / Кириленко О.В., Сегеда М.С., Буткевич О.Ф., Мазур Т.А. Львів:Вид. «Львівська політехніка», 2010. – 608 с. (2 пр., ел).
2. Перхач В.С. Математичні задачі електроенергетики. – Львів, «Вища школа», 1989.- 464 с. (50пр).
3. Романюк Ю.Ф. Електричні системи та мережі (Розділ 4.5 Розрахунок режимів електричних мереж на електронно – обчислюваних машинах) – К.: Знання, 2007. – 292 с. (5 пр.).
4. Gelfand I. M. Calculus of Variations / I. M. Gelfand, Izrail Moiseevitch Gelfand, S. V. Fomin. – Courier Dover Publications, 2000 – 232 p. (ел.)
5. Cassel Kevin W. Variational Methods with Applications in Science and Engineering / Cassel Kevin W. – Cambridge University Press, 2013. – 432 p. (ел.)
6. Lebedev L. P. The Calculus of Variations and Functional Analysis with Optimal Control and Applications in Mechanics / Lebedev L. P., Cloud M. J. – World Scientific, 2003. – 436 p. (ел.)
7. Logan J. David. Applied Mathematics / Logan J. David. – 3rd Ed. – Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, 2006. – 546 p. (ел.)
8. Кулагін Д. О. Проектування систем керування тяговими електропередачами моторвагонних поїздів : монографія / Д. О. Кулагін. – Бердянськ : ФО-П Ткачук О. В., 2014. – 154 с. (1 пр., ел).
9. Кулагін Д. О. Інформаційні управляючі системи та технології : колективна монографія / Д. О. Кулагін., П. Д. Андрієнко, [та ін.]. – Донецьк : Донбас, 2014. – 218 с. (1 пр., ел).
10. Системи прийняття рішень в економіці, техніці та організаційних сферах: від теорії до практики: колективна монографія у 2т. Т.2. / за заг. ред. Савчук Л. М. / Павлоград : АРТ Синтез-Т, 2014. – 429 с. – ISBN 978-617-7232-00-0 (повне вид.), ISBN 978-966-97393-9-1 (том 2). (1 пр., ел).
11. Кулагін Д. О. Інтеграція економічних та технічних процесів: сучасний стан та перспективи розвитку: колективна монографія / за заг. ред. Савчук Л. М. / Х. : Вид-во «Діса плюс», 2015. – 480 с. – ISBN 978-617-7064-86-1. (1 пр., ел).
12. Кулагін Д. О. Дослідження роботи тягової електропередачі дизель-поїзда ДЕЛ-02 при збуреннях в електричних колах / Кулагін Д.

О., Андрієнко П. Д. // Електротехніка та електроенергетика. – 2012. – № 1. – С. 30–34. (1 пр., ел).

13. Кулагін Д. О. Розробка елементів системи керування тяговою електропередачею дизель-поїзда ДЕЛ-02 / Кулагін Д. О. // Електромеханічні і енергозберігаючі системи. Щоквартальний науково-виробничий журнал. – Кременчук: КрНУ, 2012. – Вип. 1/2012 (17). – С. 77–80. (1 пр., ел).

14. Кулагін Д. О. Розробка математичної моделі тягового перетворювача частоти дизель-поїзда / Кулагін Д. О. // Вісник КрНУ ім. М. Остроградського. – 2012. – № 2 (73). – С. 96–99. (1 пр., ел).

15. Кулагін Д. О. Аналіз режимів роботи модернізованої тягової електропередачі автономного локомотива / Кулагін Д. О., Андрієнко П. Д., Андрієнко Д. С. // Електромеханічні і енергозберігаючі системи. Щоквартальний науково-виробничий журнал. – Кременчук: КрНУ, 2012. – Вип. 2/2012 (18). – С. 615–617. (1 пр., ел).

16. Кулагін Д. О. Баланс потужностей рухомого складу в процесі рекуперації електричної енергії / Кулагін Д. О. // Вісник НТУ «ХП». – 2013. – № 36(1009). – С. 392–393. (1 пр., ел).

17. Кулагін Д. О. Спосіб апроксимації кривої намагнічування тягового асинхронного двигуна / Кулагін Д. О. // Електротехніка та електроенергетика. – 2013. – №2. – С. 66-70.

18. Кулагін Д. О. Особливості задачі раціонального керування модулем вектора потокозчеплення тягового асинхронного двигуна дизель-поїзда / Кулагін Д. О. // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2013. – № 2. – С. 155–157. (1 пр., ел).

19. Кулагін Д. О. Врахування впливу насичення магнітних кіл на механічні характеристики тягових асинхронних двигунів / Д. О. Кулагін // Праці Одеського політехнічного університету. – 2014. – № 1(43). – С. 147–153. (1 пр., ел).

20. Кулагін Д. О. Визначення динамічних індуктивностей асинхронного двигуна з урахуванням процесів насичення / Кулагін Д. О. // Електротехніка та електроенергетика. – 2014. – №1. – С. 55–60. (1 пр., ел).

21. Кулагін Д. О. Аналіз енергетичних потоків тягового перетворювача частоти / Кулагін Д. О. // Електротехнічні та комп'ютерні системи. – 2012. – № 15(91). – С. 337–339. (1 пр., ел).

22. Кулагін Д. О. Аналіз роботи керуючої системи тягового перетворювача частоти моторвагонного рухомого складу / Кулагін Д. О. // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2014. – № 5. – С. 23–26. (1 пр., ел).

23. Кулагін Д. О. Математична модель тягового асинхронного двигуна з урахуванням насичення / Кулагін Д. О. // Технічна електродинаміка. – 2014. – № 6. – С. 49–55. (1 пр., ел).

24. Кулагін Д. О. Математична модель тягового асинхронного двигуна з урахуванням насичення магнітних кіл / Кулагін Д. О. // Науковий вісник НГУ. – 2014. – № 6. – С. 103–110. (1 пр., ел).