МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет « Запорізька політехніка »

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДО ВИКОНАННЯ РГР ТА КР.

РОЗДІЛИ: «ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ», «ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ», «ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ПЛОЩИНІ ТА У ПРОСТОРІ».

Для студентів усіх форм навчання.

2025

Методичні вказівки з вищої математики до виконання РГР та КР. Розділи: «Елементи лінійної алгебри», «Елементи векторної алгебри», «Елементи аналітичної геометрії на площині та у просторі». Для студентів усіх форм навчання. / Укл. : І. М. Килимник. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2025. – 57 с.

Укладач: Килимник І.М., к. т. н., доцент

Рецензент: Онуфрієнко В.М., д. ф.-м. н., професор

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к. т. н., доцент

Затверджено на засіданні
кафедри «Математика»
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 1 від 28.08.2025 р.

Рекомендовано НМК
Машинобудівного факультету
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 2 від 30.09.2025 р.

ЗМІСТ

1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Визначники. Матриці

Означення 1.1. *Числовою матрицею* A *порядку* $n \times m$ називається таблиця чисел, розташованих в рядках і стовпцях:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mathrm{m}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mathrm{m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

де a_{ij} – елементи матриці A, які стоять на перетині i-го рядка та j-го стовпця, n – кількість рядків, m – кількість стовпців.

Якщо кількість рядків і стовпців однакова, то матрицю називають квадратною:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Для квадратної матриці існує поняття визначника. Визначник n-го порядку – число $\det A$, яке записується у вигляді:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.3)$$

Деякі ***властивості визначників***:

а) визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями (операція транспонування);

б) якщо усі елементи рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю;

в) спільний множник усіх елементів рядка (стовпця) можна винести за знак визначника;

г) якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) рівні або пропорційні, то визначник дорівнює нулю;

д) якщо переставити місцями два рядки (стовпці), то визначник змінить знак;

е) визначник не зміниться, якщо до усіх елементів рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) помножені на одне й те саме число, відмінне від нуля.

Означення 1.2. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, утворений з даного шляхом викреслювання i-го рядка і j-го стовпця.

Наприклад, для матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ знайти M_{12} і M_{22}.

Маємо $M_{12}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3$ і $M_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1$.

Означення 1.3. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається його мінор M_{ij}, помножений на $(-1)^{i+j}$: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Наприклад, для матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ знайти A_{13} і A_{32}. Маємо

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1$ і $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1$.

Обчислення визначників.

1) Визначник 2-го порядку обчислюється за формулою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (1.4)$$

2) Визначник 3-го порядку можна обчислити за правилом трикутників (сума добутків елементів за схемою):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1.5)$$

або за правилом Саррюса (послідовно дописуємо перші два стовпці та знаходимо суму добутків елементів головної діаголалі та ще двох їй паралельних і віднімаємо добутки елементів побічної діагоналі та ще двох їй паралельних):

$$\Delta = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \qquad (1.6)$$

3) Визначник n-го порядку обчислюється за формулою розкладання по i-му рядку:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}, \; i = \overline{1,n} \qquad (1.7)$$

(i – фіксований індекс рядка)

або за формулою розкладання по j-му стовпцю:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}, \; j = \overline{1,n} \qquad (1.8)$$

(j – фіксований індекс стовпця).

Справедливо, що сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю. Наприклад,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{2j} = 0 .$$

Дії над матрицями.

Дві матриці A і B рівні $\left(A = B\right)$, якщо вони одного порядку і їх відповідні елементи рівні.

Матриці одного порядку можна додавати і віднімати (дії з відповідними елементами матриць). ***Наприклад***,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрицю A можна множити на будь-яке число λ, відмінне від нуля (всі елементи матриці множаться на це число: $\lambda A = A\lambda$.

Матрицю A (порядку $n \times s$) можна множити на матрицю B (порядку $s \times m$), якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B: $C = A \cdot B$ (матриця C має порядок $n \times m$). Елементи матриці C обчислюються за формулою:

$$c_{\mathrm{ij}} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} \cdot b_{kj} , \, i = \overline{1,n} , \, j = \overline{1,m} . \qquad (1.9)$$

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Операція множення у загальному випадку не комутативна: $A \cdot B \neq B \cdot A$. У теорії матриць операція *ділення* відсутня.

Означення 1.4. *Діагональною матрицею* називаєтся квадратна матриця, всі елементи якої, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Означення 1.5. *Одиничною матрицею* називаєтся діагональна матриця, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці.

Наприклад, одинична матриця 3-го порядку

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Означення 1.6. *Оберненою матрицю* A^{-1} до квадратної матриці A називають матрицю, якщо виконується умова:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \qquad (1.10)$$

Обернена матриця A^{-1} існує, якщо $\det A \neq 0$. Вона обчислюється за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*}, \qquad (1.11)$$

де A^{*} – союзна (приєднана) матриця, яка складається з алгебраїчних доповнень елементів матриці A, при цьому виконано транспонування.

Наприклад, обернена матриця A^{-1} до квадратної матриці A третього порядку має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad (1.12)$$

де $\Delta = \det A$, A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

Обернену матрицю застосовують для розв’язування матричних рівнянь:

$$A \cdot X = B \qquad \text{або} \qquad Y \cdot A = B\,, \tag{1.13}$$

де A, B – відомі матриці, X, Y – шукані матриці, при цьому $\det A \neq 0$. Розв'язок цих рівнянь відповідно знаходиться за формулою:

$$X = A^{-1} \cdot B \quad \text{або} \quad Y = B \cdot A^{-1}. \tag{1.14}$$

1.2. Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Розглянемо розв'язування СЛАР на прикладі системи трьох лінійних алгебраїчних рівнять з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.15}$$

де a_{ij} – коефіцієнти при невідомих, а b_i – вільні члени $\left(i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,3}\right)$.

Означення 1.7. Систему (1.14) називають *неоднорідною*, якщо хоча б один з вільних членів b_i відмінний від нуля, і *однорідною*, якщо вільні члени всіх рівнянь нульові.

Означення 1.8. Розв'язком СЛАР (1.14) називається впорядкована множина чисел $\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$, яка при підстановці в задану систему відповідно замість x_1, x_2, x_3 перетворює кожне рівняння системи на тотожність.

Означення 1.9. Систему лінійних алгебричних рівнянь називають *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв'язків.

Розглянемо розв'язування неоднорідної СЛАР за формулами Крамера, матричним методом та методом Гаусса.

1) ***Формули Крамера*** для розв'язування цієї системи (1.14):

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}, \qquad (1.16)$$

де $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ – визначник системи (складається з коефіцієнтів при невідомих), а Δx_1, Δx_2, Δx_3 – визначники невідомих, отримані з визначника системи шляхом заміни відповідного стовпця коефіцієнтів при невідомому стовпцем вільних членів:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.17)$$

Система має єдиний розв'язок, якщо $\Delta \neq 0$.

Якщо $\Delta = 0$ і всі визначники невідомих Δx_1 Δx_2, Δx_3 одночасно дорівнюють нулю, то система має безліч розв'язків.

Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один з визначників невідомих Δx_1 Δx_2, Δx_3 відмінний від нуля, то система розв'язків не має.

2) ***Матричний метод*** розв'язання СЛАР полягає в наступному: система записується у вигляді матричного рівняння: $A \cdot X = B$, де A – матриця системи, B – матриця-стовпець вільних членів, X – матриця-стовпець невідомих. Розв'язок системи знаходиться за формулою:

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (1.18)$$

3) ***Метод Гаусса*** – метод послідовного виключення невідомих. Систему зводять до трикутного виду (прямий хід), а потім, починаючи з останнього рівняння системи, послідовно знаходять невідомі.

Зручно систему записати у вигляді розширеної матриці B (це матриця системи до якої приєднується стовпець вільних членів):

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right). \tag{1.19}$$

За допомогою елементарних перетворень над рядками цієї матриці (можна поміняти місцями два рядки; додати да елементів рядка відповідні елементи іншого рядка, помножені на один той самий множник, відмінний від нуля), її приводять до трикутного виду. Отриману матрицю записують у вигляді системи. З останнього рівняння системи знаходять невідому і послідовно піднімаючись по системі вгору, знаходять інші невідомі.

Означення 1.10. *Рангом* $r_A = Rang\, A$ матриці A називається найбільший порядок її мінора, відмінного від нуля.

Теорема 1.1 (***Кронекера-Капеллі***).

Для сумісності СЛАР необхідно і достатньо рівність рангів матриці системи і розширеної матриці: $r_A = r_B$.

Якщо $r_A = r_B$ і дорівнюють числу невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Якщо $r_A = r_B$, але менше числа невідомих, то система має безліч розв'язків.

Розглянемо ***однорідну*** СЛАР на прикладі системи трьох лінійних однорідних рівнянь с трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Однорідна СЛАР завжди сумісна (має розв'язок).

Якщо визначник системи відмінний від нуля ($\det A \neq 0$), то система має єдиний розв'язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. У протилежному випадку – безліч розв'язків.

