МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Т.І. Левицька
І.С. Пожуєва

КОРОТКИЙ КУРС ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Запоріжжя ● НУ «Запорізька політехніка» ● 2026

УДК 510.22(075.8)+ 512.56(075.8)+ 519.15(075.8)+ 519.17(075.8)
Л37

*Рекомендовано до друку вченою радою
національного університету «Запорізька політехніка»
(протокол № 9 від 27.03.2026)*

Р е ц е н з е н т и:

С. М. Гребенюк – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики Запорізького національного університету;

Ю. О. Швець – к.ф.-м.н, доцент кафедри STEM-освіти та цифрових технологій Комунального закладу «Запорізький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти» Запорізької обласної ради

Л37 **Левицька Т.І.**

Короткий курс дискретної математики: навч. посібник / Т.І. Левицька, І.С. Пожуєва. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2026. – 142 с.

ISBN 978-617-529-474-1

Навчальний посібник написаний відповідно до навчальної програми дисципліни «Дискретна математика», як складової багатоступеневої підготовки фахівців всіх комп'ютерних спеціальностей. У виданні стисло і доступно викладено основний теоретичний матеріал, та для кожної теми розв'язано достатню кількість прикладів, що є важливим при освоєнні матеріалу.

Посібник може бути корисним для студентів, педагогів вищої школи та аспірантів, які працюють у сфері педагогіки вищої школи.

УДК 510.22(075.8)+ 512.56(075.8)+ 519.15(075.8)+ 519.17(075.8)

ISBN 978-617-529-474-1

ЗМІСТ

ВСТУП

Дискретна математика – це один з розділів математики, який описує та вивчає дискретні об’єкти та структури. Це – множини, відношення, функції, алгебраїчні структури, алгоритми, графи, тощо. Дискретна математика використовується в багатьох галузях: у фізиці, інформатиці, інженерії, економіці. Її елементи зустрічалися з давніх часів, відомими є стародавні пристрої дискретного характеру для різного роду обчислювань, такі як: різні види рахівниць, абак.

Змістовно дискретний об’єкт усвідомлюється як такий, що складається із відокремлених одна від одної неподільних частин, а також у випадках, коли вони ні є неперервними. Слід розуміти, що математику поділяють на «неперервну» і «дискретну» лише умовно, взагалі математика – точна наука, яка єдина у всіх своїх проявах і вона вся цілком пронизана різного роду аналогіями. Відомо що простір завжди є неперервним і однорідним, це дало передумови, які сприяли виникненню континуальних розділів в математиці. Якщо ж розглядати окремі предмети у просторі, то виникають інші поняття: неоднорідність та розривність, які вже сприяли появі дискретних розділів математики. Але єдність всього світу, а також нерозривний зв’язок його як неперервних так і дискретних компонент стало підставою для єдності всіх розділів математики як однієї науки. Однак дискретна математика досліджує об’єкти, характер яких дуже своєрідний, тому методів та моделей, що дає класична математика не завжди достатньо. Ось чому існують специфічні методи та моделі для застосування в дослідженні скінченних дискретних об'єктів, вони були об'єднані і стали окремим розділом, а саме дискретною математикою в загальній математичній теорії. Слід відмітити, що дискретна математика відрізняється від традиційної явно вираженою алгоритмічною спрямованістю. Ось чому вона має дуже великий спектр застосування, особливо в областях, які пов'язані з комп'ютерами та інформаційними технологіями. Та, як правило, результатами дискретної математики, що використовуються, є не формули, а алгоритми розв'язання задач. Розв'язками таких задач є не тільки числа, але й оптимальні в деякому розумінні підмножини, набори, форми представлення даних.

Незважаючи на те, що елементи дискретної математики зустрічалися протягом усього періоду розвитку математики, термін «дискретна математика» відносно новий у математичному лексиконі. Розвиватися дискретна математика почала ще до XVII ст. і це пов'язано із появою праць Л. Ейлера, які описували комбінаторний аналіз та теорію графів, а також із роботами Я. Бернуллі в галузі комбінаторної теорії ймовірностей. Подальше розвитком дискретної математики займався Г. В. Лейбніц, а у XIX столітті в цій галузі працювали такі відомі математики: Ж. Л. Лагранж, А. Келі, Дж. Буль, К. Жордан і багато інших. Велике значення для усвідомлення ролі дискретної математики в науці XX століття мало виникнення і поширення в сучасному природознавстві уявлень про дискретний характер навколишньої реальності (атомно-молекулярна теорія, квантова і статистична фізика). Істотний вплив на подальший розвиток дискретної математики зробили дослідження і публікації А. Пуанкаре і Д. Гільберта, Е. Л. Поста, А. М. Тюрінга.

Швидкий розвиток дискретної математики в другій половині XX століття пов’язують із «цифровою революцією» в обчислювальній техніці. На її основі було розроблено перші чисельні цифрові електронні пристрої, які потім почали застосовувати в різних сферах. Перші застосування в цій галузі було пов’язано з В. А. Котельниковим, К. Е. Шенноном, В.І. Шестаковим. Виникнення нових направлень, пов’язаних з кібернетикою і теорією систем призвело до появи цілих нових розділів дискретної математики: теорії надійності, складності, тестів, автоматів та інших. На цьому етапі істотний внесок у розвиток дискретної математики було зроблено Дж. фон Нейманом, О.О. Ляпуновим, С.В. Яблонським, О.Б. Лупановим.

Починаючи із середини XX ст. в наше життя бурхливо увійшли і незабаром обійняли домінантне місце інформаційні системи, для опису яких знову ж використовують методи дискретної математики. У XXI столітті дискретна математика продовжує швидко розвиватися. Використання її апарату пов’язане з характером досліджуваних моделей – окремих елементів абстрактних множин, окремих чисел у різних системах числення, булевих функцій, тощо. Тому нині знання дискретної математики необхідне фахівцям у різних галузях діяльності, а її елементи все частіше вводять у програми підготовки кваліфікованих фахівців.

ГЛАВА 1 МНОЖИНИ, ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

Розділ 1.1 Основні визначення теорії множин

Людське мислення організовано таким чином, що все навколо нам представляється як окремі об’єкти. Природно для нас виділяти об’єкти та їх сукупності із загального світу, це є один із способів організації людського мислення і він знаходиться в основі одного із головних інструментів опису знання – математики. Поняття множини так часто вживається в повсякденній мові, що для нього мається багато загальновідомих синонімів (клас, сукупність і т.п.), які мають спеціальні відтінки. Поняття множини вводиться аксіоматично і належить до фундаментальних понять математики.

<u>Визначення.</u> *Множина* – це об’єднання в одне ціле об’єктів, що добре розрізняються нашою інтуїцією або нашою думкою (це визначення дав у 1872 р. творець теорії множин Георг Кантор).

Математичне поняття поступово виділилося зі звичних представлень про сукупність, зібрання, клас, сімейство і т.д. У першому виданні “Теорії множин” Бурбаки, що з’явилось у 1939 р., мається інше визначення множини.

<u>Визначення.</u> *Множина* складається з елементів, які мають деякі властивості і знаходяться в деяких відносинах з елементами інших множин та між собою.

Взагалі говорячи, у математиці це поняття належить до числа фундаментальних, і як вихідне воно невизначено, оскільки поняття множини настільки широке і загальне, що не входить як частина ні в яке інше більш загальне поняття, і йому не можна дати строгого математичного визначення. Тому будемо використовувати наступний зміст визначення множини.

Визначення. *Множина* – це сукупність деяких об'єктів (елементів множини), що обираються за певною ознакою з інших об'єктів. При такому виборі повинно бути дано повний опис класу всіх об'єктів, які розглядаються (універсальна множина U).

Множини завжди позначають великими латинськими літерами, а їх елементи – малими. Наведемо приклади множин. Числові множини: N – натуральні числа, Z – цілі числа, Q – раціональні числа, R – дійсні числа, C – комплексні числа. Студенти однієї групи – множина, елементи якої – студенти, загальна властивість – навчання по однієї спеціальності. Множина B – корені рівняння cos x = ½, елементи – дійсні числа, загальна властивість – обертають дане рівняння в тотожність.

Якщо елемент a належить множині A, то це позначається $a \in A$. Якщо ж елемент a, взятий з універсальної множини, не належить множині A, то це записується: $a \notin A$. Факт того, що елементи множини A, і тільки вони, володіють властивістю P позначається: $A = \{a | P(a)\}$. Інколи можливо перелічити всі елементи із множини A, тоді наводиться повний їх перелік (всі елементи різні) у вигляді: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Порожня множина – це множина, яка не містить жодного елемента. Позначається $\varnothing$.

Елементи множини можуть бути самого різноманітного виду, будь-якої природи. Однак нас далі будуть цікавити множини, утворені з абстрактних математичних об'єктів, таких як числа, функції, вектори, ланцюжки символів (слова) у деякому алфавіті.

Множини, елементами яких є множини, звичайно, називають *класом*, або *сімейством*.

Якщо множина містить скінченну кількість елементів, вона називається *скінченною*, у противному випадку множина називається *нескінченною*.

Наприклад, нескінченними є множини всіх цілих чисел Z (додатні, від'ємні і нуль), всіх раціональних чисел Q, дійсних чисел R і комплексних C, множина точок на колі та на відрізку одиничної довжини, множина слів довільної довжини в алфавіті з двох символів 0 і 1 (під довжиною розуміється число символів цього алфавіту, що входять у дане слово) і інші.

Наведемо приклади скінченних множин. Множина всіх простих чисел між 20 і 40 – $\{23, 29, 31, 37\}$, множина всіх цілих додатних дільників числа 8 – $\{1, 2, 4, 8\}$. Перестановка елементів списку членів не змінює множину: так, множини $\{1, 2, 4, 8\}$ і $\{8, 4, 2, 1\}$ збігаються. Скінченними також є множина всіх абонентів міської телефонної станції, множина комірок оперативної пам'яті і т.п.

Особливістю множини є те, що всі її елементи різні.

Визначення. Якщо всі елементи множини A є елементами множини B, то A називається *підмножиною* B, і позначається $A \subset B$.

Приклад. $\{1, 4, 5\} \subset \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

Прийнято вважати, що завжди виконуються дві умови:

1) $\varnothing \subset A$, тобто для будь-якої множини порожня множина є її підмножиною;

2) $A \subset A$, тобто будь-яка множина є підмножиною самої себе.

Множини $\varnothing$ і А називають *невласними* підмножинами множини А, а всі інші підмножини – її *власними* підмножинами.

Визначення. Дві множини A і B рівні між собою, тобто $A = B$, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

Визначення. *Булеаном* називається множина всіх підмножин множини A і позначається $P(A)$, або 2^A. Скінченна множина має *потужність* , яка дорівнює кількості її елементів і позначається $|A|$. Порожня множина має потужність, яка дорівнює 0, тобто $|\varnothing| = 0$, але $|\{\varnothing\}| = 1$.

Твердження. Якщо $|A| = n$, тоді $|P(A)| = 2^n$, або $|2^A| = 2^{|A|}$.

Доведення. Нехай A $=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – скінченна множина, $A' \subset A$. Кожній підмножині A' множини A поставимо у відповідність двійковий набір елементів $\alpha(A') = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ такий, що $\alpha_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } a_i \in A', \\ 0, \text{ якщо } a_i \notin A'; \end{cases}$ де i=1, 2, …, n.

Наприклад, $\alpha(\varnothing)=(0,0,\ldots,0)$; $\alpha(A)=(1,1,\ldots,1)$; якщо $A'=\{a_2,a_3,a_5\}$, тоді $\alpha(A')=(0,1,1,0,1,0,0\ldots,0)$.

Щоб підрахувати число елементів множини всіх підмножин *P(A)* необхідно з'ясувати число *l(n)* таких двійкових n-мірних наборів.

Міркуючи за індукцією, зауважимо, що $l(1)=2=2^1$, це набори (0) і (1). Далі, припустимо, що $l(n-1)=2^{n-1}$. Для складання всіх n-мірних наборів можна кожному (n–1) - мірному наборові $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1})$ поставити у відповідність n-мірні двійкові набори $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},0)$ і $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},1)$. Тоді з використанням припущення, число *l(n)* елементів, що входять у множину *P(A)*, дорівнює: $l(n)=2^{n-1}+2^{n-1}=2^{n-1}\cdot 2=2^n$.

Приклад. Для множини $A=\{a,b,c\}$ знайти булеан.

Розв'язання.

Маємо потужності множин $|A|=3$, $|P(A)|=2^3=8$. Булеан має вигляд

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}.$$

Розділ 1.2 Способи завдання множини

1. Множину може бути задано перерахуванням усіх її елементів (застосовується для скінченних множин).

Приклад. $A=\{a, b, c, d, e\}$.

Зауваження. Деякі нескінченні множини можна описувати таким самим способом, указуючи, як перенумерувати всі їхні елементи і представити їх у вигляді нескінченної послідовності.

Наприклад, множину Z усіх цілих чисел можна записати у вигляді: Z={0, ±1, ±2, ±3, ... }.

Загальне правило складається у виписуванні настільки великої кількості членів послідовності, щоб принцип її нескінченного продовження по рекурсії став очевидним.

Елементи множин R і C (дійсних і комплексних чисел) не можуть бути представлені у вигляді такої послідовності.

2. Набагато частіше множини задаються за допомогою вказівки характеристичної властивості (предиката) – ознаки, якій задовольняють елементи цієї множини: $A = \{a \mid P(a)\}$. І тільки якщо елемент має цю властивість, тоді він належить цій множині. Це найбільш загальний спосіб завдання множини, за допомогою нього задаються нескінченні множини.

Приклад. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ця множина задана характеристичною властивістю: $A = \{n \mid n \in N \ i \ n < 6\}$.

3. Множини можуть бути задані за допомогою елементів вже відомих множин в результаті застосування до них деякого правила (алгоритму) або за допомогою деяких операцій над відомими множинами.

Приклад.

$a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

За цим правилом буде складено нескінченну множину чисел $A = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...\}$.

Розділ 1.3 Операції над множинами

Над множинами можна виконувати три булеві операції: об'єднання, перетин, доповнення; а також для зручності запису формул, вводяться ще дві не булеві операції: різниця та симетрична різниця.

Визначення. *Об'єднанням* множин A і B називається множина, кожен елемент якої належить принаймні одній з множин A або B. Якщо елемент належить обом множинам, то він включається в об'єднання один раз. Позначається об'єднання множин символом $\bigcup$:

$$A \bigcup B = \{ x \mid x \in A \text{ або } x \in B \}.$$

Приклади.

A={a,b,c,d}, B={b,e,f,h}, $A \bigcup B$={a, b, c, d, e, f, h}.

Операцію об'єднання можна поширити на будь-яке число множин (скінченне або нескінченне), що є підмножинами універсуму U: скінченне об'єднання множин з $S=\{A_1,A_2,...,A_n\}$ є $\bigcup_{A_i \in S} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$; нескінченне об'єднання множин $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Визначення. *Перетином* множин A і B називається множина, кожен елемент якої належить одночасно обом множинам. Позначається перетин множин символом $\bigcap$:

$$A \bigcap B = \{ x \mid x \in A \text{ і } x \in B \}.$$

Аналогічно об'єднанню розглядається перетинання скінченного або нескінченного набору множин: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$; $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

<u>Приклад:</u>

A={0, ±2, ±4, ... }, B={ x | x∈Z і x>0 };

A⋂B={2, 4, 6, ... } – множина додатних парних чисел.

<u>Визначення.</u> Якщо A⋂B=∅, то A і B *не перетинаються.*

<u>Визначення.</u> *Доповненням* множини A до універсальної множини U називається множина, елементами якої є ті елементи U, що не належать A:

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ і } x \notin A\}.$$

Зауважимо, що універсальна множина U для кожної задачі обирається окремо.

<u>Приклад.</u> Нехай множина натуральних чисел N буде універсальною множиною, тоді маємо:

$A = \{1,3,5,7,9, ...\}$; $\overline{A} = \{2,4,6,8, ...\}$.

<u>Визначення.</u> *Різницею* двох множин A і B називається множина елементів з A, що не належать множині B:

A\B={ x | x∈A і x∉B }.

Таким чином, $\overline{A} = U \setminus A$.

Різницю множин можна виразити за допомогою булевих операцій за формулою: A\B= A⋂$\overline{B}$.

<u>Приклади.</u>

1. {a, b, c}\{b, c, d}={a}.

2. Нехай P, R, K – множини прямокутників, ромбів і квадратів відповідно. Тоді різниця P\R являє собою множину

прямокутників, що не є ромбами, а тому це прямокутники, при цьому не квадрати, тобто P\R= P\K.

<u>Визначення.</u> *Симетричною різницею* двох множин A і B називається множина, що містить всі елементи з A, які не належать B, а також всі елементи з B, які не належать A:

$$A\Delta B=\{\, x \mid (x\in A \text{ і } x\notin B \text{ або } x\in B \text{ і } x\notin A) \,\}\ .$$

Інший спосіб позначення: $A\oplus B$.

Симетричну різницю множин можна виразити за допомогою булевих операцій формулою:

$$A\Delta B=(A\backslash B)\bigcup(B\backslash A)=(A\bigcap\overline{B})\bigcup(B\bigcap\overline{A}).$$

<u>Приклади.</u>

1. $\{a, b, c\}\ \Delta\ \{b, c, d\}=\{a, d\}$.

2. $P\Delta R$={множина усіх прямокутників і ромбів, що не є квадратами}, де P – множина прямокутників, R – множина ромбів.

Пріоритет розглянутих операцій при їх виконанні на практиці у спадному порядку наступний:: доповнення, перетин, об’єднання, різниця, симетрична різниця. Змінити пріоритет можливо дужками.

Для ілюстрації операцій часто використовують *діаграми Ейлера-Венна*, де квадрат означає універсальну множину U, заштриховані області – результат застосування операції до множин A і B (див. рис.1–5).

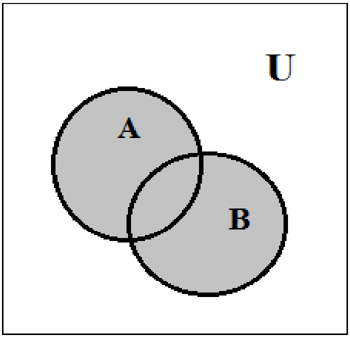


Рис.1 $A \cup B$

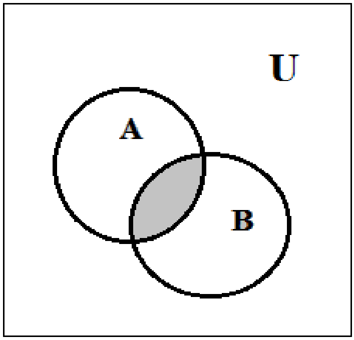


Рис.2 $A \cap B$

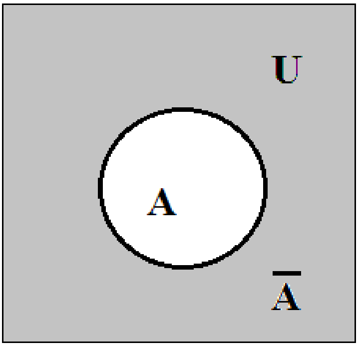


Рис.3 $\overline{A}$

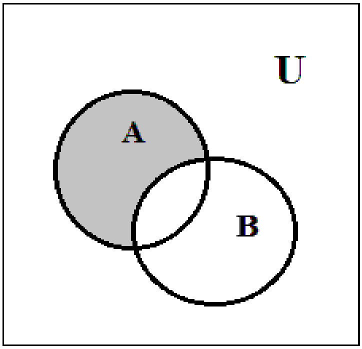


Рис.4 $A \setminus B$

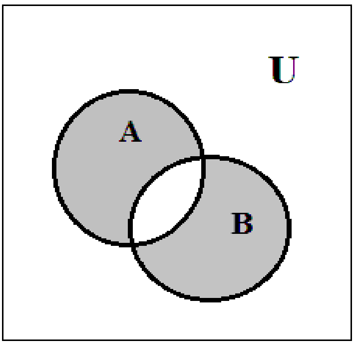


Рис.5 $A \Delta B$

З використанням введених операцій розглянемо питання розбиття множини.

<u>Визначення.</u> Нехай $E = \{E_i\}_{i\in I}$ – деяке сімейство підмножин множини М, тобто $E_i \subset M$. Сімейство $E = \{E_i\}_{i\in I}$ називається *покриттям* множини М, якщо кожен елемент множини М належить хоча б одному з E_i .

$$M \subset \bigcup_{i\in I} E_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in M \ \exists\, i \in I : x \in E_i$$

<u>Визначення.</u> Сімейство $E = \{E_i\}_{i\in I}$ називають *діз'юнктним,* якщо елементи цього сімейства попарно не перетинаються, тобто кожен елемент множини М належить не більше, ніж однієї з множин E_i :

$$\forall i, j \in I \ (i \neq j) \Rightarrow E_i \bigcap E_j = \varnothing.$$

<u>Визначення.</u> Діз'юнктне покриття $E = \{E_i\}_{i\in I}$ називається *розбиттям* множини М.

<u>Приклад.</u> $M = \{1, 2, 3\}$

1) $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ – покриття, але не розбиття;

2) $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ – розбиття;

3) $\{\{1\}, \{2\}\}$ – діз'юнктне сімейство.

Розділ 1.4 Властивості булевих операцій

1. Комутативність: $\begin{cases} A \bigcup B = B \bigcup A, \\ A \bigcap B = B \bigcap A \end{cases}$

2. Асоціативність: $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$,

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Ця властивість дозволяє опускати дужки.

3. Дистрибутивність перетину щодо об'єднання:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. Дистрибутивність об'єднання щодо перетину:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

5. Ідемпотентність: $\begin{cases} A \cup A = A, \\ A \cap A = A. \end{cases}$

6. Правила поглинання: $\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A, \\ A \cap (A \cup B) = A. \end{cases}$

7. Інволюція: $\overline{\overline{A}} = A$.

8. Правила де Моргана: $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \end{cases}$

9. Властивості універсальної і порожньої множин:

$A \cup \overline{A} = \mathrm{U}$, $\overline{U} = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cup U = U$,

$A \cap \overline{A} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = U$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{U} = \mathrm{A}$, $\mathrm{A} \cap \varnothing = \varnothing$.

Данні співвідношення називаються тотожностями алгебри множин. Зауважимо, якщо у цих рівностях замінити $\cup$ на $\cap$, U на $\varnothing$ і навпаки, то отримаємо також рівність. Цей закон називається принципом двоїстості.

Принцип двоїстості. Якщо має місце якась тотожність алгебри множин, то має місце і двоїста до неї тотожність. Пари властивостей двоїсті одна до одної, якщо в одній з них замінити знак об'єднання $\cup$ знаком перетину $\cap$, універсальну множину U – порожньою множиною $\varnothing$, і навпаки: знак перетину $\bigcap$ замінити знаком об'єднання $\bigcup$, а $\varnothing$ – множиною U, тоді з однієї рівності виходить друга рівність.

Розділ 1.5 Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Дано множини $A = \{1,2,3,4\}$ і $B = \{3,4,5,6,7\}$. Виконати операції над ними.

Розв'язання.

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A \cap B = \{3,4\}$, $A \setminus B = \{1,2\}$, $A \Delta B = \{1,2,5,6,7\}$.

Приклад 2. Використовуючи означення операцій, логічним методом довести, що для будь-яких множин A і B виконується рівність $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Розв'язання.

Нехай $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Тут $\wedge$ – знак логічної операції кон'юнкції, що означає «і». Замість «або» можна використовувати відповідно знак $\vee$ логічної операції диз'юнкції.

Тобто, доведено, що $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Якщо повторити міркування в зворотному напрямку, будемо мати $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, і тотожність доведено.

Приклад 3. На діаграмі Ейлера-Вена зобразити множину: $A \cup C \ \Delta \ B \setminus A \cap C$.

Розв'язання.

За пріоритетом виконання операцій, маємо наступний порядок: 1) $A \cap C$ (рис.6), 2) $A \cup C$ (рис.7), 3) $B \setminus A \cap C$ (рис.8), 4) $A \cup C \, \Delta \, B \setminus A \cap C$ (рис.9).

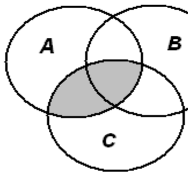


Рис.6

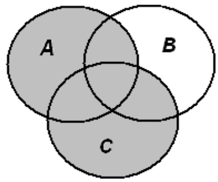


Рис.7

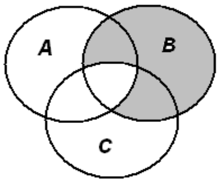


Рис.8

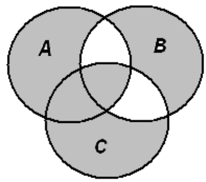


Рис.9

<u>Приклад 4.</u> За допомогою операцій над множинами записати множину, зображену на рис.10.

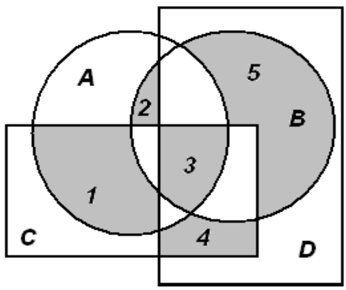


Рис.10

Розв'язання.

Множина, заштрихована на рисунку є об'єднанням п'ятьох частин. Опишемо кожну частину окремо: 1). $A \cap C \setminus B \setminus D$, 2). $A \cap B \setminus D \setminus C$, 3). $A \cap B \cap C \cap D$, 4). $C \cap D \setminus A \setminus B$, 5). $B \setminus A \setminus C$.

Далі об'єднаємо всі п'ять частин та отримаємо наступний результат у вигляді:

$$(A \cap C \setminus B \setminus D) \cup (A \cap B \setminus D \setminus C) \cup (A \cap B \cap C \cap D) \cup$$
$$(C \cap D \setminus A \setminus B) \cup (B \setminus A \setminus C).$$

Приклад 5. Згідно законам теорії множин, спростити вираз $\overline{A \setminus B \cup C} \cap A \cup B$.

Розв'язання.

$$\overline{A \setminus B \cup C} \cap A \cup B = \overline{A \cap \overline{B \cup C}} \cap A \cup B =$$
$$= (\overline{A} \cup \overline{\overline{B \cup C}}) \cap A \cup B = (\overline{A} \cup B \cup C) \cap A \cup B =$$
$$= [(\overline{A} \cap A) \cup ((B \cup C) \cap A)] \cup B =$$
$$= [\varnothing \cup (B \cap A) \cup (C \cap A)] \cup B = \left(B \cap A\right) \cup \left(C \cap A\right) \cup B =$$
$$= ((B \cap A) \cup B) \cup (C \cap A) = B \cup (C \cap A).$$

ГЛАВА 2 ПРЯМИЙ ДОБУТОК, ВІДНОШЕННЯ.

