

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ

з дисципліни «Вища математика»
за темами: «Диференціальні рівняння» та «Теорія рядів»
для студентів комп'ютерних спеціальностей денної форми навчання

Розрахунково-графічні завдання з дисципліни «Вища математика» за темами: «Диференціальні рівняння» та «Теорія рядів» для студентів комп'ютерних спеціальностей денної форми навчання / Укл.: І.С. Пожуєва, Т.І. Левицька. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2026. – 65 с.

Містить розрахунково-графічні завдання з курсу «Вища математика» за темами: «Диференціальні рівняння» та «Теорія рядів» для студентів комп'ютерних спеціальностей денної форми навчання.

Експерт спеціальності: М.Ю. Тягунова, доцент, к.т.н.

Рецензент: О.В. Коротунова, доцент, к.т.н.

Відповідальний за випуск: І.С. Пожуєва, доцент, к.т.н.

Рекомендовано до видання НМК факультету КНТ НУ «Запорізька політехніка»,
Протокол № 6 від 29.01.2026

Затверджено на засіданні кафедри «Математика» НУ «Запорізька політехніка»,
Протокол № 4 від 24.12.2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ.....	5
Варіант 1.....	5
Варіант 2.....	7
Варіант 3.....	9
Варіант 4.....	11
Варіант 5.....	13
Варіант 6.....	15
Варіант 7.....	17
Варіант 8.....	19
Варіант 9.....	21
Варіант 10.....	23
Варіант 11.....	25
Варіант 12.....	27
Варіант 13.....	29
Варіант 14.....	31
Варіант 15.....	33
Варіант 16.....	35
Варіант 17.....	37
Варіант 18.....	39
Варіант 19.....	41
Варіант 20.....	43
Варіант 21.....	45
Варіант 22.....	47
Варіант 23.....	49
Варіант 24.....	51
Варіант 25.....	53
Варіант 26.....	55
Варіант 27.....	57
Варіант 28.....	59
Варіант 29.....	61
Варіант 30.....	63
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ.....	65

ВСТУП

Розрахунково-графічні завдання складено у відповідності до програми з курсу «Вища математика» багатоступеневої підготовки фахівців і використовуються при проведенні занять зі студентами 1-го курсу факультету комп'ютерних наук і технологій НУ «Запорізька політехніка» в ході вивчення курсу.

Метою виконання розрахунково-графічних завдань є закріплення теоретичних знань по дисципліні «Вища математика» та придбання практичних навичок при розв'язанні задач, що відносяться до розділів: «Диференціальні рівняння» та «Теорія рядів».

Для успішного виконання РГЗ радимо спочатку засвоїти лекційний та практичний матеріал, який викладено на курсі, допомогою при розв'язанні задач також можуть бути навчальні посібники [1-7], які надаються в кінці цих методичних вказівок.

Приведено 30 варіантів індивідуальних завдань. Номер варіанту визначається за порядковим номером студента в журналі відвідування занять.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант № 1

1. Розв'язати диференційні рівняння першого порядку:

$$а) y \sin x dx + (\cos x - 1) dy = 0; \quad б) xy' = y \left(\cos \ln \frac{y}{x} + 1 \right);$$

$$в) y' \sin x - y = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right); \quad г) y' - 8x \sqrt{y} = \frac{4xy}{x^2 - 1};$$

$$д) (12x + 5y - 9) dx + (5x + 2y - 4) dy = 0.$$

2. Розв'язати диференційні рівняння першого порядку:

$$а) y''(1 + \ln x) + \frac{1}{x} y' = \frac{1}{x^2}, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = -1;$$

$$б) y^2 y'' + 1 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0;$$

$$в) y''' - 4 y'' = 0;$$

$$г) y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$д) y'' - 2y' + y = 9e^x + 2x - 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

3. Розв'язати диференційні рівняння першого порядку:

$$\begin{cases} x' = -2x - 4y + e^t \\ y' = x + 3y - t \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3 + 1}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{3n-1};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{5^n}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\ln^2 n}}{n}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sqrt{n+1}}{n^2 + 3}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} \left(\frac{x-6}{3} \right)^n.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \sin^2 x.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = |x| - 5 \text{ на інтервалі } (-2, 2).$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0.3} e^{-6x^2} dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = xy + 5 \sin x^2.$$

Варіант № 2

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$a) y^2 e^x dy - (e^x + 2) dx = 0;$$

$$б) xydy - y^2 dx = (x + y)^2 dx;$$

$$в) y' + \frac{y}{x-1} = \frac{\arcsin x}{1-x};$$

$$г) y \cos 2x dy + y^2 \sin 2x dx = dx;$$

$$д) \left(\frac{1}{x} - y^3 + 4 \right) dx + \left(-\frac{1}{y} - 3xy^2 \right) dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$a) y^2 + (y')^2 - 2yy'' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$$

$$б) x^2 y'' = \ln x, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 1;$$

$$в) y''' + 5y'' = 0;$$

$$г) y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x};$$

$$д) y'' - 4y' + 4y = 2\sin 2x + xe^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x + y - t^2 + t - 2 \\ y' = -2x + 4y + 2t^2 - 4t + 7 \end{cases}$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^5 + 1}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{n/2};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\cos^2 n}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{5}\right)^{2n+1}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x-4}{3}\right)^n.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \ln(1 - x + x^2).$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = 3 - |x| \text{ на інтервалі } (-5, 5).$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = y^2 - 5xe^{-y}.$$