Нехай для системи (1.20) $\det A = 0$, а мінор другого порядку, наприклад, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Тоді система зводиться до двох лінійних однорідних рівнянь з трьома невідомими, наприклад:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases} \qquad (1.21)$$

Розв'язок цієї системи знаходиться за формулами:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t,\ x_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \cdot t,\ x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot t,\ t \in R. \qquad (1.22)$$

Якщо для системи (1.20) $\det A = 0$ і всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то система зводиться до одного рівняння з трьома невідомими. Надаючи двом невідомим будь-яких значень, отримаємо відповідне їм значення третього невідомого.

Задача 1. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A. Результат перевірити, знайшовши добуток $A^{-1} \cdot A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. а) Обчислимо $\det A$, розклавши його по елементах першого рядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2 - (-1)) -$$

$$-1 \cdot (4 - 1) + 1 \cdot (-2 - (-1)) = -5 \neq 0.$$

Обернена матриця існує. Знайдемо її за формулою (1.11).

б) Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} кожного елемента матриці

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-1, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3, \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3.$$

в) Складемо матрицю з алгебраїчних доповнень, транспонувавши їх:

$$A^{*}=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

г) Останню матрицю помножимо на $\dfrac{1}{\det A}$, тобто на $\left(-\dfrac{1}{5}\right)$ і отримаємо обернену матрицю:

$$A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Перевірка.

$$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}(-1)\cdot 1+(-3)\cdot 2+2\cdot 1 & -1\cdot 1+(-3)\cdot(-1)+2\cdot(-1) & (-1)\cdot 1+(-3)\cdot 1+2\cdot 2\\ (-3)\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 1 & (-3)\cdot 1+1\cdot(-1)+1\cdot(-1) & (-3)\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 2\\ (-1)\cdot 1+2\cdot 2+(-3)\cdot 1 & (-1)\cdot 1+2\cdot(-1)+(-3)\cdot(-1) & (-1)\cdot 1+2\cdot 1+(-3)\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

Задача 2. Розв'язати матричне рівняння:

$$Y\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Маємо матричне рівняння $Y\cdot A=B$, де

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Знаходимо $\det A=\begin{vmatrix}-5 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-17\neq 0$. Обернена матриця A^{-1} існує і розв'язок рівняння за другою формулою (1.14) буде $Y=B\cdot A^{-1}$. Знайдемо A^{-1}. Алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$$A_{11}=3,\ A_{21}=-1,\ A_{12}=-2,\ A_{22}=-5.$$

Запишемо обернену матрицю A^{-1}: $A^{-1}=\frac{-1}{17}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & -5\end{pmatrix}$. Тоді

$$Y=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{17}\right)\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & -5\end{pmatrix}=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}3+2 & -1+5\\ 6+6 & -2+15\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}5 & 4\\ 12 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{17} & -\frac{4}{17}\\ -\frac{12}{17} & -\frac{13}{17}\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $Y = \begin{pmatrix} -\frac{5}{17} & -\frac{4}{17} \\ -\frac{12}{17} & -\frac{13}{17} \end{pmatrix}$.

Задача 3. Розв'язати неоднорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами: а) за формулами Крамера, б) матричним методом, в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

а) Знайдемо розв'язок заданої системи за формулами Крамера.

Знайдемо визначник системи Δ і визначники невідомих Δx_1, Δx_2, Δx_3 за фориулами (1.17). Обчислимо їх за правилом трикутників:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 2 + 2 + 2 + 1 = 6 \neq 0 .$$

Послідовно замінюючи в Δ перший, другий і третій стовпець стовпцем вільних членів, знайдемо:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 6 + 2 + 6 = 6 ,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 2 - 6 + 4 = -6 ,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 6 + 4 + 6 = 12 .$$

Розв'язок системи знаходимо за формулами (1.16):

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-6}{6} = -1,\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2\,.$$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

б) Знайдемо розв'язок заданої системи матричним методом.

Нехай A – матриця системи, X – матриця-стовпець невідомих, B – матриця-стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Систему можна записати матричним рівнянням: $A \cdot X = B$. Розв'язок системи $X = A^{-1} \cdot B$. Визначник системи $\Delta = \det A = 6$, знайдений у п. а). Обернену матрицю A^{-1} до матриці A знаходимо за формулою (1.11).

Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3\,, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+1) = 0\,,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3\,, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2\,,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0\,, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2\,,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3\,, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) = 1\,,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4\,.$$

Обернена матриця має вигляд: $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Розв'язок системи знаходимо за формулою (1.18).

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6+0+0 \\ 6-12+0 \\ 0+12+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

де $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

в) Знайдемо розв’язок заданої системи методом Гаусса.

Запишемо розширену матрицю B системи, приєднавши до матриці системи A стовпець вільних членів, і приведемо її до трикутного вигляду.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{1}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{3}{\approx}$$

$$\underset{3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знак $\approx$ означає перехід від однієї матриці до наступної за допомогою елементарних перетворень. Таких переходів отримали 3 (вони пронумеровані). <u>Перший перехід</u>: 1-й рядок залишаємо без змін, додаємо до 2-го рядка 1-й рядок, помножений на (-2), до 3-го рядка додаємо 1-й рядок, помножений на (-1). <u>Другий перехід</u>: скорочуємо 3-й рядок на (-2) і змінюємо місцями 2-й і 3-й рядки. <u>Третій перехід</u>: рядки 1-й і 2-й залишаємо без зміни, а до 3-го рядка даємо 2-й рядок, помножений на 4. Мета перетворень – отримати матрицю трикутного виду. Останню матрицю записуємо у вигляді системи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ \qquad x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad\qquad 3x_3 = 6. \end{cases}$$

З 3-го рівняння маємо $x_3 = 2$, з 2-го рівняння знаходимо $x_2 = -1$, з 1-го рівняння маємо $x_1 = 1$.

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Задача 4. Знайти розв'язок систем лінійних однорідних рівнянь:

$$\text{а)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. а) знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -24 \neq 0,$$

тому система має єдиний розв'язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Відповідь: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

б) знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже система має безліч розв'язків. Оскільки $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13 \neq 0$, то розглянемо систему двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Для знаходження розв'язку системи застосуємо формули (1.22):

$$x_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \cdot t = (20 - 3) \cdot t = 17t, \; x_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \cdot t = (-1 - 15) \cdot t = -16t,$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot t = (-9 - 4) \cdot t = -13t, \quad t \in R.$$

Відповідь: $x_1 = 17t$, $x_2 = -16t$, $x_3 = -13t$, $t \in R$.

2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Означення 2.1. *Вектором* $\overline{AB}$ називається напрямлений відрізок з початком у точці $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінцем у точці $B(x_2; y_2; z_2)$.

Вектор $\overline{AB}$ можна позначити $\overline{a}$. Якщо задані точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, то координати вектора $\overline{AB}$ визначаються за формулою

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \tag{2.1}$$

Вектори $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$ можна додавати і віднімати:

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2). \tag{2.2}$$

Вектор $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$ можна множити на число $\lambda \neq 0$:

$$\lambda\overline{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

У загальному випадку для векторів $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$ та довільних сталих чисел α_1 і α_2 справедливо:

$$\alpha_1\overline{a} \pm \alpha_2\overline{b} = (\alpha_1 x_1 \pm \alpha_2 x_2; \alpha_1 y_1 \pm \alpha_2 y_2; \alpha_1 z_1 \pm \alpha_2 z_2), \tag{2.3}$$

Означення 2.2. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або паралельних прямих.

Координати колінеарних векторів пропорційні:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{2.4}$$

Для колінеарних векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ справедливо:

$$\overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}, \tag{2.5}$$

де число $\lambda \neq 0$. Якщо $\lambda > 0$, то $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$. Якщо $\lambda < 0$, то $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Означення 2.3. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або паралельних площинах.

Означення 2.4. Вектор, довжина, якого дорівнює одиниці, називається *одиничним вектором* або *ортом вектора* і позначається $\overline{a^0}$.

Тоді $\overline{a} = \overline{a^0} \cdot \left| \overline{a} \right|$.

Означення 2.5. Вектори $\overline{a_i}$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ називаються *лінійно залежними*, якщо існують числа α_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, що справедлива рівність $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \cdot \overline{a_i}\right) = 0$.

Якщо три вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ лінійно незалежні, то вони утворюють базис і будь-який вектор $\overline{d}$ може бути розкладений за цим базисом:

$$\overline{d} = m\overline{a} + n\overline{b} + p\overline{c}, \tag{2.6}$$

де m, n, p – деякі числа, одночасно не рівні нулю.

Вектор $\overline{a} = \left(x_1; y_1; z_1\right)$ може бути розкладений по базису одиничних векторів $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, які відповідно належать вісям Ox, Oy, Oz декартової системи координат у просторі: $\overline{a} = x_1 \overline{i} + y_1 \overline{j} + z_1 \overline{k}$.

Означення 2.6. *Скалярним добутком* $\overline{a} \cdot \overline{b}$ векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, яке визначається формулою:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi, \tag{2.7}$$

де φ – кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Інше позначення скалярного добуту: $\left(\overline{a},\overline{b}\right)$.

