

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання РГР (для студентів денної форми навчання) та

КР (для студентів заочної форми навчання)

з вищої математики (скорочена форма навчання).

Розділи «**Невизначений інтеграл**», «**Визначений інтеграл**»

Методичні вказівки до виконання РГР (для студентів денної форми навчання) та КР (для студентів заочної форми навчання) з вищої математики (скорочена форма навчання). Розділи «Невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл» / Укл. : Килимник І.М., Онуфрієнко Л.М., Полякова Т.Г. - Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2020 – 50 с.

Укладачі: Килимник І.М., к. т. н., доцент,
Онуфрієнко Л.М., к. ф.-м. н, доцент,
Полякова Т.Г. асистент

Рецензент: Онуфрієнко В.М., д. ф.-м. н., професор

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к. т. н., доцент

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики НУ «Запорізька
політехніка»
Протокол № 7 від 12.02.2020 р.

Рекомендовано НМК Машинобудівного
факультету НУ «Запорізька
політехніка»
Протокол № 4 від 25.02.2020 р.

ЗМІСТ

1	Невизначений інтеграл	4
1.1	Методи інтегрування	6
2	Визначений інтеграл	25
2.1	Невласні інтеграли першого та другого роду	29
2.2	Застосування визначених інтегралів	32
2.2.1	Обчислення площі плоскої фігури	32
2.2.2	Обчислення довжини дуги гладкої кривої	36
2.2.3	Обчислення площі поверхні, утвореної обертанням кривої навколо осі Ox або Oy	38
2.2.4	Обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі Ox або Oy	40
2.2.5	Застосування визначених інтегралів у механіці та фізиці	43
	Література	50

1 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Означення 1.1. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційована на $(a;b)$ і справджується рівність $F'(x) = f(x)$ для усіх $x \in (a;b)$.

Існує множина первісних $F(x)$ для функції $f(x)$, які відрізняються тільки сталою C : $(F(x) + C)' = f(x)$. Цю множину первісних називають *невизначеним інтегралом функції $f(x)$* і записують

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (1.1)$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Властивості невизначеного інтеграла

а) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$

б) $\int dF(x) = F(x) + C;$

в) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

г) $\int k f(x)dx = k \int f(x)dx$, де $k = \text{const}$;

д) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$

е) $\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$, $\alpha, \beta \in R$, $F(x)$ первісна для $f(x)$ на $(a;b)$.

Таблиця невизначених інтегралів $\int f(u) du = F(u) + C$

1	$\int du = u + C$	2	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C ; \alpha \neq -1$
2a	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	26	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
3	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	4	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
4a	$\int e^u du = e^u + C$	5	$\int \sin u du = -\cos u + C$
6	$\int \cos u du = \sin u + C$	7	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$
8	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$	9	$\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$
10	$\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$	11	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left \operatorname{tg} \frac{u}{2}\right + C =$ $= \ln\left \frac{1}{\sin u} - \operatorname{ctg} u\right + C$
12	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right + C =$ $= \ln\left \frac{1}{\cos u} - \operatorname{tg} u\right + C$	13	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$
14	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left \frac{u-a}{u+a}\right + C$	15	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C$
16	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right + C$	17	$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = u \cdot \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{2} +$ $+ \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C$

18	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = u \cdot \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left u + \sqrt{a^2 - u^2} \right + C$	
19	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$	20 $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

Зауваження: Таблицею інтегралів можна користуватись у випадку, коли аргумент підінтегральної функції і вираз під знаком диференціала однакові.

1.1 Методи інтегрування

а) Метод безпосереднього інтегрування.

Обчислення інтегралів за допомогою властивостей невизначеного інтеграла та таблиці невизначених інтегралів.

Треба пам'ятати, що $du = \frac{1}{a} d(au)$, $du = a d\left(\frac{1}{a}u\right)$, $du = d(u \pm a)$, де $a = \text{const}$.

Задача 1. Знайти інтеграли: а) $\int \frac{3 \cdot \sqrt[4]{x} - 4x + 5x^3}{x^2} dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$, в) $\int e^{7x-5} dx$, г) $\int (\cos 3x - \sin 3x)^2 dx$.

Розв'язання. а) $\int \frac{3 \cdot \sqrt[4]{x} - 4x + 5x^3}{x^2} dx$. При знаходженні інтеграла чисельник почлено ділимо на знаменник. Маємо під інтегралом три доданки. Від кожного знаходимо інтеграл, застосовуючи формули 2 і 3 таблиці:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } I &= \int \frac{3 \cdot \sqrt[4]{x} - 4x + 5x^3}{x^2} dx = \int \left(3 \cdot \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2} - 4 \cdot \frac{x}{x^2} + 5 \cdot \frac{x^3}{x^2} \right) dx = \\
 &= \int \left(3 \cdot x^{-\frac{7}{4}} - 4 \cdot \frac{1}{x} + 5 \cdot x \right) dx = 3 \int x^{-\frac{7}{4}} dx - 4 \int \frac{dx}{x} + 5 \int x dx =
 \end{aligned}$$

$$= 3 \cdot \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{-\frac{3}{4}} - 4 \cdot \ln|x| + 5 \cdot \frac{x^2}{2} + C = -4 \cdot x^{-\frac{3}{4}} - 4 \cdot \ln|x| + \frac{5}{2} \cdot x^2 + C.$$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$. Можемо застосувати формулу 2б), де $u = 3 - 2x$, і врахуємо лінійність аргументу u . За властивістю е) коефіцієнт лінійності дорівнює -2 . Матимемо:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}} = -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3-2x} + C = -\sqrt{3-2x} + C.$$

в) $\int e^{7x-5} dx$. Застосовуємо формулу 4а). За властивістю е) коефіцієнт лінійності дорівнює 7 . Маємо:

$$I = \int e^{7x-5} dx = \frac{1}{7} \cdot e^{7x-5} + C.$$

г) $\int (\cos 3x - \sin 3x)^2 dx$. Підінтегральну функцію піднесемо до квадрата і враховуючи, що $\cos^2 3x + \sin^2 3x = 1$ і $2 \cdot \cos 3x \cdot \sin 3x = \sin 6x$, матимемо

$$\begin{aligned} \int (\cos 3x - \sin 3x)^2 dx &= \int (\cos^2 3x - 2 \cdot \cos 3x \cdot \sin 3x + \sin^2 3x) dx = \\ &= \int (1 - \sin 6x) dx = \int dx - \int \sin 6x dx = x + \frac{1}{6} \cos 6x + C. \end{aligned}$$

Відповідь: а) $I = -4 \cdot x^{-\frac{3}{4}} - 4 \cdot \ln|x| + \frac{5}{2} \cdot x^2 + C$; б) $I = -\sqrt{3-2x} + C$;

$$\text{в) } I = \frac{1}{7} \cdot e^{7x-5} + C; \text{ г) } I = x + \frac{1}{6} \cos 6x + C.$$

б) Метод заміни змінної (метод підстановки).

Згідно цього метода вводять нову змінну інтегрування. Нехай

$F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a; b)$. Функція $x = \varphi(t)$ визначена та диференційована на проміжку $(\alpha; \beta)$ і $x \in (a; b)$: $a = \varphi(\alpha)$; $b = \varphi(\beta)$. Тоді справедлива формула:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C. \quad (1.2)$$

Зручним є і такий запис:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left[\begin{matrix} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)dx \end{matrix} \right] = \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

Підстановку $u = \varphi(x)$ підбирають так, щоб мати після перетворення табличний інтеграл.

Задача 2. Знайти інтеграли: а) $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$,
б) $\int \sqrt{3x^2 + 8} \cdot x dx$, в) $\int \frac{dx}{e^x + 1}$.