Варіант № 3

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$a) \sqrt{x} dy = y(3 + \sqrt{x}) dx;$$

$$б) y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x};$$

$$в) y' + \frac{y}{3+x} = \ln(5x);$$

$$г) y' - xy - y^3 x e^{-x^2} = 0;$$

$$д) (3x^2 y + y^3) dx + (x^3 + 3xy^2) dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$a) y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2;$$

$$б) xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = e^2;$$

$$в) y^{IV} + 4y'' + 4y = 0;$$

$$г) y'' - 4y = 4x \cdot e^{2x};$$

$$д) y'' + 2y' + y = 9e^{-x} + x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + 2t \\ y' = x + y + t \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n};$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^{2n};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n+1};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcctg}^3 n}{1+n^2}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n^4 + 1}}{n^2 + 3}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n n}{(n+1)4^n}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = 2x - 3 \text{ на інтервалі } [-\pi, \pi].$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{9x}{4}\right)^2 dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = x^2 \cos y - 4y'.$$

Варіант № 4

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$a) 3e^x \operatorname{ctg} y dx + (1 - e^x) dy = 0; \quad б) xy' + y = x \cos x;$$

$$в) xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'; \quad г) y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x};$$

$$д) \left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x} \right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \right) dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$a) xy'' - y' = x^2 e^x, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = e;$$

$$б) y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$в) y^{IV} - 4y'' + 4y = 0;$$

$$г) y'' + y = \frac{1}{\sin x};$$

$$д) y'' - 3y' = x + \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{1}{9}.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -2x - y + \sin t \\ y' = 4x + 2y + \cos t \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{4n^3 + 5n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right)^n;$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{10^{3n-1}}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^3}}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{arctg}(n+1)}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n 3^n}{n \cdot 2^n}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = (x-1)^2 \operatorname{arctg} x.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = 3 - 2x, \quad -3 < x < 3.$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625 + x^4}}.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = 3xy' - ye^{-x}.$$

Варіант № 5

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) } ye^{2x} dx + (1 + e^{2x}) dy = 0; & \text{б) } y' + \frac{y}{x+1} = \sin 2x; \\
 \text{в) } x^3 dy + 3y^2 x dx + 2x^2 y dx = 0; & \text{г) } y - y' \cos x = y^2 \cos x; \\
 \text{д) } (2x - y + 1) dx + (2y - x - 1) dy = 0.
 \end{array}$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) } (1 + x^2) y'' + 2xy' = 2x^3, & y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \\
 \text{б) } y \ln y y'' + (y')^2 = 0, & y(0) = e, \quad y'(0) = 1; \\
 \text{в) } y^{IV} - 4y''' + 4y'' = 0; \\
 \text{г) } y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}; \\
 \text{д) } y'' - 4y' + 4y = e^{3x} + 25 \sin x, & y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.
 \end{array}$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = y + e^t \\ y' = x - e^t \end{cases}$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+4}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}; \\
 \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{3^n(n+2)}; & \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg \sqrt{n}}{(1+n)\sqrt{n}}.
 \end{array}$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^{n+2}}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \frac{2}{1-3x^2}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & -1 < x \leq 0; \\ 2x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = 3x^2 y' + \cos y.$$

Варіант № 6

1. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$a) 2xy^2 dx - ydy = yx^2 dy - 6x dx; \quad б) y'x = 2y \ln \frac{2y}{x};$$

$$в) y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad г) (1-x^2)y' - xy = 2xy^2;$$

$$д) \frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx = 0.$$

2. Розв'язати диференційні рівняння вищих порядків:

$$a) xy'' + y' = 2x \ln x + x, \quad y(1) = -1/2, \quad y'(1) = 3/2;$$

$$б) 2(y')^2 = (y-1)y'', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$в) y^{IV} - 4y''' + 8y'' = 0;$$

$$г) y'' - 8y' + 20y = 4e^{4x} \operatorname{ctg}^2 2x;$$

$$д) 25y'' - 30y' + 9y = 100e^{\frac{3}{5}x} - 81x, \quad y(0) = -34, \quad y'(0) = -17.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3x} \\ y' = x + y + 5e^{-t} \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt[n]{n+2}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{n+1} \right)^n;$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{(2n-1)!}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-3n}{8n+2} \right)^n.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(3n-1)3^n}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x^2}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = 2x - 1 \text{ при } -\pi \leq x \leq \pi.$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = y \cos x^2 - 5e^y.$$

