

УДК 621.391.82

СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ С ЛИНЕЙНЫМИ ФАЗОЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Лизунов Сергей Иванович,

Костенко Валерьян Остапович

кандидаты технических наук, доценты, доценты

Национальный университет «Запорожская политехника»

г. Запорожье, Украина

s.i.lizunov@i.ua, walost45@gmail.com

Аннотация. Разработана методика проектирования цифровых фильтров, обеспечивающая получение передаточных характеристик с максимально плоской АЧХ в полосе пропускания при достаточной крутизне её скатов и линейной зависимости группового времени задержки в полосе пропускания. Методика позволяет в значительной мере формализовать и автоматизировать процесс разработки передаточных функций цифровых фильтров.

Ключевые слова: амплитудно-частотная характеристика, фазочастотная характеристика, полоса пропускания, групповое время задержки, билинейное преобразование, затухание, цифровой фильтр, нормировка.

Аббревиатуры

АЧХ – амплитудно-частотная характеристика;

ГВЗ – групповое время запаздывания;

ФЧХ – фазочастотная характеристика

ППФ – полосно-пропускающий фильтр;

ФВЧ – фильтр верхних частот;

ФНЧ – фильтр нижних частот.

Номенклатура

f_D – частота дискретизации;

A – затухание (в дБ);

A_3 – затухание, требуемое в полосе задержки;

$A_{\Pi}, A_{\Pi'}$ – затухание в полосе пропускания соответственно до и после нормирования;

$A_{\Pi H}$ и $A_{\Pi B}$ – неравномерность АЧХ для отдельно взятых ФНЧ и ФВЧ звеньев;

$A_{\Pi\Pi}$ – неравномерность АЧХ для ППФ;

C_n – нормировочный коэффициент;

D – нормированное ГВЗ;

f – частота;

f_3 и f_3' – граничные частоты полосы задержки до и после нормирования;

f_{3T} – необходимая граничная частота полосы задерживания;

$f_{\Pi}, f_{\Pi'}$ – граничные частоты полосы пропускания соответственно до и после нормирования;

$f_{\Pi 1}$ и $f_{\Pi 2}$ – границы полосы пропускания;

$f_{\Pi H}$ и $f_{\Pi B}$ – граничные частоты полосы пропускания ФНЧ и ФВЧ соответственно;

$f_{\Pi T}$ – требуемая граничная частота полосы пропускания;

p – оператор Лапласа;

f_{31} и f_{32} – граничные частоты полос задерживания;

f_0 – резонансная частота.

Современные системы кодирования и передачи информации немислимы без применения цифровой обработки сигналов. Многие из таких систем имеют в своём составе цифровые фильтры, т.к. в процессе обработки электрические сигналы часто проходят процедуру частотной фильтрации и коррекции. При этом, для уменьшения искажений сигнала, нужны фазочастотные характеристики фильтров, близкие к линейным. [1-3]

Ранее в [4, с. 44] была описана методика расчёта аналоговых ФНЧ-прототипов для дальнейшего их преобразования в цифровые фильтры с линейными ФЧХ.

На следующем этапе необходимо преобразовать эти аналоговые прототипы в цифровые фильтры.

Передаточная функция звена второго порядка цифрового фильтра имеет вид:

$$H(z) = A_0 \cdot \frac{1 + A_1 \cdot z^{-1} + A_2 \cdot z^{-2}}{1 + B_1 \cdot z^{-1} + B_2 \cdot z^{-2}}, \quad (1)$$

где $z = e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f / f_D}$; A_0, A_1, A_2, B_1, B_2 – коэффициенты.