Розв'язання. а) $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$. Так як
 $d(\sin x) = (\sin x)' dx = \cos x dx$, то зробимо заміну змінної
 $u = \sin x$, $du = \cos x dx$. Матимемо:

$$I = \int \sin^4 x \cdot \cos x dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Перевіримо отриманий результат:

$$\left(\frac{\sin^5 x}{5} + C \right)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \sin^4 x \cdot \cos x = \sin^4 x \cdot \cos x.$$

$$\text{б) } I = \int \sqrt{3x^2 + 8} \cdot x dx = \left\{ \begin{matrix} u = 3x^2 + 8 \\ du = d(3x^2 + 8) = (3x^2 + 8)' dx = 6x dx \end{matrix} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \int \sqrt{3x^2 + 8} \cdot 6x dx = \frac{1}{6} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{6} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} (3x^2 + 8)^{\frac{3}{2}} + C = \\
&= \frac{1}{9} (3x^2 + 8)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{в) } I &= \int \frac{dx}{e^x + 1} = \left\{ \begin{array}{l} u = e^x + 1 \Rightarrow x = \ln(u - 1) \\ dx = \frac{du}{u - 1} \end{array} \right\} = \int \frac{du}{u(u - 1)} = \\
&= -\int \frac{u - 1 - u}{u(u - 1)} du = -\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{(u - 1)} = -\ln|u| + \ln|u - 1| + C = \\
&= \ln \left| \frac{u - 1}{u} \right| + C = \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 1} \right| + C = \ln e^x - \ln(e^x + 1) + C = x - \ln(e^x + 1) + C.
\end{aligned}$$

Відповідь: а) $I = \frac{\sin^5 x}{5} + C$; б) $I = \frac{1}{9} (3x^2 + 8)^{\frac{3}{2}} + C$;

в) $I = x - \ln(e^x + 1) + C$.

в) Метод інтегрування частинами.

Формула інтегрування частинами має вигляд:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1.3)$$

До інтегралів, які обчислюються методом інтегрування частинами відносяться:

$$\begin{aligned}
\text{а) } &\int P_n(x) \sin(\alpha x + \beta) dx, \int P_n(x) \cos(\alpha x + \beta) dx, \int P_n(x) e^{\alpha x + \beta} dx, \\
&\int P_n(x) a^{\alpha x + \beta} dx, \int \frac{ax + b}{\cos^2(\alpha x + \beta)} dx, \int \frac{ax + b}{\sin^2(\alpha x + \beta)} dx, \quad (1.4)
\end{aligned}$$

де $P_n(x)$ – многочлен n -го степеню, a, b, α, β – дійсні числа. У цих інтегралах через u позначаємо $P_n(x)$ або $ax+b$, а через dv – один з виразів $\cos(\alpha x + \beta)dx$, $\sin(\alpha x + \beta)dx$, $a^{\alpha x + \beta}dx$, $e^{\alpha x + \beta}dx$, $\frac{dx}{\cos^2(\alpha x + \beta)}$, $\frac{dx}{\sin^2(\alpha x + \beta)}$;

$$\begin{aligned} & \text{б) } \int P_n(x) \arcsin f(x) dx, \int P_n(x) \arccos f(x) dx, \\ & \int P_n(x) \arctg f(x) dx, \int P_n(x) \operatorname{arcctg} f(x) dx, \int P_n(x) \ln f(x) dx, \\ & \int P_n(x) \log_a f(x) dx, \end{aligned} \quad (1,5)$$

де $P_n(x)$ – многочлен n -го степеню (n може дорівнювати нулю), $f(x)$ – відповідна функція. В цих інтегралах через u позначаємо один з виразів $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, $\arctg f(x)$, $\operatorname{arcctg} f(x)$, $\ln f(x)$, $\log_a f(x)$, а через dv – $P_n(x)dx$.

Існують інші типи інтегралів для знаходження яких застосовують метод інтегрування частинами.

Зауваження. При застосуванні метода інтегрування частинами треба підінтегральний вираз розбити на два множники: u і dv , а саме: а) dx треба віднести до dv ; б) dv повинен бути таким, щоб інтегруванням легко знайти v ; в) інколи доводиться формулу інтегрування частинами застосовувати декілька разів.

Задача 3. Знайти інтеграли: а) $\int x \cos 4x dx$,
б) $\int (3x+5) \sin(1-2x) dx$, в) $\int x \ln(x+3) dx$, г) $\int \frac{3x-2}{\cos^2 4x} dx$,
д) $\int e^{2x} \sin x dx$.

$$\text{Розв'язання. а) } I = \int x \cos 4x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos 4x dx \end{array} \middle| v = \frac{1}{4} \sin 4x \right] =$$

$$= \frac{x}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \int \sin 4x dx = \frac{x}{4} \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x + C ;$$

$$\text{б) } I = \int (3x+5) \sin(1-2x) dx = \left[\begin{array}{l} u = 3x+5 \\ dv = \sin(1-2x) dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = 3dx \\ v = \frac{1}{2} \cos(1-2x) \end{array} \right] =$$

$$= (3x+5) \frac{1}{2} \cos(1-2x) - \int \frac{1}{2} \cos(1-2x) 3 dx = \frac{3x+5}{2} \cos(1-2x) -$$

$$- \frac{3}{2} \int \cos(1-2x) dx = \frac{3x+5}{2} \cos(1-2x) + \frac{3}{4} \sin(1-2x) + C ;$$

$$\text{в) } I = \int x \ln(x+3) dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(x+3) \\ dv = x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = \frac{1}{x+3} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+3) -$$

$$\begin{aligned} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x+3} dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+3) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+3} dx = \left[\begin{array}{l} -\frac{x^2}{x+3} \mid \frac{x+3}{x-3} \\ -\frac{3x}{-3x-9} \end{array} \right] = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+3) - \frac{1}{2} \int \left(x-3 + \frac{9}{x+3} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+3) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 9 \ln(x+3) \right) + C ; \end{aligned}$$

$$\text{г) } I = \int \frac{3x-2}{\cos^2 4x} dx = \left[\begin{array}{l} u = 3x-2 \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 4x} \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = 3dx \\ v = \frac{1}{4} \operatorname{tg} 4x \end{array} \right] = \frac{3x-2}{4} \operatorname{tg} 4x -$$

$$- \frac{1}{4} \int \operatorname{tg} 4x \cdot 3 dx = \frac{3x-2}{4} \operatorname{tg} 4x + \frac{3}{16} \ln |\cos 4x| + C ;$$

$$\begin{aligned}
 \text{д) } I &= \int e^{2x} \sin x dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{2x} \\ dv = \sin x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = 2e^{2x} dx \\ v = -\cos x \end{array} \right] = -e^{2x} \cos x + \\
 &+ 2 \int e^{2x} \cos x dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{2x} \\ dv = \cos x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = 2e^{2x} dx \\ v = \sin x \end{array} \right] = -e^{2x} \cos x + \\
 &+ 2(e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x dx) = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int e^{2x} \sin x dx.
 \end{aligned}$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$5 \int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x.$$

$$\int e^{2x} \sin x dx = \frac{1}{5} (-e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x) + C.$$

Відповідь: а) $I = \frac{x}{4} \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x + C$;

б) $I = \frac{3x+5}{2} \cos(1-2x) + \frac{3}{4} \sin(1-2x) + C$;

в) $I = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+3) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 9 \ln(x+3) \right) + C$;

г) $I = \frac{3x-2}{4} \operatorname{tg} 4x + \frac{3}{16} \ln |\cos 4x| + C$;

д) $I = \frac{1}{5} (-e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x) + C$.

г) Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен у знаменнику.

До цих інтегралів відносяться:

$$1) \int \frac{A dx}{ax^2 + bx + c}, 2) \int \frac{B dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, 3) \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx,$$

$$4) \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx. \quad (1.6)$$

Для інтегралів типів 1), 2) необхідно виділити повний квадрат у квадратному тричлені:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right). \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

Заміна $x + \frac{b}{2a} = u$ приводить інтеграл до табличного: для інтеграла типу 1) маємо табличний інтеграл 13 або 14, а для інтеграла типу 2) маємо табличний інтеграл 15 або 16.

Для інтегралів типів 3), 4) необхідно у чисельнику виділити похідну квадратного тричлена, який знаходиться у знаменнику, і чисельник почлено поділити на знаменник. Отримаємо два інтеграли, перший з яких знаходимо за Таблицею інтегралів: формула 19 (для інтеграла типу 3)) або 20 (для інтеграла типу 4)). Другий інтеграл є інтегралом типу 1) або 2).

