

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
(частина 1)

для студентів інженерно-фізичного
та транспортного факультетів
усіх форм навчання

2018

Розрахунково-графічні завдання з вищої математики (частина 1) для студентів інженерно-фізичного та транспортного факультетів усіх форм навчання / Укл.: В.М.Онуфрієнко, Н.В.Сніжко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018 – 46 с.

Укладачі: В.М.Онуфрієнко, професор, д.ф.-м.н.
Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.

Відповідальний
за випуск: Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.

Комп'ютерна верстка: Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.

Експерт спеціальності: О.Ф.Кузькін, доцент, к.т.н.
О.В.Климов, доцент, к.т.н.

Рецензент: В.П.П"янков, доцент, к.ф.-м.н.

Рекомендовано до видання НМК
інженерно-фізичного факультету ЗНТУ
Протокол № 9 від 26.12.2017

Рекомендовано до видання
НМК транспортного факультету
ЗНТУ
Протокол № 40 від 26.12.2017

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
ЗНТУ
Протокол № 3 від 29.11.2017

ЗМІСТ

Вступ	4
Модуль 1.	4
1 Матриці. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	6
2 Векторна алгебра	13
3 Аналітична геометрія на площині.	15
4 Аналітична геометрія у просторі.	19
Модуль 2.	22
5 Границі. Похідна та її застосування.	22
6 Функції багатьох змінних.	32
7 Інтеграли та їх застосування.	34
8 Ряди.	40
Література	45

ВСТУП

Як відомо, одним з видів самостійної роботи студентів є виконання протягом семестру розрахунково-графічних завдань. Їхньою метою є відпрацювання практичних вмінь та навичок. Вони покликані допомогти студентам більш глибоко засвоїти теоретичний матеріал і навчитися застосовувати набуті знання для розв'язання практичних задач. Запропоновані розрахунково-графічні завдання відповідають курсу „Вища математика”, який читається для студентів транспортного та інженерно-фізичного факультетів як денної, так і скороченої та заочної форм навчання у першому семестрі двосеместрового курсу. Дана збірка задач також може використовуватись для студентів інших технічних спеціальностей, на яких вивчається вища математика в обсязі двосеместрового курсу.

Дана збірка задач охоплює практично всі основні розділи першої частини курсу вищої математики; тут містяться завдання за всіма темами курсу, запропоновано 30 варіантів завдань для самостійної роботи. Крім того, наведений список рекомендованої літератури. Задачі для розв'язання підібрані в основному із збірок [11, 19-21], деякі задачі модуля 1 – із збірки [23]. Приклади розв'язання задач даної збірки містяться у посібнику [24], де для полегшення користування нумерація прикладів відповідає нумерації задач у даній збірці розрахунково-графічних завдань. Також у вказаному посібнику, окрім методичних вказівок до розв'язку задач та прикладів розв'язання, містяться необхідні теоретичні відомості та довідковий матеріал (таблиці тощо).

Розрахунково-графічні завдання виконуються протягом семестру, що забезпечує студентам систематичне вивчення курсу на основі опрацювання рекомендованих підручників та посібників, самостійного пошуку необхідних літературних джерел та матеріалів, їх аналізу та узагальнення, самостійного дослідження та письмового викладення практичних питань.

Номер варіанту студент обирає за номером у списку в журналі. Робота виконується українською або російською мовою в письмовій

формі, бажано в зошиті у клітинку. Необхідно залишати поля для приміток. На титульному аркуші роботи потрібно вказати назву предмету, спеціальність, групу та курс, прізвище, ім'я та по батькові студента, прізвище викладача, який приймає роботу.

В розрахунково-графічному завданні студент повинен розв'язати подані задачі методами, вказаними у завданнях, а також зробити всі необхідні креслення (графічні розв'язки). При цьому студентові необхідно показати набуті теоретичні знання з курсу

При виконанні роботи можна використовувати як лекційний матеріал та матеріал практичних занять, так і допоміжну літературу, наведену в кінці даного посібника. Перед виконанням завдань рекомендується спочатку вивчити відповідний теоретичний матеріал, потім розібратись у розв'язаннях задач, які виконувались на практичних заняттях, і тільки після цього приступати до виконання власне типової розрахунково-графічної роботи.

При оцінюванні роботи показником її якості є, перш за все, те, наскільки студент самостійно і правильно розв'язав поставлені задачі та зрозумів зміст отриманих розв'язків. З цією метою при захисті роботи студенту можуть бути задані додаткові питання, в тому числі і з теоретичного матеріалу, який виноситься на іспит.

Робота, яка відповідає зазначеним вимогам, подається на кафедру викладачу для перевірки і наступного захисту у формі співбесіди у визначений термін (як правило, під час модульного контролю). На захисті роботи студент повинен вміти:

- викласти зміст поставлених задач та довести їхні розв'язки;
- відповісти на запитання щодо змісту одержаних розв'язків;
- відповісти на додаткові питання.

Позитивні результати захисту роботи оформлюються відповідною кількістю рейтингових балів. Роботи, які не відповідають зазначеним вимогам, не зараховуються і повертаються студенту для доопрацювання із зазначенням терміну повторного захисту.

МОДУЛЬ 1
1 МАТРИЦІ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ
АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Завдання 1.1. Розв'язати рівняння.

$$1. \begin{vmatrix} 4 & x & 3 \\ x & 5 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad 2. \begin{vmatrix} 7 & -x & -1 \\ x & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0. \quad 3. \begin{vmatrix} 4 & x & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & x \end{vmatrix} = 0.$$

$$4. \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -x & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad 5. \begin{vmatrix} x & -2 & 5 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & x & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad 6. \begin{vmatrix} 3 & x & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ x & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$7. \begin{vmatrix} x & 5 & 1 \\ 3 & -4 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0. \quad 8. \begin{vmatrix} -2 & x & 3 \\ 5 & 1 & x \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0. \quad 9. \begin{vmatrix} x & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & x \end{vmatrix} = 0.$$

$$10. \begin{vmatrix} 4 & 1 & x \\ 1 & 5 & 2 \\ x & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad 11. \begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & x & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad 12. \begin{vmatrix} 5 & -1 & x \\ 12 & 1 & 3 \\ 7 & x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$13. \begin{vmatrix} 0 & x & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ x & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0. \quad 14. \begin{vmatrix} x & -3 & 6 \\ 3 & 1 & x \\ 5 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 0. \quad 15. \begin{vmatrix} 5 & -x & 8 \\ x & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$16. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & x \\ 7 & x & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad 17. \begin{vmatrix} 7 & x & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & x \end{vmatrix} = 0. \quad 18. \begin{vmatrix} 12 & x & 3 \\ 7 & 2 & x \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$19. \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 5 & 2 & x \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0. \quad 20. \begin{vmatrix} 4 & x & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0. \quad 21. \begin{vmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 5 & x & -2 \\ x & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$22. \begin{vmatrix} x & -3 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ -5 & x & -4 \end{vmatrix} = 0. \quad 23. \begin{vmatrix} 1 & x & 5 \\ x & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad 24. \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ x & -2 & 2 \\ -5 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0.$$

$$25. \begin{vmatrix} 6 & 2 & -3 \\ x & 3 & 1 \\ 8 & 5 & -x \end{vmatrix} = 0. \quad 26. \begin{vmatrix} x & 2 & 7 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0. \quad 27. \begin{vmatrix} 0 & x & 4 \\ x & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$28. \begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ x & -2 & 5 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0. \quad 29. \begin{vmatrix} 1 & -3 & x \\ 4 & x & 2 \\ -5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0. \quad 30. \begin{vmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 3 & -x & -1 \\ x & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Завдання 1.2. Виконати дії над матрицями. Буквою E позначена одинична матриця відповідного розміру.

1. $N^T - H \cdot G$.
2. $D \cdot M - 5E$.
3. $H \cdot (S^T - 3G)$.
4. $F \cdot (4D - M^T)$.
5. $H \cdot S^T + N^T$.
6. $N^T + F \cdot M^T$.
7. $H \cdot (2S^T + G)$.
8. $D \cdot M - 4E$.
9. $S \cdot G + 3E$.
10. $A \cdot C^T + 2E$.
11. $H \cdot (3G - S^T)$.
12. $D^T \cdot F^T - N$.
13. $S \cdot F^T - N$.
14. $A \cdot (C^T + 2B)$.
15. $H \cdot (G + 2S^T)$.
16. $F \cdot S^T + N^T$.
17. $M \cdot S^T - 4E$.
18. $F \cdot (3M^T - D)$.
19. $H \cdot G + 3N^T$.
20. $S \cdot B + 4E$.
21. $A \cdot (2D + C^T)$.
22. $F \cdot (2G + M^T)$.
23. $G^T \cdot S^T - 2E$.
24. $M \cdot AF^T - 2N$.
25. $A \cdot G - N^T$.
26. $A \cdot (B + 3C^T)$.
27. $F^T \cdot M + 3N$.
28. $B \cdot G^T - 3E$.
29. $F \cdot (M^T + 2D)$.
30. $2N^T - A \cdot B$.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, & F &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\
 S &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & C &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, & M &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \\
 D &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & G &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \\
 N &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, & H &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Завдання 1.3. Розв'язати систему матричним методом.