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задані координатами, то скалярний добуток знаходиться за формулою:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, \tag{2.8}$$

де $\overline{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $\overline{b}=\left(x_2;y_2;z_2\right)$.

Якщо $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, то $\overline{a}\cdot\overline{b}>0$. Якщо $\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi$, то $\overline{a}\cdot\overline{b}<0$. Якщо $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, то $\overline{a}\perp\overline{b}$ $\Rightarrow$ *умова перпендикулярності векторів* $\overline{a}$ і $\overline{b}$:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=0. \tag{2.9}$$

Довжина вектора $\overline{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right)$ обчислюється за формулою:

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{\left(x_1\right)^2+\left(y_1\right)^2+\left(z_1\right)^2}\,. \tag{2.10}$$

Кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}. \tag{2.11}$$

Проєкція вектора $\overline{a}$ *на вектор* $\overline{b}$ обчислюється за формулою:

$$пр_{\overline{b}}\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}. \tag{2.12}$$

Робота сили $\overline{F}$, яка прямолінійно переміщує матеріальну точку з початку в кінець вектора $\overline{S}$ визначається формулою:

$$A=\overline{F}\cdot\overline{S}. \tag{2.13}$$

***Означення 2.7**. Векторним добутком* $\bar{a}\times\bar{b}$ векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$, що задовольняє умовам:

а) довжина вектора $\bar{c}$ обчислюється за формулою:

$$\left|\bar{c}\right|=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\varphi, \qquad (2.14)$$

де φ – кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$;

б) $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$;

в) вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ утворюють праву трійку.

Інше позначення векторного добуту: $\left[\bar{a}\,,\bar{b}\right]$. Модуль векторного добутку векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах.

Якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задані координатами: $\bar{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right)$ і $\bar{b}=\left(x_2;y_2;z_2\right)$, то векторний добуток обчислюється за формулою:

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \qquad (2.15)$$

Площа трикутника ABC, для якого задані координати вершин $A\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $B\left(x_2;y_2;z_2\right)$, $C\left(x_3;y_3;z_3\right)$, обчислюється за формулою:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\,\overline{AB}\times\overline{AC}\,\right|. \qquad (2.16)$$

Момент сили $\bar{F}$, прикладеної в точці A, відносно точки B, визначається векторним добутком:

$$\overline{m}_B\;\bar{F}=\overline{BA}\times\bar{F}=\bar{F}\times\overline{AB}. \qquad (2.17)$$

Означення 2.8. *Мішаним добутком* $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ трьох векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ називається скалярний добуток вектора $\overline{a}\times\overline{b}$ на вектор $\overline{c}$.

Якщо вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ задані координатами $\overline{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $\overline{b}=\left(x_2;y_2;z_2\right)$ і $\overline{c}=(x_3;y_3;z_3)$, то

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{2.18}$$

Умова компланарності трьох векторів:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=0. \tag{2.19}$$

Модуль мішаного добутку векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Об'єм піраміди, побудованої на цих векторах, обчислюється за формулою:

$$V_{nip}=\pm\frac{1}{6}\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right). \tag{2.20}$$

Знак вибираємо таким чином, щоб об'єм був додатним.

Якщо $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}>0$, то вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють праву трійку.

Якщо $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}<0$, то вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють ліву трійку.

Задача 5. Перевірити колінеарність векторів $\overline{c}=3\overline{a}-\overline{b}$ і $\overline{d}=\overline{a}+2\overline{b}$, побудованих на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо $\overline{a}=\left(-1;3;2\right)$, $\overline{b}=\left(-2;-1;4\right)$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overline{c}$ і $\overline{d}$:

$\overline{c}=3\left(-1;3;2\right)-\left(2;-1;4\right)=\left(-5;10;2\right)$, $\overline{d}=\left(-1;3;2\right)+2\left(2;-1;4\right)=\left(3;1;10\right)$.

Перевіримо умову колінеарності векторів за формулою (2.4):

$$-\frac{5}{3} \neq \frac{10}{1} \neq \frac{2}{10}.$$

Вектори $\bar{c}$ і $\bar{d}$ не колінеарні, оскільки їх координати не пропорційні.

Відповідь: Вектори $\bar{c}$ і $\bar{d}$ не колінеарні.

Задача 6. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(2;-1;-2)$, $A_2(1;2;1)$, $A_3(5;0;-6)$, $A_4(-10;9;-7)$. Знайти: а) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4; б) площу грані $A_1A_2A_3$; в) проєкцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$; г) довжину висоти піраміди, проведену з вершини A_4; д) визначити, яку трійку утворюють вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів, на яких побудована піраміда, за формулою (2.1): $\overrightarrow{A_1A_2} = (-1;3;3)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (3;1;-4)$, $\overrightarrow{A_1A_4} = (-12;10;-5)$.

а) Косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 знаходимо за формулою (2.11):

$$\cos\left(\overrightarrow{A_1A_2} \,\hat{,}\, \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{(-1)(-12) + 3\cdot 10 + 3(-5)}{\sqrt{1+9+9}\cdot\sqrt{144+100+25}} =$$

$$= \frac{27}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{269}}.$$

Маємо $\overrightarrow{A_1A_2} \,\hat{,}\, \overrightarrow{A_1A_4} = \arccos\left(\frac{27}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{269}}\right)$.

б) Грань $A_1A_2A_3$ – це трикутник. Його площу знайдемо за формулою (2.16): $S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right|$.

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -15\,\bar{i} + 5\bar{j} - 10\bar{k}\,.$$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{(-15)^2 + 5^2 + (-10)^2} = \frac{\sqrt{350}}{2} = \frac{5\sqrt{14}}{2} \text{ (кв. од.).}$$

в) Проєкцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$ обчислюємо за формулою (2.12):

$$пр_{\overrightarrow{A_1A_4}}\overrightarrow{A_1A_3} = \frac{\overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{3(-12)+1\cdot 10+(-4)\cdot(-5)}{\sqrt{144+100+25}} = \frac{-6}{\sqrt{269}}\,.$$

г) Об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ обчислюємо за формулою (2.20). Знайдемо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -12 & 10 & -5 \end{vmatrix} = 280\,.$$

$$V_{пір} = \pm\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \frac{1}{6}\cdot 280 = \frac{280}{6} = \frac{140}{3} \text{ (куб. од.).}$$

Для знаходження довжини H висоти піраміди застосовуємо формулу:

$$V_{пір} = \frac{1}{3}S_{осн}\cdot H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{3V_{пір}}{S_{осн}}\,.$$

Тоді $S_{осн} = S_{\Delta A_1A_2A_3} = \dfrac{\sqrt{350}}{2} = \dfrac{5\sqrt{14}}{2}$ кв. од. і $V_{пір} = \dfrac{140}{3}$ куб. од. Підставимо $S_{осн}$ і $V_{пір}$ у формулу для обчислення висоти:

$$H = \frac{3\cdot 140/3}{5\sqrt{14}/2} = \frac{280}{5\sqrt{14}} = \frac{56}{\sqrt{14}} = 4\sqrt{14} \text{ (лін. од.).}$$

д) Оскільки мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = 280 > 0$, то вектори утворюють праву трійку.

Відповідь: а) $\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}} = \arccos\left(\dfrac{27}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{269}}\right)$;

б) $S_{\Delta A_1A_2A_3} = \dfrac{5\sqrt{14}}{2}$ кв. од.; в) $np_{\overrightarrow{A_1A_4}}\overrightarrow{A_1A_3} = \dfrac{-6}{\sqrt{269}}$;

г) $H = 4\sqrt{14}$ лін. од.; д) вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ утворюють праву трійку.

Задача 7. З'ясувати: а) при якому значенні α вектор $\overline{a} = (3;-2;\alpha)$ перпендикулярний вектору $\overline{b} = -4\overline{i} + 2\overline{j} + 6\overline{k}$; б) при якому значенні β вектор $\overline{b}$ колінеарний вектору $\overline{c} = (2;\beta;-3)$.

Розв'язання. Запишемо вектор $\overline{b}$ в координатній формі: $\overline{b} = (-4;2;6)$.

а) Якщо $\overline{a}\perp\overline{b}$, то за формулою (2.9) маємо $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$. Знайдемо скалярний добуток цих векторів за формулою (2.8): $\overline{a}\cdot\overline{b} = 3\cdot(-4) + (-2)\cdot 2 + \alpha\cdot 6 = -16 + 6\alpha$. Тоді

$$-16 + 6\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

б) Якщо вектори $\overline{b}$ і $\overline{c}$ колінеарні, то за формулою (2.4) матимемо $\dfrac{-4}{2} = \dfrac{2}{\beta} = \dfrac{6}{-3}$. Тоді $\dfrac{2}{\beta} = -2$. Звідки $-2\beta = 2$, а $\beta = -1$.

Відповідь: а) $\overline{a}\perp\overline{b}$ при $\alpha = \dfrac{8}{3}$; б) $\overline{b}\parallel\overline{c}$ при $\beta = -1$.

Задача 8. З'ясувати, чи належать чотири точки $A(1;2;-1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;-3)$ і $D(2;1;3)$ одній площині.

