

Постоленко М.О.¹, Романенко С.М.²

¹ студент гр. РТ-719 НУ «Запорізька політехніка»

² канд. фіз.-матем. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

ВИКОРИСТАННЯ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ РОЗСІЮВАННЯ

Завдання розсіювання електромагнітних хвиль може бути зведене до інтегрального рівняння виду:

$$g(x) = \int f(x')K(x, x')dx', \quad (1)$$

де $g(x)$ – відома функція, $f(x)$ – невідома функція, $K(x, x')$ – ядро інтегрального рівняння, найчастіше це функція Гріна.

Для розв'язання рівнянь типу (1) широко використовують метод моментів (ММ), який зводить інтегральне рівняння до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Однак зі зростанням розмірності N системи час розв'язання різко зростає і, за великих значень N , стає неприпустимо великим.

Останнім часом значну увагу приділяють питанню застосування вейвлетів та вейвлетних базисних функцій для підвищення ефективності розв'язання інтегральних рівнянь виду (1). Їх використання дозволяє отримати розріджену матрицю СЛАР, яка може бути розв'язана за $O(N \log N)$ операцій, що є великою перевагою порівняно з $O(N^3)$ для щільно заповненої матриці, або $O(N^2)$ під час розв'язання ітераційними методами.

У цій роботі наведено порівняння ефективності виконання завдання розсіювання звичайним методом та методом на основі вейвлет-перетворення. Дано рекомендації щодо доцільності застосування вейвлетів під час розв'язання розглянутих електродинамічних задач.

Під час розв'язання задачі розсіювання використовується сіткова модель металевої випромінювальної поверхні. Розрахунок електричних струмів у дрітаних сегментах моделі здійснюється на основі інтегрального рівняння Поклінгтона для тонких провідників. Для диполя довжиною L це рівняння має вигляд [1]:

$$\int_{-L/2}^{L/2} I(z') \left[\frac{d^2 G(z, z')}{dz^2} + k^2 G(z, z') \right] dz' = -j\omega \epsilon E_z^i(z), \quad (2)$$

де $G(z, z')$ – функція Гріна вільного простору, E_z^i – падаюче або наведене поле, z – точка спостереження, z' – точка джерела поля.

Відповідно до ММ, дискретизація (2), при використанні імпульсного базису для $I(z)$ та зшивання по точках, призводить до СЛАР:

$$Z \cdot I = V, (3)$$

де Z – заповнена несиметрична матриця імпедансів. Елемент $Z_{i,j}$ за фізичним змістом є поздовжньою компонентою електричного поля, наведеного в центрі сегмента i струмом одиничної амплітуди сегмента j .

Ефективність розв'язання рівняння (2) визначається, головним чином, швидкістю розв'язання матричного рівняння (3). Для точних методів його обчислювальна вартість становить $O(N^3)$ операцій, тоді як вартість решти обчислювальних процедур, включаючи обчислення елементів $Z_{i,j}$, не перевищує $O(N^2)$. Отже, за великої розмірності N матриці Z необхідно використовувати ітераційні процедури.

При вейвлет-перетворенні необхідно отримати набір N ортонормованих векторів, які складають базис N -мірного векторного простору R^N . Ці вектори повинні мати дві важливі властивості. По-перше, вони повинні мати різну локалізацію в просторі, забезпечуючи кратномасштабне представлення полів та струмів у сегментах. По-друге, майже всі базисні вектори повинні мати певну кількість p нульових моментів, наявність яких означає, що для базисного вектора V виконується співвідношення:

$$\sum_{i=1}^N B_i \cdot I^j = 0, j=0, 1 \dots p-1. (4)$$

У даній роботі для побудови матриці вейвлет-перетворення W використані гарно відомі вейвлети Добеші [2] з $p=8$ нульовими моментами. Для обчислення цієї матриці була використана програма, наведена в [3].

Приклад вейвлетного базису при $N=512$ та $p=8$ наведено на рис. 1.

Вейвлетні базисні вектори можуть бути побудовані для різних значень N та p . Для зручності зазвичай використовують $N=2^n$, а значення p обирають з діапазону від 8 до 12 [4].