1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1, \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + x_3 = -1. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 5x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 - 3x_3 = -4. \end{cases}$
8. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

- $$9. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 = 8. \end{cases}$$
- $$10. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$
- $$11. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$
- $$12. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$$
- $$13. \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$$
- $$14. \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -11, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$$
- $$15. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$
- $$16. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$
- $$17. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$
- $$18. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2. \end{cases}$$
- $$19. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$
- $$20. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$
- $$21. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$
- $$22. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -3, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$
- $$23. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$$
- $$24. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
25. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases} & 26. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases} \\
27. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases} & 28. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases} \\
29. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases} & 30. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10. \end{cases}
\end{array}$$

Завдання 1.4. Знайти всі розв'язки системи методом Гауса.

$$\begin{array}{ll}
1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ -4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -3. \end{cases} & 2. \begin{cases} 4x_1 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ -7x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4. \end{cases} \\
3. \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ -4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 1, \\ -4x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases} & 4. \begin{cases} 5x_1 - x_3 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases} \\
5. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ 9x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 3, \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases} & 6. \begin{cases} 3x_1 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}
\end{array}$$

$$7. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_3 - 3x_4 = -1. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ 4x_1 + 7x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 1, \\ 7x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = -7, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 5. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -4x_1 + 7x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -2, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -1, \\ 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -3. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_3 + 4x_4 = -1. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = -2, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 = -1, \\ x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = -4. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 3, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} -2x_1 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 3, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -5. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = -1, \\ -5x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_4 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_4 = -2, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Задані координати вершин піраміди $M_1M_2M_3M_4$. Для всіх варіантів виконати наступні завдання.

Завдання 2.1. Знайти кут між ребрами M_1M_2 та M_1M_4 .

Завдання 2.2. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{M_1M_3}$ на вектор $\overrightarrow{M_1M_4}$.

Завдання 2.3. Знайти площу грані $M_1M_2M_3$.

Завдання 2.4. Знайти довжину висоти піраміди, проведену з вершини M_4 , попередньо знайшовши об'єм піраміди.

Завдання 2.5. Встановити орієнтацію трійки векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ і $\overrightarrow{M_1M_4}$.

- | | | | | |
|-----|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 1. | $M_1(6; 2; 0)$ | $M_2(2; 5; 0)$ | $M_3(1; 2; 4)$ | $M_4(-1; 1; 1)$ |
| 2. | $M_1(2; -1; -2)$ | $M_2(1; 2; -1)$ | $M_3(3; 2; 1)$ | $M_4(-4; 2; 5)$ |
| 3. | $M_1(2; 3; 1)$ | $M_2(4; 0; -2)$ | $M_3(6; 3; 7)$ | $M_4(7; 5; 3)$ |
| 4. | $M_1(0; -1; -1)$ | $M_2(-2; 3; -5)$ | $M_3(1; -5; -9)$ | $M_4(-1; -6; 3)$ |
| 5. | $M_1(4; -1; 3)$ | $M_2(-2; 1; 0)$ | $M_3(0; 5; 1)$ | $M_4(3; 2; -6)$ |
| 6. | $M_1(1; 1; 2)$ | $M_2(-1; 1; 3)$ | $M_3(0; -2; 4)$ | $M_4(-1; 0; -2)$ |
| 7. | $M_1(1; 2; 0)$ | $M_2(3; 0; -3)$ | $M_3(5; 2; 6)$ | $M_4(8; 4; 9)$ |
| 8. | $M_1(7; 7; 3)$ | $M_2(6; 5; 8)$ | $M_3(3; 5; 8)$ | $M_4(8; 4; -1)$ |
| 9. | $M_1(2; 2; 4)$ | $M_2(-1; 5; -2)$ | $M_3(-7; -3; 2)$ | $M_4(-6; -3; 6)$ |
| 10. | $M_1(4; 2; 6)$ | $M_2(0; 7; 2)$ | $M_3(0; 2; 7)$ | $M_4(1; 5; 0)$ |
| 11. | $M_1(3; 4; 0)$ | $M_2(4; 10; 2)$ | $M_3(2; 8; 4)$ | $M_4(9; 6; 9)$ |
| 12. | $M_1(4; 6; 5)$ | $M_2(6; 8; 7)$ | $M_3(2; 10; 10)$ | $M_4(7; 5; 9)$ |

13.	$M_1(1; 8; 2)$	$M_2(5; 1; 6)$	$M_3(5; 7; 4)$	$M_4(4; 10; 9)$
14.	$M_1(6; 4; 5)$	$M_2(4; 9; 5)$	$M_3(4; 6; 11)$	$M_4(6; 9; 3)$
15.	$M_1(7; 2; 3)$	$M_2(5; 7; 7)$	$M_3(5; 3; 1)$	$M_4(2; 3; 7)$
16.	$M_1(8; 6; 4)$	$M_2(10; 5; 6)$	$M_3(5; 6; 8)$	$M_4(8; 10; 7)$
17.	$M_1(6; 1; 5)$	$M_2(5; 1; -2)$	$M_3(-4; 1; -2)$	$M_4(-6; 0; 5)$
18.	$M_1(1; 1; 6)$	$M_2(-5; -1; 0)$	$M_3(4; 0; 0)$	$M_4(2; 2; 5)$
19.	$M_1(3; 5; 4)$	$M_2(8; 6; 4)$	$M_3(5; 10; 4)$	$M_4(4; 7; 8)$
20.	$M_1(10; 6; 5)$	$M_2(-2; 8; 2)$	$M_3(6; 8; 9)$	$M_4(7; 10; 3)$
21.	$M_1(-2; 1; 0)$	$M_2(3; 1; 7)$	$M_3(2; 2; 5)$	$M_4(6; 1; 5)$
22.	$M_1(-2; 0; 1)$	$M_2(0; 0; 4)$	$M_3(1; 3; 2)$	$M_4(3; 2; 7)$
23.	$M_1(-1; 3; 0)$	$M_2(3; 0; 0)$	$M_3(4; -1; 2)$	$M_4(3; 2; 7)$
24.	$M_1(1; -2; -1)$	$M_2(0; 0; 4)$	$M_3(1; 4; 2)$	$M_4(2; 0; 0)$
25.	$M_1(3; 0; 6)$	$M_2(1; 3; 2)$	$M_3(3; 2; 5)$	$M_4(2; 2; 5)$
26.	$M_1(2; 0; 0)$	$M_2(-2; 0; 1)$	$M_3(1; 4; 2)$	$M_4(3; 0; 6)$
27.	$M_1(-2; 0; 1)$	$M_2(0; 0; 4)$	$M_3(3; 2; 4)$	$M_4(1; 3; 2)$
28.	$M_1(1; 1; 3)$	$M_2(2; 0; 0)$	$M_3(3; 2; 5)$	$M_4(4; 0; 0)$
29.	$M_1(7; 2; 4)$	$M_2(7; -1; 2)$	$M_3(3; 3; 1)$	$M_4(-4; 2; 1)$
30.	$M_1(1; 5; 7)$	$M_2(-3; 6; 3)$	$M_3(-2; 7; 3)$	$M_4(-4; 8; -12)$

3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Трикутник $M_1M_2M_3$ задано координатами його вершин. Для всіх варіантів зробити креслення та виконати наступні завдання.

Завдання 3.1. Знайти довжину і рівняння сторони M_2M_3 .

Завдання 3.2. Знайти довжину та рівняння висоти, проведеної до сторони M_2M_3 .

Завдання 3.3. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку M_1 паралельно стороні M_2M_3 .

Завдання 3.4. Знайти кут α при вершині M_1 .