Задача 4. Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int \frac{2-3x}{2x^2+6x-7} dx, \text{ б) } \int \frac{3x-4}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx.$$

Розв'язання. а)

$$I = \int \frac{2-3x}{2x^2+6x-7} dx = \left[\begin{aligned} &1) (2x^2+6x-7)' = 4x+6 \\ &2) 2-3x = -3 \left(x - \frac{2}{3} \right) = -0.75 \left(4x - \frac{8}{3} \right) = \\ &= -0.75 \left(4x+6 - 6 - \frac{8}{3} \right) = -0.75(4x+6) + 6.5 \\ &3) 2x^2+6x-7 = 2(x^2+3x-3.5) = \\ &= 2((x+1.5)^2 - 2.25 - 3.5) = 2((x+1.5)^2 - 5.75) \end{aligned} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{-0,75(4x+6)+6,5}{2x^2+6x-7} dx = -0,75 \int \frac{4x+6}{2x^2+6x-7} dx + 6,5 \int \frac{dx}{2((x+1,5)^2-5,75)} = \\
&= -0,75 \ln|2x^2+6x-7| + 3,25 \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{23}{4}} = -0,75 \ln|2x^2+6x-7| + \\
&+ \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{23}}{2}} \ln \left| \frac{x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{23}}{2}}{x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{23}}{2}} \right| + C = -0,75 \ln|2x^2+6x-7| + \\
&+ \frac{13}{4\sqrt{23}} \ln \left| \frac{2x+3-\sqrt{23}}{2x+3+\sqrt{23}} \right| + C;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } I &= \int \frac{3x-4}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx = \left[\begin{aligned} &1) (4-2x-x^2)' = -2-2x \\ &2) 3x-4 = 3\left(x-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2}\left(-2x+\frac{8}{3}\right) = \\ &= -\frac{3}{2}\left(-2x-2+2+\frac{8}{3}\right) = -\frac{3}{2}(-2x-2)-7 \\ &3) 4-2x-x^2 = -(x^2+2x-4) = \\ &= -(x^2+2x+1-1-4) = -(x+1)^2+5 \end{aligned} \right] = \\
&= \int \frac{-\frac{3}{2}(-2x-2)-7}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{-2x-2}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+1)^2}} = \\
&= -\frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{4-2x-x^2} - 7 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{5}} + C = -3\sqrt{4-2x-x^2} - \\
&- 7 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{5}} + C.
\end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: а) } I = -0,75 \ln|2x^2+6x-7| + \frac{13}{4\sqrt{23}} \ln \left| \frac{2x+3-\sqrt{23}}{2x+3+\sqrt{23}} \right| + C;$$

$$\text{б) } I = -3\sqrt{4 - 2x - x^2} - 7 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

д) Інтегрування дробово-раціональних функцій.

До цих функцій відносяться дроб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Якщо $n \geq m$, то дріб є неправильний. Треба виділити цілу частину, поділивши чисельник на знаменник: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}$, де $S(x)$ – частка (ціла частина),

$\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ – правильний дріб (ступінь многочлена $R(x)$ менший за m).

Якщо правильний дріб не є простий, то необхідно знаменник $Q_m(x)$ розкласти на множники (множниками можуть бути многочлени виду: $x \pm x_1$, $(x \pm x_2)^k$, $x^2 + a^2$, $(x^2 + a^2)^k$, $x^2 + px + q$, $(x^2 + px + q)^k$ з дискримінантом квадратного тричлена меншим нуля). Потім правильний дріб розкладають на прості дробі. Простих дробів буде стільки, скільки множників у знаменнику, враховуючи кратність кожного. У чисельниках простих дробів записують многочлени в загальному вигляді, не враховуючи кратність многочленів у знаменнику. Коефіцієнти чисельників знаходимо методом невизначених коефіцієнтів або комбінованим методом. При інтегруванні правильних простих дробів можемо мати такі інтеграли:

$$\int \frac{A}{x \pm x_1} dx = A \cdot \ln|x \pm x_1| + C; \quad (1.8)$$

$$\int \frac{A}{(x \pm x_2)^k} dx = A \cdot \frac{(x \pm x_2)^{1-k}}{1-k} + C, \quad k \neq 1; \quad (1.9)$$

$$\int \frac{A}{x^2 + a^2} dx = \frac{A}{a} \arctg \frac{x}{a} + C; \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{x^2+a^2} dx &= \int \frac{Ax}{x^2+a^2} dx + \int \frac{B}{x^2+a^2} dx = \\ &= \frac{A}{2} \ln|x^2+a^2| + \frac{B}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Інтеграли $\int \frac{A}{x^2+px+q} dx, \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ – розглянуті в інтегруванні квадратних тричленів з $D < 0$.

Інтеграл $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx, \quad k \in \mathbb{N}, k > 1$ обчислюється за рекурентною формулою:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{A}{2(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

де $t = x + \frac{p}{2}, m^2 = q - \frac{p^2}{4}$, . При цьому многочлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$;

Інтеграл $\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = I_k$ можна знайти використовуючи рекурентну формулу:

$$I_k = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} I_{k-1}. \quad (1.12)$$

Задача 5. Знайти інтеграли: а) $\int \frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)} dx$;

б) $\int \frac{3dx}{(x-1)^2(x+1)}$; в) $\int \frac{x^2+24x-45}{(x+3)(x^2-8x+21)} dx$.

Розв'язання.

$$\text{a) } I = \int \frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)} dx = \left[\begin{aligned} &\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \\ &= \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)} = \\ &= \frac{x^2(A+B) + x(2B+C) + A+2C}{(x+2)(x^2+1)} \end{aligned} \right]$$

$$x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2) = x^2(A+B) + x(2B+C) + A+2C$$

$$x = -2 \left| \begin{aligned} -2+1 &= A((-2)^2+1) + (B(-2)+C)(-2+2) \Rightarrow -1 = 5A; A = -\frac{1}{5} = -0,2 \\ x^2 \quad &0 = A+B; B = 1/5 = 0,2 \\ x \quad &1 = 2B+C; C = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0,6 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)} &= \frac{-0,2}{x+2} + \frac{0,2x+0,6}{x^2+1} \left] = \int \frac{-0,2}{x+2} dx + \int \frac{0,2x+0,6}{x^2+1} dx = \right. \\ &= -0,2 \int \frac{dx}{x+2} + 0,2 \int \frac{x dx}{x^2+1} + 0,6 \int \frac{dx}{x^2+1} = -0,2 \ln|x+2| + 0,1 \int \frac{2x dx}{x^2+1} + \\ &+ 0,6 \arctg x + C = -0,2 \ln|x+2| + 0,1 \ln|x^2+1| + 0,6 \arctg x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } I &= \int \frac{3dx}{(x-1)^2(x+1)} = \left[\frac{3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \right. \\ &= \frac{A(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} = \\ &= \frac{x^2(B+C) + x(A-2C) + 2A-B+C}{(x-1)^2(x+1)} \end{aligned}$$

$$3 = A(x+1) + B(x^2-1) + C(x-1)^2$$

$$\begin{aligned} x = -1 \quad &3 = 4C \\ x = 1 \quad &3 = 2A \\ x^2 \quad &0 = B+C \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} C = 3/4 = 0,75 \\ A = 3/2 = 1,5 \\ B = -3/4 = -0,75 \end{cases}$$