Розділ 2.1 Прямий добуток

Визначення. *Вектор* – це упорядкований набір елементів.

Елементи, що утворюють вектор, називаються його компонентами або координатами, причому координати нумеруються зліва направо і, на відміну від множини, серед компонентів вектору можуть бути однакові та важливим є порядок розташування елементів. Число компонентів вектору називається його довжиною або розмірністю.

Приклад. Вектор (0, 2, 4, 6, 8) має довжину 5.

Вектори довжини 2 називаються *упорядкованими парами*.

Визначення. Два вектори називаються *рівними*, якщо вони однакової довжини і їх відповідні координати збігаються, тобто $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, якщо $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_n = b_n$.

Визначення. *Прямим (декартовим) добутком* $A \times B$ двох множин A та B називається множина всіх пар (a,b) таких, що $a \in A$, $b \in B$:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

При цьому вважається, що $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Приклади.

1. $A = \{a,b\}$, $B = \{c,d,e\}$,

$A \times B = \{(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\}$.

2. $A = \{2,4,6,8\}$, $B = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$,

$A \times B = \{(2,a),(2,b),\ldots,(2,h),(4,a),\ldots,(8,h)\}$ – 32 пари.

3. $R \times R = R^2$ – множина точок площини: $R^2 = \{(x,y) \mid x, y \in R\}$ – координати точок площини. Таке координатне уявлення точок площини було запропоновано Декартом і було першим в історії прикладом прямого добутку множин.

$A \times A = A^2$ називається декартовим квадратом. Узагальнимо визначення прямого добутку на n множин.

<u>Визначення.</u> *Прямим (декартовим) добутком* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ множин A_1, A_2, …, A_n називається множина усіх векторів $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ довжини n таких, що $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, … , $a_n \in A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Якщо всі A_i дорівнюють між собою, тоді говорять про *n-тий ступінь множини A*:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ разів}}.$$

<u>Приклади.</u>

1. $A \times B = \{(x, y) \mid 1 \le x \le 3, 1 \le y \le 2\}$ (див. рис.11).

2. Побудуємо прямий добуток трьох числових відрізків: $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 2]$. Добутком перших двох відрізків є квадрат з вершинами (0,1), (0,2), (1,1), (1,2). Добутком отриманої множини точок квадрата на числовий відрізок [1,2] є множина точок прямокутного паралелепіпеда (в даному випадку куба), вершини якого є точки: (0,1,1), (0,1,2), (0,2,1), (0,2,2), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2). (див. рис.12).

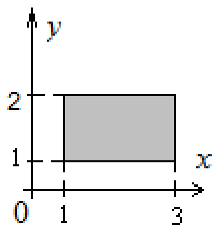


Рис. 11

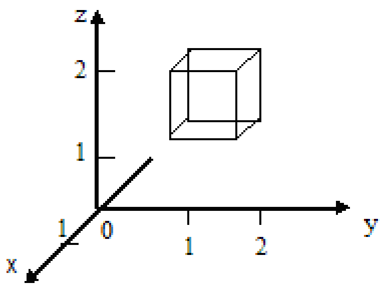


Рис.12

Теорема (про кількість елементів прямого добутку):
а) потужність декартового добутку двох скінченних множин дорівнює:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

б) нехай A_1, A_2,…, A_n – скінченні множини, а їх потужності відповідно дорівнюють $|A_1|=m_1$, $|A_2|=m_2$,…, $|A_n|=m_n$. Тоді потужність множини $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ дорівнює:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n| = m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n.$$

Доведення. Доведемо теорему методом математичної індукції.

Для n=1 теорема тривіальна. Припустимо, що вона вірна для $n \le k$ і доведемо її справедливість для $n=k+1$. За припущенням $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$. Візьмемо будь-який вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ і припишемо праворуч елемент $a_{k+1} \in A_{k+1}$. Це можна зробити m_{k+1} різними способами, при цьому вийде m_{k+1} різних векторів, в яких першими елементами є $a_1, a_2, \ldots, a_k$, та які належать прямому добутку $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) \times A_{k+1}$ і ніяких інших елементів у $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \times A_{k+1}$ не міститься. Звідки маємо

$$|(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) \times A_{k+1}| = |A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| \times |A_{k+1}| =$$
$$= m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k \times m_{k+1}.$$

Тому для n=k+1 теорема вірна і, отже, вірна для будь-якого n.

Наслідок: $|A^n|=|A|^n$.

Приклади.

1. Потужність множини $\{a, b, c, d, ..., h\}\times\{1, 2, 3, ..., 8\}$ дорівнює $8\times8=64$; дійсно, кількість полів на шахівниці дорівнює 64.

2. Знайдемо кількість всіляких двозначних чисел, які можна скласти з цифр від 1 до 7. Це кількість пар прямого добутку множини $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ на себе. Користуючись теоремою, знаходимо: $7\times7=49$.

3. Знайдемо кількість тризначних чисел, які можна скласти з цифр множини $B=\{5, 2, 7\}$. Це кількість трійок декартового добутку B^3, яка дорівнює $3^3=27$.

4. Визначити довжину і кількість векторів прямого добутку $A\times B\times C$ множин $A=\{1, 4, 7\}$, $B=\{0, 2\}$, $C=\{5\}$. Елементи прямого добутку трьох множин є трійки, тобто довжина кожного вектору дорівнює трьом. Кількість векторів знайдемо, використовуючи теорему: $3\times2\times1=6$. Переконаємося у вірності висновків, для чого знайдемо вектори прямого добутку: $A\times B\times C = \{(1, 0, 5), (1, 2, 5), (4, 0, 5), (4, 2, 5), (7, 0, 5), (7, 2, 5)\}$.

Тому що прямий добуток це множина (елементи якої є вектори), тому для нього визначені всі операції над множинами: перетин, об'єднання, доповнення, різниця і симетрична різниця.

Приклад.

Довести тотожність

$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$.

Розв'язання.

Нехай $(x, y)\in(A\times B)\cap(C\times D)\Leftrightarrow (x, y)\in(A\times B)\wedge$

$$(x,y) \in (C \times D) \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \wedge (y \in B \wedge y \in D) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \wedge (y \in B \cap D) \Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Розділ 2.2 Відношення, способи завдання відношень

Розглянемо множини A_1, A_2, …, A_n (не обов'язково різні).

<u>Визначення.</u> *n-місцеве (або n-арне) відношення* ρ на множинах A_1, A_2, …, A_n – це закон (або характеристична властивість), що виділяє в декартовому добутку $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ деяку підмножину, тобто: $\rho_{A_1,\ldots,A_n} \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Говорять, що $a_1,a_2,\ldots,a_n$ перебувають у відношенні ρ, якщо $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in \rho$.

Якщо $A_1=A_2=\ldots=A_n=A$, тоді говорять про n-місцеве відношення ρ на множині А: $\rho_A \subset A^n$.

Позначають відношення грецькими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, літерою R, а також спеціальними символами =, <, >, ≤, ≥ і іншими.

Відношення ρ називається *унарним* (одномісним) на множині А, якщо n=1. Це відношення складається з векторів, довжиною 1. Унарне відношення ρ на множині А являє собою характеристичну властивість деякої підмножини $\rho_A \subset A$. Таким чином, множина всіх можливих унарних відношень на А збігається з множиною P(A) усіх підмножин множини А. Якщо $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, то число всіх можливих унарних відношень на ньому дорівнює 2^n. Унарні відношення називаються також ознаками. Це, по суті, властивості елементів множини A. Вони не представляють особливого інтересу. Найбільш вивчені і широко застосовуються на практиці двомісні відношення, які називаються *бінарними*. Наведемо визначення бінарного відношення, опираючись на визначення n - місцевого відношення.

Визначення. *Бінарним відношенням* ρ на множинах A та B називається підмножина декартового добутку $A \times B$ (записується $\rho \subset A \times B$). Тобто ρ – деяка множина упорядкованих пар (a, b). Говорять, що елементи a і b у відношенні ρ, якщо $(a, b) \in$ ρ, допускається також запис $a \rho b$.

Областю визначення бінарного відношення $R \subset X \times Y$ називається множина $\delta_R = \{x \mid \exists y \ (x, y) \in R\}$, а областю значень – множина $\rho_R = \{y \mid \exists x \ (x, y) \in R\}$ ($\exists$ – існує).

Поняття відношення слід розглядати як природне узагальнення знайомих нам відношень з математики та життєвих уявлень. Розглянемо деякі приклади бінарних відношень.

Приклади.

1. Відношення на множині N натуральних чисел: «x≤y». Наприклад, пари (9, 9) і (5, 7) належать цьому відношенню, а пара (6,4) – не належить. Областю визначення відношення є δ_R=N, областю значень: ρ_R = N.

2. Відношення рівності на множині дійсних чисел R: «x=y». Цьому відношенню належать всі пари, в яких координати рівні, наприклад: (7;7), (2,5; 2,5). Область визначення: δ_R = R, область значень: ρ_R = R.

3. Відношення на множині точок площині:

а) «знаходитись на однаковій відстані L від точки з координатами (a;b)» – це множина всіх пар (x, y), де $x \in R$ і $y \in R$, таких, що $(x-a)^2+(y-b)^2=L^2$, тобто всі точки кола з центром у точці з координатами (a;b) і радіусом L;

б) «бути симетричними відносно прямої y=x» – цьому відношенню належать пари точок (x, y) і (y,x), де x, $y \in R$.

4. Відношення на множині людей:

а) «жити в однієї країні (місті, будинку)»;

б) «бути старшим (молодшим)»;

в) «бути батьком (сином)»;

г) «вчитися на однієї спеціальності»;

д) «бути знайомими».

Для завдання бінарних відношень можна використовувати різні ***способи завдання***. Перелічимо найбільш важливі з них.

1. У виді матриці з двох стовпців, у кожному рядку якої стоять пари елементів (a,b), $a \in A$, $b \in B$, що задовольняють даному відношенню.
2. Переліком пар множини, що задовольняють відношенню.
3. Завданням матриці відношення $R_{m \times n} = (r_{ij})$, де $m = |A|$, $n = |B|$, в якій елементам множини A відповідають рядки, а елементам множини B – стовпці, причому ставиться 1 на перетині i-го рядка з j-им стовпцем, якщо $a_i \rho b_j$, і 0 у

протилежному випадку. Таким чином, елементами матриці є наступні значення

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (a_i, b_j) \in \rho, \\ 0, \text{ якщо } (a_i, b_j) \notin \rho. \end{cases}$$

4. За допомогою стрілок. При цьому способі завдання відношення ρ на множинах A і B елементи множин зображуються у виді точок площини; потім точки a_i і b_j з'єднуються стрілкою, спрямованою від a_i до b_j, тоді і тільки тоді, коли $a_i \rho b_j$.

Приклади.

1. Нехай A={2, 3, 5}, B={2, 3, 4, 5, 6}. Бінарне відношення ρ означає «бути дільником», тобто запис $a_i \rho b_j$ означає, що a_i є дільником b_j. Опишемо це відношення наведеними вище способами.

1). Матриця з двох стовпців має вигляд:

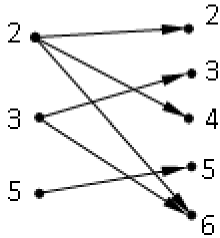
$$\rho_{A,B} = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 3 \\ 3 & 6 \\ 5 & 5 \end{Vmatrix}$$

2). $\rho_{A,\,B} = \{(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (5,5)\}$.

3). Матриця відношення має вигляд:

$$\rho_{A,B} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

4). Стрілочне представлення:



2. Скласти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $R = \{(x, y) \mid x \in M \,\&\, y \subset M \,\&\, x \in y \,\&\, |y| \geq x\}$, $M = \{1;2;3\}$, $\&$ – позначення логічного «і».

Розв'язання.

За означенням матриці відношення розв'язок набуває вигляд:

	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
1	0	1	0	0	1	1	0	1
2	0	0	0	0	1	0	1	1
3	0	0	0	0	0	0	0	1

У випадку нескінченних множин зазвичай бінарне відношення описують та зображають у вигляді точок площини, які знаходяться у відношенні. Будь-яка підмножина $\rho \subset R^2$ є графіком деякого бінарного відношення ρ на множині дійсних чисел R. Так, відношення x=a, y=b, x=y, x>y визначаються графіками чи областю на рис. 13, 14, 15, 16 відповідно.

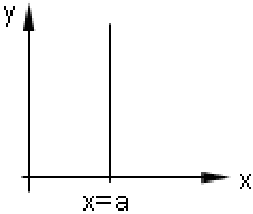


Рис.13

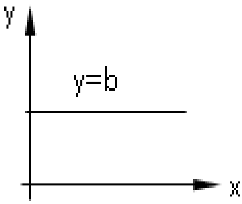


Рис.14

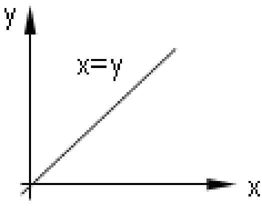


Рис.15

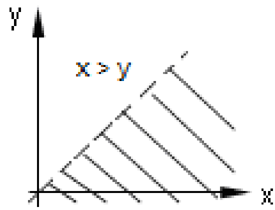


Рис.16

Приклади.

На множині дійсних чисел R зобразити наступні відношення графічно, знайти для них області визначення та значень:

1) $\alpha_1 = \{(x,y) \mid (x,y) \in R^2 \,\&\, |x-2y| \le 3\}$;

2) $\alpha_2 = \{(x,y) \mid (x,y) \in R^2 \,\&\, x^2 - 2x + y^2 \le 3\}$.

Розв’язання.

1) Для зображення відношення α_1 необхідно розв’язати систему нерівностей $\begin{cases} x-2y \le 3 \\ x-2y \ge -3 \end{cases}$ графічно. Цей розв’язок показано на рис.17. В даному випадку області визначення та значень α_1 дорівнюють R.

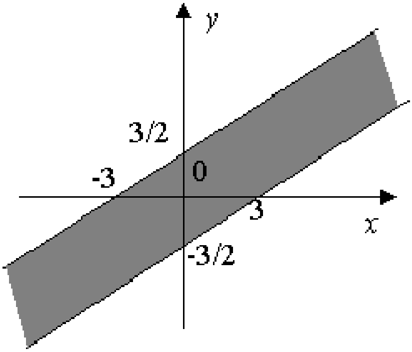


Рис.17

2) Щоб побудувати область для відношення α_2, необхідно знайти її границю, отримаємо наступні рівності: $x^2 - 2x + y^2 = 3$, або $(x-1)^2 + y^2 = 4$. Маємо рівняння кола, його центр знаходиться в точці (1;0), радіус кола дорівнює 2. Тому відношення α_2 має вигляд частини площини, що зображена на рис.18. Область визначення: $\delta_{\alpha_2} = [-1; 3]$, область значень: $\rho_{\alpha_2} = [-2; 2]$.

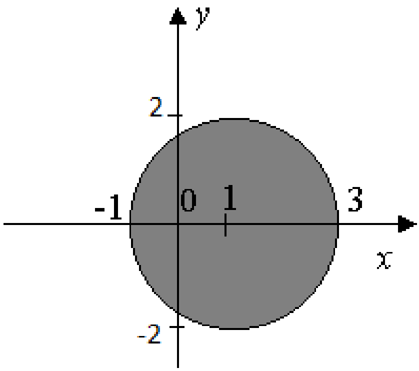


Рис.18

Розділ 2.3 Операції над бінарними відношеннями

Оскільки відношення на A задаються підмножинами A^2, для них можна визначити ті ж операції, що і над множинами: об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю.

Наприклад, відношення "знаходитися на однаковій відстані від початку координат" є доповненням відношення "знаходитися на різних відстанях від початку координат"; відношення "$\leq$ " є об'єднанням відношень "<" і "=".

Введемо наступні поняття і нові операції над відношеннями:

<u>Визначення.</u> Якщо для будь-якої множини A відношення $\rho \subset A^2$, задане матрицею, у якій на головній діагоналі стоять тільки одиниці, а в інших місцях – нулі, тоді відношення ρ називається *відношення рівності* на A або *тотожне відношення*:

$$I := \{(a,a) \mid a \in A\}$$

<u>Визначення.</u> Відношення ρ^{-1} називається *оберненим* до відношення ρ, якщо $a_i \rho^{-1} a_j$ тоді і тільки тоді, коли $a_j \rho a_i$:

$$\rho^{-1}=\{(x,y)|(y,x)\in\rho\}.$$

Для відношення $x \geq y$ оберненим є $x \leq y$. Для відношення «бути дільником» обернене – «бути кратним».

<u>Визначення.</u> Відношення $\overline{\rho}$ називається *доповненням* до відношення ρ, якщо $a_i \overline{\rho} a_j$ тоді і тільки тоді, коли $(a_i, a_j) \notin \rho$:

$\overline{\rho} = \{(a,b)|(a,b) \notin \rho\}$.

<u>Визначення.</u> Відношення називається *універсальним*, якщо воно містить усі елементи декартового добутку A^2:
$U = \{(a,b)|a \in A,\ b \in A\}$

<u>Визначення.</u> *Композицією (або добутком)* відношень $\rho_1 \subset X \times Y$ і $\rho_2 \subset Y \times Z$ називається відношення $\rho_1 \circ \rho_2 \subset X \times Z$ таке, що $\rho_1 \circ \rho_2 = \{(x,z) \mid x \in X,\ z \in Z$ і існує $y \in Y$ таке, що $(x,y) \in \rho_1$ і $(y,z) \in \rho_2\}$.

<u>Визначення.</u> *Степенем* відношення ρ на множині A називають його композицію з самим собою:

$$\rho^n = \underbrace{\rho \circ \rho \circ \ldots \circ \rho}_{n\ разів}.$$

Композицією двох відношень «Ганна дочка Ірини Іванівни» і «Ірина Іванівна мати Володимира» є відношення «Ганна сестра Володимира». Композицією двох відношень «пряма проходить через дві точки» і «дві точки належать площині» є відношення «пряма належить площині».

Для будь-яких бінарних відношень виконуються наступні ***властивості:***

1. $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

Ця властивість випливає з визначення оберненого відношення.

2. $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$.

Для доведення другої властивості, покажемо, що множини в обох частинах рівності складаються з одних і тих самих елементів:

$(x,y) \in (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} \leftrightarrow (y,x) \in \rho_1 \circ \rho_2 \leftrightarrow \exists z$: $(y,z) \in \rho_1$ і $(z,x) \in \rho_2$ $\leftrightarrow \exists z$: $(x,z) \in \rho_2^{-1}$ і $(z,y) \in \rho_1^{-1} \leftrightarrow (x,y) \in \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$.

Розділ 2.4 Властивості бінарних відношень

Нехай задане на множині А бінарне відношення $\rho_A \subset A^2$.

<u>Визначення.</u> Відношення ρ називається *рефлексивним*, якщо $\forall a \in A$ виконується aρa, тобто кожен елемент множини знаходиться у відношенні ρ до самого себе. Для рефлексивного відношення на головній діагоналі його матриці містяться тільки одиниці.

<u>Визначення.</u> *Антирефлексивним* називається відношення ρ, якщо ні для якого $a \in A$ не буде виконуватись aρa, тобто $\forall a \in A$ $(a,a) \notin \rho_A$. Матриця такого відношення має на головній діагоналі тільки нулі.

<u>Приклади:</u>

а) відношення «x≤y» рефлексивне, тому що x≤x;

б) відношення «x⋮y» рефлексивне, тому що x⋮x;

в) відношення «x<y» антирефлексивне, тому що ні для яких x не вірно x<x;

г) відношення «мати загальний дільник» рефлексивне.

д) відношення «бути симетричним відносно осі x» не є рефлексивним, а також не є антирефлексивним.

<u>Визначення.</u> *Симетричним* називається відношення ρ, якщо для будь-яких $a,b \in A$ з того що $a\rho b$, випливає $b\rho a$.

$$\forall a,b \in A:\ a\rho b \to b\rho a.$$

Матриця такого відношення симетрична відносно головної діагоналі, тобто ∀i, j: $r_{ij} = r_{ji}$.

Визначення. Відношення називається *антисиметричним*, якщо для будь-яких $a,b \in A$ з того що $a\rho b$ і $b\rho a$ випливає $a = b$.

$$\forall a,b \in A:\ a\rho b,\ b\rho a\ \rightarrow a = b.$$

Приклади.

а) відношення «бути симетричним відносно осі х» є симетричним, якщо точка А симетрична точці В, то і точка В симетрична точці А;

б) відношення «х=у» симетричне, оскільки якщо х=у, тоді у=х;

в) відношення х≤у антисиметричне: якщо х≤у і у≤х, то випливає, що х=у;

г) відношення «х⋮у» антисиметричне, якщо х⋮у і у⋮х, тоді х=у.

Твердження. Відношення ρ симетричне тоді і тільки тоді, коли $\rho = \rho^{-1}$.

Визначення. Відношення ρ називається *транзитивним,* якщо для будь-яких $a,b,c \in A$ з того що $a\rho b$ і $b\rho c$, випливає $a\rho c$.

$$\forall a,b,c \in A:\ a\rho b \text{ і } b\rho c\ \rightarrow a\rho c.$$

Приклади.

а) відношення «=», «≤», «жити в одному місті» транзитивні;

б) відношення «мати не порожній перетин» не транзитивне: $\{1,2\} \cap \{2,3\}=\{2\}$, $\{2,3\} \cap \{3,4\}=\{3\}$, але $\{1,2\} \cap \{3,4\}=\varnothing$;

в) відношення «бути сином» не транзитивне, наприклад: «Володимир син Олексія Івановича» і «Олексій Іванович син Івана Петровича», тоді «Володимир онук Івана Петровича»;

г) відношення «бути перпендикуляром» на безлічі прямих на площині не є транзитивним, якщо прямі *a* і *c* перпендикулярні та прямі *c* і *b* перпендикулярні, то прямі *a* і *b* паралельні.

<u>Визначення.</u> Відношення ρ називається *повним або лінійним*, якщо для будь-яких $\forall a,b \in A$: $a \neq b$ випливає $a\rho b$ або $b\rho a$.

Розділ 2.5 Види бінарних відношень

В математиці важливу роль відіграють два види спеціальних бінарних відношень: еквівалентності та порядку.

<u>Визначення.</u> Відношення ρ є відношенням *еквівалентності*, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне, тобто:

$\forall a \in A$: $a\rho a$;

$\forall a, b \in A$: $a\rho b \rightarrow b\rho a$;

$\forall$ a, b, $c \in A$: ($a\rho b$ і $b\rho c$) $\rightarrow a\rho c$.

<u>Приклади:</u>

а) відношення «x=y» – рефлексивне (x=x); симетричне (якщо x=y, то і y=x); транзитивне (якщо x=y і y=z, тоді x=z), тому це відношення еквівалентності;

б) відношення «подібність» на множині трикутників є еквівалентністю;

в) відношення «жити в однієї країні» на множині людей є еквівалентністю;

г) відношення «паралельність прямих на площині» є еквівалентністю.

Нехай на деякій множині X задано відношення еквівалентності ρ. Виберемо елемент $x_1 \in X$ і утворимо клас (підмножину) X_1, що складається з x_1 і всіх елементів $y \in X$, для яких $x_1 \rho y$. Потім виберемо з X елемент $x_2 \notin X_1$ і складемо клас X_2 з елемента x_2 і всіх елементів з $X \setminus X_1$, що є у відношенні ρ з x_2 і т.д. Отримаємо систему класів X_1, X_2, ..., X_n (можливо нескінченну) таку, що будь-який елемент з множини X належить деякому з класів цієї системи. Ці класи називаються класами еквівалентності.

Визначення: *Класом еквівалентності*, утвореним (породженим) елементом x, називається підмножина множини X, що складається з елемента x і всіх елементів $y \in X$, для яких $x \rho y$.

Позначення класу еквівалентності, породженого елементом x:

$$[x] = \{y \mid y \in X \text{ і } x \rho y\}.$$

Приклади:

а) відношення рівності на множині цілих чисел породжує такі класи еквівалентності: для будь-якого $x \in Z$ $[x]=\{x\}$, тобто кожен клас складається лише з одного елемента – числа x. Множина класів нескінченна.

б) для відношення «належність до однієї студентської групи» класом еквівалентності є множина студентів однієї групи. Множина класів скінченна.

Система класів еквівалентності має такі **властивості**:

1. Система класів еквівалентності є розбиттям множини X.
2. Будь-які два елементи одного класу еквівалентні.
3. Будь-які два елементи різних класів не еквівалентні.

<u>Теорема1.</u> Нехай ρ – відношення еквівалентності на множині X. Тоді:

1) якщо $x \in X$, тоді $x \in [x]$;

2) якщо $\{x,y\} \subset X$ і $x\rho y$, тоді $[x]=[y]$, тобто клас еквівалентності породжується будь-яким своїм елементом.

<u>Теорема 2.</u> Будь-яке розбиття множини X визначає на цій множині X відношення еквівалентності ρ, при цьому $x\rho y$ тоді і тільки тоді, коли x і y належать одній підмножині розбиття. Та навпаки: будь-яке відношення еквівалентності визначає розбиття множини X на класи еквівалентності щодо цього відношення.

Введемо тепер у розгляд відношення порядку.

<u>Визначення.</u> Відношення ρ є *відношенням порядку*, якщо воно антисиметричне і транзитивне. Будемо позначати його знаком $\prec$.

Відношення ρ є відношенням *нестрогого порядку,* якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне. Будемо позначати його знаком $\leq$.

Відношення ρ є відношенням *строгого порядку*, якщо воно антирефлексивне, антисиметричне і транзитивне. Будемо позначати його знаком $<$.

Відношення ρ є відношенням *повного або лінійного порядку* на множині, якщо воно є відношенням порядку і повне, тобто якщо будь-які два елементи множини порівнянні; *часткового порядку*, якщо воно не має властивості повноти.

<u>Визначення.</u> Два елементи $\forall a,b \in A$ називаються *порівнянними* по відношенню порядку ρ на множині А, якщо $a\rho b$ або $b\rho a$, і називаються *непорівнянними*, якщо жодне з цих відношень не має місце, тобто $(a,b) \notin \rho$ і $(b,a) \notin \rho$.

Множина, на якої визначено відношення часткового порядку є *частково впорядкованою*, а на якої відношення повного порядку – *цілком упорядкованою.*

<u>Визначення.</u> Елемент x множини *A* з відношенням порядку $\prec$ називається *мінімальним*, якщо не має менших елементів:

$\nexists$ y є *A*: y $\prec$ x і y≠x.

<u>Приклади:</u>

а) відношення на множині R (дійсних чисел) «x≤y» – рефлексивно, антисиметрично і транзитивно, є відношенням нестрогого лінійного порядку, тому що будь-які два дійсних числа можна порівняти;

б) відношення «A$\subset$B» – це відношення часткового нестрогого порядку.