1.	$M_1 (2, 3)$	$M_2 (3, 0)$	$M_3 (-2, 5)$
2.	$M_1 (1, 3)$	$M_2 (-1, 0)$	$M_3 (2, 2)$
3.	$M_1 (1, 2)$	$M_2 (-1, 1)$	$M_3 (2, 1)$
4..	$M_1 (2, 1)$	$M_2 (4, 4)$	$M_3 (-2, 1)$
5.	$M_1 (1, -1)$	$M_2 (6, 5)$	$M_3 (2, 6)$
6.	$M_1 (2, 3)$	$M_2 (3, 2)$	$M_3 (-2, 5)$
7.	$M_1 (3, 2)$	$M_2 (-5, -2)$	$M_3 (1, 3)$
8.	$M_1 (3, -4)$	$M_2 (2, 3)$	$M_3 (4, 5)$
9.	$M_1 (3, 6)$	$M_2 (1, 3)$	$M_3 (2, -1)$
10.	$M_1 (5, -4)$	$M_2 (-1, 3)$	$M_3 (-3, 2)$
11.	$M_1 (1, 1)$	$M_2 (7, 4)$	$M_3 (4, 6)$
12.	$M_1 (1, 1)$	$M_2 (5, 4)$	$M_3 (-2, 5)$
13.	$M_1 (-1, 1)$	$M_2 (-5, 4)$	$M_3 (2, 5)$
14.	$M_1 (-1, 1)$	$M_2 (-7, 4)$	$M_3 (-4, 5)$
15.	$M_1 (1, -1)$	$M_2 (7, -2)$	$M_3 (4, 5)$
16.	$M_1 (1, -1)$	$M_2 (-5, 2)$	$M_3 (2, 3)$

17.	$M_1 (-1, -1)$	$M_2 (5, 2)$	$M_3 (2, 3)$
18.	$M_1 (-1, -1)$	$M_2 (-7, -2)$	$M_3 (-4, 3)$
19.	$M_1 (0, 1)$	$M_2 (6, 4)$	$M_3 (3, 7)$
20.	$M_1 (-1, 0)$	$M_2 (7, 3)$	$M_3 (4, 4)$
21.	$M_1 (2, 3)$	$M_2 (-3, 0)$	$M_3 (2, 5)$
22.	$M_1 (1, -3)$	$M_2 (2, 0)$	$M_3 (-2, -2)$
23.	$M_1 (1, 2)$	$M_2 (2, -1)$	$M_3 (-3, 1)$
24.	$M_1 (2, 1)$	$M_2 (4, 3)$	$M_3 (1, 1)$
25.	$M_1 (1, -1)$	$M_2 (3, 4)$	$M_3 (-2, 6)$
26.	$M_1 (2, -3)$	$M_2 (-3, 2)$	$M_3 (2, 6)$
27.	$M_1 (5, 2)$	$M_2 (-3, -2)$	$M_3 (-2, 3)$
28.	$M_1 (5, -4)$	$M_2 (4, 3)$	$M_3 (-1, 5)$
29.	$M_1 (4, 6)$	$M_2 (2, 3)$	$M_3 (-3, 1)$
30.	$M_1 (6, -4)$	$M_2 (4, 3)$	$M_3 (2, -2)$

Завдання 3.5, 3.6. Задано рівняння кривих другого порядку $a_i x^2 + b_i y^2 + c_i x + d_i y + k_i = 0$, $i = 0, 2$. Встановити їх вид, знайти центр, півосі, ексцентриситет, рівняння директрис, а для гіперболи – рівняння асимптот. Зробити креслення. Дані по варіантах наведені в таблиці.

№	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2	d_1	d_2	k_1	k_2
1	1	3	4	-4	-2	-12	24	-24	33	-36
2	3	1	1	-4	-12	2	6	24	18	31
3	1	-3	4	25	-2	-18	-24	-50	33	-77
4	3	9	4	-4	-6	36	16	-16	-5	-16
5	4	3	3	1	16	-18	-12	-2	16	35
6	2	5	3	-3	-8	20	6	6	5	32
7	3	16	4	-5	18	32	-8	-20	19	-84

8	4	25	3	-4	-24	-150	12	-8	36	321
9	9	4	5	-7	18	24	20	28	-16	-20
10	4	5	25	-16	16	-20	-5	-32	-59	84
11	4	25	1	-4	-8	200	4	16	-28	284
12	1	4	9	-3	6	16	18	12	-18	16
13	3	9	4	-25	30	-54	-24	-100	89	-244
14	4	1	7	-4	24	-2	-28	-24	63	-39
15	5	4	3	-3	30	8	-12	-18	42	-11
16	2	-2	3	9	-8	-20	18	-18	23	-23
17	7	4	9	-7	14	-8	-36	-42	-20	-31
18	9	-16	16	25	-90	-96	64	-50	145	281
19	9	3	5	-1	36	6	-30	-6	36	3
20	3	-5	4	3	-18	-20	-16	-6	31	-32
21	5	16	9	-5	20	32	54	-20	56	-84
22	4	25	9	-4	-32	-150	36	-8	64	321
23	5	4	4	-7	30	24	-32	28	89	-20
24	1	5	3	-16	8	-20	6	-32	10	84
25	5	-25	3	4	0	-200	-18	-16	12	-284
26	3	1	1	-9	6	6	-6	-18	3	-36
27	5	3	9	-4	30	30	-18	24	9	51
28	5	-9	4	4	-20	18	8	24	4	63
29	16	-5	5	4	32	-30	20	-24	-44	-29
30	25	4	4	-25	200	16	-16	50	316	-109

Завдання 3.7. Встановити, що рівняння $ax^2 + by^2 + cx + dy + k = 0$ визначає параболу. Знайти координати її вершини, рівняння осі симетрії, значення параметра. Зробити креслення. Дані по варіантах наведено в таблиці.

№	a	b	c	d	k
1	2	3	4	5	6
2	0	3	1	-6	5
3	0	3	1	12	9
4	4	0	-8	-2	7
5	0	2	3	-8	3

6	3	0	12	-1	15
7	0	2	2	12	15
8	3	0	-18	-1	29
9	4	0	16	1	19
10	0	2	2	-12	21
11	0	3	1	-6	8
12	4	0	16	3	22
13	0	2	-1	16	34
14	0	3	2	-12	15
15	4	0	24	-1	35
16	0	2	1	-8	11
17	3	0	12	-1	10
18	0	4	1	8	1
19	2	0	-16	1	31
20	3	0	18	-2	30
21	0	4	-1	-24	34
22	0	2	1	-16	31
23	3	0	-6	2	29
24	4	0	8	-1	0
25	0	2	-2	8	13
26	0	2	1	16	34
27	3	0	-12	3	16
28	4	0	24	-1	33
29	0	2	-2	-12	23
30	2	0	10	-1	11

4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРИ

Задано точки M_1, M_2, M_3, M_4 . Для всіх варіантів виконати наступні завдання.

Завдання 4.1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку M_4 паралельно прямій M_1M_2 .

Завдання 4.2. Знайти рівняння площини $M_1M_2M_3$.

Завдання 4.3. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку M_4 перпендикулярно площині $M_1M_2M_3$.

1.	$M_1(8; 6; 4)$	$M_2(10; 5; 5)$	$M_3(5; 6; 8)$	$M_4(8; 10; 7)$
2.	$M_1(1; 5; -7)$	$M_2(-3; 6; 3)$	$M_3(-2; 7; 3)$	$M_4(-4; 8; -12)$
3.	$M_1(6; 1; 5)$	$M_2(5; 1; 2)$	$M_3(-4; 1; -2)$	$M_4(-6; 0; 5)$
4.	$M_1(7; 2; 4)$	$M_2(7; -1; -2)$	$M_3(3; 3; 1)$	$M_4(-4; 2; 1)$
5.	$M_1(1; -1; 6)$	$M_2(-5; -1; 0)$	$M_3(4; 0; 0)$	$M_4(2; 2; 5)$
6.	$M_1(1; 2; 3)$	$M_2(2; 0; 0)$	$M_3(3; 2; 5)$	$M_4(4; 0; 0)$
7.	$M_1(3; 5; 4)$	$M_2(8; 7; 4)$	$M_3(5; 10; 4)$	$M_4(4; 7; 8)$
8.	$M_1(-2; 0; 2)$	$M_2(0; 0; 4)$	$M_3(3; 2; 4)$	$M_4(1; 3; 2)$
9.	$M_1(10; 6; 6)$	$M_2(-2; 8; 2)$	$M_3(6; 8; 9)$	$M_4(7; 10; 3)$
10.	$M_1(2; 0; 0)$	$M_2(-2; 0; -1)$	$M_3(1; 4; 2)$	$M_4(3; 0; 6)$
11.	$M_1(1; -2; 1)$	$M_2(0; 0; 4)$	$M_3(1; 4; 2)$	$M_4(2; 0; 0)$
12.	$M_1(3; 0; 6)$	$M_2(1; -3; 2)$	$M_3(3; 2; 5)$	$M_4(2; 2; 5)$
13.	$M_1(-2; 0; -1)$	$M_2(0; 0; 4)$	$M_3(1; 3; 2)$	$M_4(3; 2; 7)$
14.	$M_1(-1; 3; 0)$	$M_2(2; 0; 0)$	$M_3(4; -1; 2)$	$M_4(3; 2; 7)$
15.	$M_1(-2; 1; 0)$	$M_2(3; 2; 7)$	$M_3(2; 2; 5)$	$M_4(6; 1; 5)$
16.	$M_1(5; 2; 0)$	$M_2(2; 5; 0)$	$M_3(1; 2; 4)$	$M_4(-1; 1; 1)$