Варіант № 7

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$a) e^y (1 + x^2) dy - 2x(1 + e^y) dx = 0; \quad б) y' + xy = x^3 y^3;$$

$$в) xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}; \quad г) y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \sin^2 x};$$

$$д) 3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$a) (y^2 - 6y + 10)y'' = (2y - 6)(y')^2, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2;$$

$$б) xy'' + y' = 2x \ln x + x, \quad y(1) = -\frac{1}{2}, \quad y'(1) = \frac{3}{2};$$

$$в) y^{IV} - 4y'' + 8y = 0;$$

$$г) y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}};$$

$$д) 2y'' - 7y' - 4y = 9e^{4x} + 8x^2 - 61, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 12.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y + e^t \\ y' = 2x + 3y - 1 \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2 + 2n}{3n^4 + 5}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n (n+1)^{n^2}};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n}}{n^2 + 1}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + n^2) \operatorname{arctg} n}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(n^2+1)\sqrt{n}}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n-1} n(n+1)}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{1-x}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = \cos 2x \text{ по синусах на інтервалі } (0, \pi).$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = -2x^3 y' + y^2.$$

Варіант № 8

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} (e^x + 5)dy = y^2 e^x dx; & \text{б)} -xy - \frac{y^3}{x} = y'(x^2 - 3y^2); \\
 \text{в)} (x+1)y' = 2y + (x+1)^4; & \text{г)} 3y' + 2xy = 2xy^{-2} e^{-2x^2}; \\
 \text{д)} e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.
 \end{array}$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} xy'' - y' - x \sin \frac{y'}{x} = 0, & y(1) = -1, \quad y'(1) = \pi/2; \\
 \text{б)} 2yy'' - y' - (y')^2 = 0, & y(-1) = 1, \quad y'(-1) = -1; \\
 \text{в)} y^{IV} - 2y'' + 4y = 0; \\
 \text{г)} y'' + 2y' = 4e^{-6x} \cos e^{-2x}; \\
 \text{д)} y'' + 4y' + 13y = 27xe^{-2x} + 80 \sin 3x, \quad y(0) = -6, \quad y'(0) = 18.
 \end{array}$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + y - 4 \\ y' = x + 2y + e^{2t} \end{cases}$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^3 + 3}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n\sqrt{2}}{2n+1} \right)^n; \\
 \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)! - n!}{n^3}; & \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{n}}{n^2}.
 \end{array}$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n+2}}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n-3)(x+4)^n}{(n+1)^2 3^{n+1}}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = x + 1 \text{ при } 0 < x < 2 \text{ - в ряд по синусах.}$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = -x^2 y' - 2xy + 1.$$

Варіант № 9

1. Розв'язати диференційні рівняння першого порядку:

а) $xy^2 dx - ydy = x^2 ydy - xdx$;

б) $(x^2 + xy)y' = x^2 + y^2$; в) $y' + ytgx = \frac{1}{4} \cos^2 x \cdot \sin 2x$;

г) $2\sin x \cdot y' + y\cos x = y^3 (\cos x - \sin^2 x)$;

д) $(3x^2 + 3xy^2)dx + (3x^2y + 4y^3)dy = 0$.

2. Розв'язати диференційні рівняння вищих порядків:

а) $y'' - \frac{\sin 2y}{1 + \cos^2 y} (y')^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{2}$;

б) $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;

в) $y^{IV} + 12y'' + 4y = 0$;

г) $y'' - 10y' + 25y = \frac{e^{5x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$;

д) $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x} + 25x\sin x$, $y(0) = -0,6$, $y'(0) = -5,2$.

3. Розв'язати систему диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 3x - 5y + 1 \\ y' = 3x + y + e^t \end{cases}$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{n} - \sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{n}{n+1} \right)^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^3 + 8}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n}$.

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n-2}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \frac{e^{-2x} - 1}{x}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = 1 - x \text{ при } -1 < x < 1.$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,4} e^{\frac{-3x^2}{4}} dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = y^3 x - 3 \cos^2 x.$$

Варіант № 10

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$a) 6x dx - 2x^2 y dy = 6y dy - 3xy^2 dx; \quad б) x dy = \left(xtg \frac{y}{x} + y\right) dx;$$

$$в) y' - ctgx \cdot y = \sin^3 x; \quad г) 3xy' - 2y = \frac{x^4}{y^2};$$

$$д) (y - 3x^2) dx + (x - 4y) dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$a) (1 - x^2) y'' = xy', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$б) (y - 1) y'' = 2(y')^2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3;$$

$$в) y^{VI} + 12 y''' + 4y = 0;$$

$$г) y'' + 2y' + y = \frac{2e^{-x}}{x^2 - 4x + 5};$$

$$д) y'' - 4y' - 5y = 130 \sin 5x - 12xe^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -12.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x + 3y + 3 \\ y' = 3x + y - 4e^t \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{n\sqrt[3]{n}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)!}{(n+3)!}; \quad г) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n) \ln(\ln n)}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^n(n+1)}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^2 + 2n - 1}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = 2x \text{ по косинусах на інтервалі } (0, \pi).$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{2.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125 + x^3}}.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = 3x^2 y' - e^x.$$