або $3 = x^2(B + C) + x(A - 2C) + A - B + C$

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 0 = B + C \\ 0 = A - 2C \\ 3 = A - B + C \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} A - 2C = 0 \\ A + 2C = 3 \end{cases} \Rightarrow 2A = 3 \Rightarrow A = 1,5 \Rightarrow \begin{cases} A = 1,5 \\ C = 0,75 \\ B = -0,75 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{(x-1)^2(x+1)} &= \frac{1,5}{(x-1)^2} + \frac{-0,75}{x-1} + \frac{0,75}{x+1} \Bigg] = \int \frac{1,5}{(x-1)^2} dx + \int \frac{-0,75}{x-1} dx + \\ &+ \int \frac{0,75}{x+1} dx = 1,5 \int \frac{dx}{(x-1)^2} - 0,75 \int \frac{dx}{x-1} + 0,75 \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= -1,5 \cdot \frac{1}{x-1} - 0,75 \ln|x-1| + 0,75 \ln|x+1| + C = -\frac{1,5}{x-1} - 0,75 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } I &= \int \frac{x^2 + 24x - 45}{(x+3)(x^2 - 8x + 21)} dx = \left[\frac{x^2 + 24x - 45}{(x+3)(x^2 - 8x + 21)} = \right. \\ &= \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2 - 8x + 21} = \\ &= \frac{A(x^2 - 8x + 21) + (Bx + C)(x+3)}{(x+3)(x^2 - 8x + 21)}; \end{aligned}$$

$$x^2 + 24x - 45 = A(x^2 - 8x + 21) + (Bx + C)(x+3);$$

$$x = -3 \left| \begin{array}{l} 9 - 72 - 45 = A(9 + 24 + 21) \Rightarrow -108 = 54A, A = -2, \\ 1 = A + B, B = 3, \\ -45 = 21A + 3C, C = -1. \end{array} \right.$$

$$x^2 \left| \begin{array}{l} 1 = A + B, B = 3, \\ -45 = 21A + 3C, C = -1. \end{array} \right.$$

$$x^0 \left| \begin{array}{l} 1 = A + B, B = 3, \\ -45 = 21A + 3C, C = -1. \end{array} \right.$$

$$\frac{x^2 + 24x - 45}{(x+3)(x^2 - 8x + 21)} = \frac{-2}{x+3} + \frac{3x-1}{x^2 - 8x + 21} \Bigg] = \int \frac{-2}{x+3} dx + \int \frac{3x-1}{x^2 - 8x + 21} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{l} 1) (x^2 - 8x + 21)' = 2x - 8 \\ 2) 3x - 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2x - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2x - 8 + 8 - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}(2x - 8) + 11 \\ 3) x^2 - 8x + 21 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 21 = (x - 4)^2 + 5 \end{array} \right] = \\
&= -2\ln|x + 3| + \int \frac{\frac{3}{2}(2x - 8) + 11}{x^2 - 8x + 21} dx = -2\ln|x + 3| + \frac{3}{2} \int \frac{2x - 8}{x^2 - 8x + 21} dx + \\
&+ 11 \int \frac{1}{(x - 4)^2 + 5} dx = -2\ln|x + 3| + \frac{3}{2} \ln|x^2 - 8x + 21| + \frac{11}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x - 4}{\sqrt{5}} + C.
\end{aligned}$$

Відповідь: а) $I = -0,2\ln|x + 2| + 0,1\ln|x^2 + 1| + 0,6\operatorname{arctg} x + C$;

$$\text{б) } I = -\frac{1,5}{x - 1} - 0,75\ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C;$$

$$\text{в) } I = -2\ln|x + 3| + \frac{3}{2}\ln|x^2 - 8x + 21| + \frac{11}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x - 4}{\sqrt{5}} + C.$$

е) Інтегрування тригонометричних функцій.

Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$ за допомогою універсальної підстановки

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}; dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \quad (1.13)$$

зводяться до інтегралів від раціональних дробів. В деяких випадках застосовують інші підстановки, які спростують знаходження інтегралів. Розглянемо ці випадки.

1) Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\cos x$: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то робимо заміну:

$$\sin x = t, \cos x = \sqrt{1 - t^2}, dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}. \quad (1.14)$$

2) Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\sin x$: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то робимо заміну:

$$\cos x = t, \sin x = \sqrt{1-t^2}, dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (1.15)$$

3) Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ парна відносно $\sin x$ і $\cos x$: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то робимо заміну:

$$\operatorname{tg} x = t, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; dx = \frac{1}{1+t^2} dt. \quad (1.16)$$

Інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$ знаходяться підстановкою:

1) якщо n – ціле додатне непарне число, а m – ціле додатне парне число, то $\sin x = t$;

2) якщо m – ціле додатне непарне число, а n – ціле додатне парне число, то $\cos x = t$;

3) якщо n і m – цілі додатні парні числа, застосовують формули зниження степеня:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \text{ та } \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x;$$

4) якщо n і m – цілі парні числа, але хоч одне з них від'ємне, або n і m – цілі непарні і від'ємні числа, то робимо заміну (1.16).

Інтеграли виду $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$ зводяться до табличних за допомогою формул:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x); \quad (1.17)$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x); \quad (1.18)$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x). \quad (1.19)$$

Задача 6. Знайти інтеграли: а) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$, б) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$,

в) $\int \cos 3x \cdot \sin 2x dx$, г) $\int \frac{dx}{3 - \cos x}$.

Розв'язання. а) $I = \int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx =$
 $= -\int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x d \cos x = -\int \cos^2 x d \cos x + \int \cos^4 x d \cos x =$
 $= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C;$

б) $I = \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int (1 - \cos 4x) dx =$
 $= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C;$

в) $I = \int \cos 3x \cdot \sin 2x dx = \int \sin 2x \cdot \cos 3x dx = \int \frac{1}{2} (\sin(2x - 3x) +$
 $+ \sin(2x + 3x)) dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 5x dx -$
 $-\frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{2} (-\cos x) + C =$
 $= -0,1 \cos 5x + 0,5 \cos x + C;$

г) $I = \int \frac{dx}{3 - \cos x} = \left[\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2} \right] =$
 $= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3(1+t^2) - (1-t^2)}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{4t^2 + 2} = \frac{2}{4} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{2}} =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{1/2}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}) + C = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \sqrt{2}\right) + C.
\end{aligned}$$

Відповідь: а) $I = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$;

б) $I = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$;

в) $I = -0,1 \cos 5x + 0,5 \cos x + C$;

г) $I = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \sqrt{2}\right) + C$.

е) Інтегрування ірраціональних виразів.

Розглянемо деякі з них.

1) $\int R\left(x, x^{\frac{n_1}{m_1}}, x^{\frac{n_2}{m_2}}, \dots, x^{\frac{n_k}{m_k}}\right) dx$, де n_i, m_i ($i = \overline{1, k}$) – цілі додатні

числа. Робимо заміну $x = t^s$, де s є спільним знаменником дробів $\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, \dots, \frac{n_k}{m_k}$. Ця заміна приводить до інтегралу від раціональної функції аргументу t .

2) $\int R\left(\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{\frac{n_1}{m_1}}, \left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{\frac{n_2}{m_2}}, \dots, \left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{\frac{n_k}{m_k}}\right) dx$, де n_i, m_i

($i = \overline{1, k}$) – цілі додатні числа, a_1, b_1, a_2, b_2 – дійсні числа: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Заміна: $\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2} = t^s$, де s є спільним знаменником дробів

$\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, \dots, \frac{n_k}{m_k}$, приводить до інтегралу від раціональної функції аргументу t .

$$3) \int R\left(x, \sqrt{m^2 - x^2}\right) dx, \int R\left(x, \sqrt{m^2 + x^2}\right) dx, \int R\left(x, \sqrt{x^2 - m^2}\right) dx:$$

а) якщо підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{m^2 - x^2}$, то застосовуємо заміну:

$$x = m \cos t, \quad dx = -m \sin t dt, \quad \sqrt{m^2 - x^2} = m \sin t, \quad (1.20)$$

або $x = m \sin t$;

б) якщо підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{m^2 + x^2}$, то застосовуємо заміну:

$$x = m \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{m}{\cos^2 t} dt, \quad \sqrt{m^2 + x^2} = \frac{m}{\cos t}; \quad (1.21)$$

або $x = m \operatorname{ctg} t$;

в) якщо підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{x^2 - m^2}$, то застосовуємо заміну:

$$x = \frac{m}{\cos t}, \quad dx = \frac{m \sin t}{\cos^2 t} dt, \quad \sqrt{x^2 - m^2} = \frac{m \sin t}{\cos t}. \quad (1.22)$$

або $x = \frac{m}{\sin t}$.

Наведені заміни приводить до інтегралу від тригонометричних функцій аргументу t .

Задача 7. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$.