17.	$M_1(7; 2; 2)$	$M_2(5; 7; 7)$	$M_3(5; 3; 1)$	$M_4(2; 3; 7)$
18.	$M_1(2; -1; 2)$	$M_2(1; 2; -1)$	$M_3(3; 2; 1)$	$M_4(-4; 2; 5)$
19.	$M_1(6; 6; 5)$	$M_2(4; 9; 5)$	$M_3(4; 6; 11)$	$M_4(6; 9; 3)$
20.	$M_1(2; 3; 1)$	$M_2(4; 1; -2)$	$M_3(6; 3; 7)$	$M_4(7; 5; 3)$
21.	$M_1(1; 8; 2)$	$M_2(5; 2; 6)$	$M_3(5; 7; 4)$	$M_4(4; 10; 9)$
22.	$M_1(0; -1; -1)$	$M_2(-2; 3; 5)$	$M_3(1; -5; -9)$	$M_4(-1; -6; 3)$
23.	$M_1(4; 6; 5)$	$M_2(6; 9; 7)$	$M_3(2; 10; 10)$	$M_4(7; 5; 9)$
24.	$M_1(4; -1; 3)$	$M_2(-2; 1; 0)$	$M_3(0; -5; 1)$	$M_4(3; 2; -6)$
25.	$M_1(4; 4; 10)$	$M_2(4; 10; 2)$	$M_3(2; 8; 4)$	$M_4(9; 6; 9)$
26.	$M_1(2; 1; 4)$	$M_2(-1; 5; -2)$	$M_3(-7; -3; 2)$	$M_4(-6; -3; 6)$
27.	$M_1(7; 7; 3)$	$M_2(6; 5; 8)$	$M_3(3; 5; 8)$	$M_4(8; 4; 1)$
28.	$M_1(1; 2; 0)$	$M_2(3; 0; -3)$	$M_3(5; 2; 6)$	$M_4(8; 4; -9)$
29.	$M_1(4; 2; 5)$	$M_2(0; 7; 2)$	$M_3(0; 2; 7)$	$M_4(1; 5; 0)$
30.	$M_1(1; 1; 2)$	$M_2(-1; 1; 3)$	$M_3(2; -2; 4)$	$M_4(-1; 0; -2)$

Завдання 4.4. Звести рівняння до канонічного вигляду, визначити тип поверхні та зробити схематичне креслення.

- $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 16y - 2z + 10 = 0$.
- $5x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 20x - 8y - 24z - 40 = 0$.
- $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 2x + 16y + 54z + 95 = 0$.
- $2x^2 + 8y^2 + z^2 - 8x - 48y + 79 = 0$.
- $4x^2 + 25y^2 + 5z^2 - 8x + 50y + 20z + 99 = 0$.
- $x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 2x - 24y - 35 = 0$.
- $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 4z + 17 = 0$.
- $2x^2 + y^2 + 6z^2 + 6y + 12z + 3 = 0$.

9. $25x^2 + 4y^2 + 25z^2 - 150x + 16y + 141 = 0$.
10. $4x^2 + 100y^2 + 25z^2 - 24x + 200y + 100z + 135 = 0$
11. $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 6x - 4y - 16z - 21 = 0$.
12. $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 8x - 36y + 6z + 13 = 0$.
13. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z - 2 = 0$.
14. $4x^2 + 25y^2 + 25z^2 + 8x - 100y + 50z + 79 = 0$.
15. $2x^2 + y^2 + 4z^2 - 8x + 8z - 4 = 0$;
16. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z - 11 = 0$.
17. $25x^2 + 4y^2 + 25z^2 - 150x + 16y - 2z + 141 = 0$.
18. $4x^2 + 36y^2 + 4z^2 + 36x + 72y - 8z - 40 = 0$.
19. $9x^2 + y^2 + 9z^2 + 4y - 18z + 13 = 0$.
20. $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0$.
21. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 8x + 4y + 8z + 4 = 0$.
22. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 6 = 0$.
23. $9x^2 + y^2 + 4z^2 - 18x - 2y + 4z + 45 = 0$.
24. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 8z - 17 = 0$.
25. $4x^2 + y^2 + 4z^2 + 16x - 2y - 8z + 5 = 0$.
26. $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x + 144y + 24z + 153 = 0$.
27. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z - 3 = 0$.
28. $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z - 135 = 0$.
29. $4x^2 + 25y^2 + 100z^2 + 16x - 50y + 200z - 9 = 0$.
30. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 8z + 22 = 0$.

МОДУЛЬ 2

5 ГРАНИЦІ. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Завдання 5.1. Обчислити границю.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - 9x + 10}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x + 1}$. 3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{-5x^2 + 11x - 2}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 9x - 35}{x^2 - 5x - 14}$. 5. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 + 6x - 45}{3x^2 - 10x + 3}$. 6. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 3x + 15}{x^2 - 6x - 27}$.
7. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 11x + 5}{x^2 - 2x - 35}$. 8. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{3x^2 + 25x + 8}{2x^2 + 15x - 8}$. 9. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 16}$.
10. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^3 + 27}$. 11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 12x + 20}{x^2 - 5x + 6}$. 12. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{6 + x - x^2}$.
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 5x}{x^3 - x^2 + 2x}$. 14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$. 15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 5x + 6}$.
16. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 + x - x^2}{x^3 - 27}$. 17. $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{27x^3 - 1}{3x^2 + 2x - 1}$. 18. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}$.
19. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x - 2}$. 20. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$. 21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$.
22. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$. 23. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 + x - 20}$. 24. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^2 + 11x - 3}$.
25. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{2x^2 - 7x + 3}$. 26. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4}$. 27. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 4x - 5}$.
28. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + x - 2}$. 29. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{7x^2 + 4x - 3}$. 30. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 16}$.

Завдання 5.2. Обчислити границю.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x + 1}{x^3 + 5x^2 + 2}$.
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 8x^2 + 3}{5 + 2x - x^3}$.
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - 5x^2 - 5x^5}{x^5 + 6x + 8}$.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - x^2 - 7}{8x^4 + x + 5}$.
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$.
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 14x^2}{1 + x + 2x^2}$.
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}$.
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + 4x - 2x^4}{x + 3x^2 + 6x^4}$.
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^3 + x}{2x^3 - 3x + 2}$.
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$.
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x}{10x^3 - x^2 + 5}$.
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1}$.
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - x^2 + 4x}{7x^3 + 5}$.
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 14x}{10x^3 + 3x^3 + x - 1}$.
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{6x^2 + 3x + 1}$.
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - x^2 + 5}{4x^4 + 1}$.
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 3x - 5}{2x^2 - 3x + 2}$.
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 - 12x^2 + 2}{3x^4 + 8x - 3}$.
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{27x^2 + 5x}{18 - 4x - 9x^2}$.
21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - 2}{3x^3 - x - 4}$.
22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x - 7}{5x^2 + 3x + 1}$.
23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4}$.
24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x + 1}{6x^4 - x^3 + 2x}$.
25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{2x^2 - x + 10}$.
26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3 - x^2 + 10}{10x^3 + 5x + 1}$.
27. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$.
28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 9x + 3}{x^2 - 3x + 4}$.
29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^4 + x^2 + x}{x^4 - 5x - 2}$.
30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 15x + 3}{2x^2 + 25x - 3}$.

Завдання 5.3 Обчислити границю.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}$. 8. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}$. 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}$.
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right)$. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$. 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$.
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}$. 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}$. 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}$.
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$. 17. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$. 18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 8x}{\arcsin 2x}$.
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}$. 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}$. 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}$.
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin x + \sin 7x}$. 23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{\operatorname{tg} 9x}$. 24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{7x^2}$.
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}$. 26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}$. 27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}$.
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \arcsin x}$. 29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}$. 30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}$.

Завдання 5.4. Продиференціювати функцію.

1. $y = \frac{\arccos^2 2x}{th(4x-3)}$. 2. $y = \frac{sh^2(4x+2)}{\arctg x^2}$. 3. $y = \frac{\arccos 4x^5}{th^2 x}$.
4. $y = \frac{\arctg^2(2x+1)}{sh \sqrt{x}}$. 5. $y = \frac{\arcsin 4x^3}{ch^4 x}$. 6. $y = \frac{th^2(x-2)}{\arcsin 4x}$.
7. $y = \frac{cth^3(4x+2)}{\arcsin 5x}$. 8. $y = \frac{cth^3(5x-1)}{\arccos x^2}$. 9. $y = \frac{sh^5 x}{\arccos 4x}$.
10. $y = \frac{\sqrt{ch^5 x}}{\arctg 4x}$. 11. $y = \frac{\sqrt[4]{\arctg 4x}}{sh^2 2x}$. 12. $y = \frac{th^2(2x+6)}{\arccos 5x}$.
13. $y = \frac{\arcsin^3 4x}{sh(3x+1)}$. 14. $y = \frac{\arcsin^7 5x}{th x^3}$. 15. $y = \frac{th 4x^2}{\arctg^2 4x}$.