Варіант № 11

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$a) (1 - e^x) \sin y \cdot y' = e^x \cos^3 y; \quad б) xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$в) y' + y \cdot \operatorname{ctgx} = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}; \quad г) 2xy^2 = x \frac{y'}{\ln x} + \frac{y}{\ln x};$$

$$д) (\ln y - 2x)dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right)dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$a) y \ln y \cdot y'' + (y')^2 = 0, \quad y(0) = e, \quad y'(0) = 1;$$

$$б) x^2 y'' - 2xy' + 3 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4;$$

$$в) y^{IV} - 12 y''' + 4y = 0;$$

$$г) y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x;$$

$$д) y'' + 2y' + 5y = 8,5 \cos 2x + 40e^{5x}, \quad y(0) = 1 \frac{7}{17}, \quad y'(0) = 8 \frac{5}{17}.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = x + 4y - e^t \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{4n^3 + 2n+3}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(3 + \frac{4}{n} \right) \right)^{-n};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{1/n}}{n^2}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 3^{2n+1}}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \sqrt{x} \cos x.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x < 1; \\ x-2, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = 4y^2 + 2xe^{-y}.$$

Варіант № 12

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) } xy' \ln y - y = 0; & \text{б) } \frac{xy' - y}{x + y} = \ln \frac{x + y}{x}; \\
 \text{в) } y' - \frac{1}{x}y = x \ln x; & \text{г) } (y' + y^2)(x + 1) = -y; \\
 \text{д) } (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0.
 \end{array}$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$\begin{array}{l}
 \text{а) } (2x + 1)y'' + 2y' = 4x, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1/2; \\
 \text{б) } y''(y^2 + 1) = 2y(y')^2, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2; \\
 \text{в) } y^{IV} - 12y''' + 4y'' = 0; \\
 \text{г) } y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}; \\
 \text{д) } 9y'' - 12y' + 4y = 9e^{2x/3} + 169\cos x, \quad y(0) = -8, \quad y'(0) = -14.
 \end{array}$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x + 3y - e^{2t} \\ y' = 3x + y \end{cases}$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^3}{1 + n^2}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n + 1}{3n + 5} \right)^n; \\
 \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}; & \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 \sqrt{n}}.
 \end{array}$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-5}{5n+10}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n (n^2+1)}{(n^3+3)\sqrt{n}}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -4 < x < 0; \\ x, & 0 \leq x < 4. \end{cases}$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,4} \frac{1 - e^{-x/2}}{x} dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = -xy - 2 \sin x^2.$$

Варіант № 13

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} (x+2)\cos 2y dx &= x^2 \sin 2y dy; & \text{б)} \frac{1}{y'} &= \frac{1}{xy + x^3 y^3}; \\
 \text{в)} xy'(3y^2 + 4x^2) &= 3y^3 + 8xy^2; & \text{г)} y' + y \operatorname{ctg} x &= 3\sin^2 x; \\
 \text{д)} (10xy - 8y + 1)dx &+ (5x^2 - 8x + 3)dy = 0.
 \end{aligned}$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} yy'' - 2(y')^2 &= 0, \quad y\left(-\frac{1}{4}\right) = 1, \quad y'\left(-\frac{1}{4}\right) = 4; \\
 \text{б)} y'' &= (2y' + 1)\operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}; \\
 \text{в)} y^{IV} - 4y'' + 4y''' &= 0; \\
 \text{г)} y'' - 8y' + 17y &= \frac{e^{4x}}{\sin^2 x}; \\
 \text{д)} y'' - y' - 6y &= 15e^{3x} - 52x\cos 2x, \quad y(0) = 1^4/13, \quad y'(0) = 2^4/13.
 \end{aligned}$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x - 2y + t \\ y' = -2x + y + 1 \end{cases}$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2}}{n+1}; & \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{5n+5}{5n-4} \right)^n; \\
 \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+3)!}; & \quad \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n^2}.
 \end{aligned}$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n+2)\sqrt[3]{n+1}}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (x-2)^n.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -2 \leq x \leq 0; \\ x, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = x^2 \sin y - 2y'.$$

Варіант № 14

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$a) 2x^2 y dy = (3 + y^2) dx;$$

$$б) y' - y \operatorname{tg} x = \sin^2 x;$$

$$в) (3x^2 - 2xy)y' = x^2 + 3xy - y^2; \quad з) 4xy' + y + \frac{1}{y^3 \sqrt{x+1}} = 0;$$

$$д) e^y dx + (xe^y - 2)dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$a) y'' = (2y' + 1) \operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2;$$

$$б) y'' \cos y = (y')^2 \sin y, \quad y(-1) = \frac{\pi}{6}, \quad y'(-1) = 2;$$

$$в) y^{VIII} + 8y^V + 16y''' = 0;$$

$$з) y'' + 12y' + 36y = 4e^{-6x} \ln 2x;$$

$$д) y'' + 6y' + 10y = 7e^{-3x} + 39 \cos x, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = -20.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2y - 2t - 1 \\ y' = x + y \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 8}{n^4 + 2n + 3}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{3n^2 + 1} \right)^{n^2};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad з) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \sqrt{3n+1}}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3n-1)^2} (x-3)^n.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & -\pi \leq x \leq 0; \\ 3x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = 2xy' + ye^{-x}.$$