Для упрощения дальнейших записей введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot f}{f_D}\right) \\ w_2 &= \cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot f}{f_D}\right) \\ w_3 &= \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot f}{f_D}\right) \\ w_4 &= \sin\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot f}{f_D}\right) \\ M &= 1 + A_1 \cdot w_1 + A_2 \cdot w_2 \\ N &= A_1 \cdot w_3 + A_2 \cdot w_4 \\ S &= 1 + B_1 \cdot w_1 + B_2 \cdot w_2 \\ L &= B_1 \cdot w_3 + B_2 \cdot w_4 \\ M' &= -A_1 \cdot w_3 + 2 \cdot A_2 \cdot w_4 \\ N' &= A_1 \cdot w_1 + 2 \cdot A_2 \cdot w_2 \\ S' &= -B_1 \cdot w_3 - 2 \cdot B_2 \cdot w_4 \\ L' &= B_1 \cdot w_1 + 2 \cdot B_2 \cdot w_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если фильтр состоит из n каскадно соединенных звеньев (1), то величины затухания A и ГВЗ D на частоте f определяются по формулам (взяты соответственно модуль и производная фазы от (1)):

$$A = -20 \cdot \lg(A_0 \cdot \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{(M_i \cdot S_i + N_i \cdot L_i)^2 + (M_i \cdot L_i + S_i \cdot N_i)^2}{S_i^2 + L_i^2}}) \quad (3)$$

$$D = \frac{1}{f_D} \cdot \sum_{i=1}^n \left| \frac{(S_i \cdot M_i + L_i \cdot N_i) \cdot (M_i' \cdot L_i + M_i \cdot L_i' - S_i' \cdot N_i - S_i \cdot N_i') - (M_i \cdot L_i - S_i \cdot N_i) \cdot (M_i' \cdot S_i + M_i \cdot S_i' + N_i \cdot L_i' + N_i' \cdot L_i)}{(M_i \cdot S_i + N_i \cdot L_i)^2 + (M_i \cdot L_i - S_i \cdot N_i)^2} \right| \quad (4)$$

Для получения цифрового ФНЧ из аналогового будем использовать наиболее широко известное и дающее удовлетворительные результаты билинейное преобразование

$$p \rightarrow \gamma' \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (5)$$

где $\gamma' = \text{ctg}(\pi \cdot \frac{f_{\Pi'}}{f_D})$.

Подставив (5) в формулу $H(p) = C_H \cdot \frac{p^2 + A}{p^2 + pB + C}$ [4, с. 45], получим такие выражения коэффициентов передаточной функции (1) через коэффициенты аналогового ФНЧ, с полюсами затухания:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= C_H \cdot \frac{(\gamma')^2 + A}{C + B \cdot \gamma' + (\gamma')^2} \\ A_1 &= 2 \cdot \frac{A - (\gamma')^2}{A + (\gamma')^2} \\ A_2 &= 1 \\ B_1 &= 2 \cdot \frac{C - (\gamma')^2}{C + B \cdot \gamma' + (\gamma')^2} \\ B_2 &= \frac{C - B \cdot \gamma' + (\gamma')^2}{C + B \cdot \gamma' + (\gamma')^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если полюсов затухания нет, то изменятся лишь формулы для A_0 и A_1 :

$$A_0 = C_H \cdot \frac{C}{C + B \cdot \gamma' + (\gamma')^2}; \quad (7)$$

$$A_1 = 2.$$

Такое преобразование, с учетом предсказаний частот и их нормировки [4, с. 47], вносит минимальные искажения в частотные характеристики в полосе пропускания.

Цифровой ФВЧ можно получить из аналогового ФНЧ-прототипа двумя способами. Первый - с помощью билинейного преобразования аналоговый прототип сразу преобразуется в требуемый цифровой ФВЧ; второй - сначала получают дискретный ФНЧ, а затем преобразуют его в ФВЧ.

При использовании первого метода рассчитывается ФНЧ-прототип по методике из [4, с. 44] с учетом предсказаний:

$$f_3 = \gamma \cdot \operatorname{ctg}\left(\pi \cdot \frac{f_{3T}}{f_D}\right), \quad (8)$$

где $\gamma = \operatorname{tg}\left(\pi \cdot \frac{f_{HT}}{f_D}\right)$.