$$\begin{array}{lll}
16. y = \frac{cth^2(x+2)}{\arccos^2 4x}. & 17. y = \frac{arcctg^4 5x}{sh \sqrt{x}}. & 18. y = \frac{arctg^3 2x}{ch(1/x)}. \\
19. y = \frac{\arccos 5x^3}{th^2 x}. & 20. y = \frac{\arcsin 5x^2}{\cos \sqrt{x}}. & 21. y = \frac{\sqrt[5]{ch 3x}}{arctg(x+2)}. \\
22. y = \frac{\sqrt{sh^6 x}}{arctg 5x}. & 23. y = \frac{arctg^3 3x}{th(3x+1)}. & 24. y = \frac{arctg^3 7x}{\sqrt[3]{cth x}}. \\
25. y = \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{th 2x}}. & 26. y = \frac{\sqrt{\arccos 2x}}{ch^2 x}. & 27. y = \frac{\arccos^3 5x}{th(x-2)}. \\
28. y = \frac{arcctg^3 x}{ch(2x-5)}. & 29. y = \frac{\arcsin^2 8x}{ch(4x-2)}. & 30. y = \frac{sh(x+3)}{arctg \sqrt{x}}.
\end{array}$$

Завдання 5.5. Знайти y' для функції, заданої параметрично.

$$\begin{array}{lll}
1. \begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{3t}. \end{cases} & 2. \begin{cases} x = \sqrt[5]{(t-2)^3}, \\ y = \sqrt{t-3}. \end{cases} & 3. \begin{cases} x = 8t^4 - 4, \\ y = 2t^3. \end{cases} \\
4. \begin{cases} x = arccost, \\ y = lnt. \end{cases} & 5. \begin{cases} x = 3t/(2+t^3), \\ y = t^2/(2+t^2). \end{cases} & 6. \begin{cases} x = \sqrt{t^2-1}, \\ y = (t+1)/\sqrt{t^2-1}. \end{cases} \\
7. \begin{cases} x = lnt, \\ y = t + lnt. \end{cases} & 8. \begin{cases} x = 2te^{2t}, \\ y = t/e^{2t}. \end{cases} & 9. \begin{cases} x = 1/(1+t), \\ y = (t/(1+t))^2. \end{cases} \\
10. \begin{cases} x = 4 \sin^2 t, \\ y = 3 \cos^2 t. \end{cases} & 11. \begin{cases} x = (lnt)/t, \\ y = t^2 lnt. \end{cases} & 12. \begin{cases} x = arcsint, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases} \\
13. \begin{cases} x = 1/(2+t), \\ y = (t/(2+t))^2. \end{cases} & 14. \begin{cases} x = 6t + 3t^2, \\ y = 7t^3 - 5t^2. \end{cases} & 15. \begin{cases} x = (lnt)/(t+1), \\ y = (t+1)lnt. \end{cases} \\
16. \begin{cases} x = e^{4t}, \\ y = e^{-4t}. \end{cases} & 17. \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases} & 18. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}
\end{array}$$

19. $\begin{cases} x = t^3, \\ y = \ln(3t). \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(t - \cos t). \end{cases}$ 21. $\begin{cases} x = 5(\sin t - t \cos t), \\ y = 5(\cos t + t \sin t). \end{cases}$
22. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}(2t), \\ y = \ln(1 + 2t^2). \end{cases}$ 23. $\begin{cases} x = 7 \cos t, \\ y = 6 \sin t. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x = 7 \cos^2 t, \\ y = 9 \sin^2 t. \end{cases}$
25. $\begin{cases} x = (8t + 3) \sin t, \\ y = 4t^4. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x = 2/(t + 4), \\ y = (t/(t + 4))^2. \end{cases}$ 27. $\begin{cases} x = 3 \cos^2 t, \\ y = 9 \sin^2 t. \end{cases}$
28. $\begin{cases} x = 2\sqrt{t}, \\ y = 7\sqrt[8]{t}/8. \end{cases}$ 29. $\begin{cases} x = 14 \cos^3 t, \\ y = 7 \sin^3 t. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{9t}. \end{cases}$

Завдання 5.6. Обчислити границю, використовуючи правило Лопітала.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x^2} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$. 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}$. 5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sin(5\pi x/2)}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{1 - \cos x}$. 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}$. 9. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1/\cos^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$.
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}$. 11. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$. 12. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x$.
13. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg}(\pi x/2)$. 14. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin(3/x)$. 15. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1 + 2x} + 1}{\sqrt{2 + x + x}}$.
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$. 17. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sin(\pi x/2)}$. 18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{4x - \sin x}$.
19. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$. 20. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$. 21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x + 5)}{\sqrt[4]{x + 3}}$.

$$\begin{array}{lll}
22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{2 \sin x + x} & 23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\ln x} - x}{x - 1} & 24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 - \sin x^2} \\
25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} & 26. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right) & 27. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2(\pi x/6)}{1 - x^2} \\
28. \lim_{x \rightarrow \infty} (a^{1/x} - 1)x & 29. \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x & 30. \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg}(\pi x/2)
\end{array}$$

Завдання 5.7. Провести повне дослідження вказаних функцій та побудувати графіки.

$$\begin{array}{lll}
1. y = \ln(x^2 + 1) & 2. y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1} & 3. y = x \ln x \\
4. y = x - \frac{8}{x^4} & 5. y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} & 6. y = \frac{5x}{4 - x^2} \\
7. y = \frac{4 - 2x}{1 - x^2} & 8. y = (5x^4 + 3)/x & 9. y = x^2 + 1/x^2 \\
10. y = \frac{1 - x}{x^2} & 11. y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} & 12. y = \frac{x^5}{x^4 - 1} \\
13. y = \frac{x^3 + 4}{x^2} & 14. y = \frac{x^3 + 1}{x} & 15. y = x^3/(x^4 - 1) \\
16. y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} & 17. y = \frac{x + 1}{(x - 1)^2} & 18. y = \frac{1 + x^3}{x^2} \\
19. y = \frac{4x - x^2 - 4}{x} & 20. y = \frac{x}{9 - x} & 21. y = -\ln \frac{1 + x}{1 - x} \\
22. y = \frac{(x - 2)^2}{x + 1} & 23. y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x} & 24. y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \\
25. y = \frac{4x^3 + 1}{x} & 26. y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1} & 27. y = \frac{x}{(x - 2)^2}
\end{array}$$

$$28. y = x + \frac{\ln x}{x}.$$

$$29. y = \frac{x^3}{2 - 3x}.$$

$$30. y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}.$$

Завдання 5.8. Розв'язати задачі.

1. Лампа висить над центром столу, який має радіус r . При якій висоті лампи над столом освітленість предмета, який лежить на його краю, буде найкращою? (Освітленість прямо пропорційна косинусу кута падіння сонячних променів і обернено пропорційна квадрату відстані до джерела світла).

2. Із усіх циліндрів, вписаних у даний конус, знайти той, у якого найбільша бічна поверхня. Висота конуса H , радіус основи R .

3. З паперового круга вирізано сектор. З частини круга, що залишилась, склеєно конічну воронку. Яку градусну міру повинен мати вирізаний сектор, щоб об'єм воронки був максимальним?

4. З усіх конусів з площею бічної поверхні S знайти конус максимального об'єму.

5. Пункт В знаходиться на відстані 60 км від залізниці. Відстань по залізниці від пункту А до найближчої до пункту В точки С складає 285 км. На якій відстані від точки С необхідно побудувати станцію, від якої прокладуть шосе до пункту В, щоб витратити найменшу кількість часу на переміщення між пунктами А та В, якщо швидкість руху по залізниці дорівнює 52 км/год, а швидкість руху по шосе – 20 км/год?

6. Канал, ширина якого a м, під прямим кутом впадає в інший канал шириною b м. Знайти найбільшу довжину балок, які можна сплавити по цій системі каналів.

7. Знайти висоту прямого кругового конуса найменшого об'єму, описаного навколо кулі, якщо радіус кулі дорівнює R .

8. Бічні сторони рівнобічної трапеції дорівнюють b , а менша основа a . При якому куті нахилу бічних сторін трапеція матиме найбільшу площу?

9. Із фігури, яка обмежена кривою $y = 3\sqrt{x}$ та прямими $x = 4$, $y = 0$, вирізати прямокутник найбільшої площі.

10. Рівнобедрений трикутник, вписаний в коло, яке має радіус R , обертається навколо прямої, яка проходить через його вершину паралельно основі. Якою повинна бути висота цього трикутника, щоб тіло отримане в результаті його обертання, мало найбільший об'єм?

11. Необхідно виготовити відкритий циліндричний бак об'ємом V . Вартість 1 м^2 матеріалу, з якого виготовляється дно баку P_1 грн., а вартість 1 м^2 матеріалу, який використовують для виготовлення стінок баку, – P_2 грн. При якому відношенні радіуса дна до висоти баку витрати на матеріал будуть мінімальними?

12. Ємність з вертикальними стінками, що має висоту H , заповнена нев'язкою рідиною, стоїть на горизонтальній площині. Визначити положення отвору, при якому дальність струменю рідини буде найбільшою, якщо швидкість витікання рідини, згідно із законом Торрічеллі, дорівнює $\sqrt{2gx}$, де x – відстань від отвору до поверхні рідини, g – прискорення вільного падіння.