Варіант № 15

1. Розв'язати диференційні рівняння першого порядку:

$$а) (1 - x^2)dy - (2xy^2 + xy)dx = 0; \quad б) xy' - y = \frac{x}{\arctg(2y/x)};$$

$$в) y' + y = 3x; \quad г) y' + xy = (x - 1)e^x y^2;$$

$$д) (2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0.$$

2. Розв'язати диференційні рівняння вищих порядків:

$$а) y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2, \quad y(-1/2) = \pi/4, \quad y'(-1/2) = 1;$$

$$б) (2x + 1)y'' + 2y' = 4xy'', \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = \frac{2}{3};$$

$$в) y^{IV} + 8y''' + 16y' = 0;$$

$$г) y'' + y = \sqrt{\frac{2}{\cos 2x}};$$

$$д) y'' + 6y' + 9y = 6xe^{-3x} + 27x, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 6.$$

3. Розв'язати систему диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 3x + 2y - e^t \end{cases}$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+n+1)^5}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{5^n};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n^2+1)}\beta^n}{n \cdot 2^{n/2}}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 3^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = e^{-\frac{x^{21}}{3}}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x \leq 0; \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = 3x^2 + \cos y.$$

Варіант № 16

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$а) \sqrt{x^2 + 1} dy - \sqrt{y} x dx = 0;$$

$$б) y' - 3y = e^{-2x};$$

$$в) (x + y \cos \frac{y}{x}) dx - x \cos \frac{y}{x} dy = 0; \quad г) y' - xy + y^3 x e^{-x^2} = 0;$$

$$д) (3y^2 + 2xy + 2x) dx + (6xy + x^2 + 3) dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$а) xy'' - x^2 = 3y', \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1/3;$$

$$б) yy'' = 2(y')^2, \quad y\left(-\frac{1}{4}\right) = 1, \quad y'\left(-\frac{1}{4}\right) = 4;$$

$$в) y^{IV} + 10y'' - 11y = 0;$$

$$г) y'' - 2y' + y = \frac{2e^x}{x^2 + 6x + 8};$$

$$д) 5y'' + 14y' + 8y = \frac{32}{2}x^3 + 18e^{-2x} + 203, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 12,5.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -7x + 3y + 5e^t \\ y' = 3x - 7y + 4 \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{5 + 3n} \right)^{4n};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \sin \sqrt{n}}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi}{4^n}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} n^n}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = x \ln(1 - x^2).$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x \leq 0; \\ 2x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,3} e^{-7x^2} dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = y \sin x^2 - 3e^y.$$

Варіант № 17

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$а) \cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x)y' = y; \quad б) 3x^2 y' = y^2 + 10xy + 10x^2;$$

$$в) y' - \frac{x}{x^2 + 1}y = (x^2 + 1)^{3/2}; \quad г) yy' - 4x - y^2 x = 0;$$

$$д) (e^{x+y} + 3x^2)dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$а) yy'' - y'(1 + y') = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$$

$$б) xy'' - y' - x \sin \frac{y'}{x} = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = \frac{\pi}{2};$$

$$в) y^{IV} + 10y'' + 9y = 0;$$

$$г) y'' + 8y' + 16y = \frac{e^{-4x} \ln x}{x};$$

$$д) y'' - 2y' + 2y = 3x \sin 2x - 25e^{-x}, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 5.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -2x + y - 3e^{-t} \\ y' = x - 2y + 1 \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + 5)^{3/2}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{3}{n^2};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(n^2+n+1)^3}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} 2^n x^n.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \arctg x^2.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi \leq x \leq 0; \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = 3e^y - x \cos y.$$

Варіант № 18

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$а) 3x^2 y(l + \ln y)dx = dy; \quad б) (2x - y)y' = x + 2y;$$

$$в) y' + y = \ln(e^x + 1); \quad г) 8xy' - y = -\frac{1}{y^3 \sqrt{x}};$$

$$д) (3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$а) x^3 y'' + 5y' = 5xy'' + 3x^2 y', \quad y(1) = 9, \quad y'(1) = 16;$$

$$б) y''y^3 + 4 = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2;$$

$$в) y^{IV} - 10y'' + 9y = 0;$$

$$г) y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}};$$

$$д) 16y'' + 24y' + 9y = 32e^{-\frac{3}{4}x} - 27x, \quad y(0) = 13, \quad y'(0) = 12.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -x + 5y + 4t + 3 \\ y' = 5x - y + 7 \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-3)}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)^{3n} \cdot 2^n};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{(n+1)!}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} \right)^n.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1) \cdot 3^n}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \sin x^2.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x \leq 0; \\ x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,2} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = 2xe^{-y} + 3x^2 y'.$$

Варіант № 19

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} y(2 + e^x) dy = e^x dx; & \text{б)} xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y; \\
 \text{в)} y' - \frac{1}{x}y = x^2; & \text{г)} y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 y^3; \\
 \text{д)} (2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0.
 \end{array}$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$\begin{array}{l}
 \text{а)} y''y^3 = 1, \quad y\left(\frac{2}{5}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{2}{5}\right) = 2; \\
 \text{б)} y''(x-1) - y' = 0, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 1; \\
 \text{в)} y^{IV} - 10y''' + 9y = 0; \\
 \text{г)} y'' - y = \frac{2(e^x - 1)}{e^x}; \\
 \text{д)} y'' + 14y' + 49y = 12xe^{-7x} + 49x, \quad y(0) = -\frac{2}{7}, \quad y'(0) = -4.
 \end{array}$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 4x - y + 2e^{3t} \\ y' = -x + 4y - 4 \end{cases}$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(2n-1) \cdot 3^n}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-8}{1+3n} \right)^n; \\
 \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}; & \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n(\ln^4 n + 1)}.
 \end{array}$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^{2n-1}}{5n \cdot 9^n}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = x \cdot e^{-x}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$y = |1 - x| \text{ на інтервалі } (-2; 2).$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = -2xe^{-x} + x^2 y'.$$