в) відношення на множині R (дійсних чисел) «x<y» – антисиметричне, транзитивне, антирефлексивнею. Це відношення строгого лінійного порядку.

Діаграма Хассе.

Будь-яку частково впорядковану множину можна представити у вигляді схеми. Для введення правила побудови такої схеми надамо деякі поняття.

Нехай X – непорожня скінченна множина. На цій множині задано відношення часткового порядку $x \prec y$ і $x \neq y$. Кажуть: «y покриває x», якщо $x \prec y$ й не існує такого елемента u, що $x \prec u \prec y$. Наприклад розглянемо відношення < на множині цілих чисел. 2 покриває 1, тому що 1<2 і не існує цілого числа x такого, що 1<x<2.

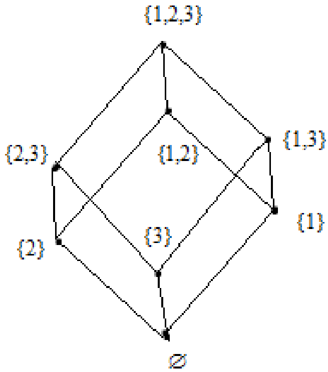
Правило побудови схеми частково впорядкованої множини: в схемі будь-який елемент множини X зображується точкою на площині, і якщо y покриває x, то точки x і y з’єднують відрізком, причому точку відповідну x розташовують нижче y. Такі схеми називаються діаграмами Хассе.

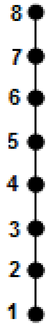
Приклади:

а) нехай A={1, 2, 3}, розглянемо відношення «бути підмножиною» на булеані P(A)={∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}, діаграма Хассе представлена на рис.19;

б) на множині X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} розглянемо відношення «$x \leq y$», його діаграма представлена на рис.20;

в) дано множина A={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, відношення «бути дільником», y покриває x, якщо y ділиться на x, діаграма представлена на рис. 21.





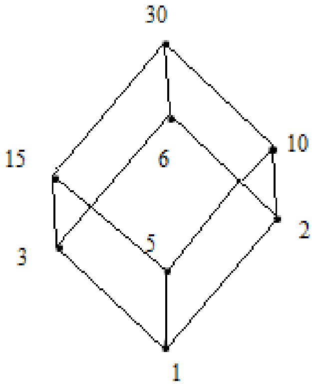


Рис. 19 Рис. 20 Рис. 21

ГЛАВА 3 ФУНКЦІЇ

Розділ 3.1 Функціональне відношення, види функцій

Визначення. Правило, за яким кожному елементові даної множини ставиться у відповідність деякий об'єкт, називається *функцією*.

Визначення. Відношення $\rho \subset A \times B$ називається *функціональним*, якщо для кожного елемента $x \in A$ існує єдиний елемент $y \in B$, для якого $x\rho y$, тобто $\forall x \in A\ \exists!\ y \in B$: $x\rho y$.

Приклад. Нехай відношення $R \subset A \times B$, $A=\{a, b, c, d, e\}$, $B=\{b, d, e\}$, задано матрицею:

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & \underline{b} & \underline{d} & \underline{e} \\
a & 0 & 1 & 0 \\
b & 1 & 0 & 0 \\
c & 0 & 1 & 0 \\
d & 0 & 0 & 1 \\
e & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Це відношення задовольняє визначенню функціонального відношення, тому що в кожному рядку матриці стоїть одиниця, і причому єдина.

При стрілочному представленні відношення з кожної точки виходить стрілка, і притому тільки одна.

Область значень функціонального відношення $\rho_f \subset$B називають його *образом*, а область визначення $\delta_f \subset$A – *прообразом*. Наведемо ще одне визначення функції.

<u>Визначення.</u> Відношення f називається *функціональним відношенням, або функцією*, якщо $\delta_f \subset$A, $\rho_f \subset$B, і якщо $\forall$x$\in \delta_f$ $\exists\, y_1, y_2 \in \rho_f$ такі, що x$f y_1$ і x$f y_2$, тоді $y_1 = y_2$. Функція позначається наступним чином: *y=f(x)*, причому *x* є аргументом функції, а *y* – її значенням.

Якщо δ_f=A, то функція називається всюди визначеною. Будемо називати таку функцію відображенням множини А в множину В (прообраз збігається з А).

<u>Визначення.</u> Якщо ρ_f=B, тобто образ усієї множини А дорівнює В, або, іншими словами, якщо кожен елемент із В є образом принаймні одного елемента з А, то кажуть, що має

місце відображення A на B, або f є *сюр'єктивне* відображення. Тобто:

$\forall y \in B$ $\exists$ хоча б один елемент $x \in A$: $f(x)=y$.

Якщо A=B, то $y=f(x)$ є відображенням множини A самої в себе. Елемент x, що задовольняє відношенню $x=f(x)$, називається *нерухомою точкою* відображення.

Визначення. Функція f, що діє з A в B, тобто f: $A \to B$, називається *ін'єктивною або ін'єкцією*, якщо з того що для будь-яких $x_1 \neq x_2$ ($x_1, x_2 \in A$), слідує $f(x_1) \neq f(x_2)$ ($f(x_1), f(x_2) \in B$), або з того що $f(x_1) = f(x_2)$, слідує $x_1 = x_2$.

Іншими словами, ін'єкція переводить різні елементи множини A в різні елементи множини B.

Визначення. *Бієкцією (бієктивним відображенням)* називається функція, що є одночасно ін'єктивною і сюр'єктивною. Бієкція часто називається *взаємно однозначним* відображенням A на B.

Зауваження. Обмеження на A і B при бієкції: f повинно ставити у відповідність кожному елементові з A єдиний елемент із B и при цьому повинний бути використаний кожен елемент із B. Якщо A і B – скінченні множини, то їх потужності повинні бути однаковими.

Приклади.

1. Нехай f: $Z \to Z$, при цьому відображення $z \to -z$ бієктивне; відображення $z \to 2z$ ін'єктивне, але не сюр'єктивне, а відображення $z \to z^2$ не є ін'єктивним і не є сюр'єктивним.

2. Нехай A=B=R множина дійсних чисел. Функція f: x→3x–2 задає взаємне однозначне відображення множини A на множину B.

3. Нехай A=R, B=R+. Функція f: x→e^x є бієктивне відображення, причому f^{-1}: y→ln y.

4. Різні види кодування (відповідності між кодованими об'єктами і кодами, що привласнюються їм) – є ін'єктивним відображенням, але не сюр'єктивним. Єдиність образу і прообразу в кодуванні гарантує однозначність шифрування і дешифрування. Відсутність сюр'єктивності означає, що не всякий код має сенс, тобто відповідає якому-небудь об'єктові.

5. Нехай відношення задається нерівністю: $(x-3)^2+(y-2)^2 \le 1$ – це круг (див. рис.22), на границі якого відмічені точки A, B, C. Область визначення – числовий відрізок [2;4], область значень – числовий відрізок [1;3]. Дуга кола ABC – є функціональним відображенням між [2;4] і [2;3], кожному прообразу x відповідає єдиний образ y. Дуга кола BC – це взаємне однозначне відображення між [3;4] і [2;3], тому що кожному прообразу x відповідає єдиний образ y і навпаки. Круг не є функціональним відображенням, тому що кожному прообразу x відповідає декілька образів y.

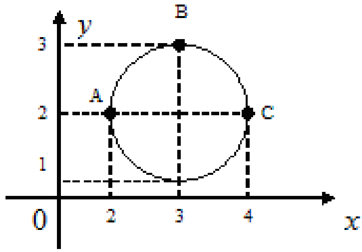


Рис. 22

Визначення. Функції *f і g рівні*, якщо їхня область визначення – одна й та сама множина A і $\forall a \in A$: f(a)=g(a).

Приклади.

1. f(x)=$x^2 - 4$ і g(x)=$(x-2)(x+2)$ є два вирази для однієї і тієї ж функції.

2. На множині A={0, 1} функції, що описані виразами $f(x) = x^2 + 1$ і $g(x) = 2x^2 - x + 1$ рівні. Якщо змінити область визначення зазначених вище функцій, вони можуть виявитися вже не рівними.

Визначення. Функція f: $A_1 \times A_2 \ldots \times A_n \to B$ називається *n-місцевою.* Прийнято вважати, що вона має n аргументів: $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$, $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, …, $a_n \in A_n$, $b \in B$.

Наприклад функції, що задають операції додавання, множення, різниці, ділення є двомісними функціями на деякій множині A, тобто функціями типу $A^2 \to A$.

Визначення. Нехай задане відношення $f: A \to B$, $f \subset A \times B$, причому f функціонально. І якщо існує обернене відношення f^{-1}:$B \to A$ і воно є функціональним, то f^{-1} називається *функцією, оберненою до f*.

Тому що в оберненому відношенні образи і прообрази змінюються місцями, то для існування функції, оберненої до f, потрібно, щоб кожен елемент y із області значень f мав єдиний прообраз, тобто $\forall y \in B\ \exists! x \in A$: f(x)=y. Це у свою чергу означає, що f^{-1} існує тоді і тільки тоді, коли f є взаємно однозначним відображенням (бієкцією) з області визначення в область значень.

Приклади.

1. Нехай $y=x^2-4$, де $D(f)=R$ – ця функція не є взаємне однозначним відображенням, тому для неї немає оберненої функції.

2. Нехай $y=\sin x$, де $x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, $y\in[-1;1]$, це відображення підмножини R в підмножину R є бієкцією, яке відображає відрізок $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ на відрізок [-1; 1], тому існує обернена функція f^{-1}: $y=\arcsin x$, яка відображає відрізок [-1;1] на відрізок $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

3. Нехай $y=5^x$ – ця функція задає взаємно однозначне відображення R на R_+, обернена функція f^{-1}: $y=\log_5 x$ задає відображення з R_+ в R.

Визначення. Нехай $y=f(x)$ – функція, яка визначена на множині A зі значеннями в B, і $z=g(y)$ – функція, яка визначена на множині B зі значеннями в множині C. Якщо $\forall x\in A\ \exists z\in C$: $z=g(f(x))$, то отримана в такий спосіб функція, яка визначена на A зі значеннями в C, називається *композицією функцій* f і g і позначається $g\circ f$ (або просто gf). Маємо $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.

Приклад. Для функцій $f_1=\sin x$ і $f_2=\sqrt{x}$ композиція можлива в довільному порядку і дає функції $f_1\circ f_2=\sin\sqrt{x}$ і $f_2\circ f_1=\sqrt{\sin x}$. Відмітимо, що області визначення у них різні: $f_1\circ f_2$ визначена на R_+, друга – на множині відрізків $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ Таким чином, область визначення композиції функцій може бути власною підмножиною областей визначення обох вихідних функцій (тобто має меншу потужність).

Властивість 1. Композиція функцій $h = g \circ f : X \to Z$ є функцією.

Доведення. Необхідно довести: якщо $(x, y) \in g \circ f$ і $(x, z) \in g \circ f$, тоді y=z. Розглянемо f і g як бінарні відношення. Нехай $(x, y) \in g \circ f$ і $(x, z) \in g \circ f$, тоді для (x,y) знайдеться таке u, що x буде у відношенні f з u , та u знаходитесь у відношенні g з y; для (x, z) знайдеться таке v, що x буде у відношенні f з v, та v знаходитись у відношенні g з z. Тому, що f – функція слідує що u=v; а з того, що g – функція слідує що y=z. Звідки робимо висновок: h – функція.

Приклади.

1. y=$\cos^3$x, де f=cosx, g=f^3.

2. $y = \sqrt[5]{x+3}$, де f=x+3, $g = \sqrt[5]{f}$.

Властивість 2. Композиція двох бієктивних функцій є бієктивна функція.

Доведення. $(x, y) \in g \circ f$, тоді знайдеться таке v, що $(x, v) \in f$ та $(v, y) \in g$. А тому, що f і g бієктивні, тому кожному x відповідає єдине v, і кожному v відповідає єдине y. Звідси слідує, що кожному x відповідає єдине y. В свою чергу, кожному y відповідає єдине v, а кожному v – єдине x. Звідси слідує, що кожному y відповідає єдине x. З усього вище сказаного випливає, що $g \circ f$ – бієкція.

Приклади.

1. $y=(x+3)^{11}$, де $f=x+3$ – бієкція, $g=f^{11}$ – бієкція, отже $y=(x+3)^{11}$ – бієкція.

2. $y=(x+3)^{10}$, де $f=x+3$ – бієкція, але $g=f^{10}$ – не бієкція, функція $y=(x+3)^{10}$ – не бієкція.

Для бієктивних функцій справедливі властивості, аналогічні властивостям відношень:

1. $(f^{-1})^{-1}=f$;
2. $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

Розділ 3.2 Потужність множин

Визначення. Потужністю $|A|$ довільної множини А називається кількість його елементів.

Твердження 1. Якщо між множинами А і В існує взаємно однозначна відповідність, то потужності множин рівні, тобто $|A|=|B|$.

Доведення. Припустимо протилежне твердження. І якщо рівність не має місця, тоді:

1) або $|A|>|B|$, і оскільки відображення усюди визначене, у множині А знайдуться два елементи, яким відповідає один й той самий елемент $b\in B$, тобто порушується єдиність образу, тобто ін’єктивність;

2) або $|A|<|B|$, і тоді, оскільки відображення сюр’єктивне, у множині В знайдуться два елементи, що відповідають тому самому елементові $a\in A$, тобто порушується єдиність прообразу.

Таким чином, зроблене припущення неможливе.

Цей факт, по-перше, дозволяє встановити рівність потужностей двох множин, не обчислюючи цих потужностей, а по-друге, дає можливість обчислити потужність деякої множини, встановивши його взаємно однозначну відповідність з множиною, потужність якої відома або легко обчислюється.

Визначення. Множини називаються *рівнопотужними (або еквівалентними),* якщо між ними можна встановити бієктивне (взаємно однозначне) відображення.

Визначення. Множини, які рівнопотужні (або еквівалентні) множині натуральних чисел N, називаються *зліченні.*

Твердження 2. Будь-яка нескінченна підмножина множини N злічення.

Доведення. Нехай $N' \subset$N. Виберемо в множині N' найменший елемент і позначимо його n_1; у множині $N' \backslash \{n_1\}$ знову виберемо найменший елемент і позначимо n_2; найменший елемент множини $N' \backslash \{n_1, n_2\}$ позначимо n_3 і т.д. Оскільки для кожного натурального числа n мається лише скінченна множина натуральних чисел m_i, таких що $m_i<n$, тоді будь-який елемент множини N' одержить свій номер. Ця нумерація, тобто відповідність (n_i, i), і є взаємно однозначна відповідність між множинами N' і N.

Твердження 3. Об'єднання скінченного числа зліченних множин $M_1, M_2, \dots, M_k$ злічення.

Доведення. Дійсно, перенумеруємо спочатку всі перші елементи множин $M_1, M_2, \dots, M_k$, потім усі другі елементи і т.д. Отримаємо бієкцію між усіма елементами множин і їх номерами.

Твердження 4. Об’єднання зліченного числа скінченних множин зліченне.

Доведення. Перенумеруємо спочатку всі елементи першої множини, потім всі елементи другої множини і т.д. Отримаємо зліченну множину.

Теорема. Об’єднання скінченної або зліченної сукупності зліченних множин також є зліченною множиною.

Доведення. Розглянемо сукупність зліченних множин $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots\}$, де $A_i = \{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, ..., a_n^{(i)}, ...\}$, $i = 1, 2, \ldots, k\ldots$ Напишемо всі елементи цих множин у порядку неспадання суми верхнього і нижнього індексу наступним чином: $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, a_1^{(3)}, a_2^{(2)}, a_3^{(1)}, ...$. Таким чином, елементи всіх множин упорядковуються, що доводить зліченність об’єднання.

Слідство 1. Множина всіх цілих чисел Z зліченна.

Доведення. $Z = N \cup N_- \cup \{0\}$.

Слідство 2. Множина всіх раціональних чисел Q зліченна.

Доведення. $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_1 = Z$ – множина всіх цілих чисел, $A_2 = \{n/2, n \in Z\}$, $A_3 = \{n/3, n \in Z\}$, … .

Наведені вище твердження і теорема показують, що нескінченна множина може бути еквівалентною своїй власній підмножині. У цьому виявляється принципове розходження між скінченними і нескінченними множинами, тому що з основного закону скінченних множин випливає: частина завжди менше цілого.

Серед нескінчених множин є такі, елементи яких не піддаються перерахунку – це *незліченні* множини.

Теорема. Множина дійсних чисел інтервалу (0,1) числової осі незліченна.

Визначення. Всяка множина, що еквівалентна множині дійсних чисел інтервалу (0,1) називається *континуальною або множиною потужності континуум.*

Таким чином, множини (a,b), [a,b], (-∞,+∞) – континуальні.

Теорема. Множина P(A) всіх підмножин деякої зліченної множини A є множиною потужності континуум.

Наведемо приклади еквівалентності нескінченних множин.

1. Множина N^2=N×N зліченна. Нумерацію N^2 можна встановити в такий спосіб. Розіб'ємо N^2 на класи. До першого класу N_1^2 віднесемо усі пари чисел з мінімальною сумою. Така пара одна: (1,1). До другого класу N_2^2 віднесемо усі пари чисел із сумою 3: N_2^2={(1,2), (2,1)} і так далі. У загальному випадку N_i^2={(a,b)$\mid a+b=i+1$ }, причому кожен клас N_i^2 містить рівно i пари. Упорядкуємо тепер класи за зростанням індексу i, а пари у середині класу – по зростанню першого елемента. Занумеруємо послідовності пар, що вийшли, кожного класу номерами 1, 2, 3…Легко бачити, що якщо a+b=i+1, то пара (a,b) одержить номер 1+2+…+($i-1$)+a. Ця нумерація і доводить, що множина N^2 зліченна.

Аналогічно доводиться зліченність N^3 і взагалі N^k.

2. Множині $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$ еквівалентна множина $N^2=\{1, 4, 9, \ldots\}$ квадратів чисел першої множини. Взаємно однозначна відповідність множин N і N^2 встановлюється за наступним правилом: кожному числу $n\in N$ ставиться у відповідність число $n^2\in N^2$ ($n\leftrightarrow n^2$).

3. Множина Z цілих чисел еквівалентна множині усіх парних чисел. Взаємно однозначна відповідність встановлюється так: кожному числу $z\in Z$ ставиться у відповідність число $2*z$ ($z\leftrightarrow 2*z$).

4. Множина R усіх дійсних чисел еквівалентна множині точок прямої. Взаємно однозначна відповідність цих множин встановлюється за допомогою числової прямої, прийнятої за вісь абсцис деякої координатної системи.

5. Нехай X – множина точок осі абсцис, а G – множина точок одиничного півкола з центром у точці $O_1(0,1)$, за винятком її кінців $M_1(-1,1)$ і $M_2(1,1)$ (рис.23). Півколо торкається осі абсцис в початку координат. Множини X і G еквівалентні. Їх взаємно однозначну відповідність можна встановити, зіставивши довільній точці $x\in X$ відповідну точку $g\in G$ проведенням променю O_1x, що перетинає дане півколо.

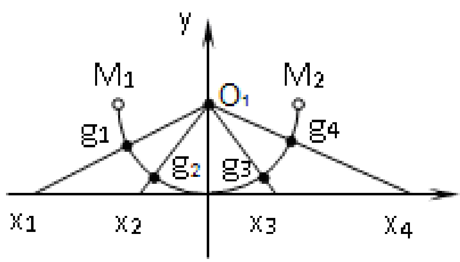


Рис. 23

ГЛАВА 4 ОПЕРАЦІЇ

Розділ 4.1 Поняття алгебри

Визначення. Функцію типу $\varphi : M^n \to M$ будемо називати *n-арною операцією* на заданій множині M; n – *арністю* операції φ.

Визначення. Бінарна операція $\circ$ на множині S означає таке правило, за яким кожній упорядкованій парі (a,b), a,b$\in$S, ставлять у відповідність третій елемент c$\in$S – значення цієї операції на парі (a,b), тобто $\circ : S^2 \to S$.

Додавання «+» в арифметиці є прикладом такої операції на множині Z; значення суми a і b записується a+b. Інші відомі бінарні операції в Z – різниця і добуток. Дійсно, за будь-якими двома цілими числами m, n $\in$ Z однозначно визначаються цілі числа $m - n$, m·n.

Зауваження. Бінарна операція « – » (знак, що фігурує у виразах $m - n$), строго говорячи, відрізняється від унарної операції « – » , яка знаходить протилежний елемент (знак, що фігурує у виразах $-1, -m$). Перша операція відбувається над двома елементами множини, а друга лише над одним.

Взагалі унарною операцією на множині S називається всяке правило f, яке будь-якому елементові a$\in$S ставить у відповідність єдиний елемент f(a)$\in$S – значення операції f на a. Таким чином, унарна операція на S є просто функцією f: S$\to$S у звичайному розумінні.

На множині підмножин будь-якої даної множини A визначаються дві бінарні та одна унарна операції: перетину, об’єднання і доповнення; вони називаються також *булевими*. Операції перетину й об’єднання в множині всіх підмножин аналогічні операціям добутку і суми в множині цілих чисел.

Визначення. Множина M та сукупність операцій $\Omega = \{\varphi_1, ..., \varphi_m, ...\}$, які задані на ній, називається *алгеброю* і позначається у вигляді системи: A=(M; $\varphi_1, ..., \varphi_m, ...$). Множина M називається *основною*, *або несучою множиною (або носієм алгебри)*. *Типом алгебри* називається вектор арностей операцій, а *сигнатурою* – сукупність операцій Ω.

Визначення. Множина $M' \subset M$ називається *замкненою* відносно n-арної операції φ на множині M, якщо $\varphi(M'^n) \subset M'$. Це означає, що значення цієї операції φ на всіх аргументах з M' будуть також належати M'.

Система $A' = (M'; \varphi_1, ..., \varphi_m, ...)$ буде називатися *підалгеброю алгебри* A, якщо M' замкнена підмножина відносно усіх операцій $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m, ...$ із алгебри A (при цьому всі операції $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m, ...$ розглядаються на множині M').

Приклади.

1. Алгебра (R; +; ×) називається *полем дійсних чисел*. Обидві операції – бінарні, тип алгебри – (2, 2). Всі скінченні підмножини дійсних чисел R, крім {0}, будуть не замкнені відносно і першої, і другої операцій. *Поле раціональних чисел* (Q; +; ×) буде її підалгеброю.

2. Позначимо N_p множину натуральних чисел, які менші за p, і містить 0, тобто N_p={0, 1, 2, …, p–1}. Визначимо на N_p операції: ⊕ – додавання за модулем p і ⊗ – множення за модулем p у такий спосіб:

1) a⊕b=c, де c – залишок від ділення на p числа a+b;

2) a⊗b=d, де d – залишок від ділення на p числа a×b. Наприклад, якщо p=7, N_p={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, 3⊕4=0, 4⊕6=3, 3⊗4=5, 4⊗6=3. Іноді операції ⊕ і ⊗ позначають a+b≡c(mod p), a×b=d(mod p). Якщо p – просте число, то алгебра { N_p , ⊕, ⊗} називається *скінченним полем характеристики p*.

3. Нехай M – деяка множина. Алгебра B=(P(M); $\cap, \cup, ^{-}$), де носієм є булеан множини M, це *булева алгебра* множин над M, її тип – (2, 2, 1). Елементи такої алгебри – підмножини множини M. Для кожної підмножини $M' \subset M$ система $B' = (P(M'); \cap, \cup, ^{-})$ буде підалгеброю B. Так, якщо M={a, b, c, d}, тоді носій алгебри B буде складатися з 16 елементів; алгебра $B' = (P(\{a, c\}); \cap, \cup, ^{-})$ є підалгеброю B з основною множиною із чотирьох елементів.

4. Множина F одномісних функцій на множині дійсних чисел (f: R→R) із операцією диференціювання над ними є алгеброю. Функції типу R→R – елементи її основної множини, диференціювання – єдина її унарна операція типу F→F (причому відомо, що похідна функції на R є функція на R).

5. Задано квадрат, вершини якого знаходяться в точках a_1, a_2, a_3, a_4 (нумерація проти годинникової стрілки).

Розглянемо повороти цього квадрата навколо центра у тому ж напрямку, які будуть переводити вершини у вершини. Зрозуміло, що їх (поворотів) буде нескінченна множина, які відповідають кутам: π/2, π, 3π/2, …, але вони будуть задавати всього 4 різних відображення вершин у себе (перші чотири повороти). Отримаємо алгебру, яка має основу М=$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ та 4 унарні операції φ: α=0, β=π/2, γ=π, δ=3π/2. Задамо їх у вигляді таблиці, в якій рядки – вершини, стовпці – повороти, а на їх перетині – значення функції φ(a_i).

	α	β	γ	δ
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4
a_2	a_2	a_3	a_4	a_1
a_3	a_3	a_4	a_1	a_2
a_4	a_4	a_1	a_2	a_3

Наприклад, значення функції γ (a_3) стоїть на перетині рядка a_3 і стовпця γ.

Операція φ називається тотожною операцією, якщо вона відображає будь-який елемент у себе. В даному прикладі це нульовий поворот. Підалгебри в цієї алгебри немає. Таблиця задає унарну операцію.

Розділ 4.2 Властивості бінарних алгебраїчних операцій

Домовимося надалі результат застосування бінарної операції φ до елементів a, b писати не у функціональному вигляді φ (a, b), а у вигляді a φ b, як завжди прийнято записувати для арифметичних операцій.

Визначення. *Асоціативною* називається операція φ, якщо для всіх елементів a, b, c справедлива тотожність:

$(a \varphi b) \varphi c = a \varphi (b \varphi c)$.

Виконання цієї умови означає, що дужки у виразі aφbφc можна не розставляти. Наприклад, додавання і множення чисел асоціативні, що і дозволяє не ставити дужки у виразах: a+b+c і abc. Приклад не асоціативної операції – піднесення до степеня: $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$.

Визначення. *Комутативною* називається операція φ, якщо для всіх елементів a, b справедлива тотожність:

$a \varphi b = b \varphi a$.

Наприклад, додавання чисел комутативне, так само як і множення; різниця і ділення не комутативні. Не комутативним є також множення матриць, наприклад:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ але } \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначення. Операція φ називається *дистрибутивною ліворуч* відносно операції ψ, якщо для будь-яких елементів a, b, c справедливою є рівність:

$a \varphi (b \psi c) = (a \varphi b) \psi (a \varphi c)$,

і *дистрибутивною праворуч* відносно ψ, якщо:

$(a \psi b) \varphi c = (a \varphi c) \psi (b \varphi c)$.