13. Вікно має форму прямокутника, завершеного півколом. Периметр вікна дорівнює 15 м. При якому радіусі півкруга вікно буде пропускати найбільшу кількість світла?

14. На сторінці книжки друкований текст займає площу S , ширина верхнього та нижнього полів дорівнює a , а правого та лівого – b . При якому відношенні ширини до висоти тексту площа всієї сторінки буде найменшою?

15. З круглої колоди, діаметр якої d , необхідно вирізати балку прямокутного поперечного перерізу. Якими повинні бути ширина та висота цього перерізу, щоб балка створювала найбільший опір на згин? Опір балки на згин Q пропорційний добутку ширини x її поперечного перерізу і квадрату її висоти y , тобто $Q = kxy^2$, $k = \text{const}$.

16. Полотняне шатро об'ємом V має форму прямого конуса. Яким повинно бути відношення висоти конуса до радіуса його основи, щоб на шато було витрачено найменшу кількість полотна?

17. У рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при основі α необхідно вписати паралелограм найбільшої площі, так щоб

одна з його вершин лежала на основі, а друга на бічній стороні трикутника. Знайти довжини сторін паралелограма.

18. Знайти співвідношення, яке пов'язує радіус R і висоту H циліндра, який має при заданому об'ємі V найменшу повну поверхню.

19. Необхідно виготовити конічну воронку, яка матиме твірну, рівну 20 см. Якою повинна бути висота воронки, щоб її об'єм був мінімальним?

20. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює $2p$. Якою повинна бути його основа, щоб об'єм тіла, утвореного обертанням цього трикутника навколо його основи, був максимальним?

21. Знайти висоту конуса найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіуса R .

22. Дротом, довжина якого l м, необхідно обгородити клумбу, яка має форму кругового сектора. Яким повинен бути радіус круга, щоб площа клумби була максимальною?

23. Визначити максимальну площу прямокутника, вписаного в півкруг, який має радіус a .

24. Колода довжиною 20 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ яких рівні 2 м та 1 м. З колоди необхідно виготовити балку з квадратним поперечним перерізом, вісь якої збігалася би з віссю колоди, а об'єм був максимальним. Якими повинні бути розміри балки?

25. З корабля, який стоїть на якорі на відстані 9 км від берега, необхідно послати гінця в табір. Табір розташований на відстані 15 км до найближчої до корабля точки берега. Швидкість руху гінця на суші – 5 км/год, а на човні – 4 км/год. В якому місці він повинен причалити до берега, щоб потрапити в табір за найменший проміжок часу?

26. Смуга жерсті, яка має прямокутну форму, ширини a повинна бути зігнута у вигляді відкритого кругового жолоба, який має циліндричну форму, так, щоб його переріз мав форму сегмента. Яким має бути центральний кут, що спирається на дугу цього сегмента, щоб об'єм жолоба був максимальним?

27. Із круглої колоди, діаметр якої d , необхідно вирізати балку, яка має прямокутний переріз. Якими мають бути ширина a та

висота h цього перерізу, щоб в горизонтальному положенні та рівномірному навантаженні балка мала найменший прогин? (Величина прогину обернено пропорційна добутку ширини поперечного перерізу і куба висоти).

28. Вартість 1 км перевезення вантажу залізницею становить k_1 грн., а автомобілем $-k_2$ грн. $k_1 < k_2$. В якому місці P необхідно почати будівництво шосе, щоб можна було дешевше перевозити вантаж з пункту A в пункт C ? Відомо, що $|AB| = a$, $|BC| = b$ (рис. 1).

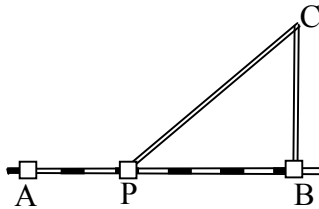


Рис. 1

29. Чоловікові необхідно потрапити з пункту A , який знаходиться на одному березі річки, в пункт B на іншому її березі. Під яким кутом чоловік має переплисти річку, щоб добратися до пункту B за найменший час?. Швидкість руху на березі в k раз більше швидкості руху річкою. Ширина річки h , відстань між пунктами A і B (вздовж берега) a .

30. На прямолінійному відрізку AB , який з'єднує два джерела світла: A (силою p) і B (силою q), знайти точку M , яка освітлюється найменше, якщо $|AB| = a$ (Освітленість обернено пропорційна квадрату відстані від джерела світла).

6 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Завдання 6.1. Знайти повні диференціали вказаних функцій.

1. $z = 7x^3y - \sqrt{xy}$.
2. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}$.
3. $z = e^{x+y-4}$.
4. $z = \cos(3x + y) - x^2$.
5. $z = \operatorname{tg}((x + y)/(x - y))$.
6. $z = \operatorname{ctg}(y/x)$.
7. $z = xy^4 - 3x^2y + 1$.
8. $z = \ln(x + xy - y^2)$.
9. $z = 2x^2y^2 + x^3 - y^3$.
10. $z = \sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}$.
11. $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$.
12. $z = e^{y-x}$.
13. $z = 7x - x^3y^2 + y^4$.
14. $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x$.
15. $z = \ln(y^2 - x^2 + 3)$.
16. $z = \arccos(x + y)$.
17. $z = y^2 - 3xy - x^4$.
18. $z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x}$.
19. $z = \operatorname{arctg}(x - y)$.
20. $z = \operatorname{arcsin}((x + y)/x)$.
21. $z = 2x^3y - 4xy^5$.
22. $z = x^2y \sin x - 3y$.
23. $z = \operatorname{arctg}x + \sqrt{y}$.
24. $z = \operatorname{arcsin}(xy) - 3xy^2$.
25. $z = 5xy^4 + 2x^2y^7$.
26. $z = \cos(x^2 - y^2) + x^3$.
27. $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$.
28. $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$.
29. $z = \operatorname{arcsin}(x + y)$.
30. $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$.

Завдання 6.2. Знайти екстремуми функції.

1. $z = 5x^2 - 5xy + 5y^2 - 25x - 25y + 130$.
2. $z = 4x^2 - 4xy + 4y^2 - 16x - 16y + 68$.
3. $z = -x^2 - 2y^2 + 10x + 20y - 70$.
4. $z = -x^2 - 2y^2 + 8x + 16y - 44$.
5. $z = 3x^2 - 3xy + 3y^2 - 9x - 9y + 30$.

6. $z = -x^2 - 2y^2 + 6x + 12y - 24$
7. $z = 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 4y + 10$
8. $z = -x^2 - 2y^2 + 4x + 8y - 10$
9. $z = x^2 - xy + y^2 - x - y + 2$
10. $z = x^2 - 2y^2 + 2x + 4y - 2$
11. $z = -x^2 - 2y^2 + 12x + 24y - 102$
12. $z = 6x^2 - 6xy + 6y^2 - 36x - 36y + 222$
13. $z = -x^2 - 2y^2 + 14x + 28y - 140$
14. $z = 7x^2 - 7xy + 7y^2 - 49x - 49y + 350$
15. $z = -x^2 - 2y^2 + 16x + 32y - 184$
16. $z = 8x^2 - 8xy + 8y^2 - 64x - 64y + 520$
17. $z = -x^2 - 2y^2 + 18x + 36y - 234$
18. $z = 9x^2 - 9xy + 9y^2 - 81x - 81y + 738$
19. $z = 10x^2 - 10xy + 10y^2 - 100x - 100y + 1010$
20. $z = -x^2 - 2y^2 + 22x + 44y - 352$
21. $z = 11x^2 - 11xy + 11y^2 - 121x - 121y + 1342$
22. $z = -x^2 - 2y^2 + 24x + 48y - 420$
23. $z = 12x^2 - 12xy + 12y^2 - 144x - 144y + 1740$
24. $z = -x^2 - 2y^2 + 26x + 52y - 494$
25. $z = 13x^2 - 13xy + 13y^2 - 169x - 169y + 2210$
26. $z = -x^2 - 2y^2 + 28x + 56y - 574$
27. $z = 14x^2 - 14xy + 14y^2 - 196x - 196y + 2758$
28. $z = -x^2 - 2y^2 + 30x + 60y - 660$
29. $z = 15x^2 - 15xy + 15y^2 - 225x - 225y + 3390$
30. $z = -x^2 - 2y^2 + 20x + 40y - 290$

7 ІНТЕГРАЛИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Завдання 7.1. Обчислити невизначені інтеграли.