Розв'язання. $I = \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} = \left\{ \begin{array}{l} x = t^6; t = \sqrt[6]{x}, \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^3 \cdot 6t^5 dt}{t^2 + t^3} =$

$$= 6 \int \frac{t^8}{t^2(t+1)} dt = 6 \int \frac{t^6}{t+1} dt = 6 \int \left(t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= 6 \left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) + C =$$

$$= 6 \left(\frac{x}{6} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} - \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x} + 1| \right) + C.$$

Відповідь: $I = 6 \left(\frac{x}{6} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} - \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x} + 1| \right) + C.$

Задача 8. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x} dx.$

Розв'язання. Так як підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{2-x^2}$, то скористаємося формулою (1.20):

$$I = \int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x} dx = \left[x = \sqrt{2} \sin t, dx = \sqrt{2} \cos t dt, \sqrt{2-x^2} = \sqrt{2} \cos t \right] =$$

$$= \int \frac{\sqrt{2} \cos t}{\sqrt{2} \sin t} \sqrt{2} \cos t dt = \sqrt{2} \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \sqrt{2} \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} dt = \sqrt{2} \int \frac{1}{\sin t} dt -$$

$$- \sqrt{2} \int \sin t dt = \sqrt{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + \sqrt{2} \cos t + C = \sqrt{2} \ln \left| \frac{1}{\sin t} - \operatorname{ctg} t \right| + \sqrt{2} \cos t + C =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Diagram: A right triangle with hypotenuse } \sqrt{2}, \text{ angle } t, \text{ and base } \sqrt{2-x^2}. \\ \sin t = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ \cos t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2}} \\ \operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{2-x^2}}{x} \end{array} \right] =$$

$$= \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - x^2}}{x} \right| + \frac{2}{\sqrt{2 - x^2}} + C$$

$$\text{Відповідь: } I = \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - x^2}}{x} \right| + \frac{2}{\sqrt{2 - x^2}} + C.$$

2 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де функція $f(x)$ неперервна на відрізку інтегрування $[a; b]$, a – нижня межа інтегрування, b – верхня межа інтегрування, обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (2.1)$$

де $F(x)$ є первісною для підінтегральної функції $f(x)$.

Властивості визначеного інтеграла

$$1) \int_a^b dx = b - a.$$

$$2) \int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

4) Якщо $f(x)$ інтегрована на $[a; c]$ і на $[c; b]$, то вона інтегрована і на $[a; b]$, причому $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Зауваження. Точка c може бути довільно розташована відносно точок a і b .

$$5) \int_a^b k f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, \text{ де } k = \text{const.}$$

$$6) \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

7) Якщо відрізок інтегрування $[-a; a]$ симетричний, то для парної підінтегральної функції $f(x)$ $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$, для непарної функції $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Для знаходження первісної $F(x)$ при обчисленні визначеного інтеграла можна застосувати табличні інтеграли та методи інтегрування для обчислення невизначених інтегралів.

Задача 9. Знайти інтеграли: а) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$, б) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

Розв'язання. а) $I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} =$

$$= \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } I &= \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left[\frac{dx}{x} = d(\ln x) \right] = \int_1^{e^3} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}} = 2 \cdot \sqrt{1+\ln x} \Big|_1^{e^3} = \\ &= 2 \left(\sqrt{1+\ln e^3} - \sqrt{1+\ln 1} \right) = [\ln 1 = 0] = 2 \left(\sqrt{1+3\ln e} - 1 \right) = [\ln e = 1] = 2 \left(\sqrt{4} - 1 \right) = 2(2-1) = 2. \end{aligned}$$

Відповідь: а) $I = \frac{1}{3}$; б) $I = 2$.

Розглянемо деякі методи інтегрування визначеного інтеграла.

а) Заміна змінної під знаком визначеного інтеграла.

Якщо функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(t)$ задовольняють умовам: функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, функція $\varphi(t)$ має неперервну похідну $\varphi'(t)$ на $[\alpha; \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$ і складена функція $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha; \beta]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt; \quad (2.2)$$

б) Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (2.3)$$

Випадки її застосування аналогічні, як у невизначеному інтегралі.

Задача 10. Знайти інтеграли, застосовуючи заміну змінної:

$$\text{а) } \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx, \text{ б) } \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx,$$

Розв'язання. а) $I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \sin t \mid \alpha = 0, \beta = \pi/2 \\ a = 0, b = 2 \mid dx = 2 \cos t dt \end{array} \right\} =$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi - 0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right] = \pi;$$

б) $I = \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx = \left[\sqrt{1-e^{2x}} = t; 1-e^{2x} = t^2; x = \frac{1}{2} \ln(1-t^2); \right.$

$$dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2t}{1-t^2} dt = \frac{t}{t^2-1} dt; a=0 \Rightarrow \alpha=0; b=-\ln 2 \Rightarrow \beta = \sqrt{1-e^{2(-\ln 2)}} =$$

$$= \sqrt{1-e^{\ln 4}} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Big] = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t \cdot t}{t^2-1} dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = t \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+1} \right| - \ln 1 \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3} = \frac{\sqrt{3}}{2} +$$

$$+ \ln(2-\sqrt{3}).$$

Відповідь: а) $I = \pi$; б) $I = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2-\sqrt{3})$.

Задача 11. Знайти інтеграли, застосовуючи формулу інтегрування частинами: а) $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$, б) $\int_1^2 \ln(2x-1) dx$.

Розв'язання. а) $I = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin x dx \\ du = dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right] =$
 $= -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 0 + \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1;$

б) $I = \int_1^2 \ln(2x-1) dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(2x-1), \quad du = \frac{2}{2x-1} dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right] =$
 $= x \ln(2x-1) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{2x}{2x-1} dx = 2\ln 3 - \ln 1 - \int_1^2 \frac{2x-1+1}{2x-1} dx = 2\ln 3 -$
 $- \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{2x-1} \right) dx = 2\ln 3 - \left(x + \frac{1}{2} \ln |2x-1| \right) \Big|_1^2 = 2\ln 3 - (2-1) - \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 1) =$
 $= 2\ln 3 - 1 - \frac{1}{2} \ln 3 = 1,5 \ln 3 - 1.$

Відповідь: а) $I = 1$; б) $I = 1,5 \ln 3 - 1$.

2.1 Невласні інтеграли першого та другого роду

1) *Невласні інтеграли I роду* (інтеграли з нескінченними межами інтегрування). До них відносяться інтеграли виду:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^b f(x) dx, \text{ б) } \int_a^{\infty} f(x) dx, \text{ в) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \quad (2.4)$$

Розглянемо інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$. За властивістю 4) розіб'ємо його

на два інтеграли: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$, перший з яких відповідає інтегралу а), а другий – інтегралу б). Якщо існує скінченна

границя $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx$, то $\int_{-\infty}^c f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx$. Аналогічно
 $\int_c^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x)dx$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(x)dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} F(x) \Big|_a^c + \lim_{b \rightarrow \infty} F(x) \Big|_c^b = \\ &= F(c) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a) + \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - F(c) = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Аналогічно знаходяться інтеграли а) і б). Якщо границі існують (скінченні числа), то невласні інтеграли першого роду є збіжними, у протилежному випадку – розбіжними.

2) *Невласні інтеграли II роду* (інтеграли від розривних функцій).

До них відносяться інтеграли виду $\int_a^b f(x)dx$, для яких підінтегральна функція $f(x)$ невизначена або при $x = a$, або при $x = b$, або при $x = c$, $c \in (a; b)$.

Припустимо, що $f(x)$ невизначена при $x = c$, $c \in (a; b)$. Розглянемо інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx = \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} F(x) \Big|_a^{c-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} F(x) \Big|_{c+\varepsilon_2}^b = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} F(c - \varepsilon_1) - F(a) + F(b) - \\ &\quad - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} F(c + \varepsilon_1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Якщо границі існують (скінченні числа), то невласний інтеграл другого роду є збіжними, у протилежному випадку – розбіжним.