Розв'язання. Якщо точки A, B, C, D лежать в одній площині, то вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, побудовані на них, належать цій площині, отже, будуть компланарними (2.19). Перевіримо це. Знайдемо координати цих векторів: $\overline{AB} = (3;-1;6)$, $\overline{AC} = (-2;0;-2)$,

$\overline{AD}=\left(1;-1;4\right)$. Їх мішаний добуток

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=0\,.$$

Отже, вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ компланарні, тому точки A,B,C,D лежать в одній площині.

Відповідь: точки A,B,C,D лежать в одній площині.

Задача 9. Задана сила $\overline{F}=(5;-1;2)$ та дві точки $A(3;-1;1)$ і $B(0;2;-2)$. Знайти: а) роботу сили $\overline{F}$, необхідну для переміщення тіла із точки A в точку B; б) момент сили $\overline{F}$ відносно точки B, якщо сила прикладена до точки A.

Розв'язання.

а) Робота A сили $\overline{F}$ визначається за формулою (2.13) як скалярний добуток сили $\overline{F}$ на вектор переміщення $\overline{S}=\overline{AB}$. Знайдемо координати вектора $\overline{S}$:

$$\overline{S}=\overline{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)=\left(0-3;2-(-1);-2-1\right)=\left(-3;3;-3\right).$$

Тоді $A=\overline{F}\cdot\overline{S}=(5;-1;2)\cdot(-3;3;-3)=-15-3-6=-24$.

б) Момент $\overline{m}_B\,\overline{F}$ сили $\overline{F}$ відносно точки B, якщо сила прикладена до точки A, визначається за формулою (2.17) як векторний добуток сили $\overline{F}$ на плече $\overline{AB}$. Знайдемо $\overline{AB}=(-3;\,3;-3)$. Тоді $\overline{m}_B\overline{F}\,=\,\overline{F}\times\overline{AB}$.

$$\overline{m}_B\,\overline{F}\,=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 5 & -1 & 2\\ -3 & 3 & -3\end{vmatrix}=-3\overline{i}+9\,\overline{j}+12\,\overline{k}\,.$$

Відповідь: а) $A=-24$ од. роботи; б) $\overline{m}_B\,\overline{F}=-3\overline{i}+9\,\overline{j}+12\,\overline{k}$.

3. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ПЛОЩИНІ

Розглянемо *декартову прямокутну систему координат* на площині. Точки в цій системі визначаються двома координатами: x – абсциса та y – ордината точки $A(x;y)$. Відстань між двома точками $A(x_0;y_0)$ і $B(x_1;y_1)$ визначається за формулою:

$$d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\ . \tag{3.1}$$

Якщо точка $C(x_c;y_c)$ належить відрізку AB і ділить відрізок у відношенні λ, а саме $AC:CB=\lambda$, то координати її визначаються формулами:

$$x_c=\frac{x_0+\lambda\cdot x_1}{1+\lambda}\ \text{ і }\ y_c=\frac{y_0+\lambda\cdot y_1}{1+\lambda}\,. \tag{3.2}$$

Якщо $\lambda=1$, то $x_c=\dfrac{x_0+x_1}{2}$ і $y_c=\dfrac{y_0+y_1}{2}$.

3.1. Пряма на площині

Пряма на площині характеризується або нормальним вектором $\bar{n}=(A;B)$, який перпендикулярний прямій, або напрямним вектором $\bar{S}=(m;n)$, який паралельний прямій, або кутовим коефіцієнтом k.

***Способи задання прямої*.**

Пряма L може бути задана такими рівняннями:
а) **рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом**

$$y=k\cdot x+b\,, \tag{3.3}$$

де k – кутовий коефіцієнт, $k=\operatorname{tg}\varphi$, φ – кут, який пряма утворює з додатним напрямом осі Ox, а b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy;

б) **канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $A(x_0;y_0)$ і має напрямний вектор $\bar{S}=(m;n)$**

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}, \qquad (3.4)$$

в) **загальне рівняння прямої, яка проходить через точку** $A(x_0;y_0)$ **і має нормальний вектор** $\bar{n}=(A;B)$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \qquad (3.5)$$

або

$$Ax+By+C=0, \qquad (3.6)$$

де $C=-Ax_0-By_0$ і $k=-\frac{A}{B}$;

г) **рівняння прямої, яка проходить через точку** $A(x_0;y_0)$**, з кутовим коефіцієнтом** k визначається формулою:

$$y-y_0=k(x-x_0); \qquad (3.7)$$

д) **рівняння прямої, яка проходить через дві точки** $A(x_0;y_0)$ **і** $B(x_1;y_1)$ визначається формулою:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \qquad (3.8)$$

звідки $k=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$;

е) **рівняння прямої у відрізках**

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (3.9)$$

де a, b – відрізки, які пряма відтинає відповідно на осях Ox, Oy, враховуючи їх знаки.

є) **нормальне рівняння прямої**:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \qquad (3.10)$$

де p – довжина нормалі, опущеної з точки O на пряму, α – кут, який нормаль утворює з віссю Ox.

ж) **рівняння пучка прямих**:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \qquad (3.11)$$

де λ – деяка стала величина.

Означення 3.1. *Пучком прямих* називається сукупність усіх прямих, що проходять через точку перетину двох заданих прямих: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Кут φ **між прямими** L_1 і L_2**, які задані рівняннями** $L_1 : y = k_1x + b_1$ **і** $L_2 : y = k_2x + b_2$, визначається формулою:

$$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}, \qquad (3.12)$$

де через k_1 позначають коефіцієнт прямої, яку повертають проти руху стрілки годинника на кут φ до збігу з другою прямою.

Умова паралельності прямих L_1 і L_2: $\quad k_1 = k_2$. (3.13)

Умова перпендикулярності прямих L_1 і L_2: $k_1 \cdot k_2 = -1$. (3.14)

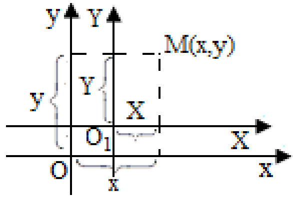
Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ **до прямої** L**, заданої рівнянням** $Ax + By + C = 0$, визначається формулою:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.15)$$

При розв’язуванні багатьох задач аналітичної геометрії на площині поряд з декартовою прямокутною системою координат розглядають інші. При цьому змінюються не тільки координати точок, а і рівняння ліній.

Розглянемо два перетворення декартової прямокутної системи координат: паралельне перенесення осей координат і поворот осей координат на деякий кут.

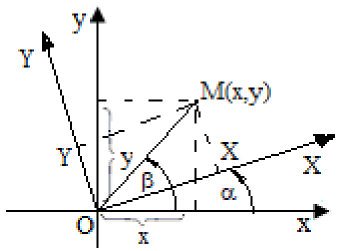
Паралельне перенесення осей координат в точку $O_1(x_0; y_0)$



В системі xOy маємо точку $M(x;y)$, а в системі XO_1Y її координати $M(X;Y)$. Зв'язок між «старими» і «новими» координатами визначається за формулами:

$$\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} X = x - x_0, \\ Y = y - y_0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Поворот осей координат на деякий кут α



В системі xOy маємо точку $M(x;y)$, а в системі XOY її координати $M(X;Y)$. Зв'язок між «старими» і «новими» координатами визначається за формулами:

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases} \text{ і } \begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \tag{3.17}$$

3.2. Лінії другого порядку

До ліній другого порядку належать: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Загальне рівняння лінії другого порядку має вигляд

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0\,. \qquad (3.18)$$

Якщо $C \neq 0$, то крива задана в декартовій прямокутній системі координат з поворотом осей координат на деякий кут.

Якщо $C = 0$, $D \neq 0$ і $E \neq 0$ або один із них, то крива задана в декартовій прямокутній системі координат з паралельним перенесенням осей координат.

За виглядом загального рівняння кривої другого порядку можна встановити її назву:

1) $A = B \;\Rightarrow$ *коло* або *уявне коло*;

2) $\begin{cases} \mathrm{A} > 0 \\ \mathrm{B} > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \mathrm{A} < 0 \\ \mathrm{B} < 0 \end{cases} \;\Rightarrow$ *еліпс* або *уявний еліпс*;

3) $\begin{cases} \mathrm{A} > 0 \\ \mathrm{B} < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \mathrm{A} < 0 \\ \mathrm{B} > 0 \end{cases} \;\Rightarrow$ *гіпербола*;

4) $\begin{cases} \mathrm{A} \neq 0 \\ \mathrm{B} = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \mathrm{A} = 0 \\ \mathrm{B} \neq 0 \end{cases} \;\Rightarrow$ *парабола*.