Варіант № 20

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$a) 2xdy + ydx + xy(ydy + dx) = 0;$$

$$б) 2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2); \quad в) y' - yctgx = 2\sin x;$$

$$г) y' = yctgx + \frac{y^3}{\sin x};$$

$$д) (e^x \sin y + x)dx + (e^x \cos y + y)dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$a) xy'' + y' = \ln x + 1, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 0;$$

$$б) y'' = y'e^y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$в) y^{IV} + 16y''' + 64y = 0; \quad г) y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$д) y'' + 14y' + 58y = (73x + 16)e^x - 116x^2 + 2x,$$

$$y(0) = \frac{24}{29}, \quad y'(0) = -5.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -4x + 3y - 3e^t \\ y' = 3x - 4y + 7 \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4 + 1}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{n/3};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 \sqrt{\ln n}}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^n}{n}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$y = e^x \text{ на інтервалі } (-1;1).$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,2} e^{-2x^2} dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = y^2 \cos x - 2y.$$

Варіант № 21

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) } dy - 3xdy - \sqrt{y}dx = 0; & \text{б) } x^2 y' = y^2 + 6xy + 6x^2; \\
 \text{в) } x(x-1)y' + y = x(2x-1); & \text{г) } y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{x^4} (1-x^3); \\
 \text{д) } ye^x dx + (y + e^x) dy = 0.
 \end{array}$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$\begin{array}{l}
 \text{а) } 2yy'' = 1 + (y')^2, \quad y(3) = 2, \quad y'(3) = 1; \\
 \text{б) } y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1), \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -1; \\
 \text{в) } y^{IV} + 16y''' + 64y'' = 0; \\
 \text{г) } y'' - 6y' + 9y = \frac{2e^{3x}}{x^2 - 6x + 10}; \\
 \text{д) } y'' - 8y' + 16y = 6e^{4x} + 289\sin x, \quad y(0) = -12, \quad y'(0) = -1.
 \end{array}$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + 1 \\ y' = -4y + 3x - 2e^t \end{cases}$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+3n}{2+3n^2} \right)^2; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\ln^n(n+1)}; \\
 \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 1}{2^{n+5}(n^2 + 1)}; & \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)\arctg^3 n}.
 \end{array}$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)^n}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n+3}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = x \cdot e^{-x}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$y = e^x - 1 \text{ в ряд по синусах на інтервалі } (0; 2\pi).$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x/5)}{x} dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = 1 + x^3 y' - e^y.$$

Варіант № 22

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$a) xdy = x^2 e^{-y} dx + 2dy; \quad б) (2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0;$$

$$в) y' + y \cos x = e^{-\sin x}; \quad г) y' - y \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} y^4 \sin x;$$

$$д) (x^2 + \sin y)dx + (1 + x \cos y)dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$a) (1 + e^x)y'' - e^x y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4;$$

$$б) yy'' - (y')^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$$

$$в) y^{IV} + 2y''' + y' = 0;$$

$$г) y'' - 6y' + 10y = \frac{e^{3x}}{\sin x};$$

$$д) 2y'' + 3y' - 2y = 68 \sin 2x + 17x e^{x/2}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -5.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -5x + y - 3e^{2t} \\ y' = x - 5y + 4e^{2t} \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^n;$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n} 2^n}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{n}}{\sqrt{n}}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} \right)^n.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2 + 2n}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \frac{1}{3x+4}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$y = \frac{\pi}{4} - x \text{ на інтервалі } (0; \pi) \text{ по синусах.}$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = -4e^{-y} + y \cos x.$$

Варіант № 23

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$а) y^2 dy + ctg x dx = y^3 ctg x dx; \quad б) (xy' - y) ctg \frac{y}{x} = x;$$

$$в) y' + \frac{y}{x+2} = \frac{arctg x}{2+x}; \quad г) 2y' + y \cos x = x e^{-\sin x} / y;$$

$$д) (y + x \ln y) dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right) dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$а) y'' + 2y \cdot (y')^3 = 0, \quad y(-5/3) = 1, \quad y'(-5/3) = -1;$$

$$б) y'' = \frac{y'}{x} + x^2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0;$$

$$в) y^{IV} - 2y''' + y' = 0;$$

$$г) y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{\cos^2 x};$$

$$д) y'' + 6y' + 34y = 25xe^{-3x} - x^3 + 12x + 6, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 10.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 5x + 4y + 2e^{-t} \\ y' = 4x + 5y - 4 \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+10}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 2n} \right)^n;$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg^2 n}{1+n^2}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-3)}{n^2 - 1}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} (x-5)^n.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \sqrt[3]{x-2}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$y = x - 1 \text{ на інтервалі } (-\pi; \pi).$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,1} \sin(100x^2) dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = 2xy + y' \sin x.$$