Дистрибутивність дозволяє розкривати дужки. Наприклад, множення чисел дистрибутивне відносно додавання ліворуч і праворуч, піднесення до степеня дистрибутивне відносно множення праворуч: $(ab)^c = a^c b^c$, але не ліворуч: $a^{(bc)} \neq a^b a^c$. Додавання не дистрибутивне відносно множення: a+(b·c) ≠ (a+b)·(a+c). Операції перетину й об'єднання множин дистрибутивні відносно одна одної ліворуч і праворуч.

Визначення. Якщо для будь-яких елементів a, b справедливою є рівність: a φ (b ψ a) = a, то операція φ *поглинає* операцію ψ,

Наприклад, перетин множин поглинає об'єднання і навпаки, об'єднання поглинає перетин. Додавання і множення чисел не поглинають одне одного.

Визначення. Якщо для будь-якого елементу a справедливою є рівність: a φ a = a, то операція φ володіє властивістю *ідемпотентності*.

Наприклад, ідемпотентнимі є: найбільший спільний дільник натуральних чисел; об'єднання і перетин множин. Додавання і множення чисел неідемпотентні.

Розділ 4.3 Морфізми

Алгебри з різними типами мають різну структуру. Якщо ж алгебри мають однаковий тип, то наявність у них схожості характеризується за допомогою наступних понять.

Нехай маємо 2 алгебри A=(K; $\varphi_1, ..., \varphi_p$) і B=(M; $\psi_1, ..., \psi_p$) однакового типу.

Визначення. *Гомоморфізмом* алгебри A в алгебру B називається функція $f : K \to M$, яка задовольняє умові:

$$f\left(\varphi_i\left(k_1,\ldots,k_{n_i}\right)\right)=\psi_i\left(f\left(k_1\right),\ldots,f\left(k_{n_i}\right)\right),\ \forall i=1,\ldots,p\ ,\ \forall k_j\in K\ ,$$

де n_i – арність операцій φ_i та ψ_i, яка за умовою однакова.

Незалежно від того спочатку буде виконана операція φ_i в А і далі здійснено відображення f, чи спочатку здійснено відображення f елементів множини К на множину М і далі в алгебрі В виконана відповідна операція ψ_i, результат буде однаковий. Тобто, якщо А=(К;φ) і В=(М;ψ) однакового типу (1) і $f:K\to M$, то дію цих функцій можна зобразити за допомогою наступної діаграми:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & K \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "\psi"] & M \end{tikzcd}$$

Рис.24

Нехай f – гомоморфізм, тоді якщо взяти конкретне значення $k\in K$ і двигатися за двома різними шляхами на діаграмі, то отримуємо той самий елемент $m\in M$. Діаграма комутативна і умову гомоморфізму можна переписати наступним чином: $\varphi\circ f=f\circ\psi$.

<u>Приклад.</u>

$A=(N,+)$, $B=(N_{10};{}_{+}10)$ – дві алгебри, де $\varphi=+$ (додавання), $\psi={}_{+}10$ (додавання за модулем 10 – остання цифра суми), N_{10}={0, 1, … , 9}. Тоді для $\forall a\in N$ f(a):=a mod 10 (остача від ділення а на 10) – гомоморфізм із А в В. Нехай

$a_1=1$, $a_2=2$, отримуємо: f(1+2)=f(3)=3, ψ (f(1); f(2))= ψ (1;2)=3; $b_1=15$, $b_2=7$, отримуємо: f(15+7)=f(22)=2, ψ (f(15); f(7))= ψ (5;7)=2.

Визначення. *Ізоморфізмом* алгебри A на алгебру B називається взаємнооднозначний гомоморфізм. Тобто ізоморфізм є бієкцією.

Теорема. Якщо $f: K \to M$ – ізоморфізм, то $f^{-1}: M \to K$ також ізоморфізм.

Доведення. Нехай операції $\varphi \in A$ відповідає операція $\psi \in B$. Маємо: 1) $f(\varphi(k_1,\ldots,k_n)) = \psi(f(k_1),\ldots,f(k_n))$;

2) $f(k_i) = m_i$. Треба довести, що:

$$f^{-1}(\psi(m_1,\ldots,m_n)) = \varphi(f^{-1}(m_1),\ldots,f^{-1}(m_n)).$$

Оскільки f – бієкція, то $k_i = f^{-1}(m_i)$, причому f^{-1} також бієкція.

$$f^{-1}(\psi(m_1,\ldots,m_n)) \overset{2)}{=} f^{-1}(\psi(f(k_1),\ldots,f(k_n))) \overset{1)}{=} f^{-1}(f(\varphi(k_1,\ldots,k_n))) =$$
$$= \varphi(k_1,\ldots,k_n) = \varphi(f^{-1}(m_1),\ldots,f^{-1}(m_n)).$$

Визначення. Якщо $f: K \to M$ – ізоморфізм, то *алгебри A і B* називаються *ізоморфними* і позначають: $A \overset{f}{\sim} B$.

Якщо A=B, то ізоморфізм називається *автоморфізмом*, якщо $B \subset A$, то ізоморфізм називається *ізоморфізмом в себе*.

Теорема. Відношення ізоморфізму на множині однотипних алгебр є еквівалентністю.

Доведення.

1. Рефлексивність: $A \overset{f}{\sim} A$ (вочевидь).

2. Симетричність: $A \overset{f}{\sim} B \Rightarrow B \overset{f^{-1}}{\sim} A$ випливає з попередньої теореми.

3. Транзитивність: $A \overset{f}{\sim} B \,\&\, B \overset{g}{\sim} C \Rightarrow A \overset{f \circ g}{\sim} C$. Тут функцією, яка є ізоморфізмом між алгебрами А і С є композиція функцій f і g.

Приклади.

1. $A = (Z; +)$, $B = A$, $A \overset{f = \times(-1)}{\sim} B$ – автоморфізм.

Дійсно, умова гомоморфізму виконується:

-(a+b)=(-a)+(-b).

Крім того функція є бієкцією, звідки f – автоморфізм.

2. $A = (Z; \times)$, $B = A$, $f : a \to -a$ не автоморфізмом, оскільки порушується умова гомоморфізму:

-(a$\times$b)$\neq$(-a)$\times$(-b).

3. $A = (R_+; \times)$, $B = (R; +)$, $f : a \to \ln(a)$, $A \overset{f}{\sim} B$, оскільки ln(a$\times$b)=ln(a)+ln(b).

4. $A = (2^M; \bigcap, \bigcup) \overset{f}{\sim} B = (2^M; \bigcup, \bigcap)$, $f(X) = \overline{X}$. Дійсно, $\overline{C \bigcap D} = \overline{C} \bigcup \overline{D}$, $\overline{C \bigcup D} = \overline{C} \bigcap \overline{D}$ (закони де Моргана).

Поняття ізоморфізму є одним з найважливіших понять, яке забезпечує застосування алгебраїчних методів у різних галузях. Якщо $A \overset{f}{\sim} B$ і в алгебрі А встановлена деяка властивість, чи закон $\Phi_1 = \Phi_2$, де Φ_1, Φ_2 – формули в сигнатурі алгебри А, то в алгебрі В справедливою є властивість $\Psi_1 = \Psi_2$, де Ψ_1, Ψ_2 – формули, отримані з формул Φ_1, Φ_2 заміною операцій з сигнатури алгебри А на відповідні операції з сигнатури алгебри В. Тобто достатньо встановити властивість в одній алгебрі, і воно автоматично розповсюдиться на всі ізоморфні алгебри. Тому алгебраїчні структури прийнято розглядати з точністю до ізоморфізму.

ГЛАВА 5 АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ

Розділ 5.1 Групи

Розглянемо основні поняття теорії алгебраїчних структур. Спочатку розглянемо алгебри, які мають одну операцію.

<u>Визначення.</u> Алгебра, яка має одну асоціативною бінарною операцією $\circ$ буде називатися *півгрупою.* Тобто для операції повинна виконуватись умова:

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c .$$

Прикладом півгрупи можуть бути: множина дійсних чисел з операцією додавання, або ж множення; множина матриць з операцією додавання чи множення. При цьому результати операцій повинні належати носію.

Якщо операція комутативна: $a \circ b = b \circ a$, тоді півгрупа буде називатися комутативною (*абелевою).* Як приклад, абелевою півгрупою зі скінченною несучою множиною є $A = (\{-1, 0, 1\}; \times)$.

<u>Визначення.</u> *Моноїд* – це півгрупа з одиницею, під якою розуміють такий елемент e, що для будь-якого елемента a носія виконується умова:

$a \circ e = e \circ a = a$.

<u>Теорема.</u> Одиниця в півгрупі єдина.

<u>Доведення</u> (від супротивного). Нехай маємо дві одиниці e_1 та e_2. Тоді за означенням маємо, що для будь-якого a:

$$\left.\begin{cases} a \circ e_1 = e_1 \circ a = a & \Rightarrow \textit{при}\ \mathrm{a} = \mathrm{e}_2 \quad e_1 e_2 = e_2 \\ a \circ e_2 = e_2 \circ a = a & \Rightarrow \textit{при}\ \mathrm{a} = \mathrm{e}_1 \quad e_1 e_2 = e_1 \end{cases}\right\} \Rightarrow e_1 = e_2 .$$

Часто зустрічаються множини із заданими на них асоціативними операціями, у яких існує одиничний елемент, і всі елементи мають обернені. У таких випадках говорять, що відповідні множини утворюють групи щодо заданих на них операцій.

<u>Визначення.</u> *Група* – це моноїд, в якому для будь-якого елемента a носія існує обернений до нього – a^{-1}, такий, що:

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e .$$

Кількість елементів несучої множини називається *порядком* групи.

<u>Теорема.</u> Для кожного елемента існує єдиний обернений для нього елемент в групі.

<u>Доведення</u> (від супротивного). Нехай маємо два обернених елемента a_1^{-1} та a_2^{-1} до елемента a. Тоді за означенням оберненого та одиничного елементів, враховуючи асоціативність операції, маємо для будь-якого a:

$$a_1^{-1} = a_1^{-1} \circ e = a_1^{-1} \circ \left(a \circ a_2^{-1}\right) = \left(a_1^{-1} \circ a\right) \circ a_2^{-1} = e \circ a_2^{-1} = a_2^{-1} .$$

Групу не можна ототожнити з множиною її елементів. Адже множина, наприклад, усіх цілих чисел може бути групою і не бути групою в залежності від того, яку операцію ми на ній задамо – додавання або множення чисел. Отже, операція якимось чином нерозривно зв'язана з груповою властивістю. Зрозуміло, настільки ж нерозривно зв'язана з груповою властивістю і та множина, над елементами якої виконується операція.

Таким чином, пара $\langle G, f \rangle$, що складається з множини G і бінарної операції f, є групою при виконанні наступних умов:

1. Результат операції f належить носію, тобто $\forall a, b \in G \; f(a,b) \in G$.

2. Операція f асоціативна, тобто для будь-яких різних елементів a, b, c $\in$ G справедлива рівність $f(f(a,b),c) = f(a,f(b,c))$.

3. Існує єдиний одиничний елемент, тобто елемент множини G, який позначається e і для якого виконуються наступні рівності: $\forall a \in G \; \exists! \; e \in G$: $f(e,a) = f(a,e) = a$.

4. Існує єдиний обернений елемент для кожного елемента із множини G, тобто $\forall a \in G \quad \exists! \, a^{-1} \in G$: $f(a, a^{-1}) = f(a^{-1}, a) = e$.

Операція f називається *груповою операцією*, а елементи множини G – *елементами групи*.

Отже, група являє собою множину з заданою на ній асоціативною бінарною операцією та єдиним одиничним елементом, причому для кожного елемента із множини існує єдиний обернений елемент із даної множини.

Задана операція на множині є не що інше як функція, що відображає будь-яку пару елементів множини в деякий елемент тієї ж множини. Наприклад, пара $\langle Z,+\rangle$ означає групу, утворену цілими числами з операцією додавання; пара $\langle R_+;\times\rangle$ – групу, утворену додатними дійсними числами з операцією множення.

Зауваження. Необхідно підкреслити, що позначення $\langle G, f\rangle$ ще не означає, начебто мова йде неодмінно про групу. Зазначені лише множина G і задана на ній операція f. Потрібно ще перевіряти виконання умов, яким повинна задовольняти група.

По визначенню півгрупи всі групи є одночасно і півгрупами.

В групі виконуються наступні відповідності:

1) $(a\circ b)^{-1}=b^{-1}\circ a^{-1}$; 2) $a\circ b=a\circ c\Rightarrow b=c$;

3) $b\circ a=c\circ a\Rightarrow b=c$; 4) $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$.

Теорема. В групі можна однозначно розв'язати рівняння $a\circ x=b$, при цьому розв'язок буде мати наступний вид: $x=a^{-1}\circ b$.

Доведення. $a\circ x=b\Rightarrow a^{-1}\circ(a\circ x)=a^{-1}\circ b\Rightarrow$

$$\left(a^{-1}\circ a\right)\circ x=a^{-1}\circ b\Rightarrow e\circ x=a^{-1}\circ b\Rightarrow x=a^{-1}\circ b.$$

Визначення. Група $\langle G, f\rangle$ називається *комутативною (або абелевою)*, якщо операція f комутативна, тобто $\forall$a, b$\in$G f(a,b) = f(b,a).

Такі, наприклад, групи чисел по додаванню і множенню. Комутативні групи грають досить важливу роль в алгебрі і виникає інтерес розгляду групи такого типу.

Розділ 5.2 Кільця

<u>Визначення.</u> *Кільцем* називається алгебра, яка має дві бінарні операції: $\langle R, f, g \rangle$, де R – множина-носій, f, g – операції, відносно яких виконуються умови:

1) $\langle R, f \rangle$ – абелева група,

2) $\langle R, g \rangle$ – півгрупа,

3) $\forall$a, b, c $\in$R операції f і g зв'язані співвідношеннями дистрибутивності як зліва, так і справа, тобто:

$g(f(a,b),c) = f(g(a,c),g(b,c))$ і $g(c,f(a,b)) = f(g(c,a),g(c,b))$.

Операція f задає в кільці додавання ("+"), а операція g – множення ("·"). Тому звичний спосіб запису дистрибутивності зліва і справа такий:

(a+b)·c=a·c+b·c і a·(b+c)=a·b+a·c.

Кільце називається *комутативним*, якщо множення g комутативне: $a \cdot b = b \cdot a$.

Розглянемо докладніше, яким властивостям повинне задовольняти кільце.

Насамперед, на множині R повинні бути задані дві операції – додавання і множення, та обидві вони повинні бути асоціативні: (a+b)+c=a+(b+c); (ab)c=a(bc). Щодо додавання в кільці повинний існувати одиничний елемент, так званий нуль кільця (0). Якщо a – довільний елемент кільця, то a+0 = 0+a = a. Операція додавання повинна бути комутативною: a+b=b+a. Для кожного елемента в кільці повинний існувати обернений елемент (щодо додавання), який називають протилежним (–a), такий що a+(–a)=0.

Нарешті, операції додавання та множення повинні бути зв'язані двома законами дистрибутивності:

$\forall$a, b, c $\in$R (a+b)c = ac+bc; c(a+b) = ca+cb.

Якщо в кільці є одиничний елемент щодо множення, тоді воно буде називатися *кільцем з одиницею*. А якщо в кільці є $x \neq 0$ і $y \neq 0$ такі, що $x \cdot y = 0$, то x називається лівим, а y – правим дільниками нуля.

Прикладами є кільця раціональних чисел, комплексних чисел, багаточленів з цілими коефіцієнтами. Приклад кільця, в якому існують дільники нуля: $\langle M; +,* \rangle$, де M – це множина матриць квадратного вигляду другого порядку з дійсними елементами, $+, *$ – операції додавання та множення матриць. Це некомутативне кільце. Одиниця існує, це – $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Далі наведемо приклад ненульових елементів, добуток яких дорівнює нулю: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = 0$. Тому відповідні матриці є лівим та правим дільниками нуля.

Розділ 5.3 Поля

Визначення. *Поле* – це комутативне кільце, що має одиницю, в якому ненульові елементи утворюють групу по множенню.

Таким чином, додатковими обов'язковими до кільця умовами цієї алгебри з двома бінарними операціями додавання та множення є такі:

1) множення комутативне $a \cdot b = b \cdot a$;

2) існує одиниця: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$;

3) $\forall a \neq 0 \; \exists a^{-1} \;\; a \cdot a^{-1} = 1$.

Поле одночасно є як абелевою групою по додаванню, так і по множенню.

Наприклад, R – це поле дійсних чисел, C – поле комплексних чисел, Q – поле раціональних чисел.

Зауважимо, що для всіх полів спільними є **наступні властивості**:

1). В будь-якому полі можна визначити операцію ділення, розуміючи під часткою $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$, $b \neq 0$.

2). Можна визначити операцію різниці $a - b := a + (-b)$;

3). Жодне поле не має дільників нуля.

<u>Доведення</u> від супротивного. Нехай існують $a \neq 0$, $b \neq 0$ такі, що $a \cdot b = 0$. Оскільки $a \neq 0$, то $\exists a^{-1}$. Помножуючи обидві частини рівності $a \cdot b = 0$ на a^{-1}, отримаємо: $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 \Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0 \Rightarrow \quad 1 \cdot b = 0 \Rightarrow$ $b = 0$. Це суперечить припущенню. Звідки можна зробити висновок: якщо $a \cdot b = 0$ і $a \neq 0$, то $b = 0$.

В рівностях $a \cdot c = b \cdot c$ можна скорочувати ліву та праву частини рівності на $c \neq 0$. Оскільки $a \cdot c - b \cdot c = 0$, $(a - b) \cdot c = 0$ і при $c \neq 0$ випливає, що $a - b = 0 \Rightarrow a = b$.

Для елементів поля зберігаються всі звичайні правила арифметики. А саме:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$,

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$,

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, і т.д.

Введені в розгляд степені як і в арифметиці мають той самий зміст – множення елемента на себе відповідну кількість разів.

Якщо в полі P деяка його частина елементів P’ також утворює поле відносно операцій додавання і множення, тоді P’ називають *підполем* поля P, а поле P називається розширенням поля P’. Так, всі числові поля є підполями поля комплексних чисел.

ГЛАВА 6 КОМБІНАТОРИКА

Розділ 6.1 Вибірки

Коли стикаєшся з конкретною практичною задачею, яка пов’язана з множинами елементів, то іноді з’являється необхідність розташувати елементи множини за певними правилами, а також для конкретної задачі не всі елементи множини можуть бути потрібні, а лише певна кількість. Цим займається комбінаторика – один з розділів дискретної математики. Самі задачі при цьому називаються *комбінаторними.* Якщо треба зробити розрахунок числа комбінацій об’єктів, які відповідають певним умовам, то це так звана перша задача комбінаторики – *задача перерахунку*. Якщо треба не просто підрахувати кількість наборів, а знайти ці комбінації, то така задача називається *задачею перелічення* і є другою задачею комбінаторики. Для того, щоб розв’язати її необхідно побудувати деякі методи, алгоритми перелічення комбінацій, що задовольняють певні властивості. Іноді доводиться розв'язувати *задачу оптимізації*, коли на комбінаціях вводиться цільова функція, яка повинна досягти свого найменшого (або найбільшого) значення. Взагалі, всі ці задачі тісно пов'язані між собою.

Нехай X – скінченна множина, яка містить n елементів, тоді говорять, що «об'єкт x можна відібрати n способами» і пишуть |X|=n (фактично це потужність множини).

Для комбінаторних задач використовують наступні правила суми та добутку. Правило суми. Якщо $X_1, \ldots, X_k$ – множини, які попарно не перетинаються, тобто $\forall i \neq j$ $X_i \bigcap X_j = \varnothing$, тоді:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i| .$$

В комбінаториці під $\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right|$ розуміють число способів вибору елемента хоча б з однієї з множин $X_1, \ldots, X_k$.

Як окремий випадок, для к=2 правило суми можна сформулювати так: якщо *x* можна відібрати m способами, а *y* – іншими n способами, тоді вибір «або *x*, або *y*» можна здійснити m+n способами.

Правило добутку для к=2 так: якщо *x* можна обрати *m* способами та після кожного вибору *x* елемент *y* можна обрати *n* способами, то вибір упорядкованої пари (x, y) можна здійснити $m \cdot n$ способами.

Узагальнення правила добутку: нехай об'єкт x_1 можна обрати n_1 способами, далі після чого об'єкт x_2 – n_2 способами, та для будь-якого *i* після вибору об’єктів x_1, ..., x_i об’єкт x_{i+1} можна обрати n_{i+1} способами, тоді вибір упорядкованої послідовності (x_1, ... ,x_m) можна здійснити $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$ способами.

Визначення. Розглянемо скінченну множину $X=\{x_1, \ldots x_n\}$, яка містить n елементів. Набір елементів (x_{i1}, ... ,x_{ir}) з множини X називається вибіркою r об’єктів з n елементів, або *(n,r) - вибіркою*.

Вибірка називається *впорядкованою*, якщо суттєвим є порядок розміщення в ній елементів. Дві впорядковані вибірки, що розрізняються лише порядком розміщення елементів, вважаються різними. Якщо ж порядок розміщення елементів у вибірці не суттєвий, тоді вона *невпорядкована*.

Визначення. Впорядкована *(n,r)* - вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається *(n,r) - розміщенням з повтореннями*. Якщо ж у впорядкованій *(n,r)* - вибірці всі елементи різні, то вона називається просто *(n,r) - розміщенням, або розміщенням без повторень. (n,n)* - розміщення без повторень є *перестановками.* Невпорядкована *(n, r)* - вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається *(n,r) - комбінацією з повтореннями*, якщо ж всі елементи різні – *(n,r) - комбінацією без повторень,* або просто *комбінацією*.

Число *(n, r)* - розміщень з повтореннями позначається через $\overline{A}_n^r$, а без повторень – A_n^r; число перестановок n - елементної множини – P_n, число комбінацій з повтореннями – $\overline{C}_n^r$, без повторень – C_n^r.

Твердження 1.

$$\overline{A}_n^r = n^r$$

Доведення.

(n,r) - розміщення з повтореннями є упорядкована послідовність довжини r, при цьому кожен член цієї послідовності може бути обраний одним з n способів, отже отримуємо за правилом добутку: $\overline{A}_n^r = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r\ разів} = n^r$.

Твердження 2.

$$A_n^r = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad r \le n.$$

Доведення.

Кожне (n,r) - розміщення без повторень є впорядкованою послідовністю довжини r, члени якої різні і вибираються з n елементів. Тоді перший член може бути обраний n способами, другий – (n-1) способами і т.д. Після кожного вибору першого, другого і так далі (r-1)-го членів послідовності, r-й член може бути обраний n-(r-1)=n-r+1 способами, звідки за правилом добутку отримаємо

$$A_n^r = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Наслідок 1.

$$P_n = A_n^n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$$

Наслідок 2.

Якщо маємо n елементів, з яких n_1 елементів першого типу, n_2 – другого типу, …. , n_k – k-го типу ($\sum_{i=1}^{k} n_i = n$), тоді перестановки цих елементів називаються *перестановки з повтореннями* і їх кількість знаходиться за формулою:

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Доведення.

Якщо вважати всі n елементів різними, то кількість перестановок буде $n!$. Далі вважатимемо елементи першого типу однаковими. Тоді кількість перестановок зменшиться в $n_1!$ разів і буде рівною $\frac{n!}{n_1!}$. Потім знімемо відмінність для елементів другого типу і кількість наборів буде в $n_2!$ меншою, тобто $\frac{n!}{n_1! n_2!}$ і т.д. Остаточно знявши різницю для елементів k-го типу, отримаємо формулу кількості перестановок з повторенням елементів $\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

Твердження 3.

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \ r \le n.$$

Доведення.

З кожної *(n,r)* - комбінації можна отримати r! розміщень за допомогою перестановок r елементів набору. Об'єднання одержаних таким чином розміщень, які попарно не перетинаються, для всіх можливих *(n,r)* - комбінацій, очевидно, дає всі *(n,r)* - розміщення. Тоді за правилом суми:

$A_n^r = C_n^r \cdot r!$ (підсумовування проводиться за всіма *(n,r)* - комбінаціями без повторень), отже $C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Твердження 4.

$$\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r .$$

Доведення.

Кожній (n,r) - комбінації з повтореннями, складеної з елементів множини $X=\{x_1, \ldots x_n\}$, поставимо у відповідність вектор довжини n+r-1 з r одиниць і (n-1) нулів такий, що всі елементи заданої комбінації представлені одиницями, уявляючи собі, що різні типи елементів розділяються нулем (таке кодування підходить і на той випадок, коли деякі елементи множини відсутні в наборі). Наприклад, для множини *A = {a,b,c,d,e}* комбінації *abbce* відповідає набір 101101001; комбінації *bbbee* – набір 011100011, комбінації *aabbdde* – набір 11011001101.

Таким чином, кожен такий набір нулів та одиниць для *(n,r)* - комбінації з повтореннями містить r одиниць і (n – 1) нулів, та відповідає перестановці з повтореннями з $r+n-1$ елементів, а саме $P(r,n-1)$. Відповідність між цими перестановками з повторенням елементів і комбінаціями, що ми рахуємо, є бієкцією. Тому їх кількості однакові, тобто число комбінацій з повтореннями буде дорівнювати

$$\overline{C}_n^r = P(r,n-1) = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!} = C_{n+r-1}^r .$$

Приклади.

1. Сейф можна відкрити, якщо ввести правильний код з 4 цифр. Скільки існує варіантів введення коду, які не відкриють сейф, якщо відомо, що код не містить цифр 0 і 9?

Розв'язання.

Оскільки 0 і 9 не обираються, то вибір цифр коду буде відбуватись з множини $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Порядок цифр в коді важливий, та можуть бути однакові цифри, тому використовуємо розміщення з повторенням $\overline{A}_8^4 = 8^4 = 4096$. Але серед цих комбінацій лише один правильний код. Тому, способів не відкрити сейф буде 4095.

2. Треба скласти матрицю з нулів та одиниць розміром 5×5. В цій матриці повинно бути 2 рядка з двох нулів і 3 одиниць, 2 рядка з двох одиниць і 3 нулів і один рядок з одного нуля та 4 одиниць. Скільки способів це зробити?

Розв'язання.

Способів складання одного рядка з двох нулів та трьох одиниць $P(2,3) = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$. Способів складання рядка з двох одиниць і трьох нулів так само $P(2,3) = 10$. Варіантів скласти рядок з одного нуля і 4 одиниць $P(1,4) = \dfrac{5!}{1!4!} = 5$. Тепер порахуємо способи розташування самих рядків. Їх маємо 3 типу, кількості кожного – 2, 2, 1. Також використовуємо перестановки з повторенням $P(2,2,1) = \dfrac{5!}{2!2!1!} = 30$. Остаточно, за правилом добутку варіантів матриць буде $10^2 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 30 = 1500000$.