Розглянемо лінії другого порядку в декартовій прямокутній системі координат з паралельним перенесенням осей координат (з точки $O(0;0)$ в точку $O_1(x_0; y_0)$):

а) ***коло*** **з центром у точці** $O_1(x_0; y_0)$ **та радіусом** R:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2; \qquad (3.19)$$

б) ***еліпс*** **з центром у точці** $O_1(x_0; y_0)$ **і піввісями** a **та** b:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (3.20)$$

$\left(\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = -1 - \text{уявний еліпс}\right)$, ексцентриситет еліпса

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \ a > b \ \text{і} \ \varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}, \ b > a;$$

в) ***гіпербола* з центром у точці** $O_1(x_0; y_0)$ **і піввісями** a **та** b:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1, \tag{3.21}$$

рівняння асимптот $y - y_0 = \pm \dfrac{b}{a}(x - x_0)$ і ексцентриситет гіперболи

$\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$; якщо в правій частині формули (3.21) стоїть «$+1$», то вітки гіперболи симетричні вісі O_1Y; якщо в правій частині формули (3.21) стоїть «-1», то a і b міняються місцями в цих формулах і вітки гіперболи симетричні вісі O_1X.

г) ***парабола* з вершиною в точці** $O_1(x_0; y_0)$ визначається формулою:

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0) \tag{3.22}$$

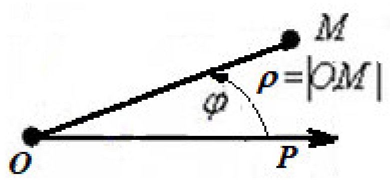
або

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0), \tag{3.23}$$

де p – параметр. Для формули (3.22) вісь симетрії $y = y_0$, а для формули (3.23) вісь симетрії $x = x_0$.

Крім декартової прямокутної системи координат буває зручно використовувати ***полярну систему координат***.

Означення 3.2 *Полярною системою координат* називається сукупність точки O і проміння OP, що виходить з цьої точки.



Означення 3.3 Промінь OP називають ***полярною віссю***.

Означення 3.4 Точка O, з якої виходить промінь OP, називається ***початком координат***, або ***полюсом***.

Будь-яка точка M на площині визначається двома полярними координатами: радіальною і кутовою.

Означення 3.5. Радіальна координата називається ***полярним радіусом*** (зазвичай позначається ρ) і відповідає відстані від точки до початку координат.

Означення 3.6. Кутова координата називається ***полярним кутом*** (зазвичай позначається φ) і дорівнює куту, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки полярну вісь для того, щоб потрапити в цю точку.

Точка M з полярними координатами ρ і φ позначається $M\,(\rho, \varphi)$. Рівняння лінії в полярній системі координат має вигляд:

$$F(\rho, \varphi) = 0. \tag{3.24}$$

Зазвичай вважають, що полярні координати ρ і φ змінюються в таких межах: $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

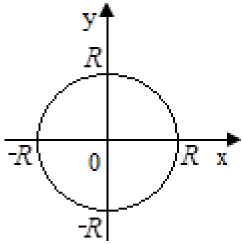
Проте іноді доводиться розглядати кути, більші за 2π, а також від'ємні кути, тобто кути, які відкладаємо від полярної осі за годинниковою стрілкою.

При розв'язанні багатьох прикладних задач зручно використовувати так звані *параметричні рівняння* лінії, тобто, рівняння, в яких координати точок лінії задаються у вигляді функцій від деякої змінної величини t (параметра). Для таких ліній рівняння має вигляд: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$.

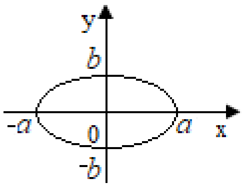
Якщо в параметричних рівняннях виключити параметр t, то отримаємо звичайне рівняння лінії: $F(x, y) = 0$.

Деякі криві, які задаються параметрично:

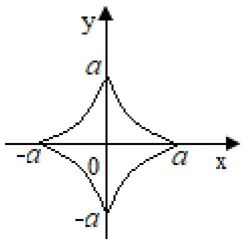
1) коло з центром $O(0;0)$ і радіусом R: $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$



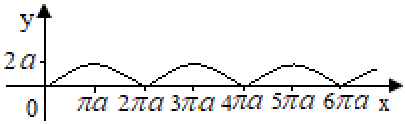
2) еліпс з центром $O(0;0)$ і піввісями a та b: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$



3) астроїда: $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

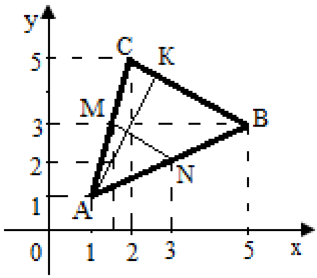


4) циклоїда: $\begin{cases} x = a\,(t - \sin t), \\ y = a\,(1 - \cos t). \end{cases}$



Задача 10. Задано вершини трикутника ABC: $A(1;1)$, $B(5;3)$, $C(2;5)$. Знайти: а) довжину та рівняння сторони BC; б) довжину та рівняння висоти, проведеної з вершини A; в) рівняння прямої, проведеної через точку A паралельно стороні BC; г) рівняння середньої лінії, яка з'єднує сторони AB і AC; д) внутрішній кут при вершині B. Зробити рисунок трикутника в системі координат.

Розв'язання. Зробимо рисунок трикутника в системі координат:



а) Рівняння BC знайдемо за формулою (3.8): $\dfrac{x-5}{2-5}=\dfrac{y-3}{5-3}$,

$$(x-5)\cdot 2=(y-3)\cdot(-3)\ \Rightarrow\ 2x+3y-19=0\ \ (BC).$$

Довжину BC знайдемо за формулою (3.1)

$$d=\sqrt{(2-5)^2+(5-3)^2}=\sqrt{13}\,.$$

б) Висота AK і сторона BC перпендикулярні, тому з формули (3.14) маємо $k_{AK}=-\dfrac{1}{k_{BC}}$. З рівняння BC $k_{BC}=-\dfrac{2}{3}$, тоді $k_{AK}=\dfrac{3}{2}$. Для прямої AK відомі координати точки A і кутовий коефіцієнт. Рівняння AK знайдемо за формулою (3.7):

$$y-1=\frac{3}{2}(x-1)\ \Rightarrow\ 3x-2y-1=0\,.$$

Довжина висоти – це відстань від точки $A(1;1)$ до прямої BC. За формулою (3.15) матимемо

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2\cdot 1+3\cdot 1-19|}{\sqrt{4+9}}=\frac{|-14|}{\sqrt{13}}\approx 3{,}8\,.$$

в) Пряма L, яка проходить через точку A, паралельна стороні BC. Їх кутові коефіцієнти рівні. З формули (3.13) маємо $k_L=k_{BC}=-\frac{2}{3}$. Рівняння L знаходимо за формулою (3.7):

$$y-1=-\frac{2}{3}(x-1)\ \Rightarrow\ 3y-3=2x+2\Rightarrow 2x+3y-5=0\ \ (L).$$

г) Середня лінія MN проходить через середини сторін AB і AC.

Нехай це точки N і M відповідно. Знайдемо їх координати за формулами (3.2) при $\lambda=1$:

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2},\quad y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{1+5}{2}=3,$$

$$x_N=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+5}{2}=3,\quad y_N=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2\,.$$

Рівняння середньої лінії MN знайдемо за формулою (3.8):

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{3-\frac{3}{2}}=\frac{y-3}{2-3}\ \Rightarrow\ \left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot(-1)=\frac{3}{2}(y-3)\ \Rightarrow\ x+\frac{3}{2}y-6=0\,.$$

$$2x+3y-12=0\ \ (MN).$$

Рівняння MN можна було отримати, враховуючи, що MN паралельна BC. Тоді $k_{MN}=k_{BC}=-\frac{2}{3}$. Знаючи координати точки M або N, застосовуємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (3.7).

д) Щоб утворити кут B, треба пряму BC повернути проти руху стрілки годинника до збігу з прямою AB. Рівняння прямої BC $2x+3y-19=0$, тому $k_1=k_{BC}=-\frac{2}{3}$. Рівняння AB за формулою (3.8)

$$\frac{x-1}{5-1}=\frac{y-1}{3-1}\ \Rightarrow\ (x-1)\cdot 2=4(y-1)\ \Rightarrow\ y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2},$$ тому $k_2=k_{AB}=\frac{1}{2}$.

За формулою (3.12) матимемо

$$tg\angle B = \frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{2}{3}\right)}{1+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{4}, \qquad \angle B = \text{arctg}\left(\frac{7}{4}\right).$$

Відповідь: а) $2x+3y-19=0$ (BC), $|BC|=\sqrt{13}$;

б) $3x-2y-1=0$ (AK), $|AK|\approx 3{,}8$;

в) $2x+3y-5=0$ (L);

г) $2x+3y-12=0$ (MN);

д) $\angle B = \text{arctg}\left(\frac{7}{4}\right)$.

Задача 11. Рівняння кривих звести до канонічного вигляду та побудувати їх:

а) $9x^2-25y^2-36x-50y-214=0$;
б) $25x^2+100x+9y^2-18y=116$;
в) $y^2+4y=x$.