Задача 12. Знайти невластні інтеграли першого роду: а) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}}$,

б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Розв'язання. а) $I = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}} = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^B (4+x^2)^{-\frac{1}{2}} d(4+x^2) =$
 $= \lim_{B \rightarrow \infty} \sqrt{4+x^2} \Big|_0^B = \lim_{B \rightarrow \infty} (\sqrt{4+B^2} - 2) = \infty$ – інтеграл розбіжний;

б) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow \infty}} \int_A^B \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow \infty}} \int_A^B \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$
 $= \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow \infty}} \arctg(x+1) \Big|_A^B = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow \infty}} (\arctg(B+1) - \arctg(A+1)) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) =$
 $= \pi$ – інтеграл збіжний.

Відповідь: а) інтеграл розбіжний; б) $I = \pi$, інтеграл збіжний.

Задача 13. Знайти невластні інтеграли другого роду:

а) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} dx$, б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Розв'язання. а) $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} dx =$
 $= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \ln(2x-1) d(\ln(2x-1)) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln^2(2x-1)}{2} \Big|_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 = \frac{1}{4} (\ln^2 1 -$
 $- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln^2(2\varepsilon)) = +\infty$ – інтеграл розбіжний;

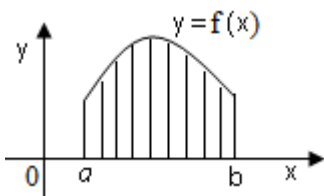
$$\begin{aligned}
 \text{б) } I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \frac{d(2x)}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \arcsin 2x \Big|_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\arcsin \left(2 \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \right) - \arcsin 0 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \arcsin 1 = \frac{\pi}{4} - \text{інтеграл збіжний.}
 \end{aligned}$$

Відповідь: а) інтеграл розбіжний; б) $I = \frac{\pi}{4}$, інтеграл збіжний.

2.2 Застосування визначених інтегралів

2.2.1 Обчислення площі плоскої фігури

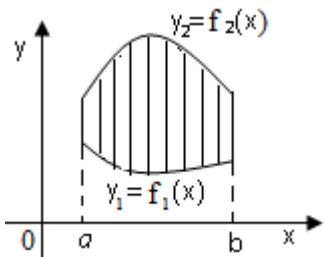
1) Якщо плоска фігура обмежена кривою $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$),



двома прямими $x = a$ та $x = b$ і віссю Ox , то площа фігури обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.7)$$

2) Якщо плоска фігура обмежена кривими: $y = f_2(x)$, $y = f_1(x)$ і



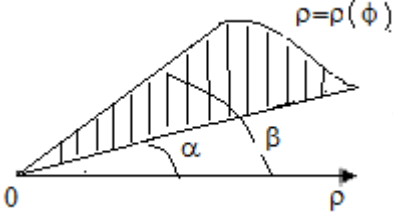
прямими $x = a$, $x = b$ ($a < b$ і $f_2(x) \geq f_1(x)$), то площа фігури обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (2.8)$$

3) Якщо плоска фігура обмежена кривою, заданою параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$, де $t \in [t_1; t_2]$, то площа фігури обчислюється за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt. \quad (2.9)$$

4) Якщо плоска фігура обмежена кривою, заданою в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то площа фігури обчислюється за формулою:



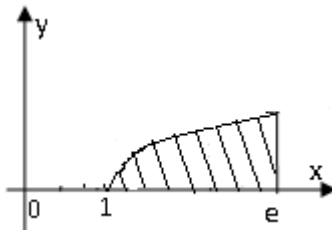
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (2.10)$$

Задача 14. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями:

а) $\begin{cases} y = \ln x \\ y = 0, x = e \end{cases}$; б) $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ та

віссю Ox ; г) $\rho^2 = 2 \cos 2\varphi$.

Розв'язання. а) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$. Зробимо рисунок фігури.

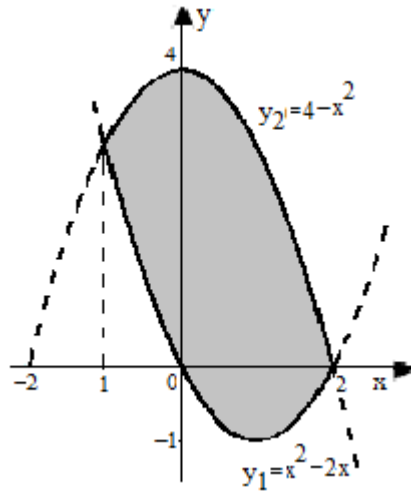


Площу заданої фігури знайдемо за формулою (2.7). З умови задачі маємо: $f(x) = \ln x$, $a = 0$, $b = e$.

$$S = \int_1^e \ln x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right] = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} = e - e + 1 = 1 \text{ (кв.од.)}.$$

б) $\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = x^2 - 2. \end{cases}$ Зробимо рисунок і знайдемо абсиси точок

перетину ліній.

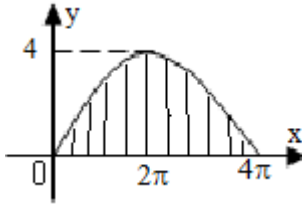


$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = x^2 - 2x, \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = x^2 - 2x, 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0, \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Площу фігури знайдемо за формулою (2.8).

$$S = \int_{-1}^2 (4 - x^2 - (x^2 - 2x)) dx = \int_{-1}^2 (4 - 2x^2 - 2x) dx = \left(4x - \frac{2}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_{-1}^2 = 8 - \frac{16}{3} + 4 + 4 - \frac{2}{3} - 1 = 9 \text{ (кв.од.)}.$$

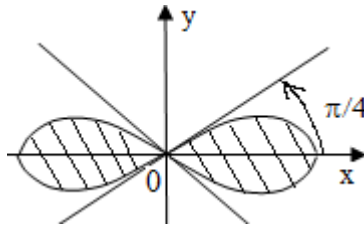
в) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ та віссю Ox . Зробимо рисунок.



Площу заданої фігури знайдемо за формулою (2.9). Маємо $y = 2(1 - \cos t)$, $x' = 2(1 - \cos t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$. Тоді

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} 2^2 (1 - \cos t)^2 dt = 4 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= 4 \left(t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin 2t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 12\pi \text{ (кв.од.)}. \end{aligned}$$

г) $\rho^2 = 2 \cos 2\varphi$. Зробимо рисунок фігури.



Площу заданої фігури знайдемо за формулою (2.10). Фігура симетрична відносно осей координат. Знайдемо площу її чверті і помножимо на 4. Маємо $\rho = \sqrt{2 \cos 2\varphi}$, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{4}$.

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 2 \cos 2\varphi d\varphi = 2 \sin 2\varphi \Bigg|_0^{\pi/4} = 2 \text{ (кв.од.)}.$$

Відповідь: а) $S = 1$ кв.од.; б) $S = 9$ кв.од.; в) $S = 12\pi$ кв.од.; г) $S = 2$ кв.од.

2.2.2 Обчислення довжини дуги гладкої кривої

1) Якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, то довжина кривої обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (2.11)$$

2) Якщо крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то довжина кривої обчислюється за формулою

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (2.12)$$

3) Якщо крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то довжина кривої обчислюється за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi. \quad (2.13)$$

Задача 15. Знайти довжину дуг гладких кривих, заданих

рівняннями: а) $\begin{cases} y^2 = x^3, x = 0, \\ x = \frac{4}{3}, (y \geq 0) \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = \cos^5 t, \\ y = \sin^5 t. \end{cases} \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$;

в) $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. а) $y^2 = x^3$, $x = 0$, $x = \frac{4}{3}$, $(y \geq 0)$. Довжину дуги знайдемо за формулою (2.11). Маємо

$$y = x^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}, \quad a = 0, \quad b = \frac{4}{3}.$$

$$L = \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^{\frac{4}{3}} = \frac{8}{27} \left(4^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{8}{27} \cdot 7 = \frac{56}{27} \text{ (лін. од.)}$$

б) $\begin{cases} x = \cos^5 t, \\ y = \sin^5 t. \end{cases} \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$. Довжину дуги знайдемо за формулою