3. Керівнику відділу запорізького підприємства протягом тижня треба відправити у відрядження 1 працівника у місто Дніпро, 2 – у Київ, та 3 – у Харків. Разом з керівником, який повинен залишитись на підприємстві, у відділі працює 11 людей. Крім того з працівників, які залишаються у Запоріжжі треба терміново організувати роботу двох з них у суботу. Скількома способами керівник може спланувати роботу відділу на тиждень?

Розв'язання.

Нехай спочатку керівник відбирає одного працівника для відрядження у Дніпро. Це можна зробити 10 способами. З тих, хто залишається відбирає двох, хто поїде у Київ. Маємо $C_9^2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{72}{2} = 36$ способів. Далі з 7 відбирає 3 для поїздки у Харків. Це буде $C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{5*6*7}{6} = 35$ способів. Залишається відібрати двох для праці у суботу. Оскільки керівник також може вийти на роботу у суботу, то варіантів буде $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{20}{2} = 10$. Застосував далі правило добутку, отримаємо $10 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 10 = 126000$ способів.

4. В кінотеатр прийшло 8 друзів: 4 хлопця та 4 дівчини та отримали білети на місця поруч один з одним. а) Скільки існує способів їм сісти на куплені місця? б) Скільки способів скласти пари з хлопців і дівчат та розсадити ці пари в ряд?

Розв'язання.

а) 8 друзів розсадити в ряд буде 8!=40320 способів;

б) Спочатку складаємо пари, поставив поряд з кожним хлопцем дівчину, це буде 4!=24 способи складання пар. Далі 4 отримані пари саджаємо на 8 місць, це також 4!=24 способи. Але в кожній парі дівчина може сидіти як ліворуч так і праворуч хлопця, тому остаточно варіантів буде 24*24* 2^4= 9216.

5. Сім'я купила 20 однакових зошитів для трьох дітей. Одразу кожна дитина взяла собі по 5 зошитів. Скільки існує способів роздати цим дітям зошити, які залишились у пачці?

<u>Розв'язання.</u>

Оскільки з пачки вже забрали 15 зошитів, то залишилось роздати 5. Для того, щоб відокремити зошити для першої, другої та третьої дитини треба між зошитами вставити два роздільника, їх позиції в комбінації з 7 елементів будуть відповідати певному способу розподілу. До першого роздільника – першій дитині, між роздільниками – другій дитині, а те, що справа від другого роздільника – третій. В такий спосіб доводилась формула комбінацій з повтореннями. Таким чином, способів розподілу буде $C_7^2 = \dfrac{7!}{2!(7-2)!} = \dfrac{42}{2} = 21$. Або можна одразу рахувати через формулу комбінацій з повторенням $\overline{C_3^5} = C_7^5 = 21$, тут комбінації будуються з імен дітей, котрим віддати зошит, та зрозуміло, що ці комбінації містять повторення елементів.

Розділ 6.2 Розбиття

Нехай маємо множину X=$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Розглянемо розбиття {X_1, X_2, …, X_k} множини X ($|X| = n$) на k підмножин: $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X$, $X_i \subset X$; при $i \neq j$ $X_i \cap X_j = \varnothing$; $\forall\, i$ $|X_i| = n_i$. При цьому X_1, X_2, …,X_k упорядкована послідовність множин. Число зазначених розбиттів при фіксованих n_i позначаються: $C_n^{n_1,\dots,n_k}$.

Твердження 5.

$$C_n^{n_1,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\dots n_k!}$$

Доведення.

Кожну з множин X_i можна розглядати як комбінацію без повторень. Для створення комбінації, відповідної множині X_1 можуть бути використані всі елементи множини X, тобто підмножина X_1 може бути побудовано $C_n^{n_1}$ способами. Після вибору X_1, підмножина X_2 може бути складено $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами (тому що $X_2 \subset X \setminus X_1$, $|X \setminus X_1| = n - n_1$) і так далі. Далі необхідно використати правило добутку. Таким чином, *впорядкованих* послідовностей множин X_1, …, X_k можна утворити $C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$ способами. Будемо мати:

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \dots \cdot C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k!(\underbrace{n-n_1-\dots-n_{k-1}-n_k}_{0})!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!},$$

що й треба було довести.

Обчислимо тепер скільки існує способів розбити множину X ($|X| = n$), на підмножини, серед яких для $\forall i = 1,2,\dots,n$ маємо $m_i \geq 0$ підмножин з i елементами, де $\sum_{i=1}^{n} i \cdot m_i = n$. При цьому набір підмножин в розбитті є <u>*невпорядкованим*</u>. Так, наприклад, розбиття множини X={1,2,3,4,5,6} видів:

$$\{4\}\ \{6\}\ \{1,3\}\ \{2,5\}$$

$$\{6\}\ \{4\}\ \{2,5\}\ \{1,3\}$$

вважаються однаковими. Позначимо число зазначених невпорядкованих розбиттів множини X через $N(m_1,\dots,m_n)$.

<u>Твердження 6.</u>

$$N(m_1,\dots,m_n) = \frac{n!}{m_1!\dots m_n!(1!)^{m_1}\dots(n!)^{m_n}}$$

<u>Доведення.</u>

Уявимо розбиття на підмножини, де спочатку йдуть одноелементні підмножини, у кількості m_1, далі двохелементні підмножини у кількості m_2, і т.д. Обов'язково деякі з m_i при цьому будуть дорівнювати нулю. Кількість упорядкованих розбиттів за попереднім твердженням дорівнює

$$\frac{n!}{\underbrace{1!\ldots1!}_{m_1 \, разів}\,\underbrace{2!\ldots2!}_{m_2 \, разів}\ldots\underbrace{n!\ldots n!}_{m_n \, разів}} = \frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\cdots(n!)^{m_n}}.$$

З кожного невпорядкованого розбиття можна зробити $m_1!m_2!\cdots m_n!$ упорядкованих. Тому порівнюючи кількість упорядкованих розбиттів:

$$m_1!m_2!\cdots m_n!N(m_1,...,m_n) = \frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\cdots(n!)^{m_n}},$$

отримаємо формулу кількості невпорядкованих розбиттів:

$$N(m_1,...,m_n) = \frac{n!}{m_1!...m_n!(1!)^{m_1}...(n!)^{m_n}}.$$

<u>Приклади.</u>

1. У групі з 25 чоловік за проведення семінару проголосували 12 осіб, проти – 10 , утрималися – 3. Скількома способами могло бути проведено таке голосування?

<u>Розв'язання.</u>

Нехай X – множина людей в групі, X_1 – підмножина тих, хто проголосував «за», X_2 – «проти», X_3 – «утрималися».

Тоді $|X| = 25$, $|X_1| = 12$, $|X_2| = 10$, $|X_3| = 3$, $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$, а значить шукане число:

$$C_{25}^{12,10,3} = \frac{25!}{12!10!3!} = 1487285800.$$

2. Скількома способами із спільноти в 24 осіб можна утворити 4 коаліцій по 6 осіб?

Розв'язання.

В цій задачі порядок підмножин не важливий, оскільки за умовою задачі коаліції не відрізняються між собою. Тут X – множина людей в групі, m_i – число коаліцій з i осіб ($i=1,2,...,24$). Тоді $|X| = 24$, m_6=4; m_i=0 для $i = 1,2,...,24$, i≠6. А отже, шукане число дорівнюватиме:

$$N(0,0,0,0,0,4,0...0) = \frac{24!}{4!(6!)^4}.$$

3. 15 різнокольоровими кулями треба прикрасити 3 різних місця, так щоб перше було прикрашене п'ятьма, друге сьома, а третє трьома кулями. Всі кольори куль різні. Скільки способів це зробити?

Розв'язання.

Місця прикрашання різні, тому використовуємо формулу розбиття з врахуванням порядку, при цьому n=15, n_1=5, n_2=7, n_3=3. Маємо $C_{15}^{5,7,3} = \frac{15!}{5!7!3!} = 360360$ способів.

Якщо в кожному місці ще доведеться враховувати розташування різнокольорових куль між собою, то варіантів буде більше у 5!7!3! разів і дорівнювати 15!.

4. Викладач організовує участь у змаганнях з програмування. Йому треба групу з 21 студента поділити на команди по три студента. Кожній з утворених команд викладач пропонує прийняти участь в одному з трьох змагань. Скількома способами можна організувати участь студентів у змаганнях?

Розв'язання.

Спочатку множину з 21 студента розіб'ємо на 7 підмножин з 3 студентів. На цьому етапі порядок підмножин неважливий, тому використовуємо відповідну формулу неупорядкованого розбиття та маємо: $|X| = 21$, m_3=7; m_i=0 для $i = 1,2,...,24$, $i \neq 3$. Шукане число дорівнюватиме: $N(0,0,7,0,0,,0...0) = \dfrac{21!}{7!(3!)^7}$ =36212176000. Далі для кожної утвореної команди оберемо змагання. Способів це зробити $\overline{A_3^7} = 3^7 = 2187$. Остаточно, за правилом добутку матимемо 36212176000*2187=79196028912000 способів.

Розділ 6.3 Формула включень та виключень

Нехай маємо скінченні множини X_1, X_2 .

При умові, що $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, будемо мати: $|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2|$. Нехай тепер $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, тоді в $|X_1| + |X_2|$ кожен елемент з $X_1 \cap X_2$ в правій частині формули входить в об'єднання двох множин два рази: як з $|X_1|$, так і з $|X_2|$, тому виправляємо формулу наступним чином: $|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|$.

Далі переходимо до виводу подібної формули для будь якої скінченної кількості множин. Ця формула має назву *формула включень і виключень.*

Твердження 7.

Нехай X_i – скінченна множина, i=1,2…,n, n ≥ 2, тоді:

$$|X_1 \cup ... \cup X_n| = (|X_1| + \cdots + |X_n|) - (|X_1 \cap X_2| + |X_1 \cap X_3| + \ldots$$
$$+ |X_{n-1} \cap X_n|) + (|X_1 \cap X_2 \cap X_3| + ... + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n|) -$$
$$- ... + (-1)^{n+1} |X_1 \cap ... \cap X_n|$$

Доведення.

Доведемо методом математичної індукції. При n=2 отримаємо формулу для двох скінчених множин, яка розглянута вище. Нехай формула вірна для (n-1) підмножин, де n≥3, доведемо її справедливість для n підмножин. Розіб'ємо множину $\{X_1, ..., X_n\}$ на підмножини: $\{X_1, ..., X_{n-1}\}$ і $\{X_n\}$ тоді:

$$|X_1 \cup ... \cup X_n| = |(X_1 \cup ... \cup X_{n-1}) \cup X_n| =$$
$$|X_1 \cup ... \cup X_{n-1}| + |X_n| - |(X_1 \cup ... \cup X_{n-1}) \cap X_n| =$$
$$|X_1 \cup ... \cup X_{n-1}| + |X_n| - |A_1 \cup ... \cup A_{n-1}|,$$

де $A_i = X_i \cap X_n$, $i = 1, ..., n-1$.

Використовуючи індуктивне припущення, маємо:

а)
$$|X_1 \cup ... \cup X_{n-1}| = (|X_1| + ... + |X_{n-1}|) -$$
$$(|X_1 \cap X_2| + ... + |X_{n-2} \cap X_{n-1}|) +$$
$$(|X_1 \cap X_2 \cap X_3| + ... + |X_{n-3} \cap X_{n-2} \cap X_{n-1}|) -$$
$$... + (-1)^n |X_1 \cap ... \cap X_{n-1}|;$$

б)
$$|A_1 \cup ... \cup A_{n-1}| = (|A_1| + ... + |A_{n-1}|) - (|A_1 \cap A_2| +$$
$$+ |A_1 \cap A_3| + ... + |A_{n-2} \cap A_{n-1}|) + ... + (-1)^n |A_1 \cap ... \cap A_{n-1}| =$$
$$= (|X_1 \cap X_n| + ... + |X_{n-1} \cap X_n|) - (|X_1 \cap X_2 \cap X_n| +$$
$$+ |X_1 \cap X_3 \cap X_n| + ... + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n|) + ... +$$
$$+ (-1)^n |X_1 \cap ... \cap X_n|.$$

Враховуючи а) і б) отримуємо формулу включень і виключень.

Наслідок.

Нехай скінченна множина X має підмножини $X_1,\ldots,X_n$. Тоді:

$$\left|X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_n)\right| = |X| - (|X_1| + \ldots + |X_n|) +$$
$$+ (|X_1 \cap X_2| + \ldots + |X_{n-1} \cap X_n|) - \ldots + (-1)^n |X_1 \cap \ldots \cap X_n|$$

Існує ще один зручний для розв'язання задач за допомогою формули включень і виключень спосіб запису цієї формули.

Нехай скінченна множина X містить N елементів. Введемо в розгляд властивості $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ згідно яким будуть утворені з множини X підмножини $X_i = \{x \in X \mid \alpha_i(x)\}$, елементи яких мають відповідні властивості. Позначимо $N(\alpha_i)$ – кількість елементів, що мають властивість α_i, $N(\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ik})$ – кількість елементів з X , які одночасно задовольняють властивостям $\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ik}$:

$$N(\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ik}) = |X_{i1} \cap \ldots \cap X_{ik}| = \left|\{x \in X \mid \alpha_{i1}(x) \wedge \ldots \wedge \alpha_{ik}(x)\}\right|,$$

Позначимо через $N_0 = \left|X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_n)\right|$ – число елементів, які не мають жодної з властивостей $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Як наслідок формули включень і виключень, будемо мати:

$$N_0 = N - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^n S_n,$$

де для всіх k=1,2,…,n: $S_k = \sum\limits_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} N(\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ik})$.

Відомою задачею, при розв'язанні якої використовується формула включень і виключень є ***задача***

про безладдя. Вона полягає в тому, що треба порахувати скільки існує способів розташування предметів по коміркам таким чином, щоб жоден предмет a_i не потрапив в свою комірку b_i, якщо *i*=*n* ?

Розв'язання.

На множині всіх можливих розташувань предметів по коміркам, а їх може бути всього $N = n!$, введемо в розгляд властивість α_i: «предмет a_i знаходиться в своїй комірці b_i». Для розв'язання протилежної задачі, яка полягає в підрахунку числа варіантів таких, що хоча б один предмет займе свою комірку, і буде використана формула включень і виключень. Знайдемо для неї необхідні числа:

$N(\alpha_1) = N(\alpha_2) = ... = N(\alpha_n) = (n-1)!$ – кількість розташувань таких, що предмет a_i знаходиться в своїй комірці b_i,

Відповідна сума $S_1 = n \cdot (n-1)! = n!$

$N(\alpha_1, \alpha_2) = N(\alpha_1, \alpha_3) = ... = N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) = (n-2)!$ – кількість комбінацій, коли певні 2 предмета потрапили в свої комірки.

Тоді $S_2 = C_n^2 \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! = \frac{n!}{2!}$.

$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = ... = N(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n) = (n-3)!$,

$S_3 = C_n^3 \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!(n-3)!}(n-3)! = \frac{n!}{3!}$.

Аналогічно, отримаємо $S_k = C_n^k \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!}$ $(k < n)$,

$S_n = \frac{n!}{n!} = 1$.

Таким чином, розв'язком протилежної задачі буде:

$$S_1 - S_2 + S_3 - ... + (-1)^{n-1} S_n = n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - .... + (-1)^{n-1}.$$

А для поставленої задачі про безладдя варіантів розташувань предметів по коміркам буде

$$N_0 = N - S_1 + S_2 - S_3 + ... + (-1)^{n-1} S_n =$$

$$= n! - (n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - .... + (-1)^{n-1}) =$$

$$= \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + ... + (-1)^k \frac{n!}{k!} + ... + (-1)^n.$$

Для знаходження числа елементів, які мають рівно m властивостей, використовують формулу:

$$\hat{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_{m+k}^m S_{m+k}.$$

Приклади.

1. Нехай $X = \{0,1,...,10\}$, $\alpha_1(x)$: «x парне»; $\alpha_2(x)$: "$x>6$"; $\alpha_3(x)$: "$2<x<8$". Підрахувати кількість N_0 елементів з X, які не володіють жодною з цих властивостей α_1, α_2, α_3.

Розв'язання.

Використовуючи відповідну формулу, отримаємо:

$$N_0 = N - S_1 + S_2 - S_3 = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) +$$

$$+ N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_3) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$$

$$= 11 - 6 - 4 - 5 + 2 + 2 + 1 - 0 = 1.$$

2. В студентській групі з 25 студентів відмінно англійську мову знають 10 студентів, математику – 7 студентів, програмування – 10 студентів. Англійську і математику на відмінно знають 4 студента, англійську і програмування – 6 студентів, математику і програмування – 5 студентів. Всі три предмета на відмінно знають 2. Скільки студентів мають хоча б одну відмінну оцінку? Скільки студентів мають рівно 2 відмінні оцінки та скільки не мають жодної відмінної оцінки?

Розв'язання.

Для розв'язання цієї задачі використаємо формулу включення-виключення.

S_1= 10+7+10=27, S_2= 4+6+5=15, S_3=2, N=25.

Кількість студентів, які мають хоча б одну відмінну оцінку, рахуємо за формулою:

$$\left|X_1 \cup .X_2 \cup X_3\right| = S_1 - S_2 + S_3 = 27 - 15 + 2 = 14.$$

Кількість студентів, що не мають жодної відмінної оцінки:

$$N_0 = N - \left|X_1 \cup .X_2 \cup X_3\right| = 25\text{-}14=11.$$

Для розрахунку кількості студентів, які мають 2 відмінні оцінки використаємо формулу:

$$\hat{N}_2 = \sum_{k=0}^{3-2} (-1)^k C_{2+k}^2 S_{2+k} = C_2^2 S_2 - C_3^2 S_3 =$$

$$= S_2 - \frac{3!}{2!(3-2)!} S_3 = 15 - 3 \cdot 2 = 15 - 6 = 9.$$

3. В поштоматі по коміркам для 5 адресатів розклали їх посилки. а) Скільки варіантів отримання посилок існує таких, що кожен адресат отримає не свою посилку? б) Скільки варіантів таких, що тільки один отримає свою посилку?

Розв'язання.

а) Оскільки це задача про безладдя, та вже маємо формулу для розв’язання цієї задачі, то рахуємо згідно цієї формули:

5!/2!-5!/3!+5!/4!-5!/5!=3*4*5-4*5+5-1=60-20+4=44.

б) Ця задача на використання вже іншої формули, яка рахує виконання рівно m властивостей, в даному випадку m=1:

$$\hat{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_{m+k}^{m} S_{m+k} ,$$

$$\hat{N}_1 = \sum_{k=0}^{5-1} (-1)^k C_{1+k}^{1} S_{1+k} = C_1^1 S_1 - C_2^1 S_2 + C_3^1 S_3 - C_4^1 S_4 + C_5^1 S_5 =$$

$$= 5! - 2 \cdot \frac{5!}{2!} + 3 \cdot \frac{5!}{3!} - 4 \cdot \frac{5!}{4!} + 5 = 120 - 120 + 3 \cdot 20 - 20 + 5 = 45.$$

Розділ 6.4 Поліноміальна формула

Числа кількості комбінацій називаються також біноміальними коефіцієнтами. Сенс цієї назви встановлюється наступною теоремою, відомою як *формула бінома Ньютона*:

Теорема.

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m y^{n-m}$$

Доведення.

Доведемо методом математичної індукції.

База: n=1:

$$(x+y)^1 = x+y = 1x^1y^0 + 1x^0y^1 =$$
$$= C_1^1x^1y^0 + C_1^0x^0y^1 = \sum_{m=0}^{1} C_1^m x^m y^{1-m}$$

Індукційний перехід у припущенні, що для n-1 формула вірна:

$$(x+y)^n = (x+y)\cdot(x+y)^{n-1} =$$
$$= (x+y)\cdot \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m x^m y^{n-1-m} =$$
$$= \sum_{m=0}^{n-1} x\cdot C_{n-1}^m x^m y^{n-m-1} + \sum_{m=0}^{n-1} y\cdot C_{n-1}^m x^m y^{n-m-1} =$$
$$= \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m x^{m+1} y^{n-m-1} + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m x^m y^{n-m} =$$

(у першій сумі заміна m+1=k: $\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^k y^{n-k}$ і назад перенумеруємо за індексом m)

$$= \sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1} x^m y^{n-m} + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m x^m y^{n-m} =$$
$$= \sum_{m=1}^{n-1} (C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m) x^m y^{n-m} + C_{n-1}^{n-1} x^n y^0 + C_{n-1}^0 x^0 y^n =$$
$$= \left(\begin{array}{l} \dfrac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \dfrac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} = \\ = \dfrac{(n-1)!}{m!(n-m)!} \cdot \left(\dfrac{m}{1} + \dfrac{n-m}{1} \right) = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m \end{array} \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} C_n^m x^m y^{n-m} + C_n^n x^n y^{n-n} + C_n^0 x^0 y^{n-0} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m y^{n-m}.$$

Теорема доведена.

Наслідок.

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$$

Доведення.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m .$$

Існує відомий *трикутник Паскаля,* який через рекурентну формулу дозволяє обчислювати біноміальні коефіцієнти:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Як можна помітити кожне число рядка є сумою двох чисел, що стоять над ним рядком вище. Число C_n^m розташоване в (n+1)-ому рядку на (m+1)-ому місці.

Взагалі, розглянута нами теорема є окремим випадком при к=2 наступної.

Теорема.

$$(x_1 + ... + x_k)^n = \sum_{n_1+\ldots+n_k=n} C_n^{n_1,\ldots n_k} \cdot x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$$

Ця формула називається *поліноміальною*, де підсумовування проводиться за всіма розв'язками рівняння:

$n_1+\ldots+n_k=n$ в цілих невід'ємних числах, при цьому: $C_n^{n_1,\ldots,n_k} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

<u>Приклад.</u>

1. Визначити коефіцієнт C в одночлені $Cx_1^3x_2^4x_3^3$ многочлена, який одержуватиме з виразу $(x_1+x_2+x_3)^{10}$.

<u>Розв'язання.</u>

У силу розглянутої вище теореми маємо: $C = C_{10}^{3,4,3} = \dfrac{10!}{3!4!3!} = 4200$.

Властивості біноміальних коефіцієнтів.

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$

2) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

3) $C_n^i C_i^m = C_n^m C_{n-m}^{i-m}$

ГЛАВА 7 ТЕОРІЯ ГРАФІВ

Розділ 7.1 Основні поняття та визначення теорії графів

Неформально граф можна визначити, як геометричну структуру, що складається з розкиданих в просторі або на площині точок (**вершин** графа), серед яких деякі пари точок з'єднані відрізками або кривими (**ребрами**). Треба відмітити, що не має особливого значення, як вершини розташовані в просторі або на площині, і яку конфігурацію мають ребра.

Теорія графів представляє дуже зручну мову для опису програмних та інших моделей. Спеціальні терміни та позначення в теорії графів дають можливість просто та доступно описувати точні і достатньо складні обчислення. Особливо важливою є наявність наочної графічної інтерпретації поняття графа. Картинки дозволяють відразу зрозуміти суть справи на інтуїтивному рівні, доповнюючи текстові докази і складні формули.

Оскільки конфігурація графа не важлива, то його можна уявити безліччю способів. Наприклад, фігури: а), б), в), що на рис. 25 являють собою один і той самий граф.

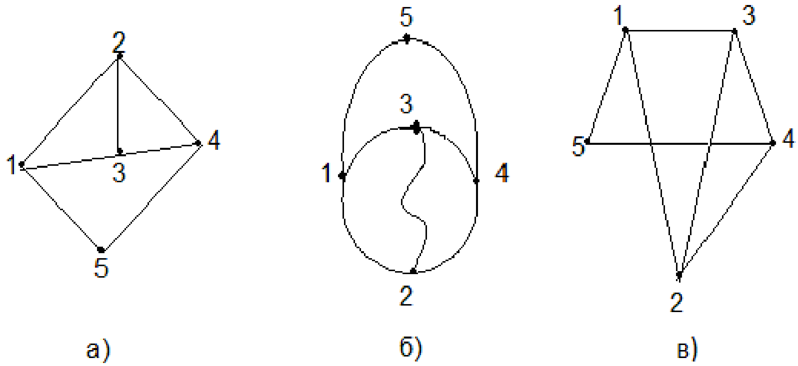


Рис. 25

Іншими словами, графи а), б), в) *ізоморфні* між собою, а це означає, що існує взаємно однозначна відповідність як між вершинами графів, так і між ребрами, які з’єднують ці вершини.

Зауваження. При зображенні графа на площині забороняється допускати самоперетин ребер, на рис. 26 не ребро графа.

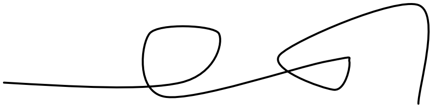


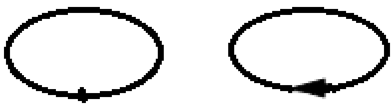
Рис. 26

Визначення. *Графом G* називається пара множин (V; E), де V – множина *вершин*, яка занумерована числами 1, 2…, n; V={v}, E – множина впорядкованих або невпорядкованих пар E={e}, e = (V_1,V_2), які називаються відповідно *дугами* або *ребрами*.

V_1 V_2 V_3 V_4

а) ребро б) дуга

Якщо у ребра або дуги початок і кінець збігаються, то їх називають *петлями*:



V_1 V_2

Рис. 27

Вершини v_1, v_2 називаються *суміжними*, якщо їх пара утворює ребро або дугу, тобто якщо в графі G = (V,E) існує ребро e = (v_1, v_2)$\in$E. У цьому випадку кожна з вершин v_1, v_2 та ребро e називаються *інцидентними*. Два *ребра суміжні,* якщо вони мають спільну вершину.

Всякому n-вершинному графу однозначно відповідає *матриця суміжності* C=(c_{ij}) розмірністю n x n, де c_{ij}=1, якщо існує ребро (або дуга) e = (v_i ,v_j)$\in$E, c_{ij}=0 у протилежному випадку. Наприклад, для графа на рис.25 матриця суміжності буде виглядати наступним чином:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У множині E допускається більш ніж одне ребро з однаковими парами кінцевих вершин. Такі ребра називають *паралельними (кратними)*. Граф, в якому присутні паралельні ребра називають *мультиграфом*.

Визначення. Граф називається *простим*, якщо він не містить петель і паралельних ребер. Граф, що не містить ребер, називається *порожнім*, граф, який не має вершин – *нуль-графом*.

Визначення. Число інцидентних вершині V_i ребер називається *степенем вершини* і позначають $d(V_i)$. Вершину степеня 1 називають *висячою* вершиною, інцидентне їй ребро теж називається *висяче.* Вершину степеня 0 називають *ізольованою*. За визначенням петля при вершині V_i додає число 2 в ступінь вершини.