Варіант № 24

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$а) \frac{1 + \cos 2x}{1 + \sin y} + y' = 0; \quad б) xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x};$$

$$в) y' - y \operatorname{tg} x = \sin 2x; \quad г) y' + \frac{y}{x} = -x^3 y^2;$$

$$д) (\sin y + \cos x - y \cos x) dx + (\cos y + x \cos y - \sin x) dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$а) x^2 y'' - 2xy' + 3 = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 4;$$

$$б) y'' + \frac{2}{1 - y} (y')^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$в) y^{IV} - 2y'' + 8y = 0;$$

$$г) y'' - 8y' + 16y = \frac{e^{4x}}{\sqrt{x^2 - 9}};$$

$$д) 4y'' + 4y' + y = 24e^{-x/2} + \frac{1}{8}x^2 - 3, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -3,5.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y + 1 + t \\ y' = 2x - 3y - 3 \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{2n};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n (3 + e^{-n})}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^{n-1}}{n(n+2)}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n-1)^2} 2^n (x-2)^n.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \sin 3x + x \cos 3x.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$y = 2 - |x| \text{ на інтервалі } (-1;1).$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x} dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = y'x^3 - ye^{-x} + 1.$$

Варіант № 25

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} \sqrt{y^2 + 1} \cdot dx = xydy; & \text{б)} xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}; \\
 \text{в)} y' - \frac{1}{x} y = xtgx; & \text{г)} y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{x^4} y^2; \\
 \text{д)} (2xye^{x^2} + \ln y)dx + (e^{x^2} + \frac{x}{y})dy = 0.
 \end{array}$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$\begin{array}{l}
 \text{а)} xy'' + y'(\ln x - \ln y' - 1) = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = e; \\
 \text{б)} y'' = y', \quad y(0) = \frac{2}{3}, \quad y'(0) = 1; \\
 \text{в)} y^{IV} - y'' - 12y = 0; \\
 \text{г)} y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}}; \\
 \text{д)} y'' - 4y' + 5y = 8x \cos x + 3e^{2x}, \quad y(0) = 4,5, \quad y'(0) = 8.
 \end{array}$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + 4y - t^2 \\ y' = 4x + 2y + 5 \end{cases}$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} tg \frac{\pi}{2n}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-3}{3n+1} \right)^{n^2}; \\
 \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(n+1)!}; & \text{г)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}.
 \end{array}$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n}{3n+5} \right)^n.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} (x-1)^n.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = (1+x)e^{-x}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & |x| < \pi/2; \\ 0, & |x| \geq \pi/2. \end{cases}$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = -y^2 e^x + y'x^3.$$

Варіант № 26

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$a) y' = \sqrt{(4 - y^2)/(x^2 + 9)}; \quad б) xdy = (y + \sqrt{y^2 - 4x^2})dx;$$

$$в) y' + \frac{4xy}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^4 - 1}; \quad г) (y' + 2xy)e^{-x^2} = (x - 1)y^2;$$

$$д) (x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$a) (y')^2 \operatorname{ctgy} = y'' \cos y, \quad y(\ln 2) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(\ln 2) = -1;$$

$$б) yy'' - 3(y')^2 = 4y^2 y', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4;$$

$$в) y^{IV} - 4y'' + 8y = 0;$$

$$г) y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x};$$

$$д) y'' + 4y' + 3y = 16x^2 e^x - 6e^{-3x}, \quad y(0) = 6,75, \quad y'(0) = -13,25.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 3x - y + t + 1 \\ y' = -x + 3y - t^2 \end{cases} .$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^3}{1+n^4}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3n)!}; \quad г) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x+5)^n \frac{1}{(2n+1)\sqrt{n+3}}$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \cos^2 x.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$y = |x| \text{ на інтервалі } (-1;1).$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,2} \sin(25x^2) dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = 5x \sin y + x^2.$$

Варіант № 27

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$а) y' \cdot y - xe^y = 0; \quad б) y'x \ln x - y = x^2 \ln^3 x;$$

$$в) x \cos \frac{y}{x} (y dx + x dy) = y \sin \frac{y}{x} (x dy - y dx);$$

$$г) y' - y \operatorname{tg} x = y^2 \sin 2x;$$

$$д) (y + e^x \sin y) dx + (x + e^x \cos y) dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$а) y''(y^2 + 1) = 2(y')^2 y, \quad y(\pi/4) = 1, \quad y'(\pi/4) = 2;$$

$$б) xy'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y(1) = 6, \quad y'(1) = 2;$$

$$в) y^{IV} - 4y''' + 8y'' = 0;$$

$$г) y'' + 10y' + 25y = \frac{e^{-5x}}{\sqrt{9 - x^2}};$$

$$д) y'' - 3y' - 28y = 392x^2 - 22e^{-4x} - 37, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 9.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -2x - y - e^t \\ y' = x - 2y + 3 \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 - 1}{n!}; \quad г) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^3 - 1}}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 7^n}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}} (x-1)^n.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0; \\ x+1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = 6x^3 y' - x \cos^2 y.$$