Затем, подстановкой

$$p \rightarrow \gamma' \cdot (1 + z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1}), \quad (9)$$

где $\gamma' = \operatorname{tg}\left(\pi \cdot \frac{f_{HT}'}{f_D}\right)$,

переходим к цифровому ФВЧ.

При этом коэффициенты передаточной функции (1) определяются так:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= C_H \cdot \frac{(\gamma')^2 + A}{C + B \cdot \gamma' + (\gamma')^2} \\ A_1 &= -2 \cdot \frac{A - (\gamma')^2}{A + (\gamma')^2} \\ A_2 &= 1 \\ B_1 &= -2 \cdot \frac{C - (\gamma')^2}{C + B \cdot \gamma' + (\gamma')^2} \\ B_2 &= \frac{C - B \cdot \gamma' + (\gamma')^2}{C + B \cdot \gamma' + (\gamma')^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Если полюсов затухания нет, то изменения в определении коэффициентов следующие:

$$\begin{aligned} A_0 &= C_H \cdot \frac{C}{C + B \cdot \gamma' + (\gamma')^2}; \\ A_1 &= -2. \end{aligned} \quad (11)$$

При втором методе синтеза от цифрового ФНЧ к ФВЧ переходят с помощью преобразования:

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha \cdot z^{-1}}, \quad (12)$$

$$\text{где } \alpha = -\frac{\cos(\pi \cdot (f_{\text{ПН}} - f_{\text{ПВ}}) / f_{\text{Д}})}{\cos(\pi \cdot (f_{\text{ПН}} + f_{\text{ПВ}}) / f_{\text{Д}})}, \quad (13)$$

$f_{\text{ПН}}$ и $f_{\text{ПВ}}$ – граничные частоты полосы пропускания ФНЧ и ФВЧ соответственно.

На основании (12) можно получить такие соотношения между коэффициентами звеньев передаточных функций (1) цифровых ФВЧ и ФНЧ:

$$\left. \begin{aligned}
 A_{OB} &= A_{OH} \cdot \frac{1 - \alpha \cdot A_{1H} + \alpha^2 \cdot A_{2H}}{1 - \alpha \cdot B_{1H} + \alpha^2 \cdot B_{2H}} \\
 A_{1B} &= \frac{2 \cdot \alpha \cdot (1 + A_{2H}) - A_{1H} \cdot (1 + \alpha^2)}{1 - \alpha \cdot A_{1H} + \alpha^2 \cdot A_{2H}} \\
 A_{2B} &= \frac{A_{2H} - \alpha \cdot A_{1H} + \alpha^2}{1 - \alpha \cdot A_{1H} + \alpha^2 \cdot A_{2H}} \\
 B_{1B} &= \frac{2 \cdot \alpha \cdot (1 + B_{2H}) - B_{1H} \cdot (1 + \alpha^2)}{1 - \alpha \cdot B_{1H} + \alpha^2 \cdot B_{2H}} \\
 B_{2B} &= \frac{B_{2H} - \alpha \cdot B_{1H} + \alpha^2}{1 - \alpha \cdot B_{1H} + \alpha^2 \cdot B_{2H}}
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

В этих формулах индекс "н" соответствует ФНЧ, а "в" - ФВЧ.

При переходе к цифровому фильтру с помощью билинейного преобразования появляются искажения характеристики ГВЗ. Для ФВЧ они могут оказаться особенно ощутимы. На рис.1 видно, что неравномерность ГВЗ особенно велика на низких (по отношению к f_D) частотах.