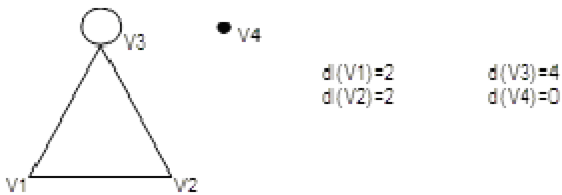


Рис. 28

Теорема 1. Сума степенів вершини графа G дорівнює 2m, де m – число ребер графа G.

Теорема 2. Число вершин непарного степеня в будь-якому графі є парним числом.

Визначення. Граф G’=(V’,E’) називається *підграфом* графа G=(V, E), якщо мають місце включення: $V' \subset V$, $E' \subset E$, та хоча б одне з них строге (рис.29 а), б)).

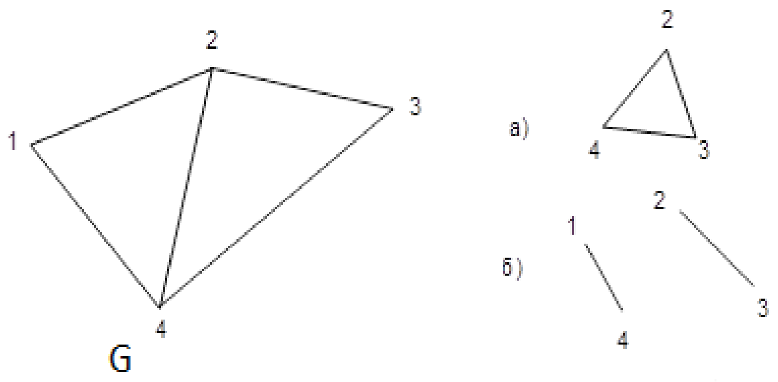
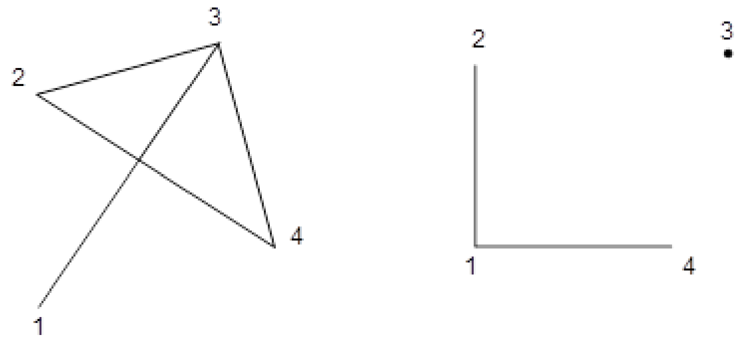


Рис. 29

Визначення. Частина G’=(V’,E’) називається *суграфом* або *кістяковим підграфом* графа G, якщо виконані умови: $V'=V$, $E' \subset E$, але $E' \neq E$ (у нашому прикладі на рис.29 це б)).

Визначення. Граф G’=(V,E’) називається *доповненням* простого графа G=(V,E), якщо ребро (V_i,V_j) належить E’ в тому і тільки в тому випадку, коли воно не належить E, тобто V_i і V_j суміжні в G’ тоді і тільки тоді, коли ці вершини не суміжні в G.



G G’

Рис. 30

<u>Визначення.</u> Нехай G’=(V’; E’) є підграфом графа G=(V,E). Підграф G’’=(V’; E\E’) графа G буде називатися *доповненням G’ до G.*

<u>Визначення.</u> Якщо елементами множини E є впорядковані пари, то граф називається *орієнтованим*; якщо елементом E може бути пара однакових елементів, тобто існують петлі, то граф називається *псевдографом*.

<u>Зауваження.</u> Всі наведені вище і нижче терміни сформульовані для графів неорієнтованих, проте вони вірні і для орієнтованих графів (орграфів), з тією лише відмінністю, що терміни ребро, ланцюг, цикл замінюються на терміни дуга, шлях, контур відповідно.

Нехай маємо неорієнтований граф G(V,E).

<u>Визначення.</u> *Маршрутом довжини L-1* з вершини V_1 до вершини V_L називається послідовність $M=\{(V_1,V_2), (V_2,V_3), \dots, (V_i,V_{i+1}), \dots, (V_{L-1},V_L)\}$ яка складається з ребер $e=(V_s,V_{s+1}) \in E$, при цьому кожні два сусідніх ребра мають спільну вершину. При цьому *довжиною* маршруту M

називається кількість ребер в ньому. Наприклад, M={(1,3),(3,4),(4,2)} маршрут графа з рис. 30 довжиною 3. Якщо $V_1=V_L$, то маршрут замкнений, інакше – відкритий. Маршрут буде називатися *ланцюгом*, якщо у нього всі ребра різні. Якщо ж ще всі його вершини різні, то відкритий ланцюг (шлях) називається *простим ланцюгом (шляхом)*. Замкнений ланцюг буде називатися *простим циклом*, якщо всі його вершини різні, за винятком рівних кінцевих вершин: $V_1=V_L$.

Визначення. *Відстанню d(U,V) між вершинами U* і *V* називається довжина найкоротшого ланцюга, що з'єднує вершини *U* і *V*, а відповідний ланцюг – *геодезичним*.

Визначення. Шлях і цикл називаються *гамільтоновими*, якщо вони прості і проходять через всі вершини графа.

Визначення. *Діаметром* графа D(G) – називається довжина найдовшого геодезичного ланцюга.

Властивості шляхів і циклів

1) ступінь кожної не кінцевої вершини шляху дорівнює 2, кінцевої – 1;
2) кожна вершина циклу має ступінь 2 або іншу парну ступінь;
3) число вершин у ланцюгу на одиницю більше числа ребер, тоді як в простому циклі число ребер дорівнює числу вершин.

Важливим поняттям в теорії графів є зв'язність.

Визначення. Дві вершини V_i і V_j називаються *зв'язаними* в графі G, якщо в ньому існує шлях V_i – V_j. А граф, в якому всі вершини зв'язані, називається *зв'язним*.

Множину вершин V довільного графа можна розбити на такі підмножини $V_1, V_2, \ldots, V_p$, що підграфи, побудовані на відповідних множинах V_i ($i=1, \ldots, p$) є зв'язними, і ніяка вершина підмножини V_i не зв'язана ні з якою вершиною підмножини V_j, $V_i \cap V_j = \varnothing$, $i \neq j$. Підграфи $G_i = (V_i, E_i)$ ($i = 1, \ldots, p$) називаються *компонентами зв'язності* графа G. Ізольована вершина також є окремою компонентою зв'язності, вона вважається зв'язаною сама з собою.

Твердження. Якщо G - зв'язний граф, то у нього одна компонента зв'язності – G.

Визначення. *Мостом* графа $G = (V, E)$ називається таке ребро $e \in E$, що граф – $G=(V, E \setminus \{e\})$ (тобто без цього ребра) має більше компонент зв'язності (рис. 31, e – міст).

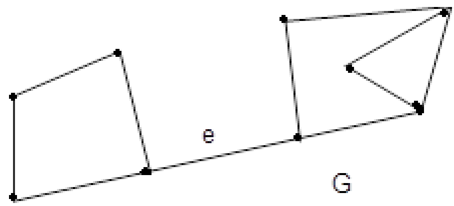


Рис. 31

Розділ 7.2 Види графів

1). **Тривіальний** – складається з однієї вершини.

2). **Повний** – граф, в якому кожна пара вершин суміжна. K_p – повний граф з p вершинами; число ребер в такому графі дорівнює $m(K_p) = C_p^2 = (p \cdot (p-1))/2$. Наприклад на рис.32 представлено повний граф з 4-ма вершинами.

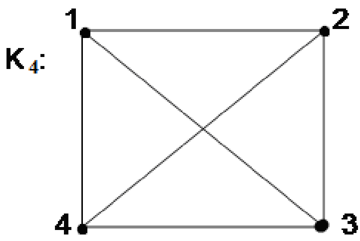


Рис. 32

3). **Дводольний** граф G(V,E): $V=V_1 \bigcup V_2$, $V_1 \bigcap V_2=\varnothing$, причому кожне ребро $e \in E$ є інцидентним вершинам з множин V_1 і V_2. V_1, V_2 – частки дводольного графа. Якщо дводольний граф містить всі ребра, що з'єднують всі вершини множини V_1 зо всіма вершинами з V_2, то він називається *повним дводольним* графом і позначають $K_{m,n}$, де $|V_1|=m$ і $|V_2|=n$. (Рис. 33).

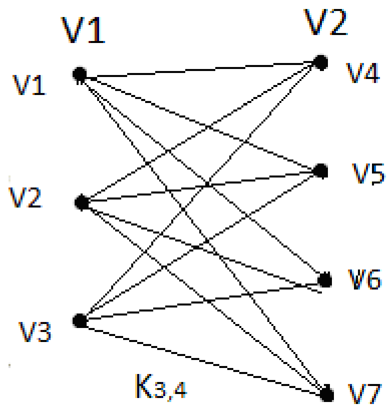


Рис. 33

4). **Зважені** графи – граф G(V,E) називається зваженим по вершинах, якщо на множині його вершин визначена вагова функція U(v), $v \in V$. Граф G(V,E) називається зваженим по ребрах, якщо на множині його ребер визначена вагова функція C(e), $e \in E$.

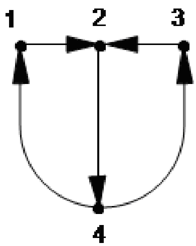
5). **Орієнтований** граф (орграф) – дугам присвоюється орієнтація, що позначається стрілками, спрямованими від початкової вершини до кінцевої.

Напівстепенем входу $d^+(v_i)$ вершини v_i називається число дуг, які заходять в вершину, а *напівстепенем виходу* $d^-(v_i)$ – число дуг, які виходять з вершини v_i.

Теорема. В орієнтованому графі, що містить m дуг, сума напівстепенів входу дорівнює сумі напівстепенів виходу і дорівнює m.

Вершини v_i і v_j орграфа G називаються *сильно зв'язаними*, якщо в G існують орієнтовані шляхи з v_i у v_j, а також з v_j у v_i; орграф називається *сильно зв'язним* якщо сильнозв'язані всі його вершини.

Орграф G називається *мінімально зв'язним*, якщо він сильно зв'язний, і видалення будь-якої дуги позбавляє його цієї властивості. На рис.34 мінімально зв'язний орграф.



$m=5$ $d^+(1)=1$ $d^-(1)=1$ $d^+(3)=1$ $d^-(3)=1$

$d^+(2)=2$ $d^-(2)=1$ $d^+(4)=1$ $d^-(4)=2$

$\sum d^+ =1+2+1+1=5$

$\sum d^- =1+1+1+2=5$

Рис. 34

6). **Дерево**. Граф без циклів буде називатися *ациклічним або лісом*. Зв'язний ациклічний граф називається *деревом*. Таким чином, компонентами зв'язності лісу є дерева. *Деревом на графі G* називається зв'язний ациклічний підграф графа G. *Остов T графа G* – це дерево на графі G, що містить всі вершини графа G. Зв'язний підграф дерева T називається *піддеревом T*. *Кодерево T** остова T графа G є підграф графа G, що містить всі вершини G і тільки ті ребра G, які не містяться в T. Ребра остова T називаються *гілками* T, а ребра відповідного кодерева T* – *хордами або зв'язками*. Кодерево може бути як зв'язним, так і незв'язним графом.

<u>Теорема.</u> Для графа G, що має n вершин і m ребер, наступні твердження еквівалентні:

(1) G є деревом;

(2) існує тільки один шлях між будь-якими двома вершинами в G;

(3) G є зв'язним і m=n-1;

(4) G – ациклічний граф і m=n-1;

(5) G – ациклічний граф, і при з'єднанні ребром довільних двох несуміжних вершин буде отримано граф, що має рівно один цикл.

7). **Орієнтоване дерево** – це ациклічний орграф, в якому існує рівно одна вершина, яка має нульову напівстепінь входу, у всіх інших вершин напівстепінь входу 1. Вершина, що має нульовий напівстепінь входу буде називатися *коренем* дерева, а вершини, у яких нульовий напівстепень виходу (тобто з яких не буде виходити жодне ребро) будуть називатися *кінцевими вершинами* або *листям*.

Якщо в орграфі існує вершина, від якої можна дістатися орієнтованим шляхом до всіх інших вершин графа, то вона називається коренем. При цьому орграф, в якому є корінь, називається *квазісильно зв'язним*. Квазісильно зв'язний граф не завжди є орієнтованим деревом.

Теорема. Нехай G орграф на N>1 вершинах. Тоді наступні твердження еквівалентні:

1. G – орієнтоване дерево.
2. У графі G є вершина r, з якої є тільки один орієнтований шлях в будь-яку іншу вершину графа G.
3. Граф G – квазісильно зв'язний і втрачає цю властивість при видаленні з нього будь-якої дуги.
4. Граф G – квазісильно зв'язний і має таку вершину r, що $d^+(r)=0$, $d^+(v)=1$ при $v \neq r$.
5. Граф G не має циклів у відповідному неорієнтованому графі і містить таку вершину r, що $d^+(r)=0$, $d^+(v)=1$ при $v \neq r$ (r – корінь).
6. Граф G квазісильно зв'язний без циклів у відповідному неорієнтованому графі.

Підграф орграфа G називається *орієнтованим кістяком графа G*, якщо він є орієнтованим деревом і містить всі вершини графа G.

Теорема. Якщо орграф G квазісильно зв'язний, то він має орієнтований кістяк.

Розділ 7.3 Операції над графами

1. Об'єднання графів: $G_1(V_1,E_1) \cup G_2(V_2,E_2)$ – це граф $G(V,E)$, де $V=V_1 \cup V_2$; $E=E_1 \cup E_2$ (рис. 35).

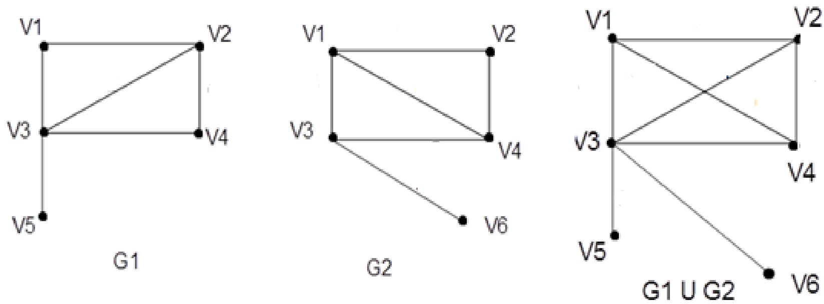


Рис. 35

2. З’єднання графів: $G_1(V_1,E_1)+G_2(V_2,E_2)$, за умови що $V_1 \cap V_2=\varnothing$, $E_1 \cap E_2=\varnothing$ – це граф $G(V,E)$, де $V=V_1 \bigcup V_2$ і $E=E_1 \bigcup E_2 \bigcup \{e=(v_1,v_2): v_1 \in V_1$ і $v_2 \in V_2\}$ (рис. 36).

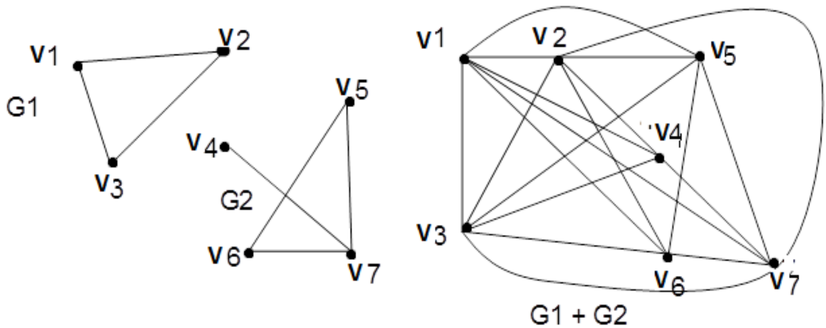


Рис. 36

3. Видалення вершини u з графа: $G_1(V_1,E_1)–u$ за умови що $u \in V_1$ – це граф $G_2(V_2,E_2)$, де $V_2=V_1 \setminus \{u\}$ і $E_2=E_1 \setminus \{e=(u,v_i)$ для кожного $i\}$ (рис. 37).

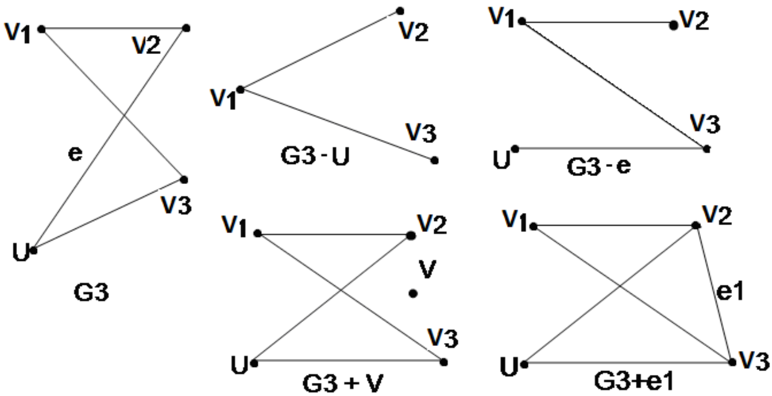


Рис. 37

4. Видалення ребра e з графа: $G_1(V_1,E_1)–e$ – це граф $G_2(V_2,E_2)$, де $V_2=V_1$, $E_2=E_1\setminus\{e\}$ (рис.37).

5. Додавання вершини v в граф: $G_1(V_1,E_1)+v$ – граф $G_2(V_2,E_2)$, де $V_2=V_1\cup\{v\}$ і $E_2=E_1$ (рис.37).

6. Додавання ребра e в граф: $G_1(V_1,E_1)+e$ дає граф $G_2(V_2,E_2)$, де $V_2=V_1$ і $E_2=E_1\cup\{e\}$ (рис.37).

7. Кільцева сума двох графів:

$G_1(V_1, E_1)\oplus G_2(V_2, E_2)$ – це граф $G(V,E)$, де $E=E_1\oplus E_2$ ($\oplus$ – симетрична різниця), $V=V_1\cup V_2\setminus$\{ізольовані вершини\}, тобто граф не має ізольованих вершин і складається тільки з тих ребер, які присутні або в G_1, або в G_2, але не в обох графах одночасно (рис.38).

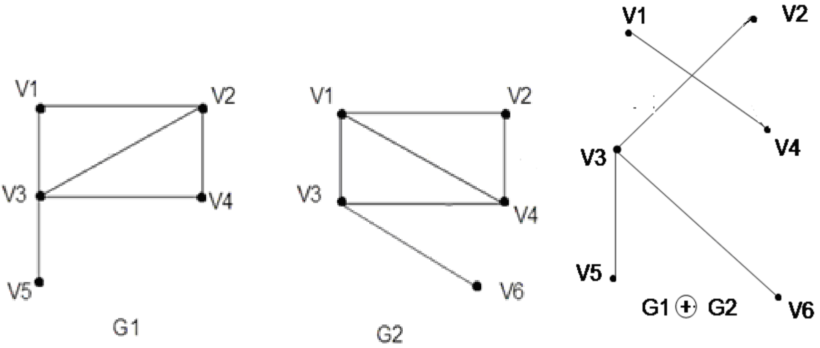


Рис. 38

8. Стягування підграфу A графа $G_1=(V_1,E_1)$: $G_1=(V_1,E_1)\backslash A$, $(A\subset G_1=(V_1,E_1))$. Результатом є граф $G_2(V_2,E_2)$, де $V_2=(V_1\backslash\{v\in A\})\bigcup\{u\}$, вершина $u\notin V_1$ і $E_2=(E_1\backslash\{e=(v,w): v,w\in A\})\bigcup\{e=(u,w^*): \; w^*\in\Gamma(A)\backslash\{v\in A\}\}$, де $\Gamma(A)$ – це множина всіх вершин множини V_1, які суміжні з вершинами підграфа A (рис.39).

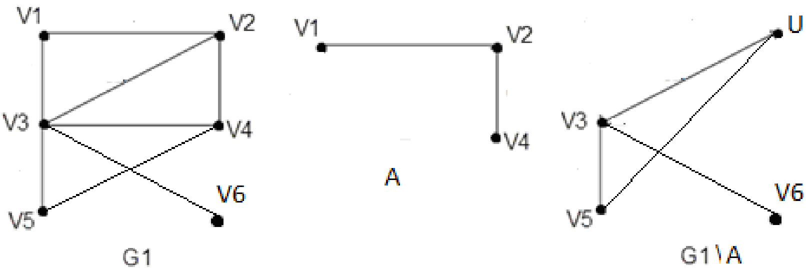


Рис. 39

Найпростішим випадком цієї операції є стягування ребра (дуги). Вона означає видалення ребра, після чого ототожнення кінцевих суміжних його вершин. Якщо граф G_2 отримується з G_1 у результаті послідовності стягування ребер (дуг), то говорять, що граф G_1 *стягується до графа* G_2. Наприклад:

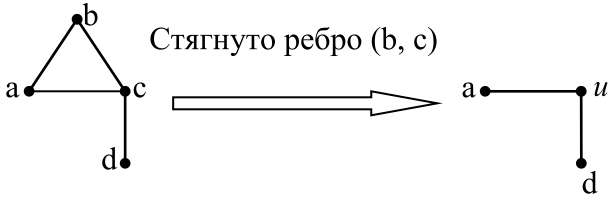


Рис. 40

9. Розмноження вершини u графа: $G_1(V_1,E_1)\uparrow u$. Позначимо: $u \in V_1$, $u^* \notin V_1$. В результаті отримаємо граф $G_2(V_2,E_2)$, де $V_2=V_1 \cup \{u^*\}$ і $E_2=E_1 \cup \{(u, u^*)\} \cup \{e=(v, u^*): v \in \Gamma(u)\}$, де $\Gamma(u)$ – множина суміжних вершин з u (рис.41).

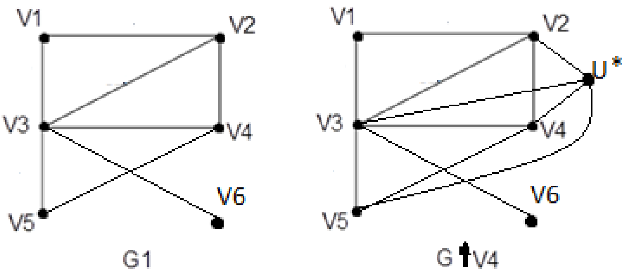


Рис. 41

10. Розщеплення або роздвоєння вершини графа. Візьмемо вершину v графа $G=(V,E)$. Множину $\Gamma(v)$ усіх вершин, що суміжні з нею, довільним чином розіб'ємо на підмножини $\Gamma_1(v)$, $\Gamma_2(v)$: $\Gamma_1(v) \cup \Gamma_2(v) = \Gamma(v)$, $\Gamma_1(v) \cap \Gamma_2(v) = \varnothing$. Видалимо вершину v разом з усіма інцидентними їй ребрами, після цього додамо ще дві нові вершини v_1 і v_2, що з'єднані ребром (v_1, v_2). Одну з них, наприклад вершину v_1 з'єднаємо з кожною вершиною множини $\Gamma_1(v)$ ребром, а іншу вершину v_2 з'єднаємо з кожною вершиною із множини $\Gamma_2(v)$. У результаті з графа G буде отримано новий граф G'. Така операція буде називатися *розщепленням вершини* v (рис.42).

Рис.42

11. Добуток графів: $G_1(V_1,E_1)*G_2(V_2,E_2)$ – це граф $G(V,E)$, де $|V|=|V_1|*|V_2|$; $v_{ij} \in V$, якщо $v_i \in V_1$ та $v_j \in V_2$; $e=(v_{ij},v_{km}) \in E$, якщо:

1) $e_1=(v_i,v_k) \in E_1$ при j=m, або

2) $e_2=(v_j,v_m) \in E_2$ при i=k (рис.43).

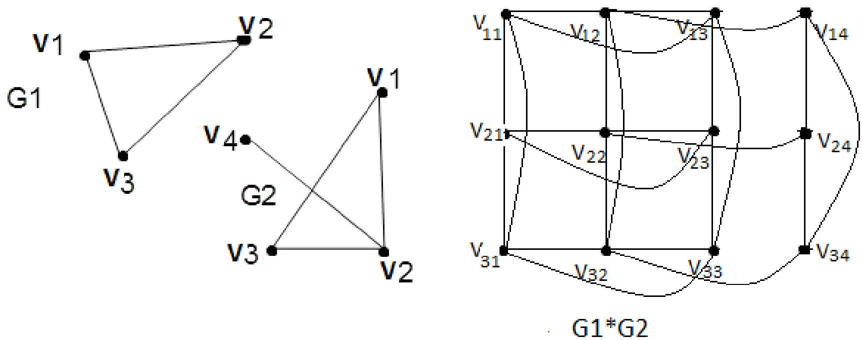


Рис. 43

Розділ 7.4 Екстремальні задачі на графах

7.4.1 Загальна постановка задачі

Дано граф G=(V,E), у якого ребра можуть бути зважені числами w(e), $e \in E$ або не зважені. Для даної задачі визначається множина допустимих розв'язків X={x}, де x – це деякий частковий граф $x=(V_x,E_x)$, $V_x \subset V$, $E_x \subset E$, який задовольняє умовам задачі. У деяких випадках x являє собою мультиграф (тобто граф, що має паралельні ребра) такий, що вихідний граф G є по відношенню до нього частковим графом (суграфом). На множині X={x} визначається цільова функція: $F(x) \rightarrow extr$, $x \in X$, де extr={max, min}. Задача полягає в тому, щоб знайти оптимальний елемент $x_0 \in X$, тобто такий розв'язок, який задовольняє одній з умов:1) $F(x_0)=\min F(x)$, або 2) $F(x_0)=\max F(x)$, де $x \in X$.

Практично всі відомі екстремальні задачі на графах мають власні назви: задача комівояжера, якщо x – гамільтонів цикл; задача про кістякове дерево мінімальної ваги, якщо x – кістякове дерево; задача про найкоротший ланцюг, якщо x – простий ланцюг і т.д.

7.4.2 Задача про кістякове дерево мінімальної ваги

Якщо задати ваги (довжини) ребер, то можна поставити задачу знаходження найкоротшого кістяка. Ця задача має безліч практичних інтерпретацій. Наприклад, нехай маємо множину аеродромів і потрібно визначити мінімальний (за сумою відстаней) набір авіарейсів, який дозволив би перелетіти з одного аеродрому на будь-який інший. Розв'язком цієї задачі буде найкоротший кістяк повного графа відстаней між аеродромами. Розглянемо два алгоритми розв’язання цієї задачі.