Розв'язання:

а) $9x^2-25y^2-36x-50y-214=0$ – рівняння гіперболи. Виділяємо повний квадрат по змінних x і y:

$$9\left(x^2-4x+4-4\right)-25\left(y^2+2y+1-1\right)=214,$$

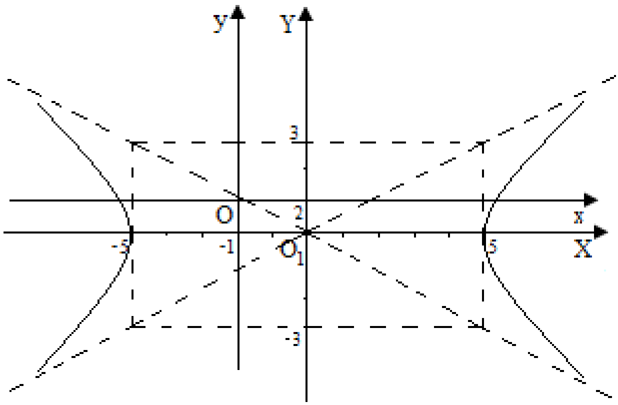
$$9\left((x-2)^2-4\right)-25\left((y+1)^2-1\right)=214 \Rightarrow 9(x-2)^2-25(y+1)^2=225,$$

$$\frac{(x-2)^2}{25}-\frac{(y+1)^2}{9}=1.$$

Виконаємо паралельне перенесення осей координат $X=x-2,\ Y=y+1$ з новим центром в точці $O_1(2;-1)$.

Рівняння в системі XO_1Y має вигляд: $\frac{X^2}{25}-\frac{Y^2}{9}=1$.

Рівняння асимптот у «новій» системі координат: $Y=\pm\frac{b}{a}X$, де $a=5$, $b=3$, $Y=\pm\frac{3}{5}X$. Зробимо рисунок:



б) $25x^2+100x+9y^2-18y=116$ – рівняння еліпса. Виділяємо повний квадрат по змінних x і y:

$$25\left(x^2+4x+4-4\right)+9\left(y^2-2y+1-1\right)=116,$$

$$25(x+2)^2+9(y-1)^2=225.$$

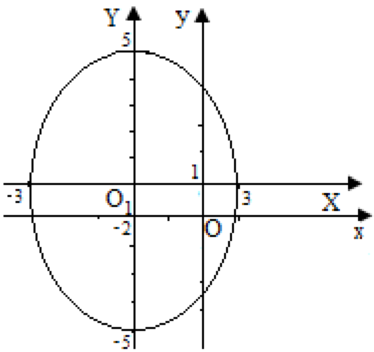
Ділимо отримане рівняння на 225:

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1.$$

Виконаємо паралельне перенесення осей координат $X=x+2$, $Y=y+1$ з новим центром в точці $O_1(-2;1)$.

Рівняння в системі XO_1Y має вигляд: $\dfrac{X^2}{9}+\dfrac{Y^2}{25}=1.$

Зробимо рисунок:



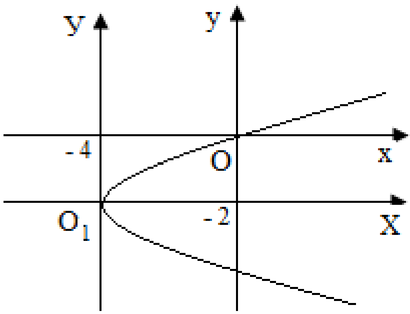
в) $y^2+4y=x$ – рівняння параболи. Виділяємо повний квадрат по змінній y:

$$\left(y^2+4y+4-4\right)=x \;\Rightarrow\; (y+2)^2=x+4.$$

Виконаємо паралельне перенесення осей координат $X=x+4;\ Y=y+2$ з новим центром в точці $O_1(-4;-2)$.

Рівняння в системі XO_1Y має вигляд: $Y^2=X$.

Зробимо рисунок:



Відповідь: а) гіпербола $\dfrac{(x-2)^2}{25}-\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$,

б) еліпс $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$,

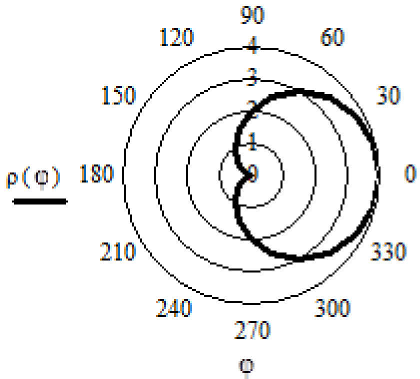
в) парабола $(y+2)^2=x+4$.

Задача 12. Побудувати криву $\rho=2(1+\cos\varphi)$.

Розв'язання: Крива має назву *кардіоїда*. Побудуємо її, обчисливши значення ρ для $0\le\varphi<\pi$. Складемо таблицю.

ϕ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$\cos\varphi$	1	0,924	0,707	0,383	0	–0,383	–0,707	–0,924	–1
ρ	4	3,848	3,414	2,766	2	1,234	0,586	0,152	0

Враховуючи, що $\cos\varphi$ парна функція, тобто $\cos(-\varphi)=\cos\varphi$, крива буде симетрична відносно полярної осі ($\varphi=0$ або вісь Ox). Зробимо рисунок:



Задача 13. Побудувати криву $\rho=\sin 2\varphi$.

Розв'язання:

Криві з рівняннями $\rho=a\sin k\varphi$ та $\rho=a\cos k\varphi$, де $k-\text{const}\neq 0$ – це так звані ***пелюсткові рози***. Якщо k – парне число, то *роза* має $2k$ *пелюсток*, а якщо k – непарне число, то *роза* має k *пелюсток*.

Задана роза має чотири пелюстка. Знайдемо їх вершини.

$$\sin 2\varphi=1\Rightarrow 2\varphi=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\, n\in Z;\Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}+\pi n,\, n\in Z$$

або

$$\sin 2\varphi=-1\Rightarrow 2\varphi=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\, n\in Z\Rightarrow \varphi=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\, n\in Z\,.$$

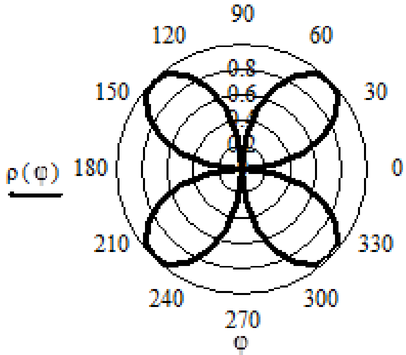
Пелюстки закриваються, якщо $\rho=0$. Маємо

$$\sin 2\varphi=0 \;\Rightarrow\; 2\varphi=\pi n,\, n\in Z \;\Rightarrow\; \varphi=\frac{\pi}{2}n,\, n\in Z\,,$$

тобто $n=0 \Rightarrow \varphi=0$, $n=1 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{2}$, $n=2 \Rightarrow \varphi=\pi$,

$n=-1 \Rightarrow \varphi=-\frac{\pi}{2}$, $n=-2 \Rightarrow \varphi=-\pi$.

Зробимо рисунок:



Зауваження. Іноді доводиться одночасно користуватися декартовими і полярними координатами на площині.

Розглянемо випадок, коли полярна вісь збігається з віссю абсцис декартової системи і, отже, полюс збігається з початком координат декартової системи. Тоді перехід від декартової системи координат до полярної системи координат здійснюється за формулами:

$$x = \rho \cos \varphi , \quad y = \rho \sin \varphi . \tag{3.25}$$

Перехід від полярної системи координат до декартової системи координат здійснюється за формулами:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} , \ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} , \ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} . \tag{3.26}$$

Буває зручно для побудови кривої, що задана рівнянням у декартовій прямокутній системі координат, подати рівнянням у полярній системі координат.

Задача 14. Побудувати криву, задану рівнянням у декартовій системі координат, перейшовши до полярної системи координат:

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y .$$

Розв'язання: Поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{x^2 + y^2}$.

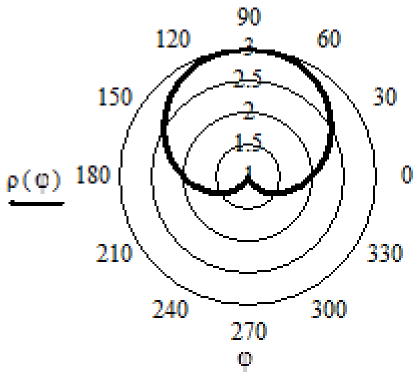
Матимемо

$$\sqrt{x^2+y^2}=2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Враховуючи, що $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ і $\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, отримаємо рівняння кривої у полярній системі координат: $\rho=2+\sin\varphi$. Ця крива відноситься до равликів Паскаля. Побудуємо її по точках. Складемо таблицю.

φ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	1	$2-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1,5	2	2,5	$2+\frac{\sqrt{3}}{2}$	3

Враховуючи, що $\sin(180-\alpha)=\sin\alpha$, маємо симетрію кривої відносно $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ (вісь Oу).



4. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У ПРОСТОРІ

Розглянемо декартову прямокутну систему координат у просторі. Точки в цій системі визначаються трьома координатами: x – абсциса, y – ордината та z – апліката: $M(x, y, z)$. Довжина відрізка у просторі та поділ відрізка в заданому відношенні визначаються аналогічними формулами, як і для прямої на площині з урахуванням аплікати.

4.1. Площина

Площина характеризується нормальним вектором $\bar{n}=(A;B;C)$, який перпендикулярний їй.

