

УДК 519.65

Нечипоренко Н.О.

канд. фіз.-мат. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

ВІДНОВЛЕННЯ МОНОТОННИХ СІТКОВИХ ФУНКЦІЙ

Побудова оптимальних алгоритмів відновлення сіткових функцій, які враховують апіорну інформацію про геометрію відновлюваної функції, є актуальною задачею. Запропоновано алгоритм відновлення монотонних функцій, які задані своїми наближеними значеннями у вузлах довільної фіксованої сітки і задовольняють лінійному обмеженню на їх значення.

Нехай $M_{\alpha,A,N}$ - множина сіткових функцій $g = \{g_1, g_2, \dots, g_N\}$, які задовольняють наступним умовам:

$$g_i \leq g_{i+1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i g_i = A, \quad (2)$$

де $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, N}$ та A - задані дійсні числа.

Розглянемо задачу відновлення функції $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$, що належить класу $M_{\alpha,A,N}$, за її наближеними значеннями $f = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$.

Як відновлюючи будемо приймати функцію $y \in M_{\alpha,A,N}$, яка задовольняє умові:

$$\delta(y) = \min_{g \in M_{\alpha, A}} \delta(g), \quad (3)$$

де $\delta(g)$ - міра наближення функції f функцією g : $\delta = \max_{1 \leq i \leq N} |f_i - g_i|$.

Алгоритм побудови відновлюючої функції складається з декількох етапів. Розв'яжемо спочатку наступну допоміжну задачу.

Нехай потрібно знайти функцію $y \in M_N$, таку,

$$\delta(y) = \min_{g \in M_N} \delta(g), \quad (4)$$

де M_N - множина табличних функцій g , що задовольняють умовам (1).

Розроблено алгоритм 1 й доведено, що розв'язком цієї задачі буде функція $y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$, яка приймає деякі сталі значення $y_j \quad \forall j \in [k_i + 1, k_{i+1}]$, $i = \overline{1, s-1}$, де $k_1 = 0$, $k_s = N$.

Позначимо як $\Phi(y) = \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j$,

$$\delta_i = \max_{k_i+1 \leq j \leq k_{i+1}} |f_j - y_j|, \quad \forall j \in [k_i + 1, k_{i+1}], \quad i = \overline{1, s-1};$$

$$\delta_0 = \max_{1 \leq j \leq N} |f_j - y_j|.$$

Якщо виявилось, що $\Phi(y) = A$, то розв'язок задачі (3) знайдено.

Нехай це не такі $\Phi(y) > A$. Оскільки $\alpha_j \geq 0$, $j = \overline{1, N}$, то для виконання умови (2) необхідно зменшити значення функції y . Спробуємо задовольнити умови (1) і (2), зменшуючи значення y_j так, щоб залишалося справедливим співвідношення

$$|f_j - y_j| \leq \delta_i, \quad \forall j \in [k_i + 1, k_{i+1}], \quad i = \overline{1, s-1}. \quad (5)$$

Для розв'язання цієї задачі розроблено алгоритм 2, в якому послідовно мінімізується функціонал $\Phi(y)$.

Нехай y - функція, отримана в результаті послідовного виконання алгоритмів 1 та 2. Тоді функцію y є розв'язком задачі (3), або мінімізує функціонал $\Phi(y)$ на множині табличних функцій, що задовольняють співвідношенням (1), (5).

Припустимо, що в результаті виконання вказаних алгоритмів розв'язок задачі (3) не знайдено. Це означає, що ми не можемо досягти виконання співвідношення (2), якщо значення y_j , $j = \overline{1, N}$, задовольняють умовам (1), (5). Спробуємо задовольнити це співвідношення, зменшуючи значення y_j , $j = \overline{1, N}$, так, щоб залишалися справедливими співвідношення

$$|f_j - y_j| \leq \delta_0, \quad j = \overline{1, N}. \quad (6)$$

Для розв'язання цієї задачі розроблено алгоритм 3.

Показується, що послідовне застосування алгоритмів 1, 2 і 3 дозволяє побудувати функцію y , яка є розв'язком задачі (3), або мінімізує функціонал $\Phi(y)$ на множині табличних функцій, що задовольняють умовам (1), (6). Тоді розв'язком задачі (3) є функція $y^* = \{y_1 + \varepsilon, y_2 + \varepsilon, \dots, y_N + \varepsilon\}$, де

$$\varepsilon = (A - \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j) / \sum_{j=1}^N \alpha_j.$$

При цьому $\max_{1 \leq j \leq N} |f_j - y_j| = \delta_0 + \varepsilon$.

Аналогічно розглядається випадок, коли після застосування алгоритму 1 побудована функція y , для якої $\Phi(y) < A$.

Зауважимо також, якщо задана точність вхідних даних f_i , $i = \overline{1, N}$ і відповідний клас функцій обмежений, то наведені алгоритми є оптимальними по порядку точності з константою порядку, що не перевищує 2. Побудовано межі цього класу функцій та оцінено повну абсолютну похибку відновлення функцій цього класу.