Алгоритм Прима

Алгоритм Прима для n-вершинного графа G=(V,E) складається з кроків S=1,2, ... , (n-1), де |V|=n і на кожному кроці будується зростаюче дерево $D_S=(V_S,E_S)$ $V_S \subset V$, $E_S \subset E$.

S=1. Візьмемо довільну вершину V_0. Серед усіх ребер, що інцидентні вершині V_0 знайдемо найкоротше ребро $e_1=(v_0,v_1)$ (мінімальної ваги). Будемо вважати, що побудовано дерево $D_1=(V_1, E_1)$, $V_1 =\{v_0,v_1\}$, $E_1=\{e_1\}$, після чого переходимо до кроку S=2.

Нехай вже виконано S < n-1 кроків, після яких в графі G виділено дерево $D_S=(V_S,E_S)$. На кроці (s+1) необхідно серед усіх ребер e=(v’,v’’), де $v' \in V_S$, $v'' \in (V \backslash V_S)$, знайти найкоротше – $e_{s+1}=(v_k,v_{s+1})$ і приєднати його до дерева D_S. У результаті отримаємо дерево $D_{S+1}=(V_{S+1},E_{S+1})$ з множиною вершин $V_{S+1}=V_S \bigcup \{v_{s+1}\}$ та ребер $E_{s+1}=E_s \bigcup \{e_{s+1}\}$. Алгоритм буде закінчувати роботу в двох випадках:

1) безрезультативно, коли G – незв’язний граф;

2) результативно при S = n-1, якщо граф зв’язний.

<u>Приклад.</u> Задано зважений за ребрами граф. Знайдемо мінімальний кістяк методом Прима, виконуючи алгоритм за кроками (рис. 44):

1) $(v_1,v_2) – 1$;
2) $(v_1,v_7) – 3$;
3) $(v_7,v_6) – 1$;
4) $(v_7,v_9) – 3$;
5) $(v_9,v_8) – 2$;
6) $(v_9,v_3) – 3$;

7) $(v_3,v_4) - 2$;

8) $(v_3,v_5) - 3$.

$W = 1+3+1+3+2+3+2+3=18$

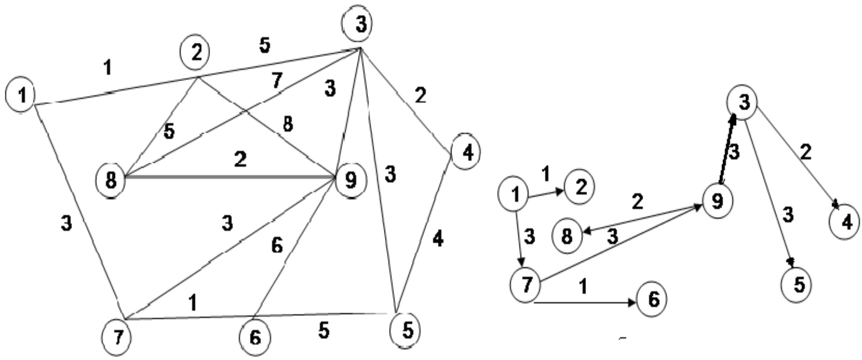


Рис. 44

Алгоритм Краскала

Складається з двох етапів:

1. Підготовчий. Всі ребра даного графа G впорядковуються в послідовність в порядку неспадання ваг цих ребер:

$$e_1, e_2, \ldots, e_m, \quad m=|E|$$

$$w(e_1) \le w(e_2) \le \ldots \le w(e_3) \le \ldots \le w(e_m)$$

2. Виконується за кроками $S=1,\ldots,m_0 < m$ наступним чином: на кроках $S=1,2$ ребра e_1, e_2 з послідовності фарбуються (включаються в розв'язок), на кожному наступному кроці $S\ge 3$, розглядається ребро e_s з послідовності і воно забарвлюється тоді і тільки тоді, коли не утворює циклу з ребрами, які вже є пофарбованими на попередніх кроках. В іншому випадку ребро e_s умовно викреслюється з графа $G=(V,E)$. Алгоритм закінчує роботу на кроці $S=m_0$,

коли пофарбованими виявляться (n-1) ребер, де n=|V|. Пофарбовані ребра будуть утворювати кістякове дерево n-вершинного графа мінімальної ваги.

Приклад. Візьмемо граф з рис.44 і запишемо алгоритм Краскала для нього. Всі ребра запишемо в порядку неспадання їх ваг, потім з цієї послідовності зафарбуємо 7 послідовних ребер, що не утворюють цикл:

(1,2), (7,6), (8,9), (3,4), (1,7), (3,5), (3,9), (7,9), ~~(4,5)~~, ~~(2,3)~~, ~~(2,8)~~, ~~(6,5)~~, ~~(6,9)~~, ~~(3,8)~~, ~~(2,9)~~

В результаті отримуємо мінімальний кістяк заданого графа (рис. 45):

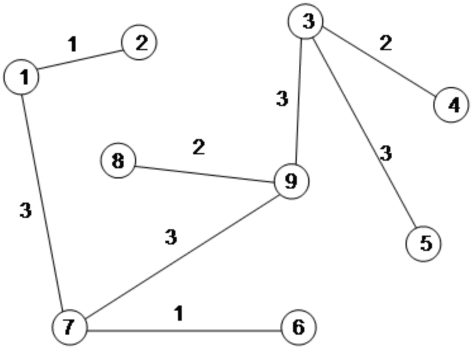


Рис. 45

7.4.3 Задача про знаходження найкоротшого ланцюга

Постановка задачі: дано n-вершинний граф G=(V, E), в якому виділено пара вершин $v_0, v' \in V$, і всі ребра зважені числами $w(e) \geq 0$. Нехай $X=\{x\}$ – це множина всіх простих ланцюгів, які з'єднують v_0 з v', $x=(V_x,E_x)$. Цільова функція $F(x)=\sum w(e) \rightarrow \min$. Тобто необхідно знайти простий ланцюг мінімальної ваги, що з'єднує дві задані вершини.

Алгоритм Дейкстри

Введемо поняття *«К-ої найближчої вершини»*, яке визначається індуктивно:

1-й крок індукції. Зафіксуємо початкову вершину v_0 та розглянемо множину E_1 всіх тих ребер $e \in E$, що інцидентні v_0. Серед $e \in E_1$ обираємо ребро $e^{(1)} = (v_0, v_1)$, яке має найменшу вагу, тобто $w(e^{(1)}) = min(w(e))$. Тоді v_1 будемо називати *першою найближчою вершиною*, а значення $w(e^{(1)})$ позначимо $L^{(1)} = l(v_1)$ та назвемо *відстанню* до обраної найближчої вершини, приймемо $l(v_0) = 0$. $V_1 = \{v_0, v_1\}$ – множина найближчих вершин на цьому кроці.

2-й крок індукції. Будемо розглядати множину всіх ребер виду $e = (v', v'')$, $e \in E$, де $v' \in V_1$, $v'' \in (V \setminus V_1)$ і позначимо її через E_2. Вже всім найближчим вершинам $v \in V_1$ приписані відстані l(v) до початкової вершини – кореня v_0. Далі введемо позначення: U_1 – це множина таких вершин $v \in (V \setminus V_1)$, що для них є ребра вигляду: $e = (v', v)$, де $v' \in V_1$. Серед усіх ребер $e \in E_2$ виберемо таке ребро $e_2 = (v', v_2)$, для якого величина $l(v') + w(e_2)$ буде найменшою. Тоді v_2 буде називатися *другою найближчою вершиною*. А нове зростаюче дерево буде складатися з ребер e_1, e_2: $D_2 = \{e_1, e_2\}$ і мати множину найближчих вершин: $V_2 = \{v_0, v_1, v_2\}$.

(S+1)–й крок індукції. В результаті попередніх S кроків було виділено множину (S+1) найближчих вершин –

$V_S = \{v_0, v_1, ..., v_S\}$ та побудовано відповідне зростаюче дерево – $D_S = \{e_1, e_2, ..., e_S\}$. При цьому для кожної вершини $v \in V_S$ було обчислено відстань $l(v)$ до кореня v_0 від v; та позначено через U_S множину вершин $v \in (V \setminus V_S)$ таких, що для них існують ребра вигляду $e = (v', v)$, де $v' \in V_S$. На цьому кроці для кожної вершини $v_r \in V_S$ потрібно обчислити наступну відстань: $L^{(s+1)}(v_r) = l(v_r) + min(w(v_r, v))$, де min береться за всіма ребрами $e = (v_r, v)$. Після чого необхідно знайти min серед $L^{(s+1)}(v_r)$. Будемо вважати, що цей min дає приєднання ребра (v_{r0}, v^*), $v^* \in (V \setminus V_S)$, позначимо v* через v_{s+1}, яка і буде (S+1)-ою найближчою вершиною. Отримаємо множину $V_{S+1} = V_S \cup \{v_{S+1}\}$ та нове зростаюче дерево $D_{S+1} = D_S \cup \{v_{r0}, v_{S+1}\}$. (S+1)-й крок буде завершуватися перевіркою чи буде чергова найближча вершина v_{s+1} той зазначеною вершиною v', яка повинна бути пов'язана найкоротшим ланцюгом із початковою вершиною v_0. При виконанні цієї умови, шуканий ланцюг знайдено і він відновлюється однозначно із зростаючого дерева D_{S+1}, а його довжина буде дорівнювати $l(v_{s+1}) = l(v_{r0}) + w(v_{r0}, v_{s+1})$. В іншому випадку слідує переходити до кроку S+2.

<u>Приклад.</u> Нехай задано граф G(V,E), в якому відзначено дві вершини v_0, v' $\in$ V. Знайти мінімальний ланцюг між ними (рис. 46).

Будемо позначати найближчі вершини $v_1, v_2, v_3 \ldots$ у порядку їх появи. Запишемо алгоритм Дейкстри за кроками, які відображено на рис.47:

1) v_1, e_1 $l(v_1)=1$ $D_1=\{e_1\}$
2) v_2, e_2 $l(v_2)=2$ $D_2=\{e_1, e_2\}$
3) v_3, e_3 $l(v_3)=4$ $D_3=\{e_1,e_2,e_3\}$
4) v_4, e_4 $l(v_4)=7$ $D_4=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$
5) v_5, e_5 $l(v_5)=9$ $D_5=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$
6) v_6, e_6 $l(v_6)=18$ $D_6=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$
7) v_7, e_7 $l(v_7)=19$ $D_7=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$
8) v_8, e_8 $l(v_8)=20$ $D_8=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\}$
9) v_9, e_9 $l(v_9)=20$ $D_9=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9\}$
10) v_{10}, e_{10} $l(v_{10})=21$ $D_{10}=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$
11) v_{11}, e_{11} $l(v_{11})=22$ $D_{11}=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11}\}$
12) v_{12}, e_{12} $l(v_{12})=32$ $D_{12}=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12}\}$
13) v_{13}, e_{13} $l(v_{13})=37$ $D_{13}=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12},e_{13}\}$
14) $v_{14}=v', e_{14}$ $l(v_{14})=50$

$D_{14}=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12},e_{13},e_{14}\}$

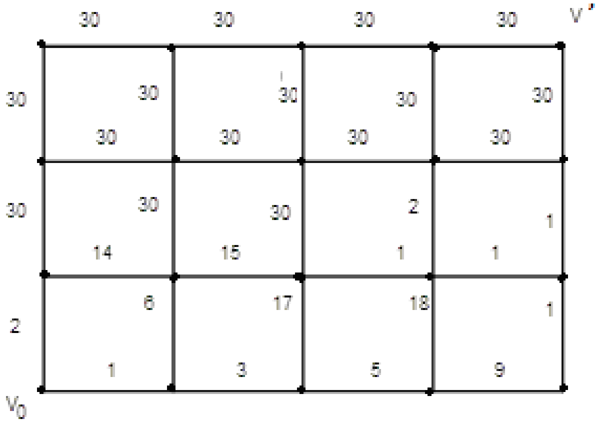


Рис. 46. Заданий граф G(V,E)

В результаті отримаємо дерево, з якого виділяємо ланцюг: C={e_1,e_3,e_5,e_6,e_7,e_9,e_{14}} мінімальної ваги $l(v_{14})$=50.

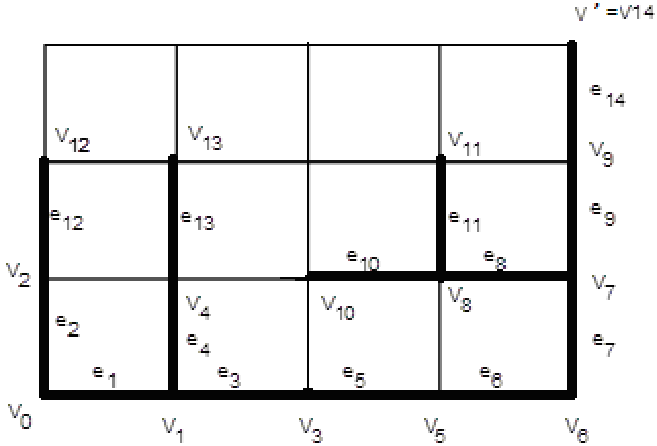


Рис. 47. Результат алгоритму Дейкстри

7.4.4 Гамільтонові графи

Визначення. *Гамільтоновим циклом* в графі G буде називатися простий цикл, який складається з усіх вершини графа G. *Гамільтонів шлях* в G – це простий шлях, що містить всі вершини графа G. Граф G називається *гамільтоновим*, якщо в ньому буде існувати гамільтонів цикл.

Теорема (Перепелиця). Майже всі графи гамільтонові. Зміст цього твердження полягає в тому, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|H(n)|}{|G(n)|}=1,$$

де $G(n)$ – всі графи з n вершинами, $H(n)$ – гамільтонові графи з n вершинами.

Задача Комівояжера

Постановка: комівояжеру необхідно відвідати кілька міст. Який маршрут він повинен обрати, щоб, почавши рухатися зі свого рідного міста, побувати в кожному місті по одному разу, а потім повернутися додому по найкоротшому шляху? При цьому відомо відстань між кожною парою міст.

Будемо уявляти міста у вигляді вершин графа, а дороги – у вигляді його ребер. Довжина дороги – вага відповідного ребра. Якщо між кожною парою міст буде існувати дорога, що їх з'єднує, то математична постановка задачі буде записана наступним чином: у зваженому повному графі необхідно знайти гамільтонів цикл, який має мінімальну вагу. При цьому під вагою циклу будемо розуміти суму ваг всіх ребер, які належать цьому циклу.

Для задачі комівояжера одним з найбільш популярних методів її розв'язання є алгоритм «гілок та границь». Він є досить громіздкий, тому ми в нашому курсі розглянемо метод, який має назву «йди в найближчий» знаходження гамільтонова циклу з мінімальною вагою. Взагалі кажучи, цей алгоритм дає наближений розв'язок.

Алгоритм виконується по кроках S=1,2,…,n, де n – число вершин графа. На кроці S=1 фіксуємо вершину $v_1 \in V$ а також розглядаємо множину $E(v_1) \subset E$ тих ребер, що інцидентні v_1. Серед цих ребер вибираємо найкоротше, таке ребро $e_1=(v_1, v_2)$, що його вага $w(e_1)=\min\limits_{e \in E(v_1)} w(e)$. Потім вважаємо, що на цьому кроці побудовано ланцюг $C_1=[v_1, v_2]$, і переходимо до наступного кроку.

Нехай здійснено $S \le n-2$ кроків, і в результаті S-го кроку побудовано простий ланцюг $C_S=[v_1, v_2, \ldots, v_{s+1}]$. Позначимо через множину $E(v_{s+1})$ всі ребра $e = (v_{s+1}, v) \in E$, що інцидентні вершині v_{s+1}, але не інцидентні ніякої вершині v з ланцюга C_S.

Крок S+1. Серед ребер множини $E(v_{s+1})$ знайдемо найкоротше e_{S+1}, тобто те, яке задовольняє умові $w(e_{S+1})= \min\limits_{e \in E(v_{s+1})} w(e)$. І це ребро e_{S+1} приєднуємо до C_S і отримуємо простий ланцюг $C_{S+1}=[v_1, v_2, \ldots, v_{s+1}, v_{s+2}]$.

Алгоритм закінчується на кроці S=n. Перед цим в результаті кроку S=n-1 було знайдено гамільтонів ланцюг $C_{n-1}=[v_1, v_2, \ldots, v_n]$. На кроці S=n гамільтонів ланцюг C_{n-1} замикаємо у гамільтонів цикл, приєднавши до нього ребро $e=(v_n, v_1) \in E$. Однак, цей процес може виявитися безрезультативним, якщо в заданому графі не знайдеться ребра $e=(v_n, v_1)$. На повному же графі завжди алгоритм «йди в найближчий» знаходить деякий допустимий розв’язок задачі комівояжера.

Приклад. Нехай маємо 7 - вершинний граф (рис. 48). Знайти гамільтонові цикли за алгоритмом «йди в найближчий», розпочав з: 1) першої вершини, 2) третьої вершини. Порівняти результати.

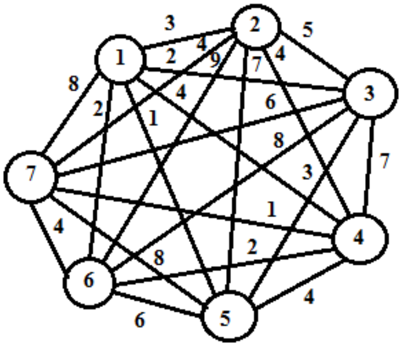


Рис.48. 7-вершинний повний граф

Для контролю матриця ваг ребер цього графа дорівнює

$$\begin{pmatrix} \infty & 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & \infty & 5 & 4 & 7 & 9 & 4 \\ 2 & 5 & \infty & 7 & 3 & 8 & 6 \\ 4 & 4 & 7 & \infty & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 4 & \infty & 6 & 8 \\ 2 & 9 & 8 & 2 & 6 & \infty & 4 \\ 8 & 4 & 6 & 1 & 8 & 4 & \infty \end{pmatrix}.$$

1). Починаючи з першої вершини та використовуючи алгоритм «йди в найближчий», отримуємо наступний гамільтонів цикл: $C_{11}=[v_1, v_5, v_3, v_2, v_4, v_7, v_6, v_1]$ або $C_{12}=[v_1, v_5, v_3, v_2, v_7, v_4, v_6, v_1]$.

2). Починаючи з третьої вершини, отримуємо наступний гамільтонів цикл: $C_{21}=[v_3, v_1, v_5, v_4, v_7, v_2, v_6, v_3]$ або $C_{22}=[v_3, v_1, v_5, v_4, v_7, v_6, v_2, v_3]$.

На рис.49 та рис.50 зображено розв’язки першої, та другої задачі. Ваги циклів першого варіанту 20 та 18 відповідно, другого – 29 та 26. Серед знайдених циклів C_{12} вагою 18 виявився найменшим. Чи є це точний розв’язок питання залишається відкритим. Як бачимо, різним вибором початкової вершини алгоритму, а також різним способом вибору мінімальних ребер на кроках алгоритму дає змогу наблизитись до точного розв’язка.

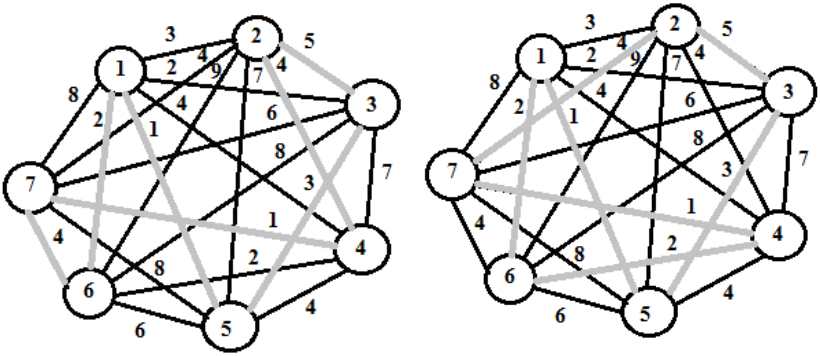


Рис. 49. Початок в вершині 1

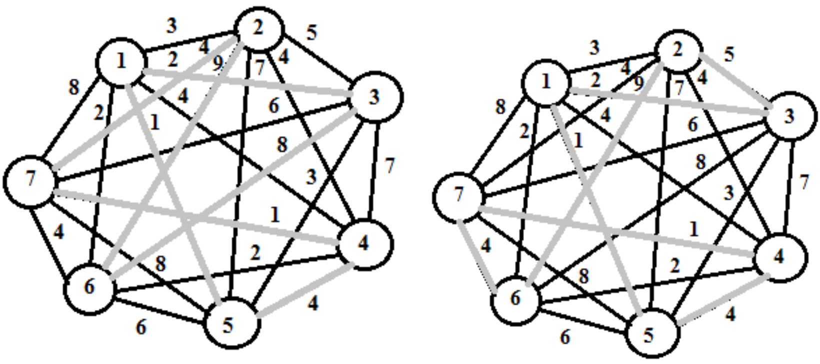


Рис. 50. Початок в вершині 3.

Розділ 7.5 Ейлерові графи

<u>Визначення.</u> *Ейлеровим ланцюгом* в графі G називається замкнений ланцюг, що містить всі ребра графа G.

<u>Визначення.</u> *Відкритий ейлерів ланцюг* – це відкритий ланцюг, що містить всі ребра G.

Граф, що містить ейлерів ланцюг називається е*йлерів граф*.

<u>Теорема1.</u> Наступні твердження еквівалентні для зв'язного графа G:

1) G – ейлерів граф;
2) степінь кожної вершини в графі G парний;
3) G є об'єднанням декількох реберно-непересічних циклів.

<u>Приклад.</u>

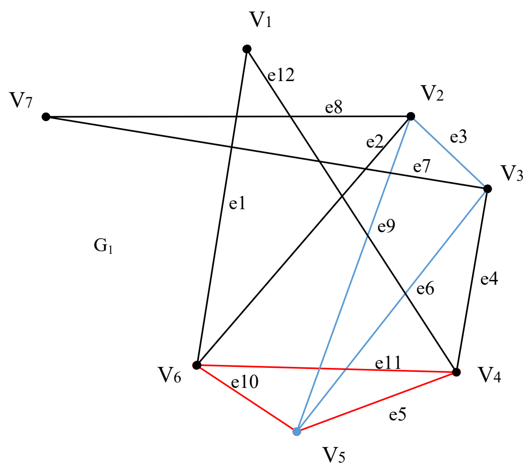


Рис. 51. Ейлерів граф

На рис. 51 <e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}> – ейлерів ланцюг. G_1 – ейлерів граф.

Неважко переконатися в тому, що ейлерів граф G_1 є об'єднанням реберно-непересічних циклів з наступними множинами ребер: $\{e_{11},e_5,e_{10}\}$, $\{e_3,e_6,e_9\}$, $\{e_1,e_2,e_8,e_7,e_4,e_{12}\}$. Але, це не єдиний спосіб розбити на цикли, які реберно не перетинаються.

<u>Слідство.</u> Кожна вершина та кожне ребро ейлерова графа міститься в деякому циклі.

<u>Теорема 2.</u> Нехай $G = (V,E)$ – зв'язний граф з $2k$ вершинами непарного ступеня, $k \geq 1$. Тоді E можна розбити на такі підмножини $E_1, E_2, \ldots, E_k$, що кожна з них утворює в графі G відкритий ланцюг.

<u>Слідство.</u> Нехай G – зв'язний граф, що має рівно 2 вершини непарного ступеня. Тоді він має відкритий ланцюг (починається з однієї з вершин непарного ступеня і закінчується в інший), який містить всі ребра G.

Наприклад, якщо граф G_2 отримати з G_1 додаванням ребра e_{13}, яке з'єднує вершини V_1 і V_2, то буде рівно дві вершини: V_1 і V_2 непарного ступеня і відкритий ейлерів ланцюг буде складатися з наступних ребер: e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}.

Природно виникає питання: як знайти в ейлеровому графі G ейлерів цикл? Будемо нумерувати ребра цього графа натуральними числами, таким чином, щоб число, присвоєне ребру, вказувало порядковий номер цього ребра в ейлеревому циклі. Це можна зробити, якщо дотримуватись наступних двох правил:

1). Виділимо довільну вершину U і довільному ребру (U,V) надамо номер 1. А далі викреслюємо це ребро та переходимо до вершини V.

2). Будемо вважати, що W – вершина, в яку ми прийшли у результаті попереднього кроку, а k – це номер ребра, присвоєний на попередньому кроці. Продовжуючи алгоритм вибираємо ребро, що інциндентне вершині W, але міст можна вибрати тільки тоді, коли вже немає інших можливостей. Присвоюємо цьому ребру k+1 номер та викреслюємо його.

Цей алгоритм закінчується коли не залишається жодного ребра, тобто всі ребра викреслені (занумеровані), він називається – ***алгоритм Флері***.

Розглянемо ще один алгоритм, який називається ***алгоритм елементарних циклів.***

Етап 1. Послідовно знаходяться елементарні цикли, які будуються за наступним правилом: послідовно фарбуються ребра уздовж довільного маршруту L до першого самоперетину. Після чого забарвлення видаляється з ребер, які не увійшли в елементарний цикл. Ця процедура повторюється поки всі ребра даного графа не виявляться пофарбованими. Тобто на етапі 1 ми отримуємо розбиття графу на послідовність елементарних циклів C_1, C_2,…, C_m , які не мають спільних ребер.

Етап 2. Починаючи з циклу C_1 рухаємося уздовж його ребер до перетину з будь-яким іншим циклом; переходимо на цей інший цикл і рухаємося уздовж його ребер до перетину з іншим новим циклом і т. д. У зв’язку з тим, що граф має кінцеву послідовність елементарних циклів, знайдеться цикл C_k, який перетинається тільки з циклами, по яким вже рухались. В цьому випадку, здійснюється обхід всіх ребер циклу C_k, далі повертаємося в точку його перетину з попередником і, переходимо на попередній цикл, рухаючись далі та переходячи на нові цикли. Якщо нових циклів немає, то здійснюємо повний обхід ребер до точки перетину з його попередником і т. д.

Теорема (Рейд). Майже немає ейлеревих графів.

Це означає, що $\lim_{n\to\infty}\frac{|E(n)|}{|G(n)|}=0$, де $G(n)$ – всі графи з n вершинами, $E(n)$ – ейлерові графи з n вершинами.

Орієнтовані ейлерові графи

Визначення. *Орієнтованим ейлеровим циклом* орграфа G називається замкнений орієнтований ланцюг, що містить всі дуги G (на рис.52: {e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_1}).