(2.12). Маємо

$$\begin{aligned} x' &= -5\cos^4 t \sin t, \quad y' = 5\sin^4 t \cos t. \quad \text{Знайдемо } \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \\ &= \sqrt{(-5\cos^4 t \sin t)^2 + (5\sin^4 t \cos t)^2} = \sqrt{25\cos^8 t \sin^2 t + 25\sin^8 t \cos^2 t} = \\ &= \sqrt{25\cos^2 t \sin^2 t (\cos^6 t + \sin^6 t)} = 5\sin t \cos t \sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t} = \\ &= 5\sin t \cos t \sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t)(\sin^4 t - \sin^2 t \cos^2 t + \cos^4 t)} = \\ &= \frac{5}{2} \sin 2t \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 2t} = \frac{5}{4} \sin 2t \sqrt{1 + 3\cos^2 2t}, \quad t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Тоді} \\ L &= \frac{5}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{1 + 3\cos^2 2t} dt = -\frac{5}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\cos^2 2t} d(\cos 2t) = \\ &= -\frac{5}{8\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2t \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2 2t} + \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{3} \cos 2t + \sqrt{1 + 3\cos^2 2t} \right| \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{5}{8} \left(1 + \frac{\ln |\sqrt{3} + 2|}{2\sqrt{3}} \right) \text{ (лін.од.)} \end{aligned}$$

в) $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Довжину кривої знайдемо за формулою

(2.13). Маємо

$$\rho' = 3\sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3} \cdot \frac{1}{3} = \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Тоді}$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^6 \frac{\varphi}{3} + \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos \frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} (2\pi - 3\sqrt{3}) \text{ (лін.од.)}.$$

Відповідь: а) $L = \frac{56}{27}$ лін.од.; б) $L = \frac{5}{8} \left(1 + \frac{\ln |\sqrt{3} + 2|}{2\sqrt{3}} \right)$ лін.од.;

в) $L = \frac{1}{8} (2\pi - 3\sqrt{3})$ лін.од.

2.2.3 Обчислення площі поверхні, утвореної обертанням кривої навколо осі Ox або Oy

Розглянемо криву, що обертається навколо осі Ox і утворює деяку поверхню.

1) Якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ і обертається навколо осі Ox , то площа поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (2.14)$$

2) Якщо крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$ і обертається навколо осі Ox , то площа поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$Q_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (2.15)$$

3) Якщо крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$ і обертається навколо полярної осі, то площа поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$Q_{\varphi} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \cdot \sin \varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi. \quad (2.16)$$

Задача 16. Обчислити площу поверхні обертання, утвореної обертанням кривої навколо осі Ox або Oy : а) $\begin{cases} y = \sin 2x, \\ x = 0, x = \frac{\pi}{2}, \end{cases} Ox$;

б) $\begin{cases} x = t, \\ y = 2 - t, \end{cases} (0 \leq t \leq 1), Ox$, в) $\rho = 1 - \cos \varphi$, навколо полярної осі.

Розв'язання. а) $\begin{cases} y = \sin 2x, \\ x = 0, x = \frac{\pi}{2}, \end{cases} Ox$. Площу поверхні обертання

обчислюємо за формулою (2.14). Маємо $y' = 2 \cos 2x$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$ і

$$\begin{aligned} Q_x &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sqrt{1 + 4 \cos^2 2x} dx = \left[2 \cos 2x = t; t_n = 2; t_e = -2 \right] = \\ &= 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1 + t^2} \left(-\frac{1}{4} \right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1 + t^2} dt = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{t}{2} \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln \left| t + \sqrt{1 + t^2} \right| \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{\pi}{2} (2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2)) \text{ (кв.од.)}. \end{aligned}$$

б) $\begin{cases} x = t, \\ y = 2 - t, \end{cases} (0 \leq t \leq 1), Ox$. Площу поверхні обертання

обчислюємо за формулою (2.15). Маємо $x' = 1$, $y' = -1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

$$Q_x = 2\pi \int_0^1 (2-t) \cdot \sqrt{1+t} dt = 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 (2-t) dt = 2\sqrt{2}\pi \left(2t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 3\sqrt{2}\pi \text{ (кв.од.)}.$$

в) $\rho = 1 - \cos \varphi$ – кардіоїда обертається навколо полярної осі. Площу поверхні обертання обчислюємо за формулою: (2.16). Маємо $\rho' = \sin \varphi$, $\alpha = 0$, $\beta = \pi$. Тоді

$$Q_\varphi = 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos \varphi) \sin \varphi \sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^\pi 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= 32\pi \int_0^\pi \sin^4 \frac{\varphi}{2} d\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right) = 32\pi \frac{\sin^5 \frac{\varphi}{2}}{5} \Big|_0^\pi = \frac{32\pi}{5} \text{ (кв.од.)}.$$

Відповідь: а) $Q_x = \frac{\pi}{2} (2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2))$ кв.од.; б) $Q_x = 3\sqrt{2}\pi$ кв.од.;

$$\text{в) } Q_\varphi = \frac{32\pi}{5} \text{ кв.од.}$$

2.2.4 Обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі Ox або Oy

1) Якщо плоска фігура обмежена кривими: $y = f_2(x)$, $y = f_1(x)$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$ і $f_2(x) \geq f_1(x)$) і обертається навколо осі Ox . Тоді об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:

$$V_x = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx. \quad (2.17)$$

2) Якщо плоска фігура обмежена кривою, заданою параметричними рівняннями: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_1, t_2]$ і обертається навколо осі Ox . Тоді об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t) dt. \quad (2.18)$$

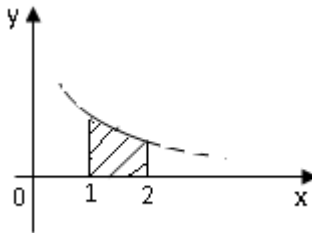
3) Якщо плоска фігура обмежена кривою, заданою у полярних координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$ і обертається навколо полярної осі. Тоді об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:

$$V_\varphi = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \cdot \sin \varphi d\varphi. \quad (2.19)$$

Задача 17. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої

фігури навколо вказаної осі: а) $\begin{cases} xy = 1, y = 0, \\ x = 1, x = 2, \end{cases} Ox$; б) $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} Ox$;
в) $\rho = \sin 2\varphi$, навколо полярної осі.

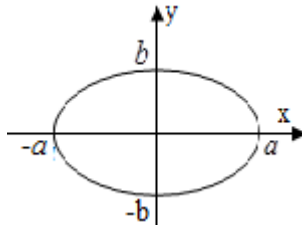
Розв'язання. а) $\begin{cases} xy = 1, y = 0, \\ x = 1, x = 2, \end{cases} Ox$. Фігура обертається навколо осі Ox . Зробимо рисунок.



Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюємо за формулою (2.17). Маємо $y_2 = \frac{1}{x}$, $y_1 = 0$, $a = 1$, $b = 2$.

$$V_x = \pi \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -\pi \left| \frac{1}{x} \right|_1^2 = \pi \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{\pi}{2} \text{ (куб.од.)}.$$

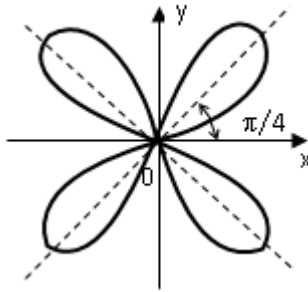
б) $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases}$ Ox . Маємо рівняння еліпса. Фігура обертається навколо осі Ox . Зробимо рисунок:



Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюємо за формулою (2.18). Маємо $y = b \sin t$, $x' = -a \sin t$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = 0$. Так як фігура симетрична відносно осі Oy , подвоїмо результат.

$$\begin{aligned} V_x &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b^2 \sin^2 t (-a \sin t) dt = -2\pi b^2 a \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t dt = \\ &= 2\pi b^2 a \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 t) d \cos t = 2\pi b^2 a \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{4}{3} \pi b^2 a \text{ (куб.од.)}. \end{aligned}$$

в) $\rho = \sin 2\varphi$ — чотирипелюсткова роза. Фігура обертається навколо полярної осі. Зробимо рисунок:



Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюємо за формулою (2.19). Маємо $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. Так як фігура симетрична відносно осі Oy , подвоїмо результат.

$$V_{\varphi} = 2 \cdot \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 2\varphi \cdot \sin \varphi d\varphi = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\pi/2} 8 \sin^4 \varphi \cdot \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{64\pi}{105} \text{ (куб.од.)}$$

Відповідь: а) $V_x = \frac{\pi}{2}$ куб.од.; б) $V_x = \frac{4}{3} \pi b^2 a$ куб.од.;

$$\text{в) } V_{\varphi} = \frac{64\pi}{105} \text{ куб.од.}$$

2.2.5 Застосування визначених інтегралів у механіці та фізиці

Координати (x_c, y_c) **центра мас плоскої фігури** обчислюються за формулами: $x_c = \frac{M_y}{m}$; $y_c = \frac{M_x}{m}$, де m – маса плоскої фігури, M_x – статичний момент відносно осі Ox , M_y – статичний момент відносно осі Oy , $\gamma(x)$ – густина плоскої фігури ($\gamma(x)=1$ для однорідної фігури).