- 1) $\int (5x^4 - 7x^2 + x + 2)dx;$
- 2) $\int \left(2x^5 - 7x^3 + x - \frac{3}{x^2} \right) dx;$
- 3) $\int \left(4x^3 - 2x^2 - x\sqrt[3]{x} + \frac{11}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx;$
- 4) $\int \frac{(x + \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}} dx;$
- 5) $\int \left(3x^7 + 2x\sqrt[3]{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 2 \right) dx;$
- 6) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx;$
- 7) $\int \left(2x^2 + 3x\sqrt{x} - 4x + \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx;$
- 8) $\int (5x^7 - 4x^6 + 3x^2 + 9) dx;$
- 9) $\int (3x^3 + 2x^2 - x + 4\sqrt[3]{x}) dx;$
- 10) $\int (x^2 - 1)^3 dx;$
- 11) $\int (4e^x - 5 \sin x + 3^x) dx;$
- 12) $\int \frac{(x^3 + 1)^2}{x} dx;$
- 13) $\int (3^x + 4 \cos x + e^x) dx;$
- 14) $\int \left(\frac{11}{5\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{1+x^2} \right) dx;$
- 15) $\int (5^x + 8^x) dx;$
- 16) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx;$
- 17) $\int \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin 2x} dx;$
- 18) $\int 3^x (1 + e^x)^3 dx;$
- 19) $\int \frac{(\sqrt[3]{x} - 3)^2}{\sqrt[4]{x}} dx;$
- 20) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{3}{1+x^2} \right) dx;$
- 21) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{6}{1+x^2} \right) dx;$
- 22) $\int (5^x - 7e^x + 2^{2x}) dx;$

$$23) \int \frac{(x-1)^2}{x(x^2+1)} dx;$$

$$25) \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx;$$

$$27) \int (3^x + 2^{-x} + 4x^7) dx;$$

$$29) \int 2^x (e^x + e^{-x})^2 dx;$$

$$24) \int \frac{x(2x-1)}{x^3} dx;$$

$$26) \int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+x^2} \right) dx;$$

$$28) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx;$$

$$30) \int (tgx + 1)^2 dx;$$

Завдання 7.2. Обчислити невизначені інтеграли, використовуючи заміну змінної (підстановку).

$$1) \int x \cdot tgx^2 dx$$

$$3) \int \frac{\sqrt[7]{3 \ln x + 5} + x^2}{x} dx$$

$$5) \int \frac{4^{tgx} + 3tg^2 x + 1}{\cos^2 x} dx$$

$$7) \int \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$$

$$9) \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

$$11) \int 4^{-\sin x} \cos x dx$$

$$13) \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 7}}$$

$$15) \int \frac{e^{\arcsin \sqrt{x}} dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}}$$

$$2) \int \frac{\arcsin^2 x + x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$4) \int \frac{dx}{\sin^2(7x+2)}$$

$$6) \int \frac{\sin x + \sqrt{tgx}}{\cos^2 x} dx$$

$$8) \int \frac{x + 4\arctgx}{1+x^2} dx$$

$$10) \int \frac{e^{\sqrt{x}} + \sin \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} dx$$

$$12) \int \frac{2ctg^2(\ln x) + 3ctg(\ln x)}{x} dx$$

$$14) \int \frac{3ctg^2 x + 12ctgx - 1}{\sin^2 x} dx$$

$$16) \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$17) \int \frac{6tg^2 x + 5tgx + 1}{\cos^2 x} dx$$

$$19) \int \frac{xdx}{\cos^2(4x^2 - 1)}$$

$$21) \int \frac{4x - 5}{x^2 + 5} dx$$

$$23) \int \frac{xdx}{\sqrt{3 - x^2}}$$

$$25) \int \frac{x^2 dx}{4 + x^3}$$

$$27) \int (\cos 7x + e^{6x}) dx$$

$$29) \int \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$18) \int \frac{2\arctg x + x^3}{1 + x^2} dx$$

$$20) \int \frac{xdx}{x^4 - 16}$$

$$22) \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$$

$$24) \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 9}$$

$$26) \int e^{\cos x} \sin x dx$$

$$28) \int \frac{e^x dx}{e^x + 1}$$

$$30) \int \frac{(tgx + 3)^3 dx}{\cos^2 x}$$

Завдання 7.3. Обчислити невизначені інтеграли методом інтегрування частинами.

$$1) \int (x - 1)e^{-x} dx$$

$$2) \int \frac{xdx}{\cos^2 x}$$

$$3) \int x \arctg x dx$$

$$4) \int \arccos 3x dx$$

$$5) \int x^2 \sin 3x dx$$

$$6) \int \cos(\ln x) dx$$

$$7) \int x e^{-x} dx$$

$$8) \int x \arctg x dx$$

$$9) \int x \sin 3x dx$$

$$10) \int \frac{x \cos x dx}{\sin^5 x}$$

$$11) \int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx$$

$$12) \int e^{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$13) \int x^2 e^{2x} dx$$

$$14) \int \arctg \sqrt{2x - 1} dx$$

$$15) \int x \sin 4x dx$$

$$16) \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$17) \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$18) \int \sin \sqrt{x} dx$$

- | | | |
|--------------------------------|------------------------------|--|
| 19) $\int x \cos^2 x dx$ | 20) $\int \arctg x dx$ | 21) $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx$ |
| 22) $\int x \cdot 4^{-x/2} dx$ | 23) $\int \sqrt{x} \ln x dx$ | 24) $\int e^{-x} \sin 2x dx$ |
| 25) $\int x^2 \sin x dx$ | 26) $\int \ln^3 x dx$ | 27) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ |
| 28) $\int x \cdot 3^{-2x} dx$ | 29) $\int x^2 \arctg x dx$ | 30) $\int x^5 \cdot e^{-x^2} dx$ |

Завдання 7.4. Обчислити площу області, обмеженої вказаними кривими.

1. $y = x^2 / 2, y = x^3 / 6$
2. $y = x^2, y + x = 6, y = 0$
3. $y = (x - 2)^2, y = 4$
4. $y = x^2 + 1, y + x = 3$
5. $y = (x + 1)^2, y + x = 5, y = 0$
6. $y = x^2 - 2x - 4, y = -x^2$
7. $y = x^3, yx = 1, y = 8$
8. $y = 1/x, y + x = 5/2$
9. $y = x^2, yx = 8, x = 0, y = 16$
10. $y = 12 - x^2, y = 2x^2$
11. $y = x^2, y + x = 2, x - y = 2, x = 0$
12. $y = 5 - x^2, y = -4x$
13. $y = x, yx = 1, x = 5, y = 0$
14. $yx = 9, x + y = 10$

15. $y = x^2$, $yx = 8$, $y = 8$
16. $y = 6/x$, $y + x - 7 = 0$
17. $y = x$, $yx = 1$, $y = 0$, $x = 4$
18. $y = 5/x$, $y = 6 - x$
19. $y = x$, $yx = 1$, $y = 4x$ ($y \geq 0$)
20. $y = x^2 + 1$, $x - y + 3 = 0$
21. $y = 4 - x^2$, $y = 3x$, $y = 0$ ($x \geq 0$)
22. $y = x^3 / 4$, $y = x$
23. $y = x$, $yx = 1$, $y = 5$, $x = 0$
24. $y = x^2$, $y + x = 12$
25. $y = 4x$, $yx = 1$, $y = 0$, $x = 2$
26. $y = x^2$, $y = 6 - x$
27. $y = x$, $yx = 1$, $y = 4$, $x = 0$
28. $y = 2/x$, $2y + x - 5 = 0$
29. $y = x^2$, $yx = 8$, $x = 4$, $y = 0$
30. $y = x^3 / 3$, $y = x^2$

Завдання 7.5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, яка обмежена вказаними кривими. У варіантах 1-20 вісь обертання Ох, у варіантах 21-30 вісь обертання Оу.

1. $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$.
2. $2x - x^2 - y = 0$, $2x^2 - 4x + y = 0$.
3. $y = 3 \sin x$, $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.
4. $y = 5 \cos x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x \leq 0$.
5. $y = \sin^2 x$, $x = \pi / 2$, $y = 0$.
6. $x = \sqrt[3]{y - 2}$, $x = 1$, $y = 1$.
7. $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$.

$$8. y = -2x - x^2, y = -x.$$

$$9. y = 2x - x^2, y = -x + 2.$$

$$10. y = e^{1-x}, y = 0, x = 0, x = 1.$$

$$11. y = x^2, y^2 - x = 0.$$

$$12. x^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

$$13. y = -1 - x^2, y = -2$$

$$14. y = x^2, y = 1, x = 2.$$

$$15. y = x^3, y = \sqrt{x}.$$

$$16. y = 0, y = \sqrt{x+4}, x = 0$$

$$17. y = x^2, y = \sqrt[3]{x}$$

$$18. y = 0, y = \sin x, x = \frac{\pi}{4} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{4} \right);$$

$$19. y = \sin \frac{\pi x}{2}, y = x^2.$$

$$20. y = x^2 + 1, y = x, x = 0, x = 1.$$

$$21. y = 0, x = 0, y = (x - 1)^2$$

$$22. y = \ln x, x = 2, y = 0.$$

$$23. y = (x - 1)^2, y = 1.$$

$$24. y = \sqrt{x - 2}, y = 0, y = x^3, y = 1.$$

$$25. y = x^3, y = x^2.$$

$$26. y = x^2 - 2x + 1, x = 2, y = 0.$$

$$27. x = 0, x = \sqrt{y^3}, y = 1$$

$$28. y = \sqrt{x - 1}, y = 0, y = 1, x = 0.5.$$

$$29. y = x^3, y = x.$$

$$30. y = x^2, x = 2, y = 0.$$

8 РЯДИ

Завдання 8.1 Дослідити на збіжність вказані ряди з додатними членами.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)^3}{(3n)!}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n(2n-1)}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n n^7.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7^n}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+5)}{(2n-1)!}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^{2n}}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n+3)!}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{5n!}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n(n+1)}{7^n}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^7(n+2)!}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n \cdot 3^n}}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdots (5n-3)}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{3^n(n+1)!}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right)^7.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} (3n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{4^n}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{5^n}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{\sqrt{n \cdot 9^n}}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2\pi}{5^n}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n/2}}{(2n)!}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n(n+1)!}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} (5n-2) \sin \frac{\pi}{4^n}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n!}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)}.$$