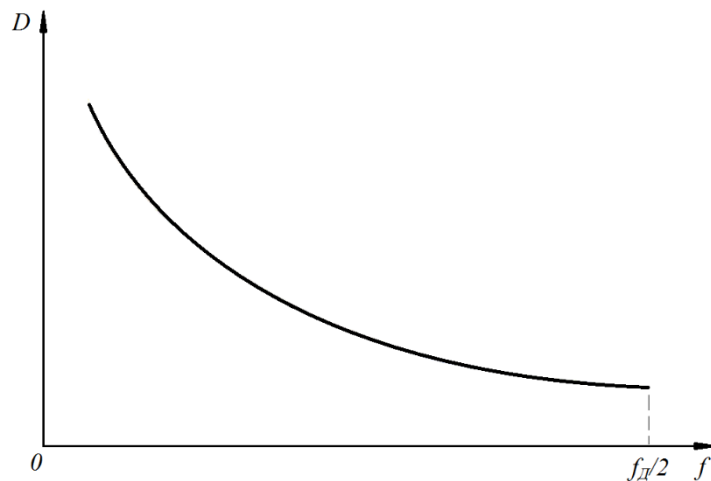


Рис. 1. Типовая монотонная характеристика ГВЗ цифрового ФВЧ.

Поэтому, если у ФВЧ большое соотношение f_D/f_{Π} и важное значение имеет неравномерность ГВЗ на частотах близких к f_{Π} (как, например, при использовании ФВЧ в качестве составляющего звена ППФ), то возникает необходимость в дополнительной коррекции фазовой характеристики фильтра.

Цифровой ППФ получают из аналогового ФНЧ-прототипа тремя способами. Первый способ - непосредственно из аналогового фильтра с помощью билинейного преобразования:

$$p \rightarrow \gamma \cdot \frac{1 - 2 \cdot \alpha \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}, \quad (15)$$

$$\text{где } \gamma = \operatorname{ctg}(\pi \cdot (f_{П2} - f_{П1}) / f_D); \quad (16)$$

$$\alpha = \frac{\cos(\pi \cdot (f_{П2} + f_{П1}) / f_D)}{\cos(\pi \cdot (f_{П2} - f_{П1}) / f_D)}; \quad (27)$$

$f_{П1}$ и $f_{П2}$ – границы полосы пропускания.

Предыскажение частоты для ФНЧ-прототипа [4, с. 47]:

$$f_3 = \min(|f_3'|, |f_3''|), \quad (18)$$

$$\text{где } f_3' = \gamma \frac{\alpha - \cos(2 \cdot \pi \cdot f_{31} / f_D)}{\sin(2 \cdot \pi \cdot f_{31} / f_D)}; \quad (19)$$

$$f_3'' = \gamma \frac{\alpha - \cos(2 \cdot \pi \cdot f_{32} / f_D)}{\sin(2 \cdot \pi \cdot f_{32} / f_D)} \quad (20)$$

f_{31} и f_{32} – граничные частоты полос задерживания.

Второй способ – из цифрового ФНЧ подстановкой

$$z^{-1} = -\frac{z^{-2} - (2 \cdot \alpha \cdot k / (k + 1)) \cdot z^{-1} + (k - 1) / (k + 1)}{((k - 1) / (k + 1)) \cdot z^{-2} - (2 \cdot \alpha \cdot k / (k + 1)) \cdot z^{-1} + 1}, \quad (21)$$

$$\text{где } k = \operatorname{ctg}(\pi \cdot (f_{П2} - f_{П1}) / f_D) \cdot \operatorname{tg}(\pi \cdot f_{ПН} / f_D), \quad (22)$$

$f_{ПН}$ – частота среза цифрового ФНЧ.

После такого преобразования необходима проверка устойчивости цифрового фильтра.

Третий способ - ППФ представляется как комбинация звеньев ФНЧ и ФВЧ. Эти звенья рассчитываются по описанной ранее методике. В этом случае необходимо дополнительно осуществить нормировку аналогового ФНЧ-прототипа по амплитуде на резонансной частоте ППФ $f_0 = \sqrt{f_{П2} \cdot f_{П1}}$ (рис. 2).