При вейвлет-перетворенні системи (3) ліва та права частини множаться на матрицю вейвлет-перетворення W

$$W \cdot Z \cdot I = W \cdot V. (5)$$

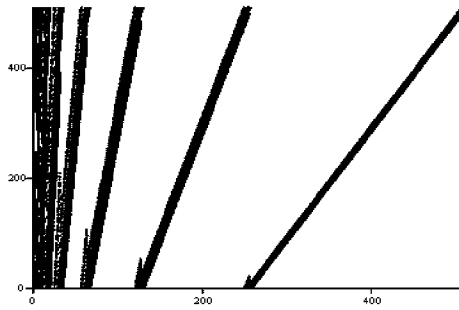


Рисунок 1 – Вейвлетні базисні вектори.

Оскільки вектори, що складають матрицю W , є ортонормованим базисом для R^N , то для W справедливим є співвідношення $W^{-1}=W^T$. Тоді рівняння (5) можна записати так:

$$W \cdot Z \cdot W^T \cdot W \cdot I = W \cdot V \quad (6)$$

У результаті отримуємо СЛАР:

$$Z_W \cdot I_W = V_W, \quad (7)$$

$$\text{де } Z_W = W \cdot Z \cdot W^T, \quad I_W = W \cdot I, \quad V_W = W \cdot V.$$

У роботі [4] показано, що нова матриця Z_W виявляється достатньо розрідженою. Крім того, багато елементів цієї матриці, якщо вони менше деякого порогового значення τ , можна вважати зневажливо малими та їх можна відкинути. Усе це дозволяє виконувати матричні перемноження за час, пропорційний до кількості ненульових елементів i , в такий спосіб, прискорити розрахунок без втрати точності.

У даній роботі поріг τ визначався так:

$$\tau = \frac{\tau_0}{N} \|Z\|_{\infty}, \quad (8)$$

$$\|Z\|_{\infty} = \max_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |Z_{i,j}|$$

де

Чисельні експерименти показали, що якщо взяти τ_0 рівним 0.1, то помилка не перевищить 1%. Аналогічні результати отримані в [5].

Описаний метод вейвлет-перетворення реалізований у системі моделювання дротяних антен для підвищення ефективності розв'язання інтегрального рівняння (2) під час аналізу складних структур великої розмірності, що виникають при моделюванні фракталоподібних структур. У таблиці 1 наведено час обчислень в секундах та відносна помилка під час розв'язання СЛАР двома методами: методом LU-розкладання (LU) та методом вейвлет-перетворення (WT).

Таблиця 1 – Час розрахунків і помилка

N	WT, s	LU, s	Error, %
128	1	1	0.56
256	6	9	0.8
512	32	76	0.17
1024	149	599	0.85

Як видно, застосування вейвлет-перетворення зменшує час обчислень, якщо розмірність системи N, складеної з комплексних чисел, більша за 128.

У роботі розглянуто метод вейвлет-перетворення матриці СЛАР, отриманої внаслідок алгебраїзації інтегрального рівняння (2). Наведено дані про час розрахунку залежно від розмірності задачі, а також похибки обчислень, що отримано при цьому. Показано, що метод доцільно використовувати при розмірності СЛАР вище 128.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. L. Tsai, "A numerical solution for the near and far fields of an annular ring of magnetic current," IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-20, pp. 569-576, May, 1972.
2. I. Daubechies, "Ten Lectures on Wavelets" (CBMS-NSF series in Applied Maths #61), Philadelphia, SIAM, 1992.
3. W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, "Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing, Second Edition," New York, Cambridge Univ. Press, 1992.
4. R.L. Wagner, W.C. Chew, "A Study of Wavelets for the Solution of Electromagnetic Integral Equations," IEEE Trans. AP., 1995, vol. 43, N.8, pp. 802-810.

5. B. Alpert, G. Beylkin, R. Coifman, V. Rokhlin, "Wavelet-like bases for the fast solution of second-kind integral equations," SIAM J. Sci. Comput., vol. 14, no. 1, pp.159-184, Jan. 1993.