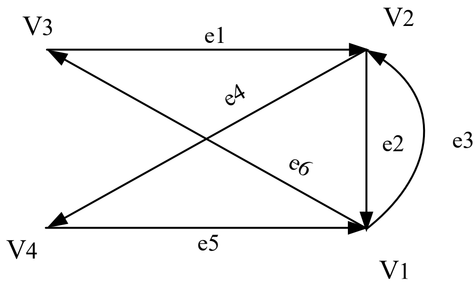


Рис. 52

Відкритим орієнтованим ейлеровим ланцюгом орграфа G називається відкритий орієнтований ланцюг, що містить всі дуги графа G. Орграф G, що володіє орієнтованим ейлеровим циклом, називається *орієнтованим ейлеровим графом.*

Теорема. Для зв'язного орграфа G наступні твердження рівносильні:

1) G – орієнтований ейлерів граф.

2) Для будь-якої вершини V графа G справедливою є рівність $d^+(V)=d^-(V)$.

3) G – об'єднання декількох реберно-непересічних контурів (наприклад, на рис.52: $\{e_2,e_3\}$, $\{e_1,e_4,e_5,e_6\}$).

Теорема. Зв'язний орграф G містить відкритий орієнтований ейлерів ланцюг тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

1) В орграфі G є такі дві вершини V_1 і V_2, що: $d^+(V_1)=d^-(V_1)+1$ і $d^-(V_2)=d^+(V_2)+1$.

2) Для будь-якої вершини V, відмінної від V_1 і V_2, справедлива рівність $d^+(V)=d^-(V)$.

Розділ 7.6 Потоки в мережах

Визначення. *Мережею* називається зважений орієнтований граф $D=(V,E)$, ваги $c(e)>0$ на його дугах означають *пропускну спроможність* дуги; а також для цього графа виконуються наступні дві умови:

1) існує єдина вершина $s\in V, d^+(s)=0$, що інцидентна лише дугам, які виходять з неї (джерело);

2) існує єдина вершина $t\in V$, $d^-(t)=0$, що інцидентна лише дугам, які входять в неї (стік).

Визначення. Функція $f:E\to Z_+$ буде називатися *потоком* в мережі $D=(V,E)$, який йде із джерела s до стоку t, якщо:

1) виконуються нерівності: $0 \le f(e) \le c(e)$ для всіх $e \in E$, тобто потік через кожну дугу невід'ємний і не більший за її пропускну спроможність;

2) для кожної вершини $v \in V \setminus \{s,t\}$ $\sum\limits_{w \in d^+(v)} f(w,v) = \sum\limits_{u \in d^-(v)} f(v,u)$,

тобто в усіх вершинах мережі, крім *s* та *t*, кількість потоку, який входить у вершину повинна дорівнювати кількості потоку, що виходить з неї.

Визначення. *Дивергенцією* функції *f* у вершині *v* називається число $div(f,v)$, яке визначається наступним чином:

$$div(f,v) = \sum_{u \in d^-(v)} f(v,u) - \sum_{w \in d^+(v)} f(w,v).$$

У фізиці дивергенція зазвичай визначається навпаки: то, що прийшло, мінус те, що пішло. Але у даному випадку зручніше, щоб дивергенція джерела була додатна.

Дивергенція потоку дорівнює нулю $div(f,u) = 0$ у всіх вершинах крім джерела *s* і стоку *t*. Число $\varpi(f) = div(f,s)$ називається *величиною потоку* f.

Твердження. Для будь-якого допустимого потоку f у мережі D виконується рівність:

$$\sum_{w \in d^-(s)} f(s,w) = \sum_{u \in d^+(t)} f(u,t) = \varpi(f), \text{ або } div(f,s) = -div(f,t).$$

Нехай f – допустимий потік у мережі D. Дуга $e \in E$ називається *насиченою*, якщо потік на цій дузі дорівнює її пропускної спроможності, тобто якщо $f(e) = c(e)$. Потік f називається *повним*, якщо будь-який шлях в D із джерела s до стоку t містить хоча б одну насичену дугу. Потік f називається *максимальним*, якщо його величина $\varpi(f)$ приймає максимальне значення у порівнянні з будь-якими іншими допустимими потоками у мережі D. Очевидно, що максимальний потік обов'язково є повним, але не навпаки.

Алгоритм побудови повного потоку у мережі D.

1. Виберемо за початковий потік нульовий по всім дугам, для цього вважаємо для кожної дуги $e \in E \quad f(e) = 0$, D'=D.
2. Видаляємо з орграфу D' всі дуги, які є насиченими при потоці f, отриманий орграф знов позначаємо D'.
3. Шукаємо в D' простий ланцюг η із s в t. Якщо такого ланцюга немає, тоді f – шуканий потік, інакше переходимо до наступного 4-го кроку.
4. Збільшуємо потік $f(e)$ по кожної дузі $e \in \eta$ на однакову величину a>0 таку, щоб хоча б одна дуга з η була насиченою, а потоки по іншим дугам із η не перевищать їх пропускних спроможностей. Це значення дорівнює величині $a = \min\limits_{e \in \eta}(c(e) - f(e))$. При цьому величина потоку $\varpi(f)$ також збільшиться на величину a, а сам потік f у мережі D залишиться допустимим. Далі переходимо до п.2.

Приклад. Нехай задано мережу D(V;E) – рис. 53. Цифра над кожній дузі визначає пропускну спроможність. Знайти повний потік у даній мережі.

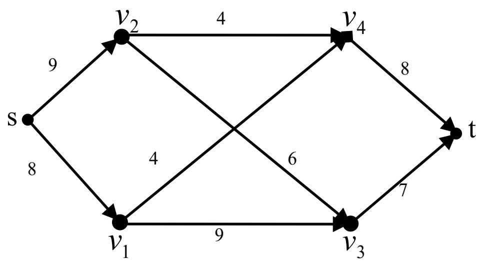


Рис. 53

1. Нехай D'=D, виберемо за початковий припустимий потік f_0 – нульовий по всім дугам f(e)=0 для кожного $e \in E$ (рис.54).

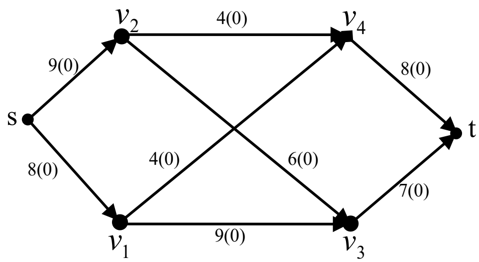


Рис. 54

2. Виділимо в D' простий ланцюг η_1=(s, v_2, v_4, t) і збільшимо потік по його дугам до насичення дуги (v_2, v_4), отримаємо новий потік – f_1, який має насичену дугу (рис. 55).

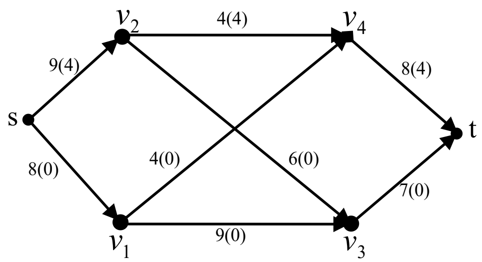


Рис. 55

3. Вилучимо з D’ насичену дугу (v_2, v_4) і в отриманому орграфі знов виділимо простий ланцюг η_2=(s, v_1, v_3, t) і збільшимо потік по його дугам до насичення дуги (v_3, t), отримаємо новий потік – f_2 (рис. 56).

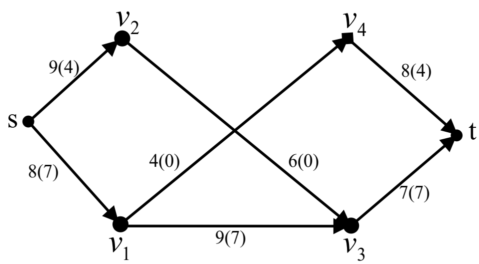


Рис. 56

4. Вилучимо з D’ насичену дугу (v_3, t) і в отриманому орграфі знов виділимо простий ланцюг η_3=(s, v_1, v_4, t) і збільшимо потік по його дугам до насичення дуги (s, v_1), отримаємо новий потік – f_3 (рис. 57).

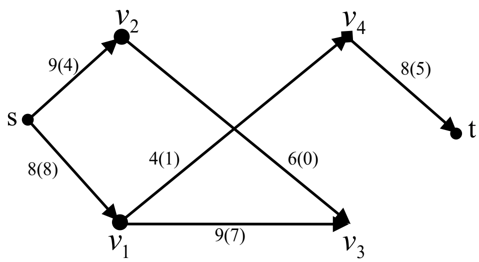


Рис. 57

5. Вилучимо з D' насичену дугу (s, v_1) і в отриманому орграфі D' вже немає ланцюга, який би з'єднував s і t (Рис.58), тому отриманий потік f_3 буде повним, а його величина знаходиться як сума сталих, на які збільшували потік на кожній ітерації, та буде дорівнювати $\varpi(f_3) = 4 + 7 + 1 = 12$.

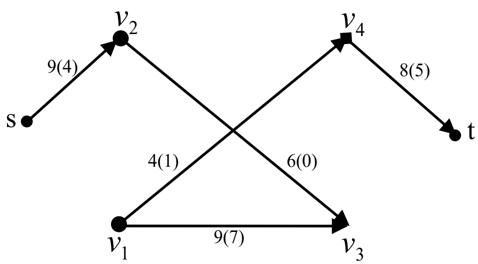


Рис. 58

<u>Визначення.</u> Нехай D – мережа і $X \subset V$, $s \in X$, $t \notin X$, $\overline{X} = V \setminus X$. Розрізом $\left(X, \overline{X}\right)$ мережі D, яка відділяє джерело s і стік t, буде називатися множина дуг, які виходять з множини

вершин X в множину $\overline{X}$. При цьому розріз $\left(X,\overline{X}\right)$ буде мати пропускну спроможність, яка визначається за формулою:

$$C\left(X,\overline{X}\right)=\sum_{e\in\left(X,\overline{X}\right)}c(e).$$

Розглянемо як приклад мережу, яка зображена на рис.59, із заданими пропускними спроможностями дуг.

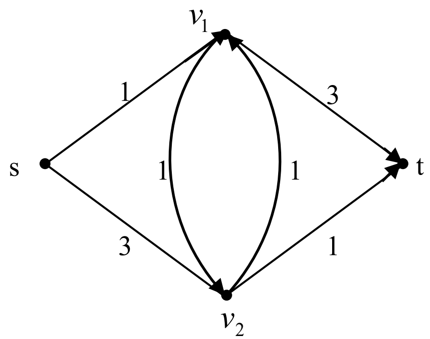


Рис. 59

Нехай $X=\{s,v_1\}$. Тоді $\left(X,\overline{X}\right)=\{(s,v_2),(v_1,v_2),(v_1,t)\}$, $c\left(X,\overline{X}\right)=3+1+3=7$.

<u>Твердження 1.</u> Для будь-якого допустимого потоку f у мережі D і будь-якого розрізу $\left(X,\overline{X}\right)$ виконується нерівність:

$$\varpi(f)\le c\left(X,\overline{X}\right),$$

тобто величина будь-якого допустимого потоку f у мережі D не перевищує пропускної спроможності будь-якого її розрізу.

Потік через розріз $f\left(X,\overline{X}\right)$ за визначенням – це є різниця суми потоків із множини X в множину $\overline{X}$ та суми потоків навпаки із $\overline{X}$ в X:

$$f\left(X,\overline{X}\right)=\sum_{e\in\left(X,\overline{X}\right)} f(e)-\sum_{e\in\left(\overline{X},X\right)} f(e).$$

Теорема. *(Ford, Fulkerson).* Максимальна величина потоку для будь-якої мережі із джерела s до стоку t буде дорівнювати мінімальної пропускної спроможності розрізу, що відділяє s від t, тобто існує потік f*, такий що:

$$\varpi\left(f^*\right)=\max_f \varpi(f)=\min_{\left(X,\overline{X}\right)} c\left(X,\overline{X}\right).$$

Найважливішим наслідком цієї теореми є **алгоритм знаходження в мережі максимального потоку.**

1. Візьмемо за початковий будь-який, знайдений раніше, повній потік в мережі D – f_0. Хоча ця умова не обов'язкова, та можна починати з нульового потоку.
2. Збільшувати потік будемо наступним чином. Знайдемо шлях із джерела s до стоку t, при цьому можливо йти як за напрямком дуг, так і в зворотному, але треба, щоб в прямому напрямі кожна дуга була ненасичена, тобто $f(e)<c(e)$, а в зворотному дуги повинні мати ненульовий потік, тобто $f(e)>0$. Якщо нам вдалося знайти такий шлях, то потрібно знайти мінімум із чисел: $c(e)-f(e)$ (для всіх дуг, які проходять в прямому напрямі) та $f(e)$ (для всіх дуг, які проходять в зворотному напрямі). Позначимо цей мінімум через $\Delta\geq 1$. Далі потрібно побудувати новий потік, що отримується з вихідного, в якому збільшується потік по всім дугам в прямому напрямі на Δ та зменшується на теж саме число по всім дугам в зворотному напрямі. Інші дуги, які не належать цьому шляху, залишаються с попереднім потоком. Отриманий

новий потік залишається припустимим і буде мати на Δ більше величину. Якщо ж стік t не буде досягатися подібним чином із джерела s, то це буде означати, що існує така множина вершин $\overline{X} = V \setminus X$, які недосяжні з джерела s, причому $s \in X$, $t \in \overline{X}$. Тоді з множини X неможливо буде перейти в множину $\overline{X}$, а це означає, що всі дуги з множини $\overline{X}$ в множину X мають нульовий потік. Тобто потік $f\left(X, \overline{X}\right)$ через розріз $\left(X, \overline{X}\right)$ буде дорівнювати величині потоку в мережі, і пропускної спроможності розрізу $\left(X, \overline{X}\right)$. Таким чином максимальний потік побудовано.

Приклад. Задано мережу D(V;E) з попереднього прикладу (рис.53), для якого було побудовано повній потік (рис. 60). Перше число перед дужками на дузі означає її пропускну спроможність, а друге число, що в дужках – потік по цій дузі.

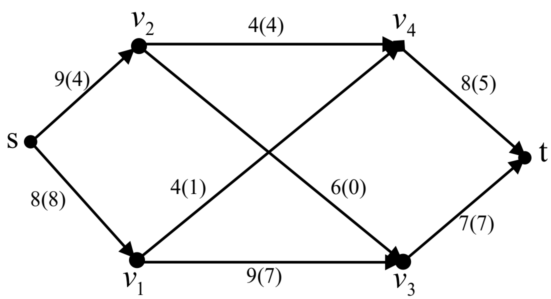


Рис. 60

Збільшуючим для потоку шляхом є $(s, v_2, v_3, v_1, v_4, t)$, $\Delta = \min\{9-4, 6-0, 7, 4-1, 8-5\} = 3$. Новий потік прийме вид (рис.61):

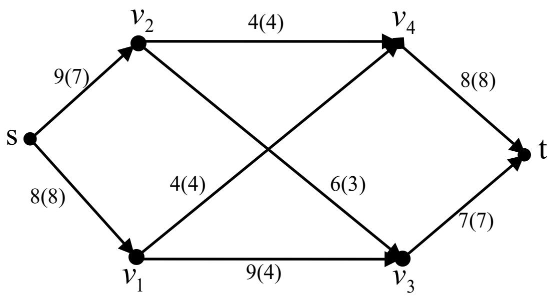


Рис. 61

Знов шукаємо зростаючий для нового потоку шлях. Із s ми можемо потрапити в вершину v_2, а із v_2 – в вершину v_3, потім із v_3 – в вершину v_1. Інших вершин з джерела s за цим алгоритмом досягнути не вдається, множина $X = \{s, v_1, v_2, v_3\}$ – це досяжні вершини, $\overline{X} = \{t, v_4\}$ і $(X, \overline{X}) = \{(v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_3, t)\}$ – розріз, пропускна спроможність якого буде дорівнювати 15, це і є величина потоку в мережі. Тому, отриманий потік і буде максимальним, його ж величина дорівнює $\varpi(f_{\max}) = 12 + 3 = 15$.

Розділ 7.7 Плоскі та планарні графи. Укладання графа

Визначення. Граф, вершини якого належать площині та який має ребра, що є неперервними лініями і не мають самоперетинів та перетинів з іншими ребрами, не враховуючи можливі спільні кінцеві вершини, називається *плоским.* Граф, ізоморфний плоскому графу, називається *планарним*.

Визначення. Область площини, обмежена ребрами графа при умові, що існує крива, що з'єднує дві довільні точки цієї області і не перетинає жодного ребра, називається *гранню.* Ребра та вершини, які обмежують цю область утворюють границю цієї грані.

Алгоритм γ укладання графа G.

Кроки цього алгоритму полягають в тому, що до підграфа $\widetilde{G}$, який вже укладено на площині, додається ланцюг, складений з ребер графу $G \setminus \widetilde{G}$, а кінці його належать $\widetilde{G}$. За початковий граф $\widetilde{G}$ обирається будь-який простий цикл графа (найкраще взяти найбільшої довжини для більш швидкого розв'язання задачі). Приєднання ланцюгів продовжується до тих пір, доки не отримаємо укладку графу, тобто плоский граф, що є ізоморфним графу G, або на якомусь кроці таке приєднання виявиться неможливим, тоді робимо висновок, що граф G не планарний.

Нехай маємо деякий підграф $\widetilde{G}$ графа G – проміжна укладка.

Визначення. Підграф графа *G(V, E)* відносно $\widetilde{G}(\widetilde{V}, \widetilde{E})$, який можна віднести до одного з двох типів: 1) ребро $e \in E$, $e=(u,v)$, таке, що $e \notin \widetilde{E}$, $u,v \in \widetilde{V}$; 2) зв'язна частина графа G\$\widetilde{G}$, що доповнена усіма ребрами $e \notin \widetilde{E}$ графа G, які інцидентні до вершин цієї частини, та кінцями цих ребер (контактними вершинами $v \in \widetilde{V}$), буде називатися *сегментом S відносно* $\widetilde{G}$.

Визначення. Для сегмента S відносно $\widetilde{G}(\widetilde{V},\widetilde{E})$ вершина v$\in \widetilde{V}$ називається *контактною*.

Визначення. Якщо всі контактні вершини для сегмента S будуть належати якоїсь грані Г, то цю грань називають *припустимою гранню* відносно $\widetilde{G}$ для даного сегмента S. Множину всіх припустимих граней сегмента S позначають Г(S).

Визначення. *α-ланцюг* – це простий ланцюг сегмента S, який позначимо через L, і він має кінцеві контактні вершини, та не містить інших контактних вершин.

Кроки **алгоритму γ**:

0. Спочатку обираємо простий цикл С графа G, укладаємо його на площині та вважаємо, що $\widetilde{G}$=С.
1. Позначаємо грані відносно $\widetilde{G}$ і утворюємо сегменти відносно $\widetilde{G}$. Якщо сегментів не маємо, то йде перехід до п.7.
2. Шукаємо для отриманих сегментів S припустимі грані Г(S).
3. Якщо є сегмент S, такий, що в нього Г(S)=∅, то робимо висновок – граф G не планарний. В цьому випадку алгоритм закінчує роботу. Якщо інше – йдемо до п.4.

4. Якщо є сегмент S, такий, що в нього тільки одна припустима грань Γ ($|Γ(S)|=1$), то йдемо до п.6, інакше – до п.5.
5. Маємо сегмент S: $|Γ(S)|>1$. Тоді обираємо довільну грань Γ, яка припустима.
6. Вибираємо будь-який α-ланцюг L∈S та укладаємо його у грань Γ; далі робимо заміну $\tilde{G}$ на $\tilde{G}\cup$L та йдемо до п.1.
7. Отримано укладання $\tilde{G}$ графа G на площині.

При цьому будемо вважати кроком алгоритму γ приєднання до $\tilde{G}$ α-ланцюга L.

<u>Приклад.</u> Укласти на площині граф G, що зображено на рис. 62, або довести, що укладання неможливе.

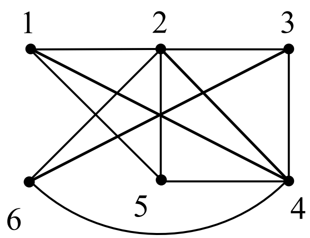


Рис. 62

На першому кроці обираємо простий цикл C=[1,2,3,4,1] та поділяємо площину на грані $Γ_1$ та $Γ_2$. Перший крок алгоритму зображено на рис. 63, де ми бачимо граф $\tilde{G}$=C і всі сегменти S_i (i=1; 2; 3) відносно $\tilde{G}$, контактні вершини для зручності аналізу припустимих граней обводимо колами. Оскільки $Γ(S_i)=\{Γ_1,Γ_2\}$ (i=1,2,3), то всі можливі αланцюги кожного з сегментів можна укласти в одну з припустимих граней $Г_1$ або $Г_2$.

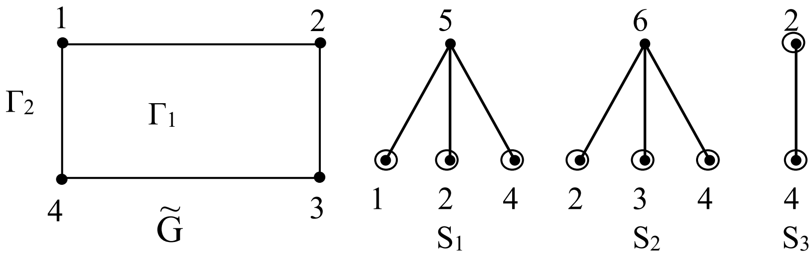


Рис.63

Нехай для укладання виберемо α-ланцюг L=[2,5,4] у $Г_1$. Далі будемо мати новий граф $\widetilde{G}$ та сегменти відносно нього (рис. 64). Перераховуємо припустимі грані $Г(S_1)=\{Г_3\}$, $Г(S_2)=\{Г_1,Г_2\}$, $Г(S_3)=\{Г_1,Г_2,Г_3\}$.

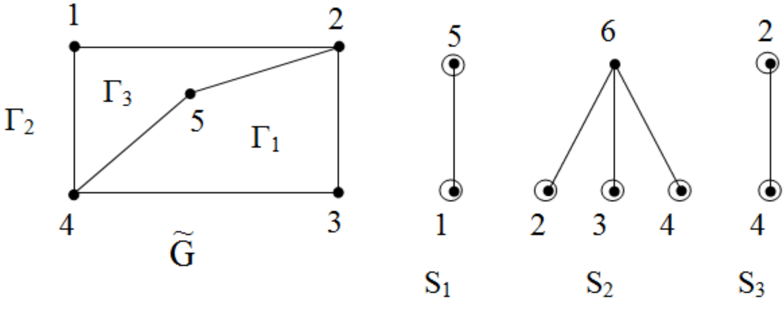


Рис. 64

Для подальшого кроку обираємо укладання ланцюга першого сегмента L=(1,5) у грань $Г_3$ (рис. 65).

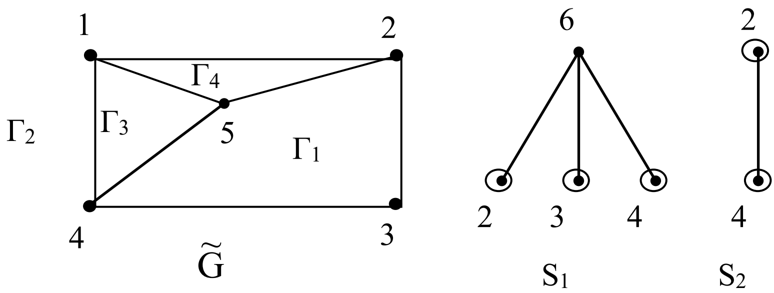


Рис. 65

Далі маємо $\Gamma(S_1)=\{\Gamma_1,\Gamma_2\}$, $\Gamma(S_2)=\{\Gamma_1,\Gamma_2\}$, та укладемо α-ланцюг L=(2,6,4) сегмента S_1 у Γ_1 (рис. 66). У результаті отримаємо $\Gamma(S_1)=\{\Gamma_5\}$, $\Gamma(S_2)=\{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_5\}$.

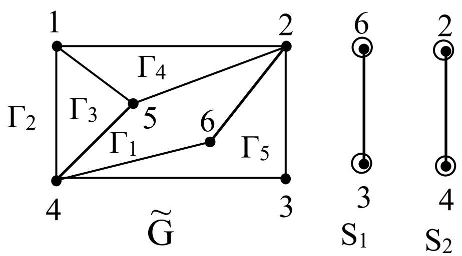


Рис.66

На кінець, укладаємо ребро (6,3) у Γ_5, а ребро (2,4) – у Γ_1, та маємо остаточне укладання графа G на площині (рис. 67). Процес укладання завершився успішно. Наданий за умовою задачі граф виявився планарним.

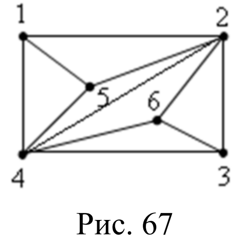


Рис. 67

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бондаренко М. Ф. Комп'ютерна дискретна математика. Підручник для студ. ВНЗ, які навчаються за напрямом «Комп'ютерні науки»/ М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, А. Г. Руткас – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с.
2. Бардачов Ю. М. Дискретна математика: підручник для студ. вищ. техн. навч. закл. / Ю. М. Бардачов, Н. А. Соколова, В. Є. Ходаков ; за ред. В. Є. Ходакова. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Вища школа, 2007. – 383 с.
3. Борисенко О. А. Дискретна математика: підручник для студентів вищих навчальних закладів / О. А. Борисенко. – Суми : Університетська книга, 2008. – 255 с.
4. Спекторський І. Я. Дискретна математика: алгебра висловлень, теорія множин, теорія відношень, елементи комбінаторики, теорія графів, елементи теорії груп та кілець / І. Я. Спекторський. – К. : ІВЦ «Політехніка», 2004. – 220 с.
5. Олійник А.С. Дискретна математика. Навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету / А.С. Олійник, А.П. Петравчук – К., 2024.– 177 с.
6. Нікольський Ю.В. Дискретна математика : підручник / Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина; за наук. ред. д-ра техн. наук, проф. В. В. Пасічника. – 7-ме видання, випр. та допов. – Львів : ПП «Магнолія 2006»; ЛНУ ім. Івана Франка, 2024.– 432 с.
7. Андерсон Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика / Дж. А. Андерсон. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2003. – 960 с.

Навчальне видання

ЛЕВИЦЬКА Тетяна Ігорівна
ПОЖУЄВА Ірина Сергіївна

КОРОТКИЙ КУРС ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Комп'ютерний набір: *Левицька Т.І., Пожуєва І.С.*

Підписано до друку 03.04.2026. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 8,3.
Тираж 100 прим. Зам. № 205.

Національний університет «Запорізька політехніка»
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул.Університетська,64
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6952 від 22.10.2019.