Последний из описанных способов дает выигрыш в неравномерности АЧХ в полосе пропускания, т.к. эта неравномерность по отношению к ФНЧ и ФВЧ звеньям учитывается в диапазоне частот $f_{П1} \dots f_0$, а не в диапазоне $f_{П1} \dots 0$ (или $f_{П1} \dots f_{Д/2}$), как в случае отдельно взятых ФНЧ и ФВЧ (рис. 2). Кроме того, при использовании первого и второго способов может возникнуть необходимость в преобразовании звеньев ППФ четвертого порядка в звенья второго порядка. Третий способ дает оптимальную по количеству звеньев передаточную функцию ППФ в случае неодинаковых требований к крутизне левого и правого скатов АЧХ в переходной зоне. Однако, при синтезе ППФ, у которых порядок передаточной функции аналогового ФНЧ-прототипа нечетный и строго ограничен, целесообразно использовать первые два метода.

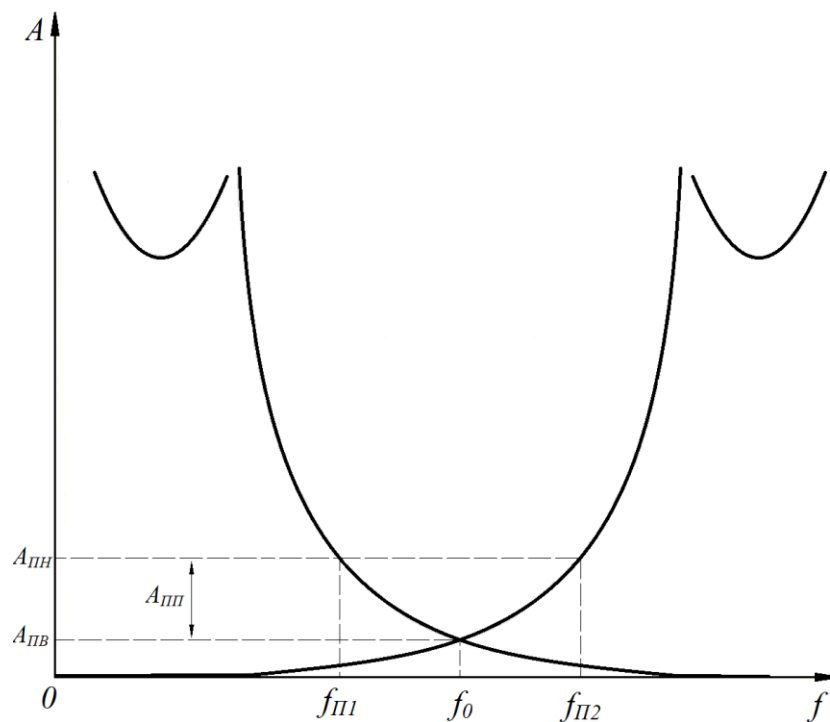


Рис. 2. Нормировка по амплитуде и неравномерность АЧХ в полосе пропускания для ППФ.

$A_{ПП}$ – неравномерность АЧХ для ППФ;

$A_{ПН}$ и $A_{ПВ}$ – неравномерность АЧХ для отдельно взятых ФНЧ и ФВЧ звеньев.

Как правило, по сравнению с традиционными, эта методика дает выигрыш в качественных показателях при меньшей степени передаточной функции фильтров. Кроме того, упрощается (формализуется) процесс получения передаточной функции.

Результаты практических расчётов приведены в [4, с. 49].

Список литературы

1. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов: Справочник. - М.: Радио и связь, 2005. - 312 с.
2. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры. Расчет и реализация: Пер. с англ.- М.: Мир, 2002. – 592 с.
3. Каппелини В. и др. Цифровые фильтры и их применение: Пер. с англ.- М.: Энергоатомиздат, 2003. - 360 с.
4. Лізунов С.І., Костенко В.О. Деякі аспекти синтезу цифрових фільтрів // Topical issues of the development of modern science. Abstracts of the 4th International scientific and practical conference. Publishing House “ACCENT”. Sofia, Bulgaria. 2019. Pp. 41- 50. URL: <http://sci-conf.com.ua>. ISBN 978-619-93537-5-2.