1) Якщо плоска фігура обмежена лініями: $y = f_2(x)$, $y = f_1(x)$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$ і $f_2(x) \geq f_1(x)$), то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_a^b \gamma(x) \cdot (f_2(x) - f_1(x)) dx, \quad (2.20)$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \gamma(x) \cdot (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx, \quad (2.21)$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) \cdot x \cdot (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (2.22)$$

2) Якщо однорідна плоска фігура обмежена кривою, заданою параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_1, t_2]$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt, \quad (2.23)$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 \cdot x'(t) dt, \quad (2.24)$$

$$M_y = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x(t) \cdot x'(t) dt. \quad (2.25)$$

3) Якщо однорідна плоска фігура обмежена кривою, заданою рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi, \quad (2.26)$$

$$M_x = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \sin \varphi d\varphi, \quad (2.27)$$

$$M_y = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \cos \varphi d\varphi. \quad (2.28)$$

Задача 18. Знайти координати центра мас однорідної фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ та віссю Ox .

Розв'язання. Знайдемо M_x, M_y, m за формулами (2.24), (2.25), (2.23) відповідно.

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt = \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \\ &= \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt = \\ &= \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - (1 - \sin^2 t)\cos t) dt = \\ &= \frac{a^3}{2} \left(t - 3\sin t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t - \sin t + \frac{1}{3}\sin^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{a^3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2\pi = \frac{5}{2} a^3 \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(t - \sin t) a(1 - \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^2 (t - \sin t) dt = a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 t dt + \\ &+ a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 d \cos t = a^3 \int_0^{2\pi} t \left(1 - 2\cos t + \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \right) dt + \\ &+ a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 d \cos t = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^3 \int_0^{2\pi} t \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt - \frac{1}{3} a^3 (1 - \cos t)^3 \Big|_0^{2\pi} = \\
&= \left[\int t \cos t dt = t \sin t + \cos t; \int t \cos 2t dt = \frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t \right] = \\
&= a^3 \left(\frac{3}{4} t^2 - 2t \sin t - 2 \cos t + \frac{1}{4} t \sin 2t + \frac{1}{8} \cos 2t \right) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{3} a^3 \cdot 0 = \\
&= \frac{3}{4} a^3 \cdot 4\pi^2 = 3a^3 \pi^2. \\
&m = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \right) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \\
&= a^2 \left(\frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3a^2 \pi. \\
&x_c = \frac{3a^3 \pi^2}{3a^2 \pi} = a\pi, \quad y_c = \frac{5a^3 \pi}{2 \cdot 3a^2 \pi} = \frac{5}{6} a.
\end{aligned}$$

Відповідь: $x_c = a\pi$; $y_c = \frac{5}{6} a$.

Координати (x_c, y_c) **центра маси плоскої кривої** обчислюються за формулами $x_c = \frac{M_y}{m}$; $y_c = \frac{M_x}{m}$, де m – маса плоскої кривої, M_x – статичний момент відносно осі Ox , M_y – статичний момент відносно осі Oy , $\gamma(x)$ – густина плоскої кривої ($\gamma(x) = 1$ – для однорідної кривої).

1) Якщо плоска крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_a^b \gamma(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad (2.29)$$

$$M_x = \int_a^b \gamma(x) f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad (2.30)$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (2.31)$$

2) Якщо однорідна плоска крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_1, t_2]$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad (2.32)$$

$$M_x = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad (2.33)$$

$$M_y = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (2.34)$$

3) Якщо однорідна плоска крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi, \quad (2.35)$$

$$M_x = \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi, \quad (2.36)$$

$$M_y = \int_{\alpha}^{\beta} \rho \cos \varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi. \quad (2.37)$$

Задача 19. Знайти координати центра маси однорідної плоскої дуги півкола $x^2 + y^2 = a^2$, розташованої над віссю Ox .

Розв'язання. Знайдемо m , M_x , M_y за наведеними вище формулами (2.29), (2.30), (2.31). Маємо $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leq x \leq a$.

$$\text{Тоді } y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ і } \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$M_x = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int_{-a}^a a dx = ax \Big|_{-a}^a = 2a^2,$$

$$M_y = \int_{-a}^a x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{a}{2} \int_{-a}^a \frac{d(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{a}{2} \cdot 2\sqrt{a^2 - x^2} \Big|_{-a}^a = 0,$$

$$m = \int_{-a}^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a \cdot \arcsin \frac{x}{a} \Big|_{-a}^a = a \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = a\pi.$$

$$\text{Тоді } x_c = \frac{0}{a\pi} = 0, \quad y_c = \frac{2a^2}{a\pi} = \frac{2a}{\pi}.$$

Відповідь: $x_c = 0$; $y_c = \frac{2a}{\pi}$.

Визначений інтеграл застосовують для знаходження:

а) роботи A змінної сили $F(x)$, яка діє на відрізку $[a, b]$:

$$A = \int_a^b F(x) dx; \quad (2.38)$$

б) шляху S , пройденого точкою за проміжок часу від $t = a$ до $t = b$ зі швидкістю $v(t)$:

$$S = \int_a^b v(t) dt; \quad (2.39)$$

в) маси m неоднорідного стержня з густиною $\gamma(x)$ на відрізку $[a, b]$:

$$m = \int_a^b \gamma(x) dx. \quad (2.40)$$

Задача 20. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 24t - 3t^2$ (м/с). Знайти шлях, який пройшло тіло від початку руху до зупинки.

Розв'язання. Тіло не рухається, якщо швидкість дорівнює нулю:

$$v(t) = 0 \Rightarrow 24t - 3t^2 = 0, \quad t_1 = 0 \text{ і } t_2 = 8.$$

Шлях, який пройшло тіло від початку руху до зупинки знайдемо за формулою (2.39).

$$S = \int_0^8 (24t - 3t^2) dt = \left(24 \cdot \frac{t^2}{2} - 3 \frac{t^3}{3} \right) \Bigg|_0^8 = 12 \cdot 64 - 8 \cdot 64 = 256 \text{ (м)}.$$

Відповідь: $S = 256$ м.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – С-П.: Лань, 2010. – 608 с.
2. Бугров Я.С Высшая математика. Том 2. Дифференциальное и интегральное исчисление. / Я.С. Бугров, С.М., Никольский. – М.: Дрофа, 2004. – 512 с.
3. Вища математика [Текст]: Збірник задач: Навч. посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навч. закладів / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав, В. І. Дев'ятко; За ред.: В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К. : А.С.К., 2001. – 478с. : іл. – (Університетська бібліотека). – ISBN 966-539-321-9 : 16.80.
4. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. / М. Я. Выгодский. – АСТ: Астрель, 2006. – 991 с.
5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.1: учеб. пособие для вузов / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М. : ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2003. – 304 с.
6. Дубовик В.П. Вища математика: Навчальний посібник. У трьох частинах. Ч.2./ В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Х.: Веста, 2008. – 240с., іл.
7. Килимник І. М. Практикум з інтегрування функції однієї змінної: Навчальний посібник /І. М. Килимник, Т.Г. Полякова. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2020. – 306 с.
8. Корн Г. Справочник по математике. / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984. – 830 с.
9. Овчинников П.П. та ін. Вища математика. Підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.1. / Н.С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2001. – 416 с.
11. Шипачев В. С. Курс высшей математики /В. С. Шипачев. – М. Оникс, 2009. – 608 с. – ISBN 978-5-488-02067-2.