***Способи задання площини*.**

Площина задається рівняннями:

а) **рівняння площини з заданим нормальним вектором $\bar{n}=(A;B;C)$ і точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$, яка їй належить**, визначається формулою:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0; \qquad (4.1)$$

б) **загальне рівняння площини з заданим вектором** $\bar{n}=(A;B;C)$ визначається формулою:

$$Ax+By+Cz+D=0; \qquad (4.2)$$

в) **рівняння площини, якій належать три точки** $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, визначається формулою:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0; \qquad (4.3)$$

г) **рівняння площини у відрізках** визначається формулою:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (4.4)$$

де a, b, c – відрізки, які площина відтинає відповідно на осях Ox, Oy, Oz, враховуючи їх знаки;

д) **нормальне рівняння площини** визначається формулою:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{4.5}$$

де p – довжина нормалі, опущеної з точки O на площину, α, β, γ – кути, які нормаль утворює з осями Ox, Oy, Oz.

е) **рівняння пучка площин** визначається формулою:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0, \tag{4.6}$$

де λ – деяка стала величина.

Означення 4.1. *Пучком площин* називається сукупність усіх площин, що проходять через пряму перетину двох заданих площин: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Косинус кута φ **між двома площинами** p_1 і p_2. Площина p_1 задана рівнянням $p_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ з нормальним вектором $\overline{n} = (A_1, B_1, C_1)$ і площина p_2 задана рівнянням $p_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ з нормальним вектором $\overline{n} = (A_2, B_2, C_2)$. Тоді:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2}\cdot\sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}. \tag{4.7}$$

Умова паралельності площин p_1 *і* p_2:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{4.8}$$

Умова перпендикулярності площин p_1 *і* p_2:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{4.9}$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **до площини** $Ax + By + Cz + D = 0$ з нормальним вектором $\overline{n} = (A, B, C)$

визначається формулою:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4.10}$$

4.2 Пряма у просторі

Способи задання прямої у просторі

Пряма у просторі характеризується напрямним вектором $\overline{S}=(l,m,n)$, який паралельний прямій. Пряма у просторі задається рівняннями:

а) **канонічні рівняння прямої**:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \tag{4.11}$$

де точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить прямій;

б) **параметричні рівняння прямої**:

$$\begin{cases} x = l \cdot t + x_0, \\ y = m \cdot t + y_0, \\ z = n \cdot t + z_0; \end{cases} \tag{4.12}$$

в) **рівняння прямої, якій належать дві точки** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M_1(x_1, y_1, z_1)$, визначається формулою:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}; \tag{4.13}$$

г) **пряма як перетин двох площин** $p_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $p_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, визначається формулою:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{4.14}$$

Косинус кута α **між двома прямими** L_1 і L_2. Пряма L_1 задана рівнянням $L_1: \dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$ з напрямним вектором $\overline{S}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ і пряма L_2 задана рівнянням $L_2: \dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$ з напрямним вектором $\overline{S}_2 = (l_2, m_2, n_2)$. Тоді

$$\cos \alpha = \pm \frac{\overline{S}_1 \cdot \overline{S}_2}{\left|\overline{S}_1\right| \cdot \left|\overline{S}_2\right|} = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{4.15}$$

Умова паралельності двох прямих L_1 і L_2:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{4.16}$$

Умова перпендикулярності двох прямих L_1 і L_2:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \tag{4.17}$$

Синус кута φ **між прямою і площиною**. Пряма задана рівнянням $L: \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ з напрямним вектором $\overline{S} = (l, m, n)$, в площина має рівняння $p: Ax + By + Cz + D = 0$ з нормальним вектором $\overline{n} = (A, B, C)$. Тоді

$$\sin \varphi = \frac{\left|\overline{S} \cdot \overline{n}\right|}{\left|\overline{S}\right| \cdot \left|\overline{n}\right|} = \frac{\left|l A + m B + n C\right|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4.18}$$

Умова паралельності прямої L *і площини* p :

$$l \cdot A + m \cdot B + n \cdot C = 0\,. \tag{4.19}$$

Умова перпендикулярності прямої L *і площини* p :

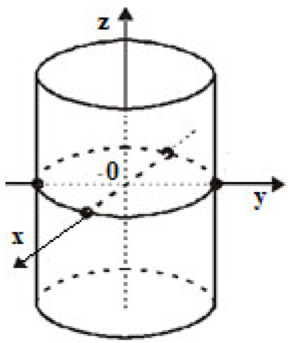
$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}\,. \tag{4.20}$$

4.3 Поверхні другого порядку

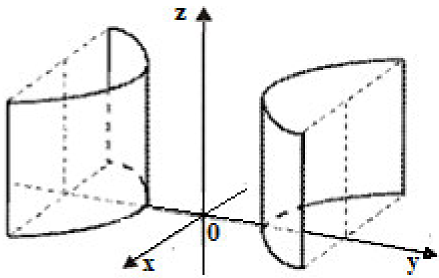
Означення 4.2. *Циліндричною поверхнею* називається поверхня, що утворюється як результат руху прямої лінії (твірна), яка перетинає задану криву (напрямну циліндра), залишаючись паралельною сталому вектору.

Назва циліндричної поверхні утворюється з назви напрямної циліндра. Розглянемо їх.

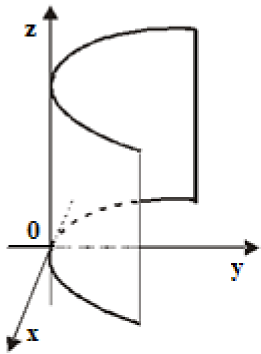
Еліптичний циліндр $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ($x^2 + y^2 = R^2$ *– круговий*). (4.21)



Гіперболічний циліндр $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. (4.22)



Параболічний циліндр $x^2 = 2py$. (4.23)

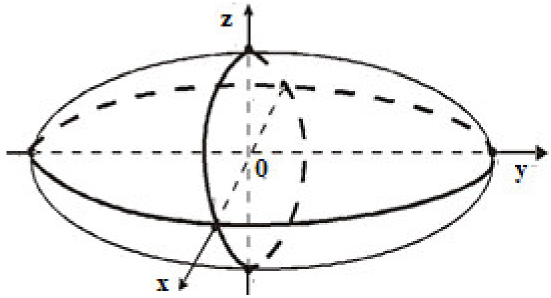


Означення 4.3. *Поверхнею обертання* називають поверхню, утворену обертанням заданої плоскої кривої L навколо заданої прямої (осі), розташованої в площині кривої L.

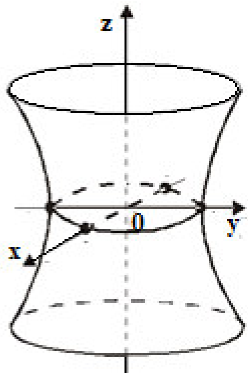
Розглянемо канонічні рівняння деяких з них:

Еліпсоїд $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (4.24)$$

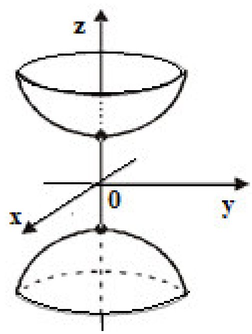
де числа a, b, c називаються *піввісями* еліпсоїда. Якщо $a = b = c$, маємо *сферу* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ з центром у початку координат.



Однопорожнинний гіперболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \quad (4.25)$$

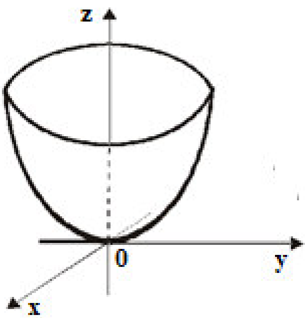


Двопорожнинний гіперболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \quad (4.26)$$

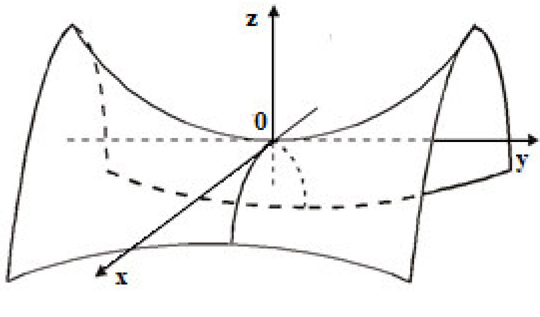


Обидва гіперболоїди є симетричними відносно координатних площин, а початок координат (точка O) є їх *центром* симетрії. Числа a, b, c називаються *півосями* гіперболоїда.