Завдання 8.2 Дослідити на збіжність вказані ряди з додатними членами.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(2n+5))^n}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1} \right)^{n^2}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n} \right)^{n^2}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n^2} \right)^{2n}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{5n} \right)^{3n}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16^n}{((2n+1)/2n)^n}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n-1}{8n} \right)^{n^2}$. 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n} \right)^n$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n} \right)^{n^2}$. 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2-2n-8}{6n^2+3n+4} \right)^n$. 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5n+5} \right)^n$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{5n} \right)^{2n}$. 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^{3n}$. 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)/n)^{n^2}}{7^n}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+1} \right)^n$. 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{10n+1} \right)^n$. 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} \right)^{2n}$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{\ln^2(n+4)}$. 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+5}{2n+7} \right)^n$. 21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20^n}{(5(n+1)/n)^n}$.
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10n-1}{10n} \right)^{n^2}$. 23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+3} \right)^n$. 24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+5))^n}$.
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n} \right)^{5n}$. 26. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+7n+5}{5n^2-7} \right)^n$. 27. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{9^n} \right)^n$.
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/(n+1))^{n^2}}{5^n}$. 29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(2n+1))^{2n}}$. 30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{11^n} \right)^{3n}$.

Завдання 8.3. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакозмінні ряди.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{n^2+1}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{8^n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2n+2}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+4)}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^n \frac{\pi}{3n}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n}{n^6}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-1}{4^n}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^3+1}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\ln(n+1))^n}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^{5/2}}$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{8n-1}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(7n+1)^n}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{7^n}$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n+1}{n(n+3)}$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-2}{n^2-4}$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} \sqrt[5]{(n+1)^3}}$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5n}{6n+1} \right)^n$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$.
22. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$.
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\ln(2n+1)}$.
24. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{(n-1)!}$.
25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{15^n}$.
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n-1)^3}$.
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$.
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+4}$.
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n}$.

Завдання 8.4. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)$.

Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

1. $f(x) = \operatorname{ch}(3x^4)$.
2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}}$.
3. $f(x) = \operatorname{sh} 2x$.
4. $f(x) = e^{-x^6}$.
5. $f(x) = 3^{-x^3}$.
6. $f(x) = 7^x$.

7. $f(x) = x \sin \sqrt{x}$. 8. $f(x) = \frac{\sin 5x}{x}$. 9. $f(x) = \cos 7x$.
10. $f(x) = \frac{5}{1+2x}$. 11. $f(x) = \sin x^5$. 12. $f(x) = \frac{x^4}{1+x}$.
13. $f(x) = \cos \frac{x^2}{2}$. 14. $f(x) = \frac{4}{1-5x^2}$. 15. $f(x) = e^{7x}$.
16. $f(x) = \frac{6}{1+x}$. 17. $f(x) = 2^{-x^3}$. 18. $f(x) = 5^x$.
19. $f(x) = ch(2x^3)$. 20. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{4x}}}$. 21. $f(x) = sh 6x$.
22. $f(x) = \frac{1}{1+12x}$. 23. $f(x) = \sin x^4$. 24. $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$.
25. $f(x) = x^2 \sin \sqrt{x}$. 26. $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$. 27. $f(x) = \cos 6x$.
28. $f(x) = \cos \frac{x^3}{3}$. 29. $f(x) = \frac{2}{1-3x^2}$. 30. $f(x) = e^{4x}$.

Завдання 8.5. Використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити вказаний визначений інтеграл з точністю до 0,001.

1. $\int_0^{0.5} \frac{\arctg x^2}{x^2} dx$. 2. $\int_0^{0.8} \frac{1 - \cos x}{x} dx$. 3. $\int_0^1 \cos x^2 dx$.
4. $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$. 5. $\int_0^1 \sin^3 \sqrt{x} dx$. 6. $\int_0^1 \sqrt{x} \sin(2x) dx$.
7. $\int_0^1 \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}} dx$. 8. $\int_0^1 \sin \frac{x^2}{4} dx$. 9. $\int_0^1 x \cos x dx$.
10. $\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^3}$. 11. $\int_0^{0.4} \sqrt{1-x^3} dx$. 12. $\int_0^{0.5} e^{-3x^2} dx$.

13. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx.$

14. $\int_0^{0,25} \ln(1+x) dx.$

15. $\int_0^1 \sin \frac{x^2}{2} dx.$

16. $\int_0^{0,1} \sqrt{x} e^{-2x} dx.$

17. $\int_0^1 \cos x^3 dx.$

18. $\int_0^{0,1} \sqrt{x} \sin x dx.$

19. $\int_0^{0,1} \ln(1+x^4) dx.$

20. $\int_0^1 x^2 \cos x dx.$

21. $\int_0^1 e^{-x^2/2} dx.$

22. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx.$

23. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}.$

24. $\int_0^1 \sqrt[4]{1+x^3/5} dx.$

25. $\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{2x} dx.$

26. $\int_0^{0,1} \frac{e^x - 2}{x} dx.$

27. $\int_0^{0,5} x^2 \sin 3x dx.$

28. $\int_0^{0,1} \ln(1+x^2) dx.$

29. $\int_0^{0,4} \sqrt{x} e^{-x/2} dx.$

30. $\int_0^{0,5} \frac{1+\cos x}{x^2} dx.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М. : Наука. – 2005. – 416 с.
3. Бугров Я.С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник для студентов инженерно-технических специальностей вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1980. – 432 с.
4. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах / Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. – М.: Физматлит, 2001
5. Вища математика: підруч.: у 2 кн. Кн.1. Основні розділи / Призва Г.Й., Плахотник В.В, Гординський Л.Д. та ін.; за ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. – 400 с.
6. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М. : Высшая школа, 2003. – Ч. 1. – 2003. – 416 с.
7. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М. : Высшая школа, 2003. – Ч. 2. – 2003. – 415 с.
8. Дубовик В.П. Вища математика: навчальний посібник. 3-х частинах. Ч. 1 / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Харків: Веста, 2008. – 200с.
9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра / Ильин В.А., Позняк Э.Г. – М.: Наука, 1999.
10. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия / Ильин В.А., Позняк Э.Г. – М.: Наука, 1999.
11. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике (типовые расчёты) / Кузнецов Л.А. – М.: Высшая школа, 1983. – 175с.
12. Кулініч Г.Л. Вища математика : основні означення, приклади і задачі : [навч. посібник]. Кн.1 / Г.Л. Кулініч, Л.О. Максименко, В.В. Плахотник, Г.Й. Призва. – К. : Либідь, 1994. – 312 с.

13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 1985. – 526 с.
14. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 576 с.
15. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.
16. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре / Проскуряков И.В. – М.: Наука, 1984.
17. Сборник задач по математике для вузов/под ред. А.Е.Ефимова, В.П. Демидовича. М.: Высш. Шк., 1978. – ч.1,2.
18. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч.П. Специальные разделы математического анализа / под ред. В.А. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М. : Наука, 1986. – 615с.
19. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (в трёх частях), Ч. 1 / под ред. А.П.Рябушко. – Минск: Вышейшая школа, 1990. – 271с.
20. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (в трёх частях), Ч. 2 / под ред. А.П.Рябушко. – Минск: Вышейшая школа, 1991. – 352с.
21. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (в трёх частях), Ч. 3 / под ред. А.П.Рябушко. – Минск: Вышейшая школа, 1991. – 288 с..
22. Шкіль М.І. Вища математика. Кн. 1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова. – К. : Либідь, 1994. – 280 с
23. Індивідуальні завдання з вищої математики для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання (1-й семестр) 1 частина / Укл.: Л.В.Гальченко, В.Г.Засовенко та ін. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2005. – 82 с.
24. Практикум з вищої математики (частина 1) для студентів інженерно-фізичного та транспортного факультетів усіх форм навчання / Укл.: Н.В.Сніжко, Н.М.Антоненко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018. – 74 с.