Варіант № 28

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$а) \ln y dy + xy dx = 0; \quad б) xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y;$$

$$в) y'x \ln x + y = x^3; \quad г) y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 4 \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}} \arctg x;$$

$$д) (e^x + y + \sin y) dx + (e^y + x + x \cos y) dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$а) y'' + 2tgx \cdot y' = \cos^3 x, \quad y(0) = -\frac{1}{3}, \quad y'(0) = 2;$$

$$б) yy'' - (y')^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$$

$$в) y^{IV} + 18y''' + 9y'' = 0;$$

$$г) y'' + 6y' + 10y = \frac{2e^{-3x}}{\sin 2x};$$

$$д) y'' + 2y' + 26y = 13x + 629 \cos x, \quad y(0) = -\frac{1}{26}, \quad y'(0) = 27,5.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y + t^2 \\ y' = 3x + 2y - t \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)^3}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)}{(n+2)!}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (x-2)^n.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0; \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,1} \frac{1 - e^{-2x}}{x} dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = y'x^2 + 2 \cos y.$$

Варіант № 29

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & y' \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \cdot \sin^2 y = 0; & \text{б)} \quad & y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = \frac{\cos^2 x}{\sin x}; \\
 \text{в)} \quad & x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0; & \text{г)} \quad & 3xy' + 5y = (4x - 5)y^4; \\
 \text{д)} \quad & (e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x \cos y)dy = 0.
 \end{aligned}$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & (y - 1)y'' = 2(y')^2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3; \\
 \text{б)} \quad & (3x + x^2)y'' - (3 + 2x)y' = 0, \quad y(2) = -\frac{1}{3}, \quad y'(2) = -\frac{1}{2}; \\
 \text{в)} \quad & y^{IV} + 18y''' + 81y'' = 0; \\
 \text{г)} \quad & y'' + 14y' + 49y = \frac{e^{-7x}}{x^2 - 4x + 3}; \\
 \text{д)} \quad & y'' + 2y' - 3y = 8e^x - 15\cos 3x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1/2.
 \end{aligned}$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x - y + e^t \\ y' = -x + 2y - 4 \end{cases}$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}; & \text{б)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 3^n}; \\
 \text{в)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}; & \text{г)} \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}.
 \end{aligned}$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(x-3)^n}{2^{n+1}}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = x \ln(1 + x^2).$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$y = x^2 - 1 \text{ на інтервалі } (-\pi ; \pi).$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^1 \cos x^2 dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = -3e^y + x^2 y'.$$

Варіант № 30

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$а) y' = \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tgy}; \quad б) \left(x - y \cos \frac{y}{x} \right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0;$$

$$в) y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1; \quad г) xy' + y = x^2 y^2 \ln x;$$

$$д) (x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0.$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$а) y''(x^2 + 1) = 2xy', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3;$$

$$б) y'' \operatorname{tgy} = 2(y')^2, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 2;$$

$$в) y''' + 7y'' + 12y' = 0;$$

$$г) y'' - 4y' + 5y = \frac{2e^{2x}}{\cos^3 x};$$

$$д) y'' - 6y' + 13y = 8e^{3x} + 7\sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 8.$$

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -x + y + t \\ y' = x - y + 1 \end{cases}.$$

4. За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n;$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

5. Дослідити збіжність заданого знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

6. Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

7. Розвинути функцію у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій:

$$f(x) = \sqrt{x}e^x.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію:

$$y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \text{ на інтервалі } (0; \pi) \text{ по косинусам.}$$

9. Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001:

$$\int_0^{0,1} e^{-5x^2} dx.$$

10. Знайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$:

$$y'' = y \cos x + x.$$

ПЕРЕЛІК ДжЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

1. Анпілогов Д.І. Інтегральне числення: навч. посібник / Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2021. – 254 с.
2. Анпілогов Д.І. Ряди: навч. посібник / Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко. – Вид. 2-е, виправл. і доп. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2022. – 133 с.
3. Анпілогов Д.І. Диференціальні рівняння: навчальний посібник / Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2019. – 176 с.
4. Литвин І.І. Вища математика: Навчальний посібник: рек. МОНУ / І.І. Литвин, О.М. Конончук, Г.О. Желізняк. – 2-ге вид. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 368 с.
5. Андрощук Л.В. Вища математика: Навч. посібник. Модуль 7. Ряди. Диференціальні рівняння / Л.В. Андрощук, О.І. Ковтун, Т.І. Олешко; за заг. ред. Т.І. Олешко. – Київ: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 104 с.
6. Першина Ю.І. Невизначений та визначений інтеграли / Ю.І. Першина, О.П. Пріщенко, Н.В. Черемська, Т.Т. Черногор. – Харків: Видавництво «Друкарня Мадрид», 2022. – 188 с.
7. Курпа Л.В. Вища математика в прикладах і задачах. У 2-х томах. Т. 2: Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди: навчальн. посіб. в 2-х томах / Л.В. Курпа, Н.О. Кириллова, А.Б. Лінник; за ред. проф. Л.В. Курпи – Х.: НТУ «ХП», 2009. – 432 с.