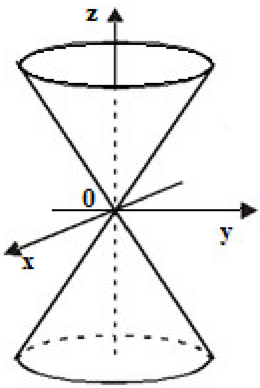
Еліптичний параболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z. \qquad (4.27)$$



Гіперболічний параболоїд $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z. \qquad (4.28)$$



Конус $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (4.29)$$



Задача 15. Задано чотири точки: $A(-1;-2;0)$, $B(0;-4;3)$, $C(1;0;1)$, $D(-1;1;0)$. Треба:

1) знайти рівняння площини ABC у загальному вигляді;

2) записати рівняння площини ABC у «відрізках» ;

3) знайти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку C паралельно прямій AB;

4) скласти загальне рівняння площини, яка проходить через точку C перпендикулярно прямій AB;

5) скласти рівняння площини, що проходить через точку D паралельно площині ABC ;

6) скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку D перпендикулярно площині ABC ;

7) знайти відстань d від точки D до площини ABC ;

8) знайти координати точки P, яка є проекцією точки D на площину ABC ;

9) знайти косинус кута α між прямими AB і CD ;

10) знайти синус кута φ між прямою CD і площиною ABC .

Розв'язання. 1) Складемо рівняння площини ABC , яка проходить через три точки A, B, C за формулою (4.3):

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-(-2) & z-0 \\ 0-(-1) & -4-(-2) & 3-0 \\ 1-(-1) & 0-(-2) & 1-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкриємо визначник по елементах першого рядка. Матимемо:

$$\left(x+1\right)\cdot\left(-8\right)-\left(y+2\right)\cdot\left(-5\right)+z\cdot\left(6\right)=0.$$

Рівняння ABC: $-8x+5y+6z+2=0 \Rightarrow 8x-5y-6z-2=0$.

2) Рівняння площини ABC ($8x-5y-6z=2$) запишемо у «відрізках» за формулою (4.4): $\dfrac{x}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y}{-\frac{2}{5}}+\dfrac{z}{-\frac{1}{3}}=1$.

3) Знайдемо вектор $\overline{AB}=\left(1;-2;3\right)$. Він і є напрямним вектором прямої AB. Шукана пряма, яка проходить через точку $C\left(1;0;1\right)$, і пряма AB паралельні. Тому з умови паралельності прямих (4.16) матимемо, що напрямний вектор шуканої прямої – це $\overline{S}=\left(1;-2;3\right)$, а її рівняння $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$.

4) Шукана площина і пряма AB перпендикулярні. Вектор нормалі $\overline{n}$ шуканої площини і напрямний вектор $\overline{S}=\left(1;-2;3\right)$ прямої AB колінеарні $\left(\overline{n}\parallel\overline{S}\right)$. З умови перпендикулярності прямої і площини (4.20) матимемо $\overline{n}=\left(1;-2;3\right)$. За формулою (4.1) рівняння шуканої площини, яка проходить через точку $C\left(1;0;1\right)$,

$$1\cdot\left(x-1\right)-2\cdot\left(y-0\right)+3\cdot\left(z-1\right)=0 \Rightarrow x-2y+3z-4=0.$$

5) Нормальний вектор площини ABC $\overline{n}=\left(8;-5;-6\right)$. Шукана площина і площина ABC паралельні. З умови паралельності площин (4.8) матимемо, що їх нормалі вектори колінеарні. Нормальний вектор шуканої площини є $\left(8;-5;-6\right)$. За формулою (4.1) рівняння шуканої площини, яка проходить через точку $D\left(-1;1;0\right)$,

$$8\cdot\left(x+1\right)-5\cdot\left(y-1\right)-6\cdot\left(z-0\right)=0 \Rightarrow 8x-5y-6z+13=0.$$

6) Площина ABC і пряма, яка проходить через точку $D\left(-1;1;0\right)$, перпендикулярні. З умови їх перпендикулярності (4.9) напрямний вектор прямої є $\left(8;-5;-6\right)$. Канонічні рівняння прямої за формулою (4.11) мають вигляд $\dfrac{x+1}{8}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z}{-6}$, а її параметричні рівняння за

формулою (4.12) мають вигляд $\begin{cases} x = 8t - 1, \\ y = -5t + 1, \\ z = -6t. \end{cases}$

7) знайдемо відстань d від точки $D(-1;1;0)$ до площини ABC, яка має рівняння $8x - 5y - 6z - 2 = 0$, за формулою (4.10):

$$d = \frac{|8 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 - 6 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{8^2 + (-5)^2 + (-6)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{125}} = \frac{15}{5\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}.$$

8) Проєкцією точки D на площину ABC є точка P перетину прямої, що проходить через точку D перпендикулярно до площини ABC. Параметричні рівняння цієї прямої знайдені в п. 6). Для знаходження координат точки P розв'яжемо систему з рівняння площини і параметричних рівнянь прямої: $\begin{cases} 8x - 5y - 6z - 2 = 0, \\ \begin{cases} x = 8t - 1, \\ y = -5t + 1, \\ z = -6t. \end{cases} \end{cases}$

Підставимо x, y, z в рівняння площини і знайдемо значення t:

$$8 \cdot (8t - 1) - 5 \cdot (-5t + 1) - 6 \cdot (-6t) - 2 = 0 \Rightarrow 125t = 15,$$

$$t = \frac{15}{125} = \frac{3}{25} = 0{,}12.$$

Знайдене значення t підставимо в параметричні рівняння прямої. Отримаємо координати шуканої точки P:

$$\begin{cases} x_P = 8 \cdot 0{,}12 - 1 = -0{,}04, \\ y_P = -5 \cdot 0{,}12 + 1 = 0{,}4, \\ z_P = -6 \cdot 0{,}12 = -0{,}72. \end{cases} \Rightarrow P(-0{,}04; 0{,}4; -0{,}72).$$

9) Знайдемо рівняння прямої CD за формулою (4.13):

$$\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-1}{0-1} \Rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Косинус кута α між прямими AB і CD знайдемо за формулою (4.15). Напрямними векторами цих прямих є $\bar{S}_{AB} = (1;-2;3)$ і $\bar{S}_{CD} = (-2;1;-1)$. Тому

$$\cos\alpha = \pm\frac{1\cdot(-2)+(-2)\cdot 1+3\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}\,\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}} = \pm\frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{6}} =$$

$$= \mp\frac{7}{2\sqrt{21}} = \mp\frac{\sqrt{21}}{6}.$$

10) Синус кута φ між прямою CD і площиною ABC знайдемо за формулою (4.18). Напрямний вектор прямої CD – $\overline{S}_{CD} = (-2;1;-1)$, а нормальний вектор площини ABC – $\overline{n} = (8;-5;-6)$. Тому

$$\sin\varphi = \frac{|(-2)\cdot 8+1\cdot(-5)+(-1)\cdot(-6)|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{8^2+(-5)^2+(-6)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{6}\sqrt{125}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Відповідь: 1) $8x-5y-6z-2=0$; 2) $\dfrac{x}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y}{-\frac{2}{5}}+\dfrac{z}{-\frac{1}{3}}=1$;

3) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$; 4) $x-2y+3z-4=0$; 5) $8x-5y-6z+13=0$;

6) $\begin{cases} x=8t-1, \\ y=-5t+1, \\ z=-6t; \end{cases}$ 7) $d = \dfrac{3}{5}\sqrt{5}$; 8) $P(-0{,}04;0{,}4;-0{,}72)$; 9) $\cos\alpha=\mp\dfrac{\sqrt{21}}{6}$;

10) $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Задача 16. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(1;-2;3)$ та пряму $L:\begin{cases} 2x-3y+z-3=0, \\ x+3y+2z+1=0. \end{cases}$

Розв'язання. Пряма L задана як перетин двох площин. Через цю пряму можна провести безліч площин, які ми називаємо пучком площин. Запишемо рівняння пучка для наших площин (4.6):

$$2x-3y+z-3+\lambda(x+3y+2z+1)=0.$$

За умовою задачі площина проходить через точку A. Підставимо координати точки в рівняння пучка і знайдемо λ.

$$2\cdot1-3\cdot(-2)+3-3+\lambda(1+3\cdot(-2)+2\cdot3+1)=0\Rightarrow 8+2\cdot\lambda=0.$$

$$\lambda=-4.$$

Знайдене значення λ підставимо в рівняння пучка:

$$2x-3y+z-3-4(x+3y+2z+1)=0\Rightarrow -2x-12y-7z-7=0$$

або $2x+12y+7z+7=0$.

Відповідь: $2x+12y+7z+7=0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика : Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников та ін. – К. : Техніка, 2007. – 600 с.

2. Вища математика : Підручник / В. А Домбровський та ін. ; за редакцією М. І. Шинкарика. – Тернопіль : Видавництво Карп'юка, 2003 – 480 с.

3. Вища математика : Підручник : У 2 кн. – 2-ге вид. перероб. і доп. – К. : Либідь, 2003. – Кн. 1. Основні розділи. – Основні розділи / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін. ; за ред. Г. Л. Кулініча. – 400 с.

4. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

5. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах. Алгебра - Вектори : навчальний посібник / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. – К. : Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.

6. Рудавський Ю.К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. Підручник / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, Х. П. Луник, Д. В. Уханська. – Львів : Видавництво "Бескид Біт", 2002. – 262 с.

7. Шкіль М. І. Вища математика : підручник для студ. ВНЗ. : у 2-х кн. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – К. : Либідь, 2010. – Кн. 1